NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

PYTHAGORAS OLYMPIADE

Door **Matthijs Coster, Eddie Nijholt, Harry Smit en Bas Verseveldt**

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.

Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie,* waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie. Met de bovenbouwopgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht het via de voor-ronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale.

Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

HOE IN TE ZENDEN?

Inzenden kan alleen per e-mail. Stuur je oplossing (getypt of een scan of foto van een handgeschreven oplossing) naar pytholym@gmail.com. Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 december 2017.

DE GOEDE INZENDERS VAN JUNI 2017

358: Marijn Adriaanse (klas 4), Norbertus Gertrudiscollege, Roosendaal; Peter van der Lecq, Utrecht;
359: Marijn Adriaanse (klas 4), Norbertus Gertrudiscollege, Roosendaal; Thomas Boxman (klas 6), Pleysier College Westerbeek, Den Haag;
360: Marijn Adriaanse (klas 4), Norbertus Gertrudiscollege, Roosendaal; Thomas Boxman (klas 6), Pleysier College Westerbeek, Den Haag; Peter van der Lecq, Utrecht;
361: Thomas Boxman (klas 6), Pleysier College Westerbeek, Den Haag; Pascal Kwanten, Almere;

CADEAUBONNEN:

Thomas Boxman en Marijn Adriaanse.

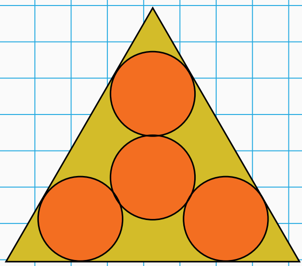
STAND LADDERCOMPETITIE:

Thomas Boxman (17 p), Rinze Hallema (14 p), Niels Kolenbrander (12 p), Levi van de Pol (12 p), Marijn Adriaanse (10 p), Jan Bosma (10 p), Rein Janssen Groesbeek (10 p), Rainier van Es (9 p), Sebastian Weiermann (8 p), Lisan ten Hove (7 p), David Oosterom (7 p), Dominique Titulaer (6 p), Ceren Ugurlu (6 p), Irem Ugurlu (6 p), Merlijn Hunik (5 p), Leanna van Dijk (4 p), Stan Ferguson (3 p), Roos van Herrewegen (3 p), Johan van der Marck (3 p), Maarten Stremler (3 p), Eline Welling (3 p), Lucia Komen (2 p), Pim Meulenesteen (2 p), Willem Vlasblom (2 p), Sterre ter Beek (1 p), Hannah Creutzburg en Ida Bakker (1 p), Hugo Hosman (1 p), Sietske Koolhof (1 p), Leon van Mierlo (1 p), Bram Pel (1 p), Fook Sars en Boris Nijhoff (1 p), Eva Teeling (1 p), Bruno Vermeer (1 p)

OPGAVEN

OPGAVE 366 NIVEAU ○○○

Vier cirkels met gelijke straal raken elkaar en de zijden van een gelijkzijdige driehoek met zijde 4 (zie plaatje). Bepaal de straal.

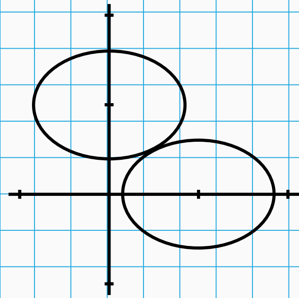


OPGAVE 367 NIVEAU ○○○

Piet wil graag een getal hebben waar je 2017 bij op kunt tellen om dan vervolgens hetzelfde getal terug te krijgen, maar dan met de cijfers in een andere volgorde, is dit mogelijk? Waarom wel of niet.

OPGAVE 368 NIVEAU ○○○

hiernaast zijn twee ellipsen getekend die van de vorm $a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 = 1$ $(a, b > 0)$, waarbij (x_0, y_0) respectievelijk $(1,0)$ en $(0,1)$ is. Aan welke voorwaarden moeten a en b voldoen om de ellipsen aan elkaar te laten raken?



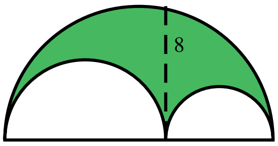
OPGAVE 369 NIVEAU ○○○

Hoeveel getallen van tien cijfers bestaan er met precies vier nullen, drie enen, twee tweeën en één drie? (Deze getallen beginnen *niet* met een nul.)

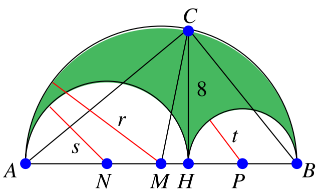
OPLOSSINGEN

OPLOSSING 358 NIVEAU ○○○

Hieronder zijn drie halve cirkels getekend. De stippellijn heeft lengte 8 en raakt beide kleine halve cirkels. Bepaal de oppervlakte van het groene gedeelte.



We tekenen een aantal punten in de figuur: A en B zijn de uiteinden van de middellijn, C en H zijn de uiteinden van het gegeven verticale lijn stuk. M is het middelpunt van de gele cirkel, met straal r. De cirkelboog aan de linkerzijde heeft middelpunt N en straal s. De cirkelboog aan de rechterzijde heeft middelpunt P en straal t. Eenvoudig valt af te leiden dat $r = s + t$ en dat $MH = 2s - r = s - t$. Voor de rechthoekige driehoek MHC geldt volgens Pythagoras dat $r^2 = 64 + (s - t)^2$, ofwel $4st = 64$. Het gewenste oppervlak is $\frac{1}{2}\pi(r^2 - s^2 - t^2) = \pi st = 16\pi$

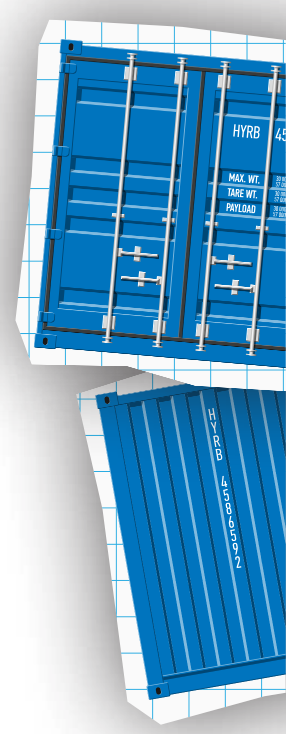


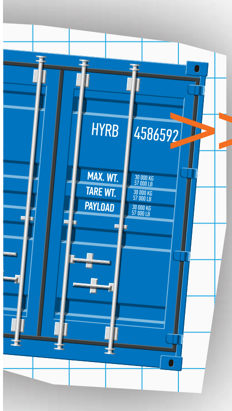
OPLOSSING 359 NIVEAU ○○○

Een archipel bestaat uit 64 eilanden. Elk eiland is voorzien van een haven. In elke haven staan 63 containers gereed, bestemd voor de 63 andere eilanden.

Je wilt met één schip alle vracht in de havens van bestemming brengen. Je vertrekt vanaf eiland 1, vaart via de eilanden 2 tot en met 63 (die je elk precies één keer aandoet) naar eiland 64, en vaart vervolgens in omgekeerde richting weer terug naar eiland 1 (waarbij je opnieuw de eilanden 63 tot en met 2 elk één keer aandoet). Hoeveel containers moeten er minimaal op het schip passen?"

We nummeren de eilanden (havens) van 1 t/m 64, waarbij Haven 1 de vertrekhaven is en Haven 64 de haven is waar omgedraaid wordt, waarna de terugreis begint. Voor elke container geldt dat deze wordt vervoerd van K naar L, waarbij $K \neq L$. Als $K < L$ dan moet deze op de heenreis meegenomen worden. Als $K > L$, dan kun je in principe kiezen voor zowel meenemen op de heen als terugreis, maar handig is om de container op de terugreis pas in te laden. Als de boot vaart van haven K naar haven $K + 1$ dan zijn er op de boot containers afkomstig van de eilanden 1 t/m K, die zijn bestemd voor K+1 t/m 64.





Aangezien voor elke combinatie van twee eilanden een aparte container op het dek staat, gaat het dus om $K(64-K) = 64K - K^2$ containers. Het maximum wordt aangenomen voor $K = 32$, immers $64K - K^2 = 1024 - (K-32)^2 \leqslant 1024$. Tussen Haven 32 en Haven 33 vaart de boot met 1024 containers. Op de terugweg gebeurt identiek hetzelfde en vaart de boot tussen Haven 33 en Haven 32 opnieuw met 1024 containers.

OPLOSSING 360 NIVEAU ○○○

Jelly houdt al haar hele leven bij wanneer ze op dezelfde weekdag jarig is als haar geboortedag. De eerste keer is ze vergeten, maar de tweede keer was op haar 11de verjaardag en de derde keer op haar 22ste verjaardag. Hoe oud werd ze op haar verjaardag toen deze voor de eerste keer op dezelfde weekdag viel als haar geboortedag?

In de schrikkeljaren schuift de dag van de week 2 dagen op, in een "gewoon" jaar is dat slechts een dag. We onderscheiden vier gevallen

1. Jelly is geboren in een schrikkeljaar (voor ons gemak laten we dit lopen van 1 maart tot en met 28 februari)
2. Jelly is geboren in het jaar na een schrikkeljaar
3. Jelly is geboren in het tweede jaar na een schrikkeljaar
4. Jelly is geboren in het jaar voor een schrikkeljaar

De dag waarop haar geboorte viel geven we aan met 0. De dag erna met 1, dan, 2, 3, 4, 5 en 6. Daarna weer 0. Het maakt niets uit welke dag we met de 0 aangeven. Met de getallen 0 t/m 6 noteren we op welke dag de verjaardag van Jelly valt op de opeenvolgende jaren (zie figuur 1).

Met een 0 wordt aangegeven dat de dag dezelfde is als haar geboortedag. Er zijn twee mogelijkheden met zowel bij de 11de als de 22ste verjaardag een 0. Die in regel 3 valt af, want we zochten de eerste verjaardag. De verjaardag die ze is vergeten staat dus in regel 4: haar vijfde verjaardag." De verjaardag die ze vergeten is, is haar vijfde verjaardag.

OPLOSSING 361 NIVEAU ○○○

Bepaal alle viertallen reële getallen a, b, c, d die voldoen aan

$$\begin{cases} (1) & a+c & = -5 \\ (2) & b+d+ac & = 5 \\ (3) & ad+bc & = 5 \\ (4) & bd & = -6 \end{cases}$$

Tel de 4 vergelijkingen bij elkaar op. We krijgen nu: $a + b + c + d + ac + ad + bc + bd = -1$ ofwel $(a + b)(c + d) + a + b + c + d + 1 = 0$. Nu volgt de ontbinding in twee factoren: $(a + b + 1)(c + d + 1) = 0$. Dat betekent dat ofwel $a + b = -1$ ofwel $c + d = -1$. Nu nemen we vergelijking (1) minus vergelijking (2) plus vergelijking (3) minus vergelijking (4). We hebben nu $a - b + c - d - ac + ad + bc - bd = 1$. Ofwel $(a - b)(d - c) + a - b + c - d - 1 = 0$. Ook nu kunnen we ontbinden in twee factoren: $(a - b - 1)(d - c + 1) = 0$. Dit betekent ofwel $a - b = 1$ ofwel $c - d = 1$. We moeten nu 4 mogelijkheden bekijken:

1. $a + b = -1$ en $a - b = 1$. Eenvoudig volgt $a = 0$ en $b = -1$. Uit vergelijking (1) volgt $c = -5$. Ten slotte volgt uit vergelijking (2) dat $d = 6$.
2. $a + b = -1$ en $c - d = 1$. We substitueren $b = -a - 1$ en $c = d + 1$ in vergelijking (3). We vinden $ad + (-a - 1)(d + 1) = 5$ ofwel $-a - d - 1 = 5$. We kunnen nu a, b en c uitdrukken in d als volgt: $a = -d - 6$, $b = -a - 1 = d + 5$ en $c = d + 1$. We substitueren b in vergelijking (4): $(d + 5)d = -6$

Figuur 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1.	0	1	2	3	5	6	0	1	3	4	5	6	1	2	3	4	6	0	1	2	4	5	6
2.	0	1	2	4	5	6	0	2	3	4	5	0	1	2	3	5	6	0	1	3	4	5	6
3.	0	1	3	4	5	6	1	2	3	4	6	0	1	2	4	5	6	0	2	3	4	5	0
4.	0	2	3	4	5	0	1	2	3	5	6	0	1	3	4	5	6	1	2	3	4	6	0

ofwel $d^2 + 5d + 6 = 0$. Ontbindt het linkerlid in factoren: $(d + 2)(d + 3) = 0$. Hieruit volgen twee waarden voor d, namelijk $d = -2$ en $d = -3$. De bijbehorende oplossingen voor (a, b, c, d) zijn $(-4, 3, -1, -2)$ en $(-3, 2, -2, -3)$.

3. $c + d = -1$ en $a - b = 1$, ofwel $c = -d - 1$ en $b = a - 1$. Uit vergelijking (1) volgt $a = -c - 5$. We kunnen nu a, b en c uitdrukken in d als volgt: $a = -c - 5 = d - 4$, $b = a - 1 = d - 5$ en $c = -d - 1$. We substitueren b in vergelijking (4): $(d - 5)d = -6$ ofwel $d^2 - 5d + 6 = 0$. Ontbindt het linkerlid weer in factoren: $(d - 2)(d - 3) = 0$. Hieruit volgen twee waarden voor d, namelijk $d = 2$ en $d = 3$. De bijbehorende oplossingen voor (a, b, c, d) zijn $(-2, -3, -3, 2)$ en $(-3, 2, -4, 3)$.

4. $c + d = -1$ en $c - d = 1$. Nu volgt eenvoudig dat $c = 0$ en $d = -1$. Uit vergelijking (1) volgt dat $a = -5$ en uit vergelijking (4) volgt $b = 6$.

Nu nemen we alle oplossingen samen:
$(a, b, c, d) \in \{(0, -1, -5, 6), (-4, 3, -1, -2), (-3, 2, -2, -3), (-2, -3, -3, 2), (-3, 2, -4, 3), (-5, 6, 0, -1)\}$

In de naam is Christian met 1 a. In het mailadres met 2 a's. Wat is correct?

COLOFON

57ste jaargang nummer 2
november 2017
ISSN 0033 4766

Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.

Internet www.pyth.eu

Hoofdredacteur Derk Pik

Eindredacteur Emiel Kaper

Redactie Matthijs Coster, Jeanine Daems, Christian Eggermont, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Paul Levrie

Vormgeving Fizz Digital Agency, Meppel

Druk Veldhuis Media, Raalte

Uitgever Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG)

Management Pythagoras Esther van Vroonhoven, Mark Veraar, Derk Pik

Lezersreacties en kopij Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pyth.eu en kopij naar Derk Pik, derk@pyth.eu.
Eventueel per post naar Pythagoras, p.a. Centrum Wiskunde & Informatica, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Abonneeservice Pythagoras
Postbus 2238
5600 CE Eindhoven
Telefoon: 085 016 02 51
E-mail: abonnementen@pyth.eu

Abonnementsprijs
(zes nummers per jaargang)
€ 34,00 (Nederland en België),
€ 37,00 (overige landen),
€ 20,00 (groepsabonnement NL/B),
€ 34,00 (geschenkabonnement NL/B),
€ 37,00 (geschenkabonnement overige landen).

Een geschenkabonnement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnementen gelden tot wederopzegging. De vermelde prijzen gelden bij automatische incasso. Per acceptgiro komen er factuurkosten à € 2,50 bij.

Aan dit nummer werkten mee
Matthijs Coster (matthijs@pyth.eu), Jeanine Daems (jeanine@pyth.eu), Christian Eggermont (christiaan@pyth.eu), Jan Guichelaar (jan@pyth.eu), Klaas Pieter Hart (kp@pyth.eu), Emiel Kaper (emiel@pyth.eu), Jaap Klouwen (j.klouwen@hva.nl), Paul Levrie (paul@pyth.eu), Ronald Meester (r.w.j.meester@vu.nl), Eddie Nijholt (eddie.nijholt@gmail.com), Dave Odegard (dave@odegard.demon.nl), Derk Pik (derk@pyth.eu), Klaas Slooten (k.slooten@vu.nl) Harry Smit (h.j.smit@students.uu.nl), Michelle Sweering (sweer108@planet.nl), Siebe Verheijen (verheijensiebe@gmail.com), Bas Verseveldt (bas.verseveldt@hetnet.nl).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.

Universiteit van Amsterdam Universiteit Utrecht TUDelft Delft University of Technology TU/e UNIVERSITEIT TWENTE. CWI EURANDOM