PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt, Harry Smit, Michelle Sweering en Bas Verseveldt

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.
Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie.
Met de bovenbouwopgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

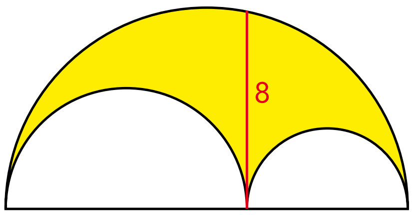
HOE IN TE ZENDEN? Inzenden kan alleen per e-mail. Stuur je oplossing (getypt of een scan of foto van een handgeschreven oplossing) naar pytholym@gmail.com. Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.
Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 september 2017.

DE GOEDE INZENDERS VAN FEBRUARI 2017

350: Marijn Adriaanse (klas 3), Norbertuscollege, Roosendaal; Thomas Boxman (klas 5), Pleysier College Westerbeek, Den Haag; Romke Egbers, Wöhrden (Duitsland); Arie Heikoop, Kampen; Lisan ten Hove (klas 2), Oostvaarders College, Almere; Rein Janssen Groesbeek (klas 6), Stedelijk Gymnasium, Utrecht; Niels Kolenbrander (klas 5), Leo Kannercollege, Leiden; Ceren Ugurlu (klas 1), Rivers International School, Arnhem; Irem Ugurlu (klas 1), Rivers International School, Arnhem.
351: Marijn Adriaanse (klas 3), Norbertuscollege, Roosendaal; Thomas Boxman (klas 5), Pleysier College Westerbeek, Den Haag; Romke Egbers, Wöhrden (Duitsland); Rinze Hallema (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Leeuwarden; Arie Heikoop, Kampen; Lisan ten Hove (klas 2), Oostvaarders College, Almere; Rein Janssen Groesbeek (klas 6), Stedelijk Gymnasium, Utrecht; Niels Kolenbrander (klas 5), Leo Kannercollege, Leiden; Peter van der Lecq, Utrecht; Ceren Ugurlu (klas 1), Rivers International School, Arnhem; Irem Ugurlu (klas 1), Rivers International School, Arnhem.
352: Marijn Adriaanse (klas 3), Norbertuscollege, Roosendaal; Thomas Boxman (klas 5), Pleysier College Westerbeek, Den Haag; Rinze Hallema (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Leeuwarden; Arie Heikoop, Kampen; Niels Kolenbrander (klas 5), Leo Kannercollege, Leiden; Pascal Kwanten, Almere; Peter van der Lecq, Utrecht; Corijn Rudrum (klas 5), RSG Pantarijn, Wageningen; Ceren Ugurlu (klas 1), Rivers International School, Arnhem; Irem Ugurlu (klas 1), Rivers International School, Arnhem.
353: Marijn Adriaanse (klas 3), Norbertuscollege, Roosendaal; Thomas Boxman (klas 5), Pleysier College Westerbeek, Den Haag; Romke Egbers, Wöhrden (Duitsland); Rinze Hallema (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Leeuwarden; Rein Janssen Groesbeek (klas 6), Stedelijk Gymnasium, Utrecht; Niels Kolenbrander (klas 5), Leo Kannercollege, Leiden; Peter van der Lecq, Utrecht; Tunnis Oosterhoff, Groningen; Corijn Rudrum (klas 5), RSG Pantarijn, Wageningen; Ceren Ugurlu (klas 1), Rivers International School, Arnhem; Irem Ugurlu (klas 1), Rivers International School, Arnhem.
Cadeaubonnen: Rinze Hallema en Thomas Boxman.
Stand laddercompetitie: Marijn Adriaanse (17 p; cadeaubon), Rinze Hallema (12 p), Niels Kolenbrander (12 p), Levi van de Pol (12 p), Corijn Rudrum (12 p), Jan Bosma (10 p), Rein Janssen Groesbeek (10 p), Rainier van Es (9 p), Sebastian Weiermann (8 p), Lisan ten Hove (7 p), David Oosterom (7 p), Thomas Boxman (6 p), Dominique Titulaer (6 p), Ceren Ugurlu (6 p), Irem Ugurlu (6 p), Merlijn Hunik (5 p), Leanna van Dijk (4 p), Stan Ferguson (3 p), Roos van Herrewegen (3 p), Johan van der Marck (3 p), Maarten Stremler (3 p), Lucia Komen (2 p), Sietske Koolhof (2 p), Willem Vlasblom (2 p), Sterre ter Beek (1 p), Hannah Creutzburg en Ida Bakker (1 p), Hugo Hosman (1 p), Leon van Mierlo (1 p), Bram Pel (1 p), Fook Sars en Boris Nijhoff (1 p), Eva Teeling (1 p), Bruno Vermeer (1 p).
Aanvulling: In *Pyth* 55-6 (juni 2016) werd Arie vd Kraan ten onrechte niet vermeld bij opgave 329. Excuses.

OPGAVE 358

Hieronder zijn drie halve cirkels getekend. Het rode lijnstuk heeft lengte 8 en raakt beide kleine halve cirkels. Bepaal de oppervlakte van het gele gedeelte.

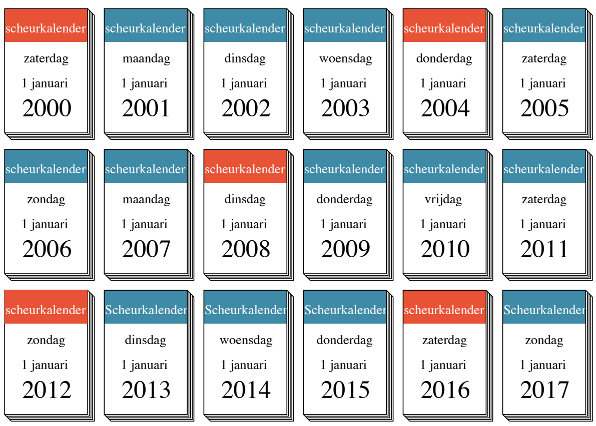


OPGAVE 359

Een archipel bestaat uit 64 eilanden. Elk eiland is voorzien van een haven. In elke haven staan 63 containers gereed, bestemd voor de 63 andere eilanden. Je wilt met één schip alle vracht in de havens van bestemming brengen. Je vertrekt vanaf eiland 1, vaart via de eilanden 2 tot en met 63 (die je elk precies één keer aandoet) naar eiland 64, en vaart vervolgens in omgekeerde richting weer terug naar eiland 1 (waarbij je opnieuw de eilanden 63 tot en met 2 elk één keer aandoet). Hoeveel containers moeten er minimaal op het schip passen?

OPGAVE 360

Jelly houdt al haar hele leven bij wanneer ze op dezelfde weekdag jarig is als haar geboortedag. De eerste keer is ze vergeten, maar de tweede keer was op haar 11de verjaardag en de derde keer op haar 22ste verjaardag. Hoe oud werd ze op haar verjaardag toen deze voor de eerste keer op dezelfde weekdag viel als haar geboortedag?
In onderstaande afbeelding zijn de jaren van de roodgekleurde kalenders schrikkeljaren.



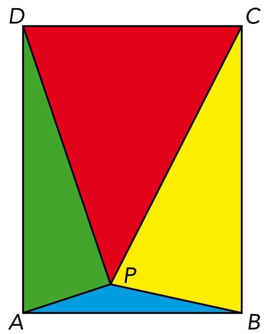
OPGAVE 361

Bepaal alle viertallen reële getallen a, b, c, d die voldoen aan

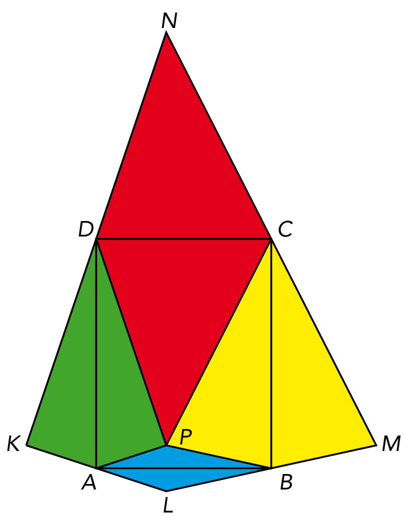
$$a + c = -5$$
$$b + d + ac = 5$$
$$ad + bc = 5$$
$$bd = -6$$

OPLOSSING 350

Een papier wordt opgevouwen en ziet er ná het vouwen uit als op onderstaand plaatje. De rode, blauwe, groene en gele flap zijn achtereenvolgens langs de randen AB, BC, CD en AD gevouwen naar punt P. Vouw het papier nu weer helemaal open. Toon aan dat er dan een vierhoek ontstaat.



Oplossing. We klappen de vier flappen uit en tekenen de punten K, L, M en N. Waarom is $\angle KAL = 180°$? Ga uit van de oorspronkelijke hoek $\angle DAB = 90°$. Nu geldt verder dat $\angle KAD = \angle DAP$ en $\angle LAB = \angle PAB$. Zodoende geldt:
$\angle KAL = \angle KAD + \angle DAP + \angle PAB + \angle LAB = 2(\angle DAP + \angle PAB) = 2 \cdot 90° = 180°$.



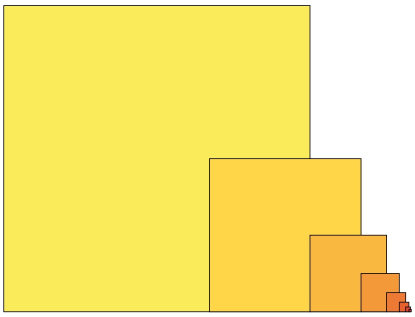
OPLOSSING 351

We hebben een digitale klok, die loopt van 00:00 tot en met 23:59 (dus met een nauwkeurigheid van minuten). Soms vormen de cijfers van de klok (zonder de :) een kwadraat. In hoeveel van zulke gevallen is óók het totaal aantal minuten sinds 00:00 een kwadraat? Een voorbeeld van zo'n tijdstip is 01:21, want 121 is een kwadraat (namelijk 11^2), en 01:21 is 81 minuten na 00:00, wat ook een kwadraat is (namelijk 9^2).

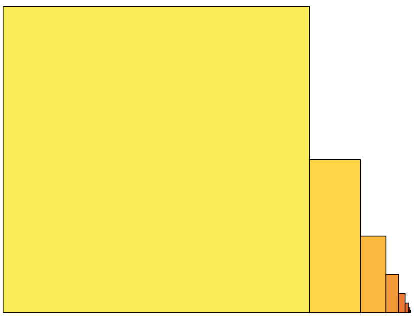
Oplossing. De kwadraten tot 2359 moeten gecontroleerd worden. Dat zijn er niet zo veel, en daarom loont het nauwelijks de moeite om de oplossingen door middel van vergelijkingen te vinden. We vinden direct $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$ en $7^2 = 49$. Daarna zijn de oplossingen schaars. Er zijn nog twee andere oplossingen: $9^2 = 81$ met $1{:}21 = 11^2$ en $35^2 = 1225$ met $20{:}25 = 45^2$.

OPLOSSING 352

Hieronder zie je een serie steeds kleiner wordende vierkanten. Het grootste vierkant is 90×90 cm^2. Als je naar rechts gaat is elk volgend vierkant half zo hoog als het voorafgaande. De linker onderhoek ligt steeds op tweederde deel van de onderzijde. Bepaal de totale oppervlakte van het gebied dat door de vierkanten wordt bedekt.



Oplossing. We kleuren de figuur op een iets andere manier in, zodat de oppervlaktes van de verschillend gekleurde gebieden eenvoudig te berekenen zijn:



De rechthoek pal naast het vierkant heeft afmetingen $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$. Elk volgende rechthoek is half zo breed en half zo hoog. Met de formule voor de som van een meetkundige rij vinden we voor de totale oppervlakte:

$$90^2 \cdot (1 + \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12} \cdot \tfrac{1}{4} + \cdots) =$$

$$90^2 \cdot (1 + \tfrac{1}{12}(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{4^3} + \cdots)) =$$

$$90^2 \cdot (1 + \tfrac{1}{12} \cdot \tfrac{4}{3}) = 90^2 \cdot \tfrac{10}{9} = 9000.$$

OPLOSSING 353

De getallen a, b en c voldoen aan de volgende twee vergelijkingen:

$$a + b + c + abc = 0$$
$$ab + ac + bc + 1 = 0$$

Vind alle oplossingen (a, b, c).

Oplossing. Tel de twee vergelijkingen bij elkaar op:

$$abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 = 0.$$

Het linkerlid kun je ontbinden in drie factoren:

$$abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 =$$
$$(a + 1)(b + 1)(c + 1).$$

Als $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 0$, is minimaal één van de variabelen a, b, c gelijk aan -1.
Trek nu de twee gegeven vergelijkingen van elkaar af:

$$abc - ab - ac - bc + a + b + c - 1 = 0.$$

Ook nu kun je het linkerlid ontbinden in drie factoren:

$$abc - ab - ac - bc + a + b + c - 1 =$$
$$(a - 1)(b - 1)(c - 1).$$

Als $(a - 1)(b - 1)(c - 1) = 0$, is minimaal één van de variabelen a, b, c gelijk aan 1.
Stel $a = 1$ en $b = -1$ en kies c willekeurig, dan voldoen deze getallen aan beide vergelijkingen. Dit geldt voor een willekeurige keuze van twee van de drie variabelen. Er zijn dus zes series van oplossingen:

$$\{n, 1, -1\}, \{n, -1, 1\}, \{1, n, -1\},$$
$$\{-1, n, 1\}, \{1, -1, n\}, \{-1, 1, n\}.$$