PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt, Harry Smit, Michelle Sweering en Bas Verseveldt

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.
Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie.
Met de bovenbouwopgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

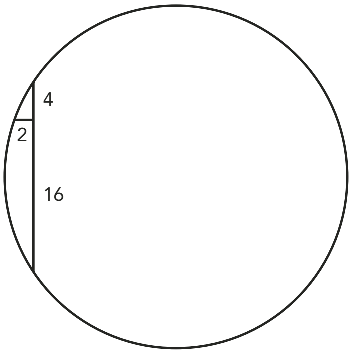
HOE IN TE ZENDEN? Inzenden kan alleen per e-mail. Stuur je oplossing (getypt of een scan of foto van een handgeschreven oplossing) naar pytholym@gmail.com. Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.
Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 juli 2017.

DE GOEDE INZENDERS VAN JANUARI 2017

346: Marijn Adriaanse (klas 3), Norbertuscollege, Roosendaal; Rinze Hallema (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Leeuwarden; Arie Heikoop, Kampen; Rein Janssen Groesbeek (klas 6), Stedelijk Gymnasium, Utrecht; Niels Kolenbrander (klas 5), Leo Kannercollege, Leiden; David Oosterom (klas 3), Trinitas Gymnasium, Almere; Corijn Rudrum (klas 5), RSG Pantarijn, Wageningen; Sebastian Weiermann (klas 4), Erasmus, De Pinte (België).
347: Marijn Adriaanse (klas 3), Norbertuscollege, Roosendaal; Arie Heikoop, Kampen; Lisan ten Hove (klas 2), Oostvaarders College, Almere; Rein Janssen Groesbeek (klas 6), Stedelijk Gymnasium, Utrecht; Niels Kolenbrander (klas 5), Leo Kannercollege, Leiden; Peter van der Lecq, Utrecht; Corijn Rudrum (klas 5), RSG Pantarijn, Wageningen.
348: Marijn Adriaanse (klas 3), Norbertuscollege, Roosendaal; Rainier van Es (klas 5), Zwijsen College, Veghel; Lisan ten Hove (klas 2), Oostvaarders College, Almere; Rein Janssen Groesbeek (klas 6), Stedelijk Gymnasium, Utrecht; Niels Kolenbrander (klas 5), Leo Kannercollege, Leiden; Pascal Kwanten, Almere; Peter van der Lecq, Utrecht; David Oosterom (klas 3), Trinitas Gymnasium, Almere; Corijn Rudrum (klas 5), RSG Pantarijn, Wageningen; Sebastian Weiermann (klas 4), Erasmus, De Pinte (België).
349: Marijn Adriaanse (klas 3), Norbertuscollege, Roosendaal; Arie Heikoop, Kampen; Rein Janssen Groesbeek (klas 6), Stedelijk Gymnasium, Utrecht; Niels Kolenbrander (klas 5), Leo Kannercollege, Leiden; Corijn Rudrum (klas 5), RSG Pantarijn, Wageningen.
Cadeaubonnen: Marijn Adriaanse en Niels Kolenbrander (bovenbouw).
Stand laddercompetitie: Anton van Es (15 p; cadeaubon), Sander Engelberts (14 p), Oscar Heijdra (13 p), Levi van de Pol (12 p), Marijn Adriaanse (11 p), Jan Bosma (10 p), Rainier van Es (9 p), Corijn Rudrum (8 p), Sebastian Weiermann (8 p), Rinze Hallema (7 p), Stef Rasing (6 p), Dominique Titulaer (6 p), Lisan ten Hove (5 p), Merlijn Hunik (5 p), Leanna van Dijk (4 p), David Oosterom (7 p), Rein Janssen Groesbeek (6 p), Niels Kolenbrander (6 p), Stan Ferguson (3 p), Roos van Herrewegen (3 p), Johan van der Marck (3 p), Maarten Stremler (3 p), Lucia Komen (2 p), Sietske Koolhof (2 p), Willem Vlasblom (2 p), Sterre ter Beek (1 p), Hannah Creutzburg en Ida Bakker (1 p), Gerben-Jan Hooijer (1 p), Hugo Hosman (1 p), Leon van Mierlo (1 p), Bram Pel (1 p), Fook Sars en Boris Nijhoff (1 p), Eva Teeling (1 p), Bruno Vermeer (1 p).

OPGAVE 354

Hieronder zie je een cirkel met twee lijnstukken die loodrecht op elkaar staan. Wat is de straal van de cirkel?

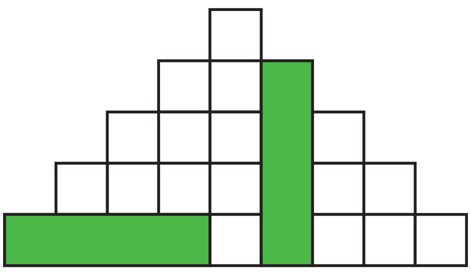


OPGAVE 355

Hoe vaak per dag staan de grote en kleine wijzer van een klok precies loodrecht op elkaar?

OPGAVE 356

Een *n-piramide* is een piramide zoals in onderstaande figuur. De piramide bestaat uit n rijen witte blokjes (in de figuur is $n = 5$, maar deze opgave gaat over algemene n). De bovenste rij heeft 1 blokje, de tweede rij 3 blokjes, de derde rij 5 blokjes, ..., de n-de rij $2n - 1$ blokjes. Het middelste blokje van elke rij ligt steeds precies onder het blokje in de bovenste rij. We leggen een aantal groene rechthoeken van vier naastgelegen blokjes neer. Die rechthoeken moeten allemaal helemaal in de piramide liggen en verschillende rechthoeken mogen elkaar niet overlappen. In de figuur zijn twee van zulke rechthoeken getekend. Wat is het kleinst mogelijke aantal blokjes van een n-piramide dat niet door een groene rechthoek wordt overdekt?

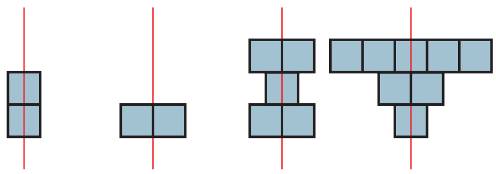


OPGAVE 357

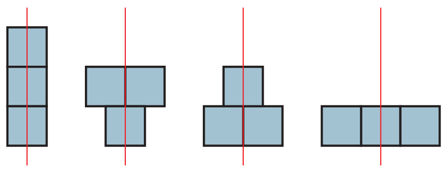
Op een eiland leven drie soorten mensen: mensen die uitsluitend de waarheid spreken, mensen die soms de waarheid spreken en soms liegen, en mensen die uitsluitend liegen. Mensen die tot dezelfde soort behoren, dragen allemaal eenzelfde kleur pet. Er zijn gele, rode en blauwe petten. Een toerist die het eiland bezoekt, is niet op de hoogte welke kleur bij welke groep hoort. De toerist ziet drie mannen met verschillend gekleurde petten. De man met de rode pet zegt tegen de toerist: 'Ik lieg vaker dan iemand met een gele pet.' Daarna zegt de man met de blauwe pet: 'De man met de rode pet heeft zojuist gelogen.' Tot slot zegt de man met de gele pet: 'Precies een van de twee mannen met de rode en blauwe pet heeft zojuist gelogen.'
Kan de toerist nu bepalen bij welke soorten mensen de petkleuren horen?

OPLOSSING 346

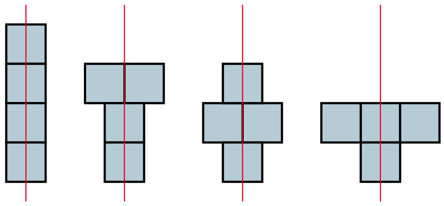
We tekenen torens met vierkantjes. Hieronder zijn alle torens getekend met 2 vierkantjes en er zijn voorbeelden van torens getekend met 5 en 8 vierkantjes. Het recept om een toren te tekenen is als volgt: je tekent eerst een verticale symmetrieas, en vervolgens plaats je per laag een aantal vierkantjes rondom de symmetrieas. Hoeveel torens kun je maken met 3, 4, 5 en 6 vierkantjes?



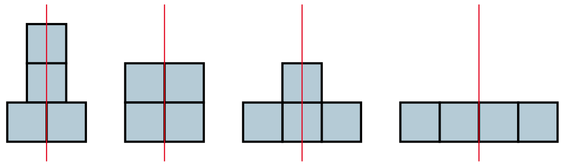
Oplossing. Het aantal verschillende torens met 3 vierkantjes is 4:



We laten zien hoe je uitgaande van 3 vierkantjes waarmee je 4 verschillende torens kunt bouwen, je met 4 vierkantjes 8 verschillende torens kunt bouwen. Bekijk de volgende 4 torens:



Dit zijn dezelfde torens als de torens die je kunt maken met 3 vierkantjes, behalve dan dat er onderaan een vierkantje is toegevoegd.
Bekijk nu de volgende 4 torens:



Hier is steeds een vierkantje toegevoegd aan de onderste rij vierkantjes.
Dit principe geldt algemeen: uitgaande van een toren met n vierkantjes kun je precies 2 keer zo veel torens maken met $n + 1$ vierkantjes. Dit bewijsprincipe heet volledige inductie.
Kortom: met 3, 4, 5, 6 vierkantjes kun je achtereenvolgens 4, 8, 16, 32 torens bouwen.

OPLOSSING 347

Wat is het kleinste positieve gehele getal n waarvoor geldt dat $\frac{1}{2}n^2$ een derdemacht is en $\frac{1}{3}n^3$ een kwadraat?

Oplossing. We herschrijven de opgave tot
(1) $n^2 = 2a^3$,
(2) $n^3 = 3b^2$.
Om het rechterlid van (1) een kwadraat te laten zijn, volgt dat $a = 2c^2$, dus geldt (3) $n = 4c^3$.
Om het rechterlid van (2) een derdemacht te laten zijn, volgt dat $b = 3d^3$, dus geldt (4) $n = 3d^2$.
Uit (3) en (4) volgt (5) $4c^3 = 3d^2$.
Nu volgt dat c een drievoud moet zijn, ofwel
(6) $c = 3e$.
Substitueren we (6) in (5), dan vinden we
(7) $108e^3 = 3d^2$.
Nu moet d een zesvoud zijn: (8) $d = 6f$.
Substitueren we (8) in (6), dan vinden we
(9) $108e^3 = 108f^2$.
Nu volgt eenvoudig dat (10) $e = m^2$ en (11) $f = m^3$.
We gaan terug naar (3) en maken gebruik van (6) en (10). Dan vinden we
(12) $n = 4c^3 = 108e^3 = 108m^6$.
Dit geldt voor elke gehele waarde van m, in het bijzonder voor $m = 1$.
De bijpassende kleinste waarde voor n is 108.

OPLOSSING 348

Als $a + b + c = 0$ en $a^3 + b^3 + c^3 = 2016$, wat is dan het product abc?

Oplossing. Er geldt $c = -a - b$. Dus $c^3 = (-a - b)^3 = -a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$. Dan volgt $2016 = a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 = -3ab(a + b) = 3abc$. Conclusie: $abc = 672$.

OPLOSSING 349

In een bepaald Tibetaans klooster wonen 36 monniken. De monniken dragen vier kleuren mutsen: rood, wit, blauw en geel. Ieder van deze monniken valt onder één van de zes ordes die leven in dit klooster. Elk van de zes ordes wordt gekarakteriseerd door het dragen van twee verschillende mutsen (rood-wit), (rood-blauw), (rood-geel), (wit-blauw), (wit-geel) en (blauw-geel). Alle monniken van dezelfde orde dragen dagelijks dezelfde muts. Elke monnik weet dagelijks welke kleur is gekozen. Een toerist bezoekt het klooster vier opeenvolgende dagen en telt de mutsen van de monniken:

dag	**rood**	**wit**	**blauw**	**geel**
maandag	13	12	11	0
dinsdag	0	7	13	16
woensdag	11	12	0	13
donderdag	7	0	20	9

Uit hoeveel monniken bestaan de zes verschillende ordes?

Oplossing. We geven hier de oplossing van Rein Jansen Groesbeek uit klas 6 van het Stedelijk Gymnasium Utrecht. Voer de volgende zes variabelen in:
a = aantal monniken in de rood-wit orde,
b = aantal monniken in de rood-blauw orde,
c = aantal monniken in de rood-geel orde,
d = aantal monniken in de wit-blauw orde,
e = aantal monniken in de wit-geel orde,
f = aantal monniken in de blauw-geel orde.
Een orde kan in elk geval niet meer monniken hebben dan het maximum van hun twee kleuren op een bepaalde dag. Zo is $a \leq 7$, want op donderdag is het aantal rode mutsen 7 en het aantal witte mutsen 0: de orde moet een van de twee kleuren kiezen. Op dezelfde wijze volgt dus dat $b \leq 11$, $c \leq 13$, $d \leq 12$, $e \leq 9$ en $f \leq 11$. Verder kan geen enkele orde 0 leden hebben: als dat wél het geval zou zijn, dan zouden de twee kleuren van die orde elk alleen samen-

gesteld kunnen worden uit de twee andere ordes. Dit zou betekenen dat de aantallen van die mutsen maar drie positieve waarden kunnen aannemen, waarvan een de som is van de andere twee. Dit zien we echter niet terug in de notities van de toerist: drie van de vier kleuren nemen 3 verschillende positieve waarden aan in de vier dagen waarbij geen enkele waarde de som is van de andere twee.
Kijk nu naar het getal met de kleinste bovengrens, a. Op donderdag zouden de 7 rode mutsen kunnen komen door a alleen, door $a + b$, $a + c$ of $a + b + c$.

- Stel dat $a + b + c = 7$ rood. Op maandag zouden er 13 rode mutsen moeten zijn, maar dit kan niet, want we hebben maar 3 ordes die rode mutsen kunnen leveren: tegenspraak.
- Stel dat $a + b = 7$ rood. Dan zou er gelden $c + e = 9$ geel of $c + e + f = 9$ geel op donderdag. Stel dat $c + e = 9$ geel op donderdag. Dan zou op donderdag gelden dat $d + f = 20$ blauw. Dan zou op dinsdag gelden $c + e + f = 16$ geel, dus $f = 7$. Hieruit volgt dus dat $d = 20 - f = 13$, wat in tegenspraak is met $d \leq 12$. Stel dat $c + e + f = 9$ geel. Dan zou op donderdag gelden dat $d = 20$ blauw, wat in tegenspraak is met $d \leq 12$. Dus $a + b = 7$ rood leidt tot een tegenspraak.
- Stel dat $a + c = 7$ rood. Dan zou er gelden $e + f = 9$ geel of $e = 9$ geel op donderdag. Stel dat $e + f = 9$ geel. Dan zou op dinsdag gelden $c + e + f = 16$ geel of $c + e = 16$ geel of $c + f = 16$ geel, dus $c \geq 7$. Hieruit volgt dus dat $c = 7$ en $a = 0$. Maar dat kan niet, want geen enkele orde heeft 0 leden. Stel dat $e = 9$ geel. Dan zou op dinsdag gelden $c + e + f = 16$ geel of $c + e = 16$ geel, dus $c + f = 7$ of $c = 7$. Uit $c = 7$ volgt $a = 0$: opnieuw een tegenspraak. Als $c + f = 7$ geel, dan zou op dinsdag moeten gelden $b + d = 13$ blauw en dus op diezelfde dag $a = 7$ rood. Uit $a = 7$ volgt $c = 0$: tegenspraak. Conclusie: $a + c = 7$ rood leidt tot een tegenspraak.
- We hebben nu alleen nog de optie over dat $a = 7$ rood op donderdag. Op dinsdag zou dan gelden dat $b + d + f = 13$ blauw of $b + d = 13$ blauw en $c + e + f = 9$ geel of $c + e = 9$ geel. Op donderdag zou dan gelden dat $b + d + f = 20$ blauw of $b + d = 20$ blauw en $c + e + f = 16$ geel of $c + e = 16$ geel. We zien dus dat f het verschil van 7 maakt tussen beide dagen, dus $f = 7$. Dus $b + d = 13$ en $c + e = 9$. Op woensdag moet gelden dat $c + f = 13$ geel ($c = 6$, $e = 3$) of dat $e + f = 13$ geel ($c = 3$, $e = 6$). Op maandag moet gelden dat $b + f = 11$ blauw ($b = 4$, $d = 9$) of dat $d + f = 11$ blauw ($b = 9$, $d = 4$). Op maandag moet gelden dat $a + b + c = 13$ rood of $a + c = 13$ rood of $b + c = 13$ rood. Dit kan alleen als $c = 6$. Dus $d = 3$. Op woensdag moet gelden dat $a + b + c = 11$ rood of $a + b = 11$ rood of $b + c = 11$ rood. Dit kan alleen als $b = 4$. Dus $d = 9$.

We hebben nu de aantallen van de zes ordes achterhaald en bewezen dat dit de enige mogelijke samenstelling is van monniken: $a = 7$, $b = 4$, $c = 6$, $d = 9$, $e = 3$ en $f = 7$. Er is ook maar één mogelijke manier voor de ordes om hun hoeden te kiezen zodat ze die kleurensamenstelling krijgen in die vier dagen.

IN JE VINGERS

■ door Derk Pik

Op de middelbare school wordt heel wat wiskunde gebruikt die eigenlijk te moeilijk is om écht goed te begrijpen hoe het zit. Op zich is dat helemaal niet erg: we kunnen ook fietsen zonder dat we de ingewikkelde mechanica van de fiets begrijpen.

In het boek *Wiskunde in je vingers* doen Joost Hulshof en Ronald Meester, twee hoogleraren van de Vrije Universiteit in Amsterdam, een heldhaftige poging om deze wiskunde wél begrijpelijk te maken. Ook zoeken ze vaak naar een meer eenvoudige invalshoek zonder de wiskunde geweld aan te doen.

Het boek heeft drie onderwerpen: normale getallen, het benaderen van functiewaarden zoals bij-