De continuümhypothese

Stedelijk Gymnasium Nijmegen

Eva Jiang (6C) en Alex Hereijgers (6B)

Wiskunde B & Wiskunde D

NT & EM

Begeleider: Abel Planting

16 januari 2024

$$\infty$$

Inhoudsopgave

Voorwoord

Sinds klas 1 wisten wij al dat we op een gegeven moment een enorm werkstuk gaan schrijven. Wij kenden elkaar toen nog niet, maar hadden wel allebei al een zekere fascinatie rond wiskunde. Begin klas 5 kwamen we bij elkaar in het Wiskunde D-cluster en begonnen we te praten; met de gedachte aan het eindwerkstuk boven ons hoofd speculeerden we waarover we het wilden doen, en kwamen tot de conclusie dat we allebei graag een wiskundig ews wilden schrijven. Toen bleek dat we beiden geïnteresseerd waren in getaltheorie. Een half uur later kwamen we uit bij het onderwerp oneindigheid. Dat was alleen een beetje te breed; na wat denken en praten met mensen die er wat meer over wisten, leverde dit de *Continuümhypothese* als onderwerp op.

We dachten eerst dat dit onderwerp goed te doen was. Dit idee werd ogenblikkelijk uit het raam geworpen op het moment dat we ons gingen inlezen. Maar wij zeggen geen nee tegen een uitdaging, en begonnen. Stap voor stap kwamen we dichter bij het antwoord op de grote vraag: *op welke manieren is er bewezen dat de continuümhypothese niet bewezen of ontkracht kan worden?*

Inleiding

Het woord *oneindigheid* draagt een gevoel van onbereikbaarheid en mysterie met zich mee. Zelfs de grootste Griekse wiskundigen zagen ervan af het te bestuderen. Het Griekse woord voor oneindigheid, ἄπειρον (spreek uit: apeiron), had een negatieve lading. De oerchaos waaruit de wereld ontstond, heette ἄπειρον. Een vieze, verfrommelde zakdoek heette ook ἄπειρον. Ἄπειρον betekent dus niet alleen oneindig groot, maar ook volkomen ordeloos en oneindig ingewikkeld. In de woorden van Aristoteles: '...het oneindig zijn is een tekortkoming, niet een volmaaktheid maar het ontbreken van een grens...'. Ook Pythagoras vindt het oneindige maar onzin - hij geloofde dat ieder aspect van de wereld kon worden weergegeven met een eindige combinatie natuurlijke getallen.

Pas vanaf de verlichting durfden wiskundigen er een poging aan te wagen. Zij pasten het concept toe bij de analyse, waar gebruik werd gemaakt van oneindig grote en oneindig kleine getallen. Maar toen de wiskundigen een exacte beschrijving van het *continuüm*, oftewel de reële-getallenlijn, wilden geven, liepen zij toch vast. Ze schrokken echter nog steeds terug voor de wereld van het feitelijk oneindige, waarin een verzameling even groot kon zijn als een deelverzameling en een lijnstuk uit evenveel punten kon bestaan als een lijn die maar half zo lang was.

Tenslotte, aan het einde van de negentiende eeuw, was er eindelijk een Duitse wiskundige die zijn tanden zette in deze onoplosbaar lijkende vraagstukken- Georg Cantor (1845-1918). Hij kwam al snel tot verrassende uitkomsten, met name dat de verzameling van punten op de reële-getallenlijn een hogere oneindigheid vormt dan de verzameling van alle natuurlijke getallen. Oftewel, er is niet één oneindigheid, maar er bestaan graden van oneindigheid!

Deze tussenstadia van oneindigheid beschrijft hij met *transfiniete getallen*, getallen die weliswaar oneindig maar toch voorstelbaar zijn. Zo bereidde Cantor de verzamelingenleer uit met allerlei baanbrekende termen en stellingen. Zijn bijdrage aan de vorming van de moderne wiskunde is enorm. Toch was er een vraag, die hem zijn hele leven bezighield en waarop hij nooit een antwoord heeft gevonden: de *Continuümhypothese.*

Versimpeld gezegd is dit de vraag of er tussen de eerste twee graden van oneindigheid nog een soort oneindigheid zit. Cantor vermoedde van niet. In dit werkstuk leggen we uit wat die Continuümhypothese precies is en nemen we de visies van twee beroemde wiskundigen onder de loep. Maar om daarover goed te kunnen praten, is er behoorlijk wat voorkennis nodig. Daarom beginnen we in de eerste twee hoofdstukken met wat basisuitleg, notaties en definities. Geniet!

1 Oneindigheid

Stel, je bent op rondreis en je gaat op zoek naar een plaats om te slapen. Alle hotels zitten al vol. De eerste uitzondering is een hotel met het volgende uithangbord:

$\aleph_0$
Hotel Oneindigheid

Het wordt al laat en je moet toch slapen, dus je loopt naar binnen en vraagt of er nog plaats is. De receptionist zegt dat ze eigenlijk al vol zitten, maar dat dat niet erg is. Het is namelijk een speciaal hotel: zelfs als het helemaal vol zit, past er nog een gast bij.

Door de intercom hoor je de stem van de receptionist: 'Iedereen wordt verzocht één kamer op te schuiven. Er is een nieuwe bezoeker.' Nu is kamer 1 vrij voor jou! 'Maar wat moeten de mensen in de laaste kamer dan?' 'Geen probleem! We hebben geen laatste kamer. We heten niet voor niets *Hotel Oneindigheid*!'

Een paar minuten later heb je je spullen in je kamer met kamernummer 1 gelegd. Dan hoor je de intercom weer: 'Beste bezoekers, er is een bus met twintig gasten gearriveerd. U wordt verzocht twintig kamers op te schuiven.' Na een paar minuten is de rust in de gang teruggekeerd en heeft iedereen zich weer thuis gemaakt in hun eigen kamers. Gelijk eist de intercom de aandacht weer op: 'Beste bezoekers, U wordt verzocht uw kamernummer te verdubbelen en zo uw nieuwe kamernummer te vinden. Er is een bus met oneindig veel passagiers aangekomen.' Dan verhuist iedereen nogmaals naar de nieuwe kamers terwijl er oneindig veel extra gasten de gang instromen. Alle kamers met oneven nummers zijn nu vrijgekomen: dat zijn ook oneindig veel kamers. En zo passen ook deze mensen allemaal in het hotel.

Inmiddels word je wel een beetje gek van al dat verhuizen. Je besluit toch maar op zoek te gaan naar een ander hotel. Eenmaal bij de receptie vraag je om de rekening. 'Uw laatste kamernummer was 42? Dan hoeft u niks te betalen! Iedereen kan nu één kamer terug omdat uw kamer vrijkomt. Uw rekening zal worden betaald door kamer 43, hun rekening door kamer 44. . . '[10,12]

David Hilbert heeft lang geleden (in 1924) deze 'visualisatie' van het begrip oneindigheid bedacht en gepubliceerd. Tot op de dag van vandaag is dit het meest gebruikte voorbeeld. Maar wat laat het nou eigenlijk zien? En wat is dat symbool op het uithangbord?

Dit speciale hotel heeft oneindig veel kamers. In de wiskunde wordt de hoeveelheid kamers wel ω (spreek uit: omega) genoemd. Vandaar de absentie van een laatste kamer. Als er namelijk wél een laatste kamer was geweest, zou je de kamers kunnen tellen en op een gegeven moment ophouden - bij de laatste kamer. Zo kom je op een eindig getal. Als je dus een oneindig aantal kamers hebt, heb je geen laatste kamer. Zodra je aankomt in het hotel worden alle gasten één kamer opgeschoven. Het hotel heeft dan dus $\omega + 1$ kamers nodig om alle gasten te herbergen. Het aantal kamers is echter niet veranderd en alle gasten passen in het hotel, ook al zat het daarvoor al vol.

Conclusie: $\omega = \omega + 1$. Even later komen er twintig gasten aan; ook dat past in het hotel. Blijkbaar is ω ook $\omega + 20$. Als laatste komen er oneindig veel mensen bij, die allen een plaats kunnen vinden in het volle hotel. Er zaten al ω gasten in het hotel, en wederom is het aantal kamers niet veranderd. Blijkbaar geldt dus ook $\omega = \omega + \omega$.

Als je hierover nadenkt is dat best speciaal. Met 'normale' getallen gaat dat niet: $3+1 \neq 3$. ω is dus een ander soort getal, met andere rekenregels. In de volgende hoofdstukken gaan we het hier dieper op in. Ook de notatie $\aleph_0$ zal duidelijker worden. Maar eerst leggen we wat andere dingen uit die de rest van ons verhaal zullen verhelderen.

2 Verzamelingenleer

In het dagelijks leven bedoelen we met verzamelingen een verzameling van objecten. Zo is een museum een verzameling van kunstvoorwerpen en een bibliotheek een verzameling van boeken. In de wiskunde kennen we ook verzamelingen: de verzameling van alle getallen die aan een bepaald eigenschap voldoen, de verzameling van alle punten in het ruimtelijk vlak, de verzamelingen van alle punten op een lijn, etc. In feite kun je alle wiskundige objecten als *verzamelingen* zien. Verzamelingen en hun eigenschappen worden behandeld in een belangrijk deelgebied van de wiskunde: de *verzamelingenleer*.

2.1 Notaties

Een verzameling wordt weergegeven door een paar accolades waartussen de inhoud van de verzameling – de elementen – staat beschreven. De verzameling $A = \{a, b, c, d, e\}$ bestaat dus uit vijf verschillende elementen - a, b, c, d en e. Een belangrijk begrip in de verzamelingenleer is de *lege verzameling*, $\emptyset$ of $\{\}$. De lege verzameling bevat geen elementen. Hoe wiskundigen aan zo'n nutteloos lijkende verzameling komen leggen we uit in hoofdstuk 4.

Als S een verzameling is en x een element van S, dan schrijven we dat als $x \in S$. Om aan te geven dat y géén element is van S, noteren we $y \notin S$.

Elementen van een verzameling kunnen ook verzamelingen zijn, bijvoorbeeld $D = \{1, \{2, 4\}, \{3\}\}$ heeft 3 elementen, namelijk 1, {2,4} en {3}. Er geldt dus $1 \in D$, maar $3 \notin D$, maar wel $\{3\} \in D$. Een verzameling A heet een *deelverzameling* van B als elk element van A ook element is van B. We schrijven: $A \subseteq B$. Neem $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{1, 3\}$ dan $B \subseteq A$. Daarnaast is $\emptyset$ is een deelverzameling van alle verzamelingen.

De verzamelingen die getallen bevatten zijn van groot belang in de wiskunde. We gebruiken $\mathbb{N}$ voor de verzameling van alle natuurlijke getallen (gehele, positieve getallen): $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ en $\mathbb{R}$ voor de verzameling van de reële getallen (getallen die te schrijven zijn als een oneindige rij cijfers achter de komma en een eindige rij cijfers voor de komma): $\mathbb{R} = \{-1{,}23; 5; \pi; ...\}$.[14] Later zullen we op een formelere wijze naar deze getallensystemen kijken en hun eigenschappen preciezer beschrijven.

2.2 Functies (of afbeeldingen)

2.2.1 Wat zijn functies?

Iedereen is ongetwijfeld het begrip functie tegengekomen; vaak als een voorschrift dat aan elk getal * een ander getal toevoegt, bijvoorbeeld de functie $f(x) = x^2$, dat aan elk getal zijn kwadraat toevoegt. Er zijn echter veel meer mogelijkheden, we hoeven ons niet tot getallen te beperken. Een functie kan bijvoorbeeld ook een voorschrift zijn dat aan elke auto zijn kenteken toevoegt.

* uit een gegeven verzameling

Om algemene eigenschappen van functies af te leiden en ze te kunnen gebruiken moeten we eerst afspreken hoe we functies definiëren, en ook wat een functie precies is, zodat we bijvoorbeeld over gelijkheden kunnen praten.

Laten V en W verzamelingen zijn.

Kortgezegd is een functie f van V naar W een voorschrift dat aan elk element van V precies één element van W koppelt.

Een formele definitie gaat met behulp van het *Cartesisch product*. We leggen dit begrip eerst uit.

2.1 Definitie. Het *Cartesisch product* van twee verzamelingen V en W is de verzameling van alle geordende paren (v, w), waarbij $v \in V$ en $w \in W$.

2.2 Voorbeeld. Stel $V = \{0, 1, 2\}$ en $W = \{0, 3\}$. Dan is het Cartesisch product van V en W de volgende verzameling:

$$V \times W = \{(0,0), (0,3), (1,0), (1,3), (2,0), (2,3)\}$$

2.3 Definitie. een functie $f : V \to W$ is een deelverzameling van het Cartesisch product $V \times W$ met de volgende eigenschap: voor iedere $v \in V$ bestaat er precies één $w \in W$ zodanig dat $(v, w) \in f$[14]. Daarbij betekent $(v, w) \in f$ hetzelfde als $f(v) = w$.

2.2.2 Namen voor functies

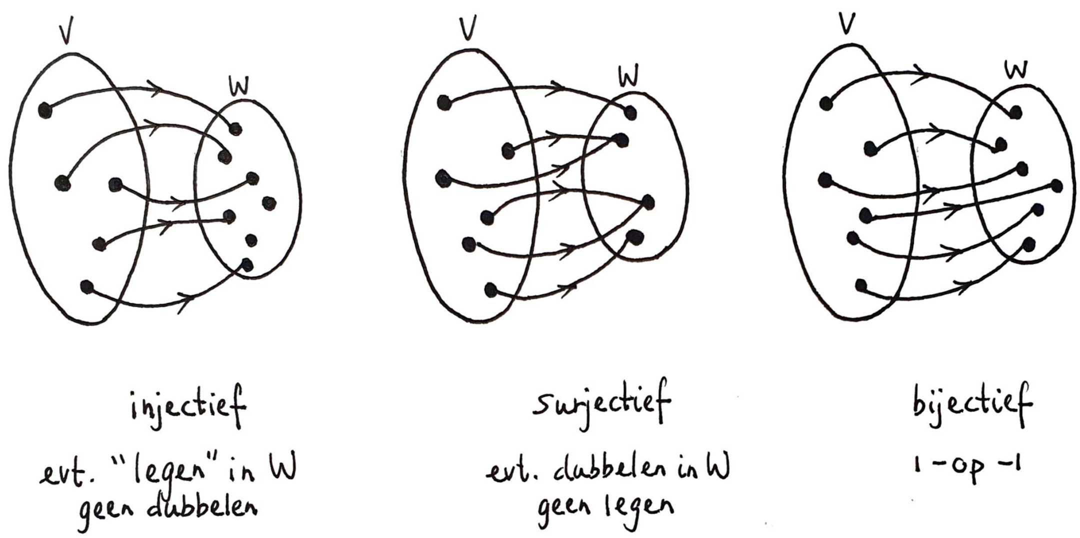
2.4 Definitie. Een afbeelding $f : V \to W$ is

I *injectief* als voor alle $v_1 \in V$ en $v_2 \in V$ geldt:
als $f(v_1) = f(v_2)$, dan $v_1 = v_2$
Met andere woorden, verschillende elementen in V moeten verschillende beelden hebben in W. Er kunnen elementen van W zijn die niet aan de beurt komen en elk element van W komt hooguit één keer aan de beurt.
Een *injectie* wordt ook wel een *inbedding* of een *eeneenduidige functie* genoemd.

II *surjectief* als voor alle $w \in W$ een $v \in V$ bestaat met $f(v) = w$
Met andere woorden, als de hele verzameling W als beeld voorkomt. Elk element van W komt dus aan de beurt.
De verzameling V is dus groter dan of gelijk aan de verzameling W.

III f *bijectief* als voor iedere $w \in W$ precies één $v \in V$ bestaat met $f(v) = w$
Met andere woorden, als f injectief en surjectief is. Elk element van W komt precies één keer aan de beurt.
Een *bijectie* wordt ook wel een *een-op-een afbeelding* genoemd.[14]

Zie onderstaand figuur voor een visuele weergave.



2.2.3 Gelijkmachtig

Als we willen aangeven dat twee verzamelingen V en W even groot zijn, oftewel even veel elementen bevatten, moeten we eerst afspreken wanneer we verzamelingen V,W als even groot beschouwen.

2.3 Definitie. gelijkmachtig: V is *even groot als* W; V is *gelijkmachtig met* W als er een bijectie van V naar W bestaat.[14]

Deze heel belangrijke en goede definitie danken we aan Cantor.

In plaats van *gelijkmachtig* kunnen we ook zeggen: V en W hebben dezelfde *machtigheid*, of: hetzelfde *kardinaalgetal*, of: dezelfde *kardinaliteit*.
Als V, W dezelfde kardinaliteit hebben, noteren we dat als $\overline{\overline{V}} = \overline{\overline{W}}$.

2.4 Voorbeeld. De verzamelingen $A = \{a, b, c, d\}$ en $B = \{1, 2, 3, 4\}$ zijn gelijkmachtig: een voorbeeld van een bijectie $f : A \to B$ is gedefinieerd door $f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3$ en $f(d) = 4$.

2.3 Eindige en oneindige verzamelingen

Verzamelingen kunnen uit een eindig of een oneindig aantal elementen bestaan. Netjes gedefinieerd heet een verzameling V *eindig* als er een natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $\{1, 2, ..., n\}$ en V gelijkmachtig zijn, en *oneindig* als dat niet zo is. (Voor $n = 0$ betekent dit dat $V = \emptyset$.)[4]

2.4 Aftelbare en overaftelbare verzamelingen

Eindige verzamelingen zijn altijd *aftelbaar*: als je begint te tellen bij $0, 1, 2, ...$ kom je op een gegeven moment aan bij het einde van de verzameling.

Een oneindige verzameling is *aftelbaar* als zij even veel elementen heeft als $\mathbb{N}$. Oftewel, als zij gelijkmachtig is met $\mathbb{N}$. Een aftelbare oneindige verzameling kun je *aftellen* zoals de natuurlijke getallen: de elementen kun je één voor één opsommen en tellen. Anders dan bij een eindige verzameling, kun je hier nooit stoppen met tellen.[14]

Het is duidelijk dat $\mathbb{N}$ zelf aftelbaar is: de identiteitsfunctie $id_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is een bijectie. De elementen van de verzameling $\mathbb{N}$ kun je op een rij zetten met de natuurlijke getallen.
Kijk maar

$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7, ...$

Intuïtief zijn er meer gehele getallen dan natuurlijke getallen. $\mathbb{N}$ is immers een deelverzameling van $\mathbb{Z}$.
Toch is de verzameling $\mathbb{Z}$ ook aftelbaar

$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 4,\ -4, ...$

Ook de verzameling van de rationale getallen $\mathbb{Q}$ is aftelbaar. Deze kun je, net als bij $\mathbb{Z}$, op een slimme manier aftellen.

Niet alle oneindige verzamelingen zijn aftelbaar - er bestaan namelijk ook *overaftelbaar* oneindige verzamelingen.

2.4.1 Het diagonaalargument

Om het begrip *overaftelbaar* uit te leggen, kijken we even terug naar het Hilbert Hotel. Zoals op het uithangbord te zien is, is de capaciteit van het hotel $\aleph_0$ (spreek uit: alef-nul*), d.w.z. er passen zoveel gasten in als er natuurlijke getallen zijn, want het kardinaalgetal van $\mathbb{N}$ heet $\aleph_0$.[10]

Cantor vroeg zich af of hij een groter hotel kan bouwen dat hij niet vol krijgt met alle gasten uit een vol Hilbert Hotel. In het *Cantor Hotel* worden de kamers genummerd door alle reëele getallen uit het interval $[0, 1]$.

Stel we brengen de gast uit kamer 1 van het Hilbert Hotel onder in kamer x_1 van het Cantor hotel, en die in kamer 2 van het Hilbert Hotel in kamer x_2 van het Cantor hotel, enzovoort. We hebben dan een rij x_n van onderling verschillende getallen uit het

* Alef is de eerste letter in het Hebreeuwse alfabet.

interval $[0,1]$. We schrijven de decimaalontwikkelingen van de elementen van deze rij uit

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, d_{11}d_{12}d_{13}... \\ x_2 &= 0, d_{21}d_{22}d_{23}... \\ x_3 &= 0, d_{31}d_{32}d_{33}... \\ &\vdots \end{aligned}$$

Kunnen we een kamer x in het Cantor hotel kiezen, die leeg blijft? Daarvoor schrijven we x ook in decimalen uit

$$x = 0, d_1d_2d_3...$$

en kiezen we nu $d_1 \neq d_{11}$, $d_2 \neq d_{22}$, $d_3 \neq d_{33}$...(de diagonaal van bovenstaand schema), dan verschilt de x van ieder x_n, waarbij x_n de n-de rij in het schema is. Op de n-de plaats in die rij staat namelijk altijd iets anders.[*]

De verzameling $[0,1]$ is dus oneindig en *overaftelbaar*: je kunt de elementen van die verzameling niet op een rij zetten, omdat je altijd een element van die verzameling kan bepalen dat niet in die rij voorkomt; zo'n rij van elementen is dus altijd *onvolledig.*[14]

Als de verzameling $[0,1]$ overaftelbaar is, moet $\mathbb{R}$ ook overaftelbaar zijn. Deze verzameling heeft immers minstens zo veel elementen als $[0,1]$. Conclusie:

$$\overline{\overline{\mathbb{R}}} > \overline{\overline{\mathbb{N}}}$$

Met behulp van het Cantor Hotel kunnen we een definitie van een oneindig overaftelbare verzameling geven.

De kamers van het Cantor Hotel worden genummerd volgens het interval $[0,1]$ en $[0,1]$ is een deelverzameling van $\mathbb{R}$. We hebben gezien dat het Cantor Hotel wezenlijk groter blijkt dan het Hilbert Hotel, die een capaciteit heeft van $\aleph_0$.

Zoals je hebt gezien wordt de x gevormd uit een *diagonaal.* Dit type redenering wordt daarom het *diagonaalargument* van Cantor genoemd. Cantor publiceerde zijn bewijs voor het diagonaalargument in het artikel *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre* (1891).[1] Daarmee wilde hij het bestaan van overaftelbare verzamelingen (nogmaals) op een eenvoudige manier aantonen. In Cantor's artikel kun je het oorspronkelijke bewijs nalezen op pagina 75–78.

[*] Bij het kiezen van x is er wel een aandachtspuntje dat we willen vermelden. We kunnen x weliswaar op heel veel manieren kiezen - voor elk decimaal hebben we eigenlijk 9 keuzen - maar let op: sommige reële getallen hebben twee verschillende decimale schrijfwijzes, namelijk eentje die in nullen eindigt en eentje die in negens eindigt. Bijvoorbeeld: 0,999... = 1,000.... Wanneer je in 0,999... de 0 in een 1 verandert en de 9 in een 0, dan verandert wel de decimale schrijfwijze maar het getal zelf niet! Dus is het beter als we de getallen $d_1, d_2, ..$ altijd ongelijk aan 0 en ongelijk aan 9 kiezen.

2.5 Transfiniete getallen

In het vorige hoofdstuk lieten we zien hoe Cantor tot de ontdekking kwam dat er niet één, maar minstens twee soorten 'oneindigheden' bestaan. Maar daarbij hield hij niet op. Cantor kwam vervolgens tot een hele dierentuin van oneindigheden. Om deze oneindigheden te ordenen bedacht hij oneindig grote, of *transfiniete* getallen.[10]

Om deze getallen te maken, bedacht hij twee principes.[10,3] Het eerste principe houdt in dat je altijd het volgende getal kunt vinden door er 1 bij op te tellen. Als we met niets beginnen ontstaat zo de rij $1, 2, 3, ..., n, ...$ Aangezien er geen grootste natuurlijke getal is komen we ook niet verder dan de natuurlijke getallen. Het tweede principe laat toe op dit soort momenten een nieuw getal te introduceren dat als bovengrens dient voor de getallen die tot nu toe zijn gemaakt. Om de bovengrens voor de rij van de natuurlijke getallen aan te geven, koos Cantor de laatste letter van het Griekse alfabet: de omega. Door het eerste principe toe te passen, krijgen we de rij ω, ω+1, ω+2, ..., ω+n, ... en dan gebruiken we het tweede principe om de bovengrens in te voeren: $\omega+\omega = \omega \cdot 2$. Deze principes kunnen we onbeperkt blijven toepassen en zo ontstaan de eerste transfiniete getallen. Deze nieuwe getallen noemde hij ook *ordinaalgetallen.*[10]

Door telkens de volgende stap te nemen komen we van ω tot ω^2 tot ω^3 en uiteindelijk ω^ω en zo ook $\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$. Dat laatste noemen we ϵ_0. Toch is zo'n berg omega's van ω even hoog als een berg omega's van ω+1. Door zo'n exponent te plaatsten verandert er namelijk niets aan de machtigheid van ω.*[10]

Dan gaan we even terug naar het hotel van Hilbert.

In 2.4 werd al genoemd dat het hotel een capaciteit heeft van $\aleph_0$. Als je de gasten op de juiste manier onderbrengt, is het mogelijk om ω^2, ω^ω of zelfs ϵ_0 gasten een kamer te geven, want alle genoemde getallen gaan niet verder dan de natuurlijke getallen. Zoals gezegd introduceerde Cantor de $\aleph$-notatie voor de kardinaalgetallen en noteerde het kardinaalgetal van $\mathbb{N}$ als $\aleph_0$. Het volgende kleinste kardinaalgetal dat strikt groter is dan $\aleph_0$ werd dus $\aleph_1$.[10] Met andere woorden, als er $\aleph_1$ gasten arriveren, passen ze niet meer in het Hilbert Hotel.†

Merk op dat we de volgende relatie hebben vastgesteld in hoofdstuk 2: $\aleph_0 = \overline{\overline{\mathbb{N}}}$ en $\omega = \overline{\overline{\mathbb{N}}}$, dus $\overline{\overline{\mathbb{N}}} = \omega = \aleph_0$. Deze drie symbolen hebben allemaal een andere betekenis, toch kunnen we ze wel als synoniemen behandelen.

* Deze blijft gelijk aan de kardinaliteit van $\mathbb{N}$

† $\aleph_1$ is hiermee het eerste overaftelbare ordinaalgetal die je verkrijgt door alle aftelbare ordinaalgetallen te verenigen. $\aleph_1$ zou je daarom kunnen definiëren als de verzameling van alle aftelbare ordinaalgetallen.

3 Nog meer ontdekkingen van Cantor

Cantor vermoedde aanvankelijk dat elke oneindige verzameling aftelbaar zou zijn. Na een lange tijd zwoegen bewees hij zelf dat dit vermoeden onjuist was. In 1874 publiceerde Cantor zijn eerste overaftelbaarheidsbewijs voor de reëele getallen en in 1891 toonde hij met het diagonaalargument aan dat overaftelbare verzamelingen bestaan (zie hoofdstuk 2). In hetzelfde artikel liet hij zien dat de verzameling van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ een grotere kardinaliteit heeft dan $\aleph_0$.

Dit bewijs is elegant en (verrassend genoeg) goed te volgen. Hieronder zullen we het bewijs stap voor stap uitleggen. Daarvoor moeten we eerst een nette definitie geven van 'de verzameling van alle deelverzamelingen'.

3.1 Machtsverzamelingen

3.1 Definitie. Zij V een verzameling. De *machtsverzameling* van V is de verzameling van alle *deelverzamelingen* van V. Notatie: $P(V)$[4*]

$$P(V) = \{A | A \subseteq V\}$$

We geven een voorbeeld. Stel $V = \{a, b, c\}$, Dan is

$$P(V) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

De $P(V)$ in dit voorbeeld heeft 8 ($= 2^3$) elementen. Dit is als volgt in te zien. Een element van $P(V)$ is een deelverzameling van V, en die ligt vast door voor elk element in V aan te geven of die wél of niet in de deelverzameling zit. We kiezen in dit geval uit drie elementen en dat geeft dus $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ mogelijke deelverzamelingen. Daarom geldt algemeen

Als V een verzameling is met $\overline{\overline{V}} = n$, dan $\overline{\overline{P(V)}} = 2^n$.[4]

Nu we weten wat een machtsverzameling is, kunnen we het hierboven genoemde bewijs netjes opschrijven.

3.2 Stelling. Zij V een verzameling dan $\overline{\overline{V}} < \overline{\overline{P(V)}}$.[4]

Bewijs. Allereerst gaan we $\overline{\overline{V}} < \overline{\overline{P(V)}}$ definiëren. We weten dat $\overline{\overline{V}} \leq \overline{\overline{P(V)}}$ als er een injectie is van V naar $P(V)$, en $\overline{\overline{V}} \geq \overline{\overline{P(V)}}$ als er een surjectie is. Als deze er beide zijn, weet je dat de verzamelingen even groot zijn. Wij zullen laten zien dat deze surjectie niet bestaat en ze daarom niet even groot zijn, dus dat $P(V)$ groter is dan V.

We weten al dat er een injectie is van V naar $P(V)$. Je kunt namelijk alle elementen van V aan de verzameling die alleen v bevat in $P(V)$ binden. Dan heb je alle elementen

[*] De notatie met P komt van het Duits - *Potenzmenge*.

uit V aan precies één element in $P(V)$ gekoppeld.

Om deze stelling te bewijzen, nemen we aan dat er wél een surjectie f van V naar $P(V)$ bestaat en proberen daaruit een tegenspraak af te leiden.

We definiëren nu een verzameling met 'slechte' elementen D:

$$D = \{x \in V | x \notin f(X)\}$$

Met andere woorden, de verzameling D bevat alle elementen uit S die niet in hun eigen beeld zitten.

D is een deelverzameling van V en zit daarom ook in $P(V)$. Dit komt door de definitie van een machtsverzameling.

We gaan nu uit van het element a in V waarvoor geldt dat D het beeld van a is.

$$\exists a \in V | D = f(a)$$

Als we nu aannemen dat a in zijn eigen beeld zit, dan zit a niet in D. Hierdoor zit a niet in zijn eigen beeld.

$$\begin{gathered} a \in f(a) \\ a \notin D \\ a \notin f(a) \end{gathered}$$

Dat is een tegenstrijdigheid. Nu gaan we uit van het tegenovergestelde: a zit niet in zijn eigen beeld. Dan zit a wel in D dus zit a wel in zijn eigen beeld.

$$\begin{gathered} a \notin f(a) \\ a \in D \\ a \in f(a) \end{gathered}$$

Dit is allebei niet waar, want een element kan niet tegelijkertijd wel én niet in zijn eigen beeld zitten. Onze aanname is dus fout: er bestaat geen surjectie van V naar $P(V)$. We hebben nu bewezen dat de machtsverzameling van een verzameling altijd groter is dan de verzameling zelf.

Uitgaande van deze theorie moet $P(\mathbb{N})$ groter zijn dan $\mathbb{N}$ en $P(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$. Cantor heeft vervolgens bewezen dat er een bijectie bestaat tussen $P(\mathbb{N})$ en het interval $(0, 1)$, met als gevolg dat $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}$.[3]

3.2 De Continuümhypothese

Na drie hoofdstukken kunnen we er eindelijk aan beginnen: wat is die befaamde continuümhypothese nou precies?

Tot nu toe hebben we gesproken over machtsverzamelingen en of die groter zijn dan de originele verzameling. Toen Cantor deze stelling had bewezen, werd het duidelijk dat je bij een gegeven verzameling V altijd een verzameling kunt vinden die groter is dan V: neem gewoon de machtsverzameling van V.

Nu is de vraag: bestaat er een kardinaliteit tussen een oneindige verzameling en zijn machtsverzameling? Specifieker: tussen de kardinaliteit van $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$?

De continuümhypothese beweert dat zo'n verzameling niet bestaat

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

$\mathbb{R}$ heet ook wel het *continuüm*. We duiden de machtigheid van $\mathbb{R}$ aan met c. Er geldt dus $c = 2^{\aleph_0}$. Vandaar de naam *continuümhypothese* (afgekort CH).

In 1900 heeft David Hilbert een lijst met 23 in die tijd onopgeloste problemen gepubliceerd, waarvan CH het eerste was. Tot op de dag van vandaag is het niet opgelost, net als talrijke andere problemen op zijn lijst. CH is echter speciaal. Het is niet opgelost, maar toch is er duidelijkheid over: CH is onbeslisbaar op grond van de axioma's van de verzamelingenleer. Volgens deze regels zou het wel kunnen dat er een verzameling bestaat die groter is dan die van de natuurlijke getallen maar kleiner dan die van de reële getallen, maar het levert ook geen tegenstrijdigheden op als deze niet bestaat.

Hilbert had CH bewezen in 1925. Tenminste, dat dacht hij, want zijn bewijs klopte niet. Het bevatte wel een aantal belangrijke ideeën die later werden gebruikt voor het bewijzen van de onbeslisbaarheid.

Toen Hilbert CH presenteerde in 1900, was iedereen er nog volledig van overtuigd dat alle wiskundige problemen een oplossing zouden hebben. In 1930 betoogde hij dit in Königsberg: *'Wir müssen wissen. Wir werden wissen.'* ('Wij moeten het weten. Wij zullen het weten.'). Ironisch genoeg presenteerde Gödel op dezelfde bijeenkomst, één dag eerder, zijn eerste *Incompleteness Theorem* (Onvolledigheidsstelling), die constateerde dat, in elk 'redelijk' axiomasysteem, onbeslisbare vraagstukken bestonden, en sterker nog moeten bestaan.[6]

4 Het universum van de verzamelingenleer

4.1 Het cumulatieve universum

Wat doe je als er niks is? Maak er een verzameling van; $\emptyset$.

Verzamelingen kun je maken door herhaaldelijk de operatie P toe te passen.* Stap voor stap kun je zo uiteindelijk alle verzamelingen maken. In iedere stap creëer je een nieuwe verzameling die de machtsverzameling van de vorige is.[13] Hierbij creëer je bij iedere stap een groter universum, dat iedere verzameling die in die stap voorkomt, in zich heeft.

Stap 0: $\emptyset$
Stap 1: $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$
Stap 2: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Eenmaal bij stap 3 aangekomen heb je al 16 verschillende verzamelingen geconstrueerd, bij stap 4 al 2^{16}. Bij iedere stap komen er steeds sneller steeds meer verzamelingen bij.

Maar waarom zou je dit doen?

Door deze operatie herhaaldelijk toe te passen creëer je alle mogelijke gefundeerde verzamelingen. Gefundeerd betekent dat de verzameling een kleinste element heeft. Binnen ZFC (meer daarover in hoofdstuk 5)† zijn alle verzamelingen gefundeerd.[13] Je kunt dus alle verzamelingen maken door enkel deze ene operatie uit te voeren. Als je eenmaal dit 'universum' hebt gemaakt kun je hiermee dingen gaan bewijzen en constateren.

Kun je met deze methode ook oneindig grote verzamelingen maken?

We gaan het proces generaliseren. Hierbij staat $R(n)$ voor 'alle verzamelingen tijdens stap n' (Waarbij $n \in \mathbb{N}$). De eerste stap is dan vanzelfsprekend $R(0) = \emptyset$. De volgende stap ziet er als volgt uit: $R(n+1) = P(R(n))$.

Als dit proces oneindig vaak gedaan wordt kom je uiteindelijk bij $R(\omega)$. Dit is de machtsverzameling van de verzameling daarvoor, per definitie. Deze voorlaatste verzameling is echter niet te construeren. $R(\omega)$ ziet er als volgt uit: $\bigcup_n R(n)$. (Alle verzamelingen tot nu toe, in één verzameling.)

Deze verzameling $R(\omega)$ heeft aftelbaar oneindig veel elementen. Als je de operatie P echter nog een keer toepast: $R(\omega+1) = P(R(\omega))$, is het niet langer aftelbaar, maar overaftelbaar. Zoals in hoofdstuk 3 namelijk al genoemd is, is de machtsverzameling van een verzameling altijd groter dan (en dus niet even groot als) de verzameling zelf.[4]

* Opfrisser: $P(x)$ (machtsverzameling van x) bevat alle deelverzamelingen van x, inclusief x en $\emptyset$.
† Voorproefje: Dit zijn de axioma's van de verzamelingenleer.

Met deze methode kun je dus oneindig veel verschillende oneindigheden construeren. Zo creëer je dus het *cumulatieve universum*: cumulatief, van *cumulare*, groter worden in het Latijn. Dit wordt ook wel het *Von Neumann universum* genoemd.[13]

4.2 De ZFC axioma's

Verzamelingen hebben we nu, wat kunnen we daar over zeggen?

We stappen nu over van de naïeve* verzamelingenleer naar de axiomatische.

Zermelo en Fraenkel zijn de grondleggers van de verzamelingenleer. Zij hebben de fundering van heel de verzamelingenleer vastgelegd, de axioma's. Deze axioma's zijn daarom naar hen vernoemd: ZF.

Axioma's zijn aannames die zo logisch zijn dat je ze eigenlijk sowieso zou aannemen. Ze zijn op zo'n manier geformuleerd dat je er dingen mee kunt bewijzen.

Werken met axioma's is eigenlijk iets heel bijzonders. Het gaat hierbij niet om of de dingen die je beschrijft waar of niet waar zijn in de 'echte' wereld. De dingen die je bewijst zijn waar binnen elke wereld waarin de axioma's waar zijn. Het bewijzen gebeurt op een logische manier, met volgens de logica kloppende redeneringen: je schuift de formules heen en weer volgens enkele heel vaste regels totdat er staat wat je wilt aantonen. Je kunt hiermee niet aantonen of dingen waar of niet waar zijn, alleen of ze wel of niet in tegenspraak zijn met, oftewel *consistent* zijn met de axioma's.

Axioma's zijn geschreven in de logische taal. Echter is deze taal moeilijk te snappen zonder dergelijke voorkennis. Daarom hebben wij geprobeerd deze axioma's op een begrijpelijke manier op te schrijven.

Axioma 0: Er bestaan verzamelingen.
$\exists x \ (x = x)$
Er bestaat een x waarvoor geldt dat x is x. Dit axioma vertelt ons dat er verzamelingen bestaan, en het universum dus niet leeg is.
Bijvoorbeeld: de verzameling $x = \{1, 2\}$ bestaat.

Axioma 1: Extensionaliteit
$\forall x \ \forall y \ (\forall z \ z \in x \leftrightarrow z \in y \rightarrow x = y)$
Als voor een gegeven x en y alle z in x en ook in y zit, dan is x gelijk aan y. Dus, als twee verzamelingen dezelfde elementen hebben, zijn het dezelfde verzamelingen.
Bijvoorbeeld: $x = \{2, 3\}$ is dezelfde verzameling als $y = \{3, 2\}$, want ze hebben dezelfde elementen.

Axioma 2: Regulariteit
$\forall x \ (\exists y \ y \in x \rightarrow \exists y \ (y \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in y)))$

* niet-axiomatische

Voor iedere niet-lege verzameling is er een element waarmee die een lege doorsnede heeft.
Bijvoorbeeld: in verzameling $x = \{\{3,4\},1\}$ is de verzameling $\{3,4\}$ een element. 3 en 4 zelf zitten allebei niet in x. Hieruit volgt dat een verzameling niet element van zichzelf kan zijn. ($x \notin x$)

Axioma 3: Het afscheidingsschema
Voor elke formule φ is de volgende formule een axioma:
$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(x)))$
Voor een verzameling x kan je altijd een verzameling maken van precies de elementen uit x die aan $\varphi(x)$ voldoen. $\varphi(x)$ is het meest gebruikte teken voor een bepaalde functie φ die op verzameling x "werkt".
Bijvoorbeeld: van de verzameling $x = \{1,2,3,4\}$ is de verzameling $x = \{2,4\}$ een deelverzameling. Hier wordt de eigenschap 'even' dus uitgedrukt door φ.

Axioma 4: Paarvorming
$\forall x\ \forall y\ \exists z\ (x \in z \wedge y \in z)$
Voor iedere twee verzamelingen bestaat er een verzameling met deze twee verzamelingen als elementen. (Voor iedere x en y is er een z zodanig dat x in z is en y in z is.)
Bijvoorbeeld: $x = \{1,2\}$ en $y = \emptyset$. Je kan deze twee combineren in $z = \{\{x\}, \emptyset\}$.

Axioma 5: Vereniging
$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \forall u\ ((u \in z \wedge z \in x) \rightarrow u \in y)$
Bij elke verzameling x bestaat een verzameling y die alle elementen in verzamelingen binnen x bevat.
Bijvoorbeeld: $x = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$. Dan $y = \{1,2,3,4\}$

Axioma 6: Vervangingsschema
Voor elke formule φ is de volgende formule een axioma:
$\forall A\ \forall p\ \exists B\ \forall u\ (u \in A \leftrightarrow u \in B \wedge \varphi(u,p))$
Als je functie φ op verzameling A toepast, krijg je verzameling B.

Axioma 7: Oneindigheid
$\exists x(\emptyset \in x \wedge (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x))$
Er bestaat een verzameling X die oneindig veel elementen heeft. Bijvoorbeeld de verzameling natuurlijke getallen.

Axioma 8: Machtsverzameling
$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \subseteq x \rightarrow z \in y)$
Er bestaat een machtsverzameling voor iedere verzameling. Bijvoorbeeld: $x = \{1,2\}$ dan is de machtsverzameling $y = \{\{1,2\},\{1\},\{2\},\emptyset\}$

Axioma 9: Keuze
$\forall x\ (\emptyset \notin x \rightarrow \exists f((f : x \rightarrow \bigcup x) \wedge (\forall y \in x\ f(y) \in y)))$
Je kunt, als je een aantal niet-lege verzamelingen hebt, van iedere verzameling precies één element nemen, en daar een nieuwe verzameling van maken. Dit axioma is later aan de andere axioma's toegevoegd en er wordt nog getwist of je dit kunt aannemen, want er volgen heel rare dingen uit. Deze discussie heeft Zermelo ertoe gebracht de verzamelingenleer te axiomatiseren. De axioma's van Zermelo en Freankel heten ZF zonder het keuzeaxioma en ZFC als deze wel wordt aangenomen (met de C van choice).[4,11]

5 Gödel en Cohen

5.1 Gödel

Na meer dan vier hoofdstukken kunnen we er dan eindelijk aan beginnen: Hoe is er bewezen dat de continuümhypothese niet bewezen of ontkracht kan worden op grond van het axiomastelsel ZFC? Eigenlijk bedoelen we: 'Hoe is er bewezen dat CH consistent is met de axioma's van ZFC, maar dat ¬CH* dat ook is?'[5] CH én ¬CH hebben dus beide geen tegenstrijdigheden met de axioma's.

Cantor heeft CH al proberen te bewijzen, maar dat ging (natuurlijk) fout. Gödel bedacht dus de eerste stap naar het bewijzen van de onbeslisbaarheid van CH: hij bewees dat CH consistent is met ZFC.

Maar hoe heeft hij dat dan gedaan?

Gödel heeft een model, L, van ZFC gemaakt, een verzameling waarin de ZFC axioma's gelden.

L is zo samengesteld dat ZF hierin geldt, en uit ZF+$\forall x[L(x)]^{\dagger}$, kan CH en AC (keuzeaxioma) worden afgeleid.

L is als volgt geconstrueerd: zoals in het vorige hoofdstuk genoemd, kun je een cumulatief universum maken door herhaaldelijk de operatie P (machtsverzameling) toe te passen. Gödel vond dat je zo wel erg veel heel grote verzamelingen kreeg. Daarom maakte hij een ander universum, waarbij hij niet P, maar D gebruikte.

$$D(x) = \text{de collectie van de in } (x, \in) \text{ definiëerbare deelverzamelingen van } x.$$

Als $a \subseteq x$ en a is definiëerbaar in x, dan bestaat er een formule die waar is voor alle elementen van a die niet waar is voor de rest van x.‡

Door het herhaaldelijk toepassen van deze constructie vind je uiteindelijk de verzameling $L(x)$. Nu deze verzameling bestaat kun je bewijzen dat ZF+$\forall x[L(x)]$ consistent is met het keuzeaxioma (AC) en CH. Meer hierover kun je lezen in *Consistency-Proof for the Generalized Continuum-Hypothesis*[9], geschreven door Kurt Gödel zelf.

Gödel behoorde tot de slimste mathematici en filosofen van de wereld. Hij heeft bijvoorbeeld de beroemde onvolledigheidsstelling bewezen, die beweert dat ieder axiomatisch systeem dat krachtig genoeg is om de rekenkunde van de natuurlijke getallen te beschrijven, minstens één ware stelling over de natuurlijke getallen onbeslist laat. Hij heeft dit allemaal bedacht toen hij nog in Wenen woonde. Toen de Tweede Wereldoorlog startte, vluchtten hij en zijn vrouw, Adele Nimbursky naar Princeton, VS. Hier kreeg hij een baan aan het *Institute for Advanced Study*. Hier versterkte hij ook zijn vriendschap met de welbekende Albert Einstein. Aan het einde van Einsteins leven

---

* niet CH, dus dat er wél een grootte tussen die van $\mathbb{N}$ en die van $\mathbb{R}$ bestaat.

† $\forall x[L(x)]$ betekent dat het hier alleen gaat over verzamelingen die Gödel-constueerbaar zijn, dus volgens uit het herhaald toepassen van de operatie D.

‡ Je kunt dus a binnen x *definiëren* via een formule die 'a uit x filtert'.

zei hij zelfs dat "zijn eigen werk niet veel meer betekende, maar dat hij alleen nog maar naar het instituut ging [...] om het voorrecht te hebben samen met Gödel naar huis te lopen."[7] Maar naast briljant, was hij helaas ook geestelijk instabiel. Aan het eind van zijn leven werd dit zo erg, dat hij paranoïde waandenkbeelden ontwikkelde. Zo had hij een obsessieve angst vergiftigd te worden en wilde alleen dingen eten als zijn vrouw het had voorgeproefd. Helaas werd zij op een gegeven moment opgenomen in een ziekenhuis, wat ervoor zorgde dat Gödel niets meer durfde te eten en zichzelf verhongerde.

5.2 Cohen

Nadat Gödel had bewezen dat CH de axioma's niet tegenspreekt, maakte Cohen het werk af; hij bewees dat $\neg$CH ook consistent is met de ZFC axioma's (en bedacht even tussendoor een nieuwe bewijsmethode[2]).

Cohen nam hetzelfde model L als Gödel, dus waar alle ZFC axioma's in gelden, en voegde elementen toe zodanig dat er een injectie bestaat van $\aleph_2$ naar $2^{\aleph_0}$ (oftewel $P(\omega)$, zie hoofdstuk 4).

$$\aleph_2 \preceq 2^{\aleph_0}$$ [13]

Als dit waar zou zijn, zou dit CH tegenspreken. Er is dan namelijk wel een verzameling met een kardinaliteit tussen $\aleph_0$ en $2^{\aleph_0}$ in, namelijk $\aleph_1$. $2^{\aleph_0}$ is niet langer de eerste oneindigheid die strikt groter is dan $\aleph_0$.

Met deze methode een model uitbreiden, zodanig dat het voldoet aan bepaalde eisen (in ons geval de ZF axioma's), heet *forcing.* Deze is voor het eerst gebruikt door Cohen om de consistentie van $\neg$CH te bewijzen.[2] Als je bepaalde elementen aan een model toevoegt, is het namelijk alles behalve vanzelfsprekend dat de axioma's nog staan en of je niet per ongeluk andere dingen eraan toevoegt (als je bijvoorbeeld een bijectie tussen $\aleph_1$ en $\aleph_2$ toevoegt ben je nog geen stap verder). Met behulp van deze methode voeg je de extra elementen die je nodig hebt toe aan het model, samen met een aantal andere elementen, en wel op zo'n manier dat het model nog voldoet aan de originele axioma's.[8, 13]

5.2.1 Forcing

Om uit te leggen wat Cohen nou heeft gedaan, moeten we eerst wat weten over hoe M, het model dat uitgebreid gaat worden. M is een ctm, oftewel een *'countable, transitive model'.*

Countable, oftewel, aftelbaar betekent dat alle verzamelingen in M en M zelf eindig of aftelbaar zijn. Toch bestaan er grote kardinalen, als $\aleph_1, \aleph_2$. ZF bewijst dat deze bestaan. Hoe kan dat? Overaftelbaar is niet hetzelfde in M als in V.* Alle oneindige verzamelingen in M zijn eigenlijk aftelbaar. Er bestaat dus een bijectieve functie van

* Verzameling van alle verzamelingen behalve zichzelf, ook wel 'verzamelingenuniversum'. Genoemd naar Von Neumann. Dit is de verzameling die in hoofdstuk 4 behandeld is.

$\aleph_i$ naar $\aleph_j$, ergens in V. Deze functie, die eigenlijk een grote verzameling is met duo's geordende elementen, telkens één van de ene verzameling en één van de ander, bestaat niet in M. Binnen M zijn het dus echt verschillende kardinaliteiten, maar in V zouden ze allemaal even groot zijn. De alefs in M zijn dus niet per se dezelfde als de alefs die we allemaal kennen. $\aleph_1$ in M is bijvoorbeeld niet de oude vertrouwde $\aleph_1$ uit V die we kennen.

Transitive, ook wel bekend als transitief, houdt in dat alle elementen van alle verzamelingen in M ook in M zitten. In logische taal:

$$(\forall a \in M)(\forall b \in a) \to (b \in M)$$

De verzameling $\{\{1,2\},1,2,3,\emptyset\}$ is bijvoorbeeld transitief, omdat alle elementen van elementen van de verzameling ook in de verzameling zitten.

M is gedefiniëerd, tijd voor stap 2: M uitbreiden, zodanig dat $\neg$CH waar is. Dit kun je doen door een functie toe te voegen. Een speciale functie: de eerder genoemde injectieve functie van $\aleph_2$ naar $P(\omega)$ (in V is $P(\omega)$ gelijk aan $\aleph_1$). We gaan deze functie en andere elementen toevoegen aan M om $M[G]^*$ te creeëren. Om uit te vinden welke functie dit is, hoe deze gedefiniëerd is, welke extra elementen worden toegevoegd en hoe hier dan $\neg$CH uit volgt, verwijzen wij u door naar de publicatie van P.J. Cohen: *The Independence of the Continuum Hypothesis.*[2]

5.3 En nu?

Wat nu? Met de huidige set van de axioma's blijft de continuümhypothese onbeslist. Optie 1 is om gewoon aan een ander probleem te gaan werken en dit laten zoals het is. Maar dat is niet leuk. Optie 2 is om een nieuw axioma (of nieuwe axioma's) toe te voegen die CH wel kunnen beslissen. Waar je als eerste aan zou denken, is om CH of $\neg$CH zelf toe te voegen. Maar dat is niet heel elegant. We willen namelijk niet voor iedere onbeslisbare hypothese een nieuw axioma. Gödel heeft dit al geprobeerd. Dat heeft niet tot een bevredigend resultaat geleid.

Veel wiskundigen hebben geprobeerd om zulke fantastische axioma's te vinden: axioma's die ervoor zorgen dat veel onbeslisbare problemen beslisbaar worden. Als je meer wilt weten over de huidige ontwikkelingen op dit gebied en bekend bent met verzamelingenleer, kijk dan vooral eens naar *'Solving the undecidability of the Continuum Hypothesis: a short summary of the results since 1963.'*,[8] door L. B. Kuijer op de Rijksuniversiteit Groningen.

* Dus $M+$ elementen die voldoen aan bepaalde eisen die gedefinieerd zijn door G.

Nawoord

Dat was het alweer. Wij hopen natuurlijk dat u, de lezer, wat hebt geleerd en het interessant vond! Wijzelf vonden het schrijven van dit werkstuk erg leerzaam en eigenlijk ook wel leuk om te doen. We hebben veel geleerd, over wiskunde natuurlijk, maar ook over hoe je zo'n grote opdracht nou moet aanpakken en hoe je zorgt voor een goede taakverdeling. Bij ons is dit wel goed gegaan, we hebben beide ongeveer evenveel geschreven en opgezocht en ondertussen goed gecommuniceerd over het gemaakte en nog niet gemaakte werk. Ook heeft meneer Planting, onze begeleider, ons goed geholpen door constructieve feedback te geven en hier en daar wat dingetjes te verhelderen zodat wij weer verder konden. Verder willen we natuurlijk iedereen die ons ews voor ons heeft doorgelezen bedanken voor de nuttige feedback. Zij (Josephine, Anne, Wouter, Edgar, Birgit en Floris) hebben ons erg geholpen om het eindproduct zo netjes mogelijk te maken!

We hebben de samenwerking heel prettig ondervonden, we wisten heel goed waar wij beiden mee bezig waren. We hadden eigenlijk vanaf het begin al wel het gevoel dat het op tijd af zou komen en we er tevreden mee zouden zijn. Het bleek natuurlijk al vrij vroeg dat ons onderwerp wel uitdagender was dan een gemiddeld ews-onderwerp, maar wij hadden er allebei zin in en vonden het interessant. Uiteindelijk is het helemaal goed gekomen! Ook hebben wij de samenwerking met dr. Veldman als erg prettig ervaren. Hij heeft ons heel goed geholpen door de moeilijkste onderwerpen heel helder uit te leggen. Hierdoor konden wij deze op onze beurt weer (hopelijk) duidelijk aan u uitleggen.

Ik (Alex) ben zelf erg trots op het eindproduct. Als ik eenzelfde project nogmaals zou moeten maken, zou ik dat waarschijnlijk op een vergelijkbare manier doen. Werken in LaTeXis me erg bevallen, dus dat zal ik zeker meenemen naar toekomstige projecten. Verder vond ikzelf dat we in de momenten die we kregen om aan dit ews te werken, ook echt hard hebben gewerkt. We hadden beide ongeveer dezelfde hoeveelheid motivatie. Niet dat ik voor een zesje ging en Eva pas gerust was met een negen, en ik daardoor een stuk minder deed. We gingen allebei voor die negen. Wat ik wel anders zou doen de volgende keer, is me bekend maken met het programma waarin we schrijven voordat we beginnen. Als we dat hadden gedaan voor we begonnen met typen, waren we waarschijnlijk een stuk minder vastgelopen op foutmeldingen. Dat terzijde heb ik vooral genoten van het maken van dit werkstuk. Mezelf helemaal onderdompelen in wiskunde en problemen aangaan die eigenlijk iets te moeilijk zijn om echt te doorgronden is inmiddels bijna een hobby geworden.

Ik (Eva) ben ook tevreden met wat we hebben neergezet. De gedrevenheid waarmee we aan de slag waren gegaan heeft mij verbaasd. Volgens mij vonden we het allebei geweldig om bezig te zijn met iets dat ons interesseert, ook al moesten we soms zo hard nadenken dat het leek alsof onze hoofden gingen ontploffen. Maar blijkbaar houden we wel van wat uitdaging! Daarnaast ben ik erg blij met alle hulp dat we hebben gekregen - van onze begeleider, van meneer Veldman en van alle klasgenoten. Ik vind het zo fijn dat iedereen geïnteresseerd was en bereid was te helpen om ons werkstuk beter te maken! Verder heeft het maken van dit ews mij kennis laten maken LaTeX, waarin ik nu handiger ben geworden. Net als Alex vind ik het een fijn programma om mee te werken en zal ik het zeker weer gebruiken wanneer ik tijdens mijn studie werkstukken moet schrijven. Naast het genoemde probleem van de onhandigheid met LaTeXheb ik niets op te merken. Alles verliep gewoon best soepel. Ik hoop dit werkstuk ooit aan te kunnen vullen als ik later weer een stuk verder in de wiskunde ben gevorderd!

Het was zeker niet weinig werk, maar al met al vonden we het een interessant project om aan te werken. We hebben veel geleerd en we weten nu allebei dat we waarschijnlijk iets willen gaan studeren in de wiskundige richting. Vooral dingen die onze kennis te buiten gingen hebben ons geboeid en aan het denken gezet. Puzzelen tot je bij een oplossing komt, om af en toe vast te lopen maar met wat assistentie toch weer op de baan te komen. Ja! Daar hebben we echt van genoten. We hopen dat u het net zo leuk vond om ons werkstuk te lezen!

6 Literatuurlijst

Referenties

[1] Georg Cantor. Über eine elementare frage der mannigfaltigkeitslehre. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, 1891.

[2] Paul J. Cohen. *The independence of the Continuum Hypothesis*. Stanford University, Department of Mathematics, 1963.

[3] TU Delft. *De Continuümhypothese*. K. P. Hart, 2008.

[4] TU Delft. *Verzamelingenleer*. K. P. Hart, 2015.

[5] Stanford University encyclopedia of Philosophy. The continuum hypothesis. 2013.

[6] Institute for Advanced Study. *Can the Continuum Hypothesis be solved?* Juliette Kennedy, 2011.

[7] Rebecca Goldstein. *Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt Gödel*. W.W. Norton, 2005.

[8] Rijksuniversiteit Groningen. *Solving the undecidability of the Continuum Hypothesis: a short summary of the results since 1963*. L. B. Kuijer, 2007.

[9] Kurt Gödel. *Consistency-Proof for the Generalized Continuum-Hypothesis*. 1939.

[10] Rudy Rucker. *Oneindigheid, filosofie en wetenschap van het oneindige.* Contact Amsterdam, 1986.

[11] Dirk van Dalen. *L. E. J. Brouwer, een biografie*. Uitgeverij Bert Bakker Amsterdam, 2002.

[12] Leon van den Broek en Arnoud van Rooij. *Blik op Oneindigheid*. Epsilon Uitgaven, 2020.

[13] Wim Veldman. *Gesprekken op 04-07 en 29-08 2023*.

[14] Wim Veldman. *Oneindige verzamelingen*. Radboud Universiteit, 2008.