

Logica in de knoop

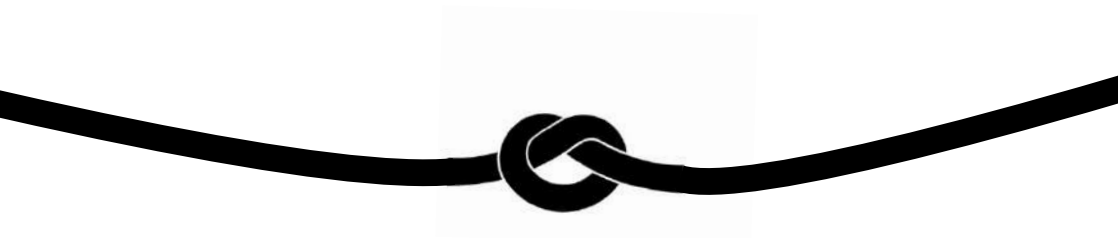
**verzamelingenleer en Russells
logische kortsluiting**



Eva van Opdorp

LOGICA IN DE KNOOP

Verzamelingenleer en Russells logische kortsluiting



Logica in de knoop Copyright © 2026 Eva J.J. van Opdorp Klas: 5GA1-6GA1

School: Lyceum Ypenburg, Den Haag Eerste druk 2025 Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze publicatie mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt in welke vorm dan ook, hetzij elektronisch, mechanisch, door middel van fotokopie, opname of op enige andere manier, zonder voorafgaande toestemming van de uitgever.

Vormgeving: Eva J.J. van Opdorp

Voorblad ontwerp: Eva J.J. van Opdorp

Gepubliceerd in Nederland

ISBN-15: 098-569-8378-386-78

ISBN-13: 098-568-8378-286

*“Ein Philosoph, der keine Beziehung zur Geometrie
hat, ist nur ein halber Philosoph, und ein
Mathematiker, der keine philosophische Ader hat,
ist nur ein halber Mathematiker.”*
~ Gottlob Frege

INHOUD



Voorwoord	7
Inleiding	9
Deel 1: verzamelingen	15
▫ Denken in hokjes	16
▫ De geboorte en evolutie van verzamelingen	33
▫ Waarom wiskundigen van verzamelingen houden	37
▫ Naïeve verzamelingenleer: naïef, maar niet onschuldig	41
▫ Nieuwe spelregels	54
Deel 2: Russell en de paradox	58
▫ Paradox: contradictie of illusie?	59
▫ De man achter de paradox	63
▫ De spiegel van logica en hoe het barst	70
▫ De gevolgen voor de logica	76
▫ Wat betekent dit voor taal?	94
Deel 3: pogingen tot een uitweg	99
▫ Zermelo-Fraenkel: een strakkere aanpak	100
▫ De introductie van een keuze	111
▫ Russells oplossing: type theorie	115
▫ Een taalkundige aanpak	122
▫ Nieuwe systemen met nieuwe problemen	125
Deel 4: de paradox in de praktijk	136
▫ Mijn aanpak	137
▫ Hoe schijnbaar is het een tegenstelling?	139
▫ De ervaring van een paradox	144

▫ Maakt jouw achtergrond het verschil?	151
▫ Is de verwarring uit te roeien?	157

Conclusie	163
Over de schrijver	165
Bibliografie	166
Bijlage: antwoorden oefenopgaven	170

VOORWOORD



Dit boek wordt geschreven als opdracht voor mijn profielwerkstuk. Hoewel ik natuurlijk geen *boek* hoefde te schrijven, had ik deze keuze toch, koppig genoeg, uit eigen vrije wil gemaakt. Ik wilde mezelf een extra uitdaging geven, en dat is mij in ieder geval zonder twijfel gelukt! Dit boek dient het belangrijkste ‘ontwerp’ te zijn van mijn ontwerpprofielstuk. Het bevat echter ook een onderzoek, dat ook hoopt te voldoen aan de eisen van een onderzoeksprofielwerkstuk. Dit boek, oftewel dit ontwerp, wordt ook verwerkt in het ondersteunend verslag (wat trouwens te vinden is in de bibliografie). Dit ondersteunend verslag zal ook het proces van de lesontwerpen (die in *deel 4* benoemd worden) bevatten. In dat verslag worden ook andere onderzoeksvragen behandeld die van toepassing waren op, onder andere, dit boek en de lesontwerpen. Ik hoop in ieder geval dat jij, beste lezer, net zo veel zal genieten van het lezen van mijn werk, als dat ik zal genieten van het inleveren van mijn werk.

Uitgevoerd door: Eva J.J. van Opdorp

School: Lyceum Ypenburg

Klas: 5GA1-6GA1

Schooljaar: 2025-2026

Begeleider: M.J. de Neef

Mijn medeplichtigen

Het zal geen verrassing zijn dat ik gedurende het gehele proces veel hulpmiddelen heb moeten inschakelen. Niet alleen met betrekking tot de inhoud zelf, maar ook bij het behouden van mijn mentale gezondheid tijdens dit proces. Veel mensen binnen mijn school hebben dit proces – of ze het nu leuk vonden of niet – van dichtbij of op de achtergrond meegemaakt en eraan bijgedragen. En veel hebben er ook onder moeten lijden – met name mijn begeleider.

Ik wil dus een aantal personen ontzettend bedanken voor hun bijdrage.

Allereerst is het noodzakelijk dat ik mijn begeleider bedank. Ik wil mijn begeleider ervoor bedanken mij niet te hebben vastgebonden aan de ketenen van bepaalde beperkende regels of de ketenen van een maximum. Ik heb zo mijn ideeën, geboren uit creativiteit, passie en ambitie, zonder onnodige restricties, kunnen actualiseren. Voor het bieden van deze vrijheid ben ik enorm dankbaar. Alle tijd die hij (niet altijd vrijwillig) heeft gestoken in mij wordt heel erg gewaardeerd. Ik was heel blij om nog met iemand te kunnen spreken over een onderwerp waar ieder ander in mijn omgeving helemaal gek van werd. Het proces zou niet zo leuk zijn geweest zonder u! Ik zal u missen volgend jaar.

Ook moet ik meneer J. van Lit bedanken voor zijn onverwijd enthousiasme en steun. Niet alleen heeft hij mij veel geholpen met het zoeken naar bronnen voor de inhoud en theorie, hij was ook heel nuttig als corrector.

Daarover gesproken, moet ook de volgende corrector bedankt worden: mevrouw S. Anell.

Mevrouw Anell, oftewel mijn moeder, verdient ook extra dank voor de constante mentale ondersteuning die zij mij moest bieden en voor haar eindeloze geduld. Hiervoor heeft zij namelijk vaak haar eigen mentale gezondheid moeten opofferen (maar daar ben ik inmiddels voor vergeving). Ook wil ik voor diezelfde mentale ondersteuning Olivia Hira en Lakshmi Chirmotti bedanken.

Die vele slapeloze nachten zou ik niet hebben overleefd zonder jullie aanstekelijk humeur die zich aan de andere kant van de telefoonlijn bevond. Ook voor de hulp bij het interviewen (en irriteren) van mensen op straat wil ik weer Lakshmi, en Amber Vondeling bedanken. Dit geldt ook voor mijn stiefvader Mahmoud Badr. Ook voor zijn geduld ben ik erg dankbaar. Ditzelfde geldt voor mijn mentor meneer Gallo. En de hele ervaring was niet zo makkelijk geweest zonder de late middagen die mevrouw Landheer en mevrouw Ghoerbien met liefde hadden opgegeven om naar mijn 'problemen' te luisteren. Meneer E. Dees en mevrouw Landheer wil ik ook bedanken voor hun bijdrage bij het evalueren van mijn lesontwerpen, naast alle docenten die mij überhaupt de mogelijkheid hebben gegeven om die lessen te geven. Hun hulp betekende veel voor het onderzoek en voor mij.

Uiteraard wil ik ook de volgende hoogleraren van de Rijksuniversiteit Groningen, de TU Delft en Universiteit van Amsterdam bedanken voor het delen van hun waardevolle inzichten: Arthur Bakker, Barteld Kooi, Daniel Frumin, Klaas Pieter Hart en Revantha Ramanayake.

Tot slot wil ik ieder welwillende ziel – binnen én buiten school – die mee had gedaan aan mijn onderzoek, bedanken voor hun contributie.

INLEIDING

Het moment dat je het woord 'logica' leest, denk je misschien aan een politicus die wordt ingemaakt met een onweerlegbaar argument. Of misschien denk je aan het onderbuikgevoel dat je hebt bij iets wat overduidelijk waar is voor jou: "Dat is toch gewoon logisch!" Hoewel zulke voor-beelden zeker niet irrelevant zijn, is logica in werkelijkheid een stuk abstracter, gecompliceerder – oh ja, en absurder – dan je zou denken.

Logica werd letterlijk gedefinieerd als: "een wetenschap die zich met de wetten van het denken bezighoudt." (Van Dale, 1992). Deze wetenschap bestond officieel al sinds de filosoof Aristoteles. Het waren vooral filosofen die op dat moment logica bestudeerden. Zij hielden zich bijvoorbeeld bezig met het bestuderen van argumenten. Als ik zeg:

"Alle mensen zijn sterfelijk."

Socrates is een mens.

Dus Socrates is sterfelijk."

Is dit een logisch geldig argument? Zo ja, waarom dan? Zulke vragen beantwoordden de logici sinds de oude Grieken. Maar vanaf de negentiende eeuw kunnen wij spreken van een ander soort logica. Dankzij het werk van een aantal filosofen en wiskundigen bestond sindsdien de *mathematische logica*. Hierbij wordt logica op een wiskundige manier benaderd. Alles werd voortaan wiskundig geformuleerd met behulp van logische symbolen, formules en zelfs cijfers. Kort na die 'uitvinding' van mathematische logica, werd het al spoedig gebruikt als fundament van de hele wiskunde (Klos, 2016).

In dit boek houden we ons vooral bezig met één tak binnen de (mathematische) logica: namelijk, verzamelingenleer. Dit is de studie van verzamelingen – duh. Verzamelingenleer is ontzettend belangrijk geweest voor het definiëren van en werken met veel wiskundige concepten. We vertrouwen op logica om alles te begrijpen – maar wat als de logica zichzelf niet begrijpt? Deze verwarring wordt het beste blootgelegd door Russells paradox.

Waarom het ertoe doet

Ik hoop met dit boek duidelijk te illustreren dat logica en specifiek verzamelingenleer een integraal deel uitmaakt van niet alleen de wiskunde, maar ook ons dagelijks leven. Voor de meesten is het wel duidelijk dat wij dagelijks gebruik maken van wiskunde. Ook is het voor velen evident dat wij eveneens dagelijks gebruik maken van logica (hoewel niet iedereen dat even schitterend doet... Je weet wie je bent!). Maar daarnaast benutten wij ook impliciet, en zonder dat wij het überhaupt merken, verzamelingenleer. Elke keer als jij nadenkt over alle oneven getallen of over je favoriete voetbalteam, maak je gebruik van verzamelingen.

Maar zoals alles in het leven, is het niet zo simpel als het oogt. Ook dit systeem of deze theorie lijdt onder wat problemen, waaronder de belangrijkste Russells paradox is. Het begrijpen van deze paradox geeft jou niet alleen inzicht over de kwetsbaarheid van de logica en wiskunde, maar in principe over alles wat wij denken te kunnen bewijzen.

Waarom ik hierover schrijf

Ik besloot over dit onderwerp te schrijven, uiteraard omdat ik het fascinerend vind hoe door één paradox, de hele fundering van de wiskunde in principe uit elkaar kan vallen. Maar daarnaast is het een ontzettend leuk onderwerp om te onderzoeken, vanwege het feit dat het verschillende vakken en disciplines incorporeert. Je werkt namelijk niet alleen met wiskunde, maar automatisch ook met filosofie. Je moet je ook weer inlezen in de formele taal en op bepaalde punten krijg je zelfs te maken met psychologie (zie daarvoor vooral deel 4 van dit boek). Je leert dus niet alleen een kritischer en breder blik te werpen op wiskunde en logica, maar ook op taal. Ik hoop dus ieder die dit leest te verlichten.

Wie is mijn doelwit?

Wie hoop ik hiermee nou eigenlijk aan te spreken? En voor wie is dit überhaupt toegankelijk? Mijn wens is dat dit boek niet alleen toegankelijk is voor degene die al geïnteresseerd is in het onderwerp, maar ook voor de persoon die eigenlijk zo min mogelijk te maken wil hebben met wiskunde en totaal geen zin heeft in zulke irritante filosofische vragen zoals “Hoe weet je dat nou écht?”

Ik hoop ook, hoe ambitieus dit ook mag klinken, dat dit ieder persoon, of deze nou een achtergrond hebt in wiskunde of niet, zal aanspreken. Mijn doel is namelijk om dit op zo’n wijze te schrijven dat het niet alleen begrijpelijk, maar ook een beetje vermakelijk is. Je dient niet dit onderwerp leuk te vinden, maar minstens wel dit werk.

Onderzoeksvragen en de opbouw

In het verloop van dit boek zijn er een aantal vragen die ik beantwoord wil hebben (en voor jou, beste lezer, wil beantwoorden).

De centrale vraag van dit werk is: **“Hoe toont Russells paradox de grenzen van taal en formele logica aan, en wat voor oplossingen zijn op zulke paradoxen bedacht?”**

Deze hoofdvraag kan in de volgende vier deelvragen worden opgedeeld:

- 1 Wat is verzamelingenleer?
- 2 Wat is Russells paradox?
- 3 Wat voor impact heeft Russells paradox op taal en logica?
- 4 Welke oplossingen zijn op de paradox bedacht en hoe verschillen ze van elkaar?

In *deel 1* van dit werk behandelen we deelvraag 1. Hier duiken we diep in de verzamelingenleer: Van haar ontstaan tot de verbazingwekkende manieren waarop ze wordt toegepast. In *deel 2* krijgen we te maken met zowel deelvraag 2 als 3, oftewel de paradox. Hier gaan we een groot probleem ontdekken in een systeem dat voorheen als onaantastbaar werd gezien. Als laatste behandelen we deelvraag 4 tijdens deel 3. Hierbij gaan we op jacht naar verschillende oplossingen voor het probleem waar wij eerder kennis mee hebben gemaakt, en daarna zullen die oplossingen ook ontmanteld moeten worden. Elk van deze delen bevat een aantal zelfgemaakte oefenopdrachten per onderdeel en een mogelijke verdieping op de theorie, als jij denkt meer aan te kunnen. Het niveau en de mate van formalisme zal ook geleidelijk stijgen. Het doel is niet alleen om jou te informeren, maar er ook voor te zorgen dat je werkelijk met de stof aan de slag kunt. Wiskunde kan namelijk niet beheerst worden zonder ermee te oefenen. Dan vraag jij je nu misschien af: “Hoe zit het dan met het laatste deel van het boek, namelijk deel 4?”

Ik beantwoord in *deel 4* een andere vraag. Op dat moment houden we ons vooral bezig met de onderzoeksvraag: **“Wat is het effect van uitleg over de verschillende oplossingen van Russells paradox op hoe goed mensen logisch paradoxale zinnen begrijpen?”** We willen niet alleen de theorie begrijpen, maar ook waarom het nuttig is: dit is het doel van deel 4. Ik maak gebruik van de informatie van de eerdere delen en zal dit proberen toepassen op de werkelijkheid door middel van verschillende onderzoeken. Zelf ben ik erg benieuwd naar wat voor resultaten dat zal opleveren.

De hoofdvraag wordt uiteindelijk beantwoord, met behulp van alle informatie en ontdekkingen uit elk van de vier delen, in de conclusie van dit boek.

Later zal ik uitgebreid uitleg geven over de logische symbolen binnen de verzamelingenleer en hoe ze benut worden. Zie tabel 1 hieronder als nuttig hulpmiddel voor het ontcijferen van bepaalde logische symbolen. Dit tabel bevat alle symbolen die behandeld worden in dit boek (en meer).

Tabel 1 : Formele symbolen binnen de logica

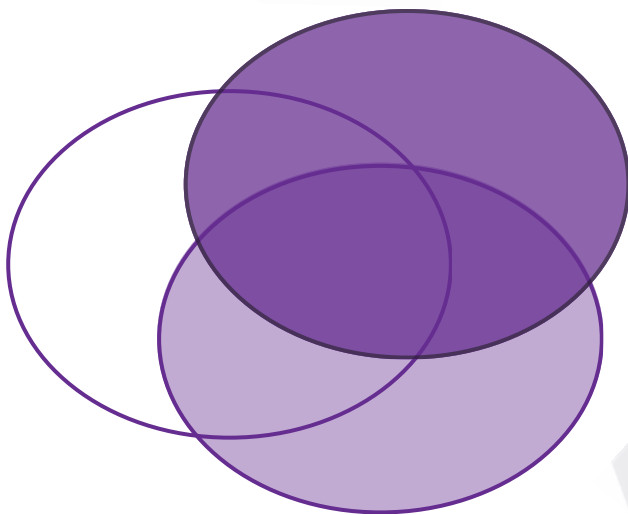
Symbool	Begrip	Betekenis
{ }	Accolades	Een verzameling van...
=	Gelijkheidsteken	Is gelijk aan
≠	Ongelijkheidsteken	Is niet gelijk aan
	N.v.t.	Zodanig dat/ waarbij
A	Kardinaliteit	Het aantal elementen in A
∩	Doorsnede	Elementen binnen verzameling A en B
U	Vereniging	Elementen binnen verzameling A of B
∈	Lidmaatschap van een verzameling	is een element van...

$\notin$	Niet-lidmaatschap van een verzameling	is geen element van...
$\emptyset$	Lege verzameling	Verzameling zonder elementen
U	Universele verzameling	De verzameling van alle elementen
A^c	Complement	Alle elementen die niet binnen A zitten
$\subset$	Juiste deelverzameling	A is een juiste deelverzameling van B
$\subseteq$	Onjuiste deelverzameling	A is een onjuiste deelverzameling van B
$P(A)$	Machtsverzameling	De machtsverzameling van A
$A \times B$	Het cartesisch product	Het cartesisch product van A en B
(a, b)	Het geordende paar	De verzameling van a en b waarbij de volgorde uitmaakt
φ	Predicaat	Onder voorwaarde
$\wedge$	Conjunctuur	En
$\vee$	Disjunctie	Of
$\neg$	Negatie	Niet
$\Rightarrow$	Implicatie	Als...dan
$\Leftrightarrow$	Equivalentie	Mits
$\exists$	Existentieel	Er bestaat
$\forall$	Universeel	Voor alle
$\mathbb{N}$	N.v.t.	De verzameling van alle natuurlijke getallen
$\mathbb{R}$	N.v.t.	De verzameling van alle reële getallen
$\mathbb{C}$	N.v.t.	De verzameling van alle complexe getallen

$\mathbb{I}$	N.v.t.	De verzameling van alle irrationale getallen
$\mathbb{Q}$	N.v.t.	De verzameling van alle rationale getallen
$\mathbb{Z}$	N.v.t.	De verzameling van alle gehele getallen
xRy	Relatie	De relatie tussen element x en y
$f(x)$	Functie	Functie met input x en een gegeven output y
ω	Het eerste oneindig ordinaalgetal	De verzameling van alle aftelbare getallen
$\aleph_0$	Aleph-nul	De kardinaliteit van ω
$\vdash$	Afleidingssymbool	...bewijst...
$\nvdash$	Niet-afleidingssymbool	...bewijst niet...
$\ulcorner A \urcorner$	Gödelnummeringsnotatie	Het Gödelnummer van een formule A
$\tilde{\mathfrak{G}}$	N.v.t.	Een verzameling van verzamelingen



DEEL 1: VERZAMELINGEN



Zoals al eerder genoemd in de inleiding houdt verzamelingenleer zich bezig met de studie van verzamelingen. En deze kennis hebben we nodig om Russells paradox echt te kunnen begrijpen. Wellicht heb je wel een intuïtief idee van wat dat is. Je denkt misschien wel aan een collectie van kaarten of een serie poppetjes die je kunt sparen. Deze intuïtie wordt in dit deel van het boek vertaald naar een wiskundige theorie. Gaaf toch, dat dát kan met wiskunde? We kijken naar hoe een verzameling in de wiskunde wordt gedefinieerd, hoe deze ontstond en wordt toegepast. En zodra we dit idee hebben verkend, botsen we tegen wat verrassende, paradoxale problemen aan.

1.1 Denken in hokjes

We zagen al eerder dat verzamelingenleer een erg belangrijk idee is voor de wiskunde. Waarom het zo belangrijk is, zal ik ook zometeen uitleggen. Maar voordat ik dat doe, is het belangrijk om te weten waar we het überhaupt over hebben en hoe het tot stand is gekomen. We duiken nu wat dieper in op de verzamelingenleer en de regels en notaties binnen die theorie.

“Een verzameling is het samenbrengen tot een geheel van duidelijke, onderscheiden objecten van onze waarneming of van onze gedachten.” ~ Georg Cantor

Zo definieerde Georg Cantor, de grondlegger van de verzamelingenleer, een verzameling. In gewone taal: het komt erop neer dat een verzameling een collectie is van concepten of objecten die je als één geheel kunt beschouwen. Een verzameling hoeft dus geen objecten te bevatten die op de ene of de andere manier verbonden zijn of objecten die überhaupt bestaan! Zo kun je gerust de verzameling van Donald Trump en jouw buurman maken, of de verzameling van de grootste priemgetallen. Dus zelfs niet-bestaande objecten kunnen er onderdeel van zijn (Kaplan, 2022).

Toch zijn er voor het maken van een verzameling een aantal wiskundige regels: de zogenaamde axioma's. Een axioma is fundamentele stelling die vanzelfsprekend waar schijnt te zijn en niet bewezen hoeft te worden (hier komen we later in het boek nog op terug). De axioma's zijn de bouwstenen van de verzamelingenleer, ze bepalen welke verzamelingen we kunnen vormen en op welke wijze dit gebeurt. Zij vormen alle spelregels van de verzamelingenleer (Frumin, 2025).

1.1.1 Identiteit van een verzameling

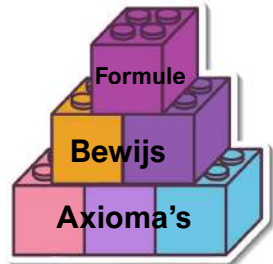
Als eerste kijken we naar een aantal axioma's die de identiteit van een verzameling bepalen. Het eerste en belangrijkste axioma dat we tegenkomen is:

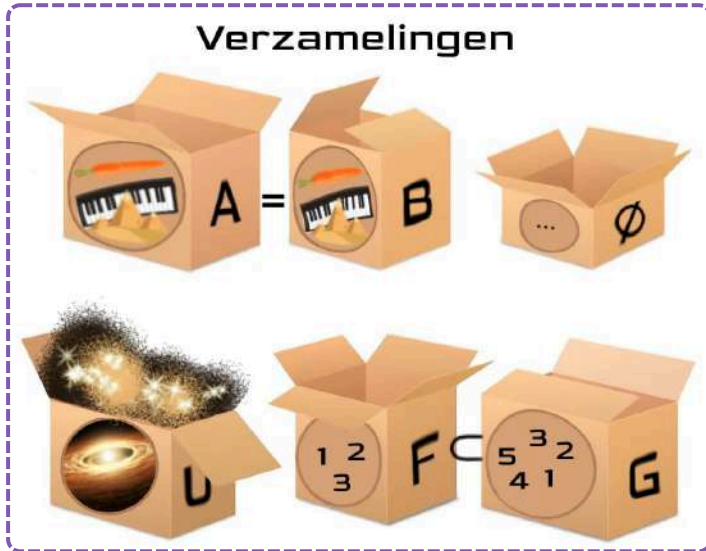
Het axioma van extensie: twee verzamelingen zijn gelijk als en alleen als ze dezelfde elementen hebben.

Een verzameling wordt genoteerd met accolades: $\{ \}$. Alle objecten die in een verzameling zitten, noemen we elementen. Neem verzameling A en B. A is gelijk aan B, of $A=B$, als alle elementen in A ook in B zitten (zie figuur 1). Als element x in verzameling A zit, wordt dat formeel genoteerd als $x \in A$. Zo betekent $x \notin A$, dat x geen element is van A. Laten we kijken naar de verzameling van alle natuurlijke getallen $(0, 1, 2, 3, \dots)$; $\mathbb{N}$. Zo is 1 een element van de verzameling $\mathbb{N}$ (Davis, 2022; Hal-mos, 1960; Holmes, 2012).

$$\text{Dus } 1 \in \mathbb{N}.$$

Dit axioma maakt duidelijk dat de identiteit van een verzameling bepaald wordt door haar leden of elementen (Halmos, 1960; Holmes, 2012).





Figuur 1: visuele illustratie van een aantal belangrijke verzamelingen

En welke elementen mogen dan eigenlijk in een verzameling? Het antwoord: alles wat je wilt. Het werkt als volgt:

Het axioma van onbeperkte comprehensie: Voor elke willekeurige ϕ , is er een verzameling $B = \{x \mid \phi(x)\}$.

ϕ is hier een bepaalde voorwaarde waaraan een element moet voldoen. Dit kan van alles zijn, zoals de voorwaarde: een even getal zijn of de voorwaarde om de 48ste president van de V.S. te zijn. Voor elke voorwaarde is er dus een verzameling, zodat $\{x \mid \phi(x)\}$. Dit betekent dat die verzameling element x bevat, zodanig dat, genoteerd met 'I', x aan ϕ voldoet. Oftewel, in leekentaal: dit axioma houdt in dat er voor elke eigenschap of voorwaarde een verzameling te maken is met elementen die daaraan voldoen. In principe zijn er geen grenzen aan welke verzamelingen je kunt opstellen. Dit is een cruciaal punt waar we in *deel 2* op terugkomen (Kaplan, 2022; Kooi, 2025).

Wij kunnen zo de verzameling van alle natuurlijke getallen die deelbaar zijn door 3 opstellen met behulp van logische symbolen:

$$Z = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} (x = 3y)\}$$

Deze formule kan vertaald worden als: Z is de verzameling van alle x , waarbij x een element is van $\mathbb{N}$, zodanig dat er een y bestaat die ook een element is van $\mathbb{N}$, waarbij x gelijk is aan 3 keer y (zie vanaf nu ter ondersteuning *tabel 1*) (Reichard, 2014).

Of nog eenvoudiger:

$$Z = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is deelbaar door } 3\}$$

$$\{3^6 9 \dots\}$$

1.1.2 Het niets en het oneindige

Er bestaan twee unieke soorten verzamelingen die gevormd kunnen worden. De ene bevat geen leden, en de andere bevat alle mogelijke leden. Deze verzamelingen heten de lege verzameling en de universele verzameling. De lege verzameling $\emptyset$, ook genoteerd als $\{\}$, bevat geen elementen. Deze verzameling heeft een kardinaliteit van 0. De kardinaliteit van een verzameling is het aantal leden dat een verzameling bevat. Dit wordt genoteerd als $|A| = x$, waarbij x het aantal elementen is (Davis, 2022).

Dus $|\emptyset| = 0$. Of op dit exact moment is $|Q| = 18,080,943$. Hier is de verzameling Q , de verzameling van alle Nederlanders. Het complement van de lege verzameling is U , de universele verzameling. Dit betekent dat U alle elementen bevat, behalve die in $\emptyset$. Gezien het leeg is, betekent dat alle elementen. De kardinaliteit van U is dus ∞ , oftewel $|U| = \infty$. De universele verzameling bevat niet alleen alle elementen binnen dit universum, maar het bevat alle elementen die jij je kunt voorstellen. Zo kan het ook alle draken bevatten of zelfs Batman. Het kan ook dingen bevatten die niet voor te stellen zijn, zoals alle vierkante cirkels of getrouwde vrijgezellen. Binnen deze verzameling is dus alles mogelijk. Hier zullen logici ook spijt van krijgen, zoals we later zullen zien (Kooi, 2025).

Daarnaast zullen we meemaken dat de elementen van U per context wel verschillen. Voor de universele verzameling is er het volgende axioma:

Axioma van de universele verzameling: $\{x \mid x = x\}$, ook U genoemd, bestaat (Holmes, 2012).

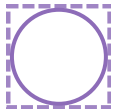
Dit is vergelijkbaar met een wiskundig antwoord op de vraag “Waarom?” – “Nou, daarom!” De verzameling U bestaat gewoon omdat het bestaat. Geen verdere toelichting... $\{x \mid x = x\}$ betekent hier letterlijk: de verzameling van x , zodanig dat x gelijk is aan x . Dit klinkt op het eerste gezicht onzinnig; en dat is het ook een beetje... Het zegt echter niets anders dan dat er een verzameling is, $\{x \mid x = x\}$, oftewel U , dat de verzameling van alles wat maar bestaat is. Hier geeft ‘ U ’ dus een bepaalde voorwaarde aan, waar in dit geval het element x aan moet voldoen. Dus anders gezegd bevat het alle x , zodanig dat x, x is. En volgens de wet van identiteit*, die stelt dat alles gelijk is aan zichzelf, is dit altijd het geval.

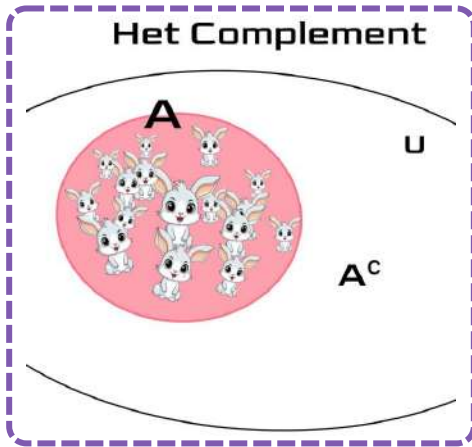
***Wet van de identiteit:** $\forall x (x = x)$

1.1.3 Boolean bewerkingen

De meeste axioma's zijn bedoeld om steeds weer nieuwe verzamelingen te maken van oude. Dit kan met behulp van bewerkingen, specifiek nog: Boolean bewerkingen. De details hiervan komen later in het boek nog terug, maar kunnen we voor nu achterwege laten. Hiervan zullen we een aantal voorbeelden bekijken. En dat gezegd hebbende, zoals eerder besproken, is $\emptyset$ het complement van U , en hiervoor geldt het axioma van complementen:

Axioma van complementen: voor elke verzameling A bestaat de verzameling $A^c = \{x \mid x \notin A\}$, die het complement van A wordt genoemd (Halmos, 2012).





Figuur 2: Venndiagram van het complement

In *figuur 2* zien we dat verzameling A de verzameling is van alle konijnen. A^c is het complement van A . Dit betekent dat het de verzameling is van alle mogelijke elementen, *behalve* alle konijnen.

Het axioma van complementen stelt dat elke verzameling een 'tegenovergestelde' verzameling heeft, aangeduid met ' c '. Voor alles wat er in A zit, is er een verzameling van alle elementen binnen U , behalve de elementen in A . Deze noemen we A^c . Zo kun je het complement van een verzameling zien als alle elementen in U *min* alle elementen in een verzameling X .

Oftewel, wiskundig geformuleerd:

$$X^c = \{x \in U \mid x \notin X\}$$

Figuur 2 is een weergave van een *venndiagram* van het complement. Hierin zie je verzamelingen visueel afgebeeld. Nog een voorbeeld van zulke verzamelingen is de verzameling van alle mooie dingen, M , en de verzameling van alle lelijke dingen, L .

$L^c = M$.

De universele verzameling is vooral in de context van complementen een bijzonder interessant concept. Het levert namelijk de grenzen binnen een gegeven verzameling en haar complement. Op dit punt kan de definitie van de universele verzameling per context verschillen. Neem het complement van de verzameling van alle even getallen. De meeste wiskundigen nemen aan dat het complement daarvan de verzameling van alle oneven getallen is. Maar als wij $X^c = \{x \in U \mid x \notin X\}$ aannemen, dan zou het complement van de verzameling van even getallen, de verzameling van alle oneven getallen zijn *en* van alles wat niet eens een getal is – zoals pizza's of Garfield. Dus in deze context is U eerder de verzameling van alle *getallen*, in plaats van de verzameling van alles, inclusief alles wat geen getal is (Halmos, 2012).

Verzamelingen kunnen ook op andere leuke manieren met elkaar verweven zijn, onder andere door deelverzamelingen.

Het axioma van scheiding: A is een deelverzameling van B precies wanneer A en B verzamelingen zijn en voor elke x geldt dat als x een element van A is, x dan ook een element van B is.

Let op

Veel van deze axioma's zullen later verdwijnen of aangepast worden

Een deelverzameling wordt genoteerd met ' $\subset$ '. $A \subset B$ als alle element van A ook elementen van B zijn. Redelijk simpel. In *figuur 1* is F een deelverzameling van G . Zo is $\{\text{Donald Trump}\} \subset \{\text{Alle Amerikaanse presidenten}\}$. Deelverzamelingen zijn te vergelijken met kamers in een huis. Elke kamer is een deelverzameling van het huis. Het bevat bepaalde meubelen bijvoorbeeld een bed, kast, bureau, maar niet alles (elk element), wat in het huis zit.



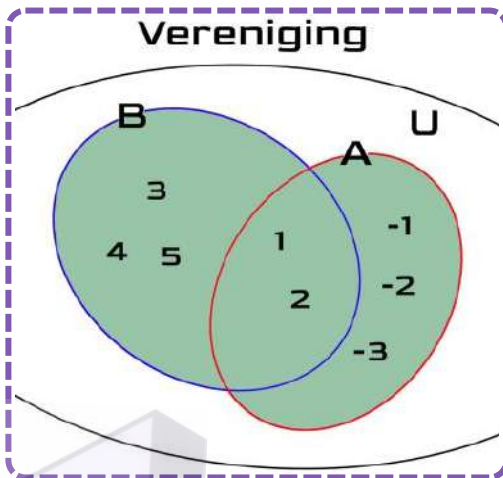
De meeste verzamelingen hebben een deelverzameling en deze zijn zelf ook weer een deelverzameling. In *figuur 2* kan je bijvoorbeeld zien dat verzameling A een deelverzameling is van U. Dit geldt niet alleen maar voor A, maar geldt dit voor alle verzamelingen, inclusief $\emptyset$. Sterker nog, de lege verzameling is een deelverzameling van *elke* verzameling. Elke verzameling bevat immers het element van de lege verzameling; niets (Halmos, 2012).

We maken ook onderscheid tussen een 'juiste' en 'onjuiste' deelverzameling. Als A en B precies dezelfde elementen bevatten, dan is A ook een deelverzameling van B. Dit heet een juiste deelverzameling en wordt aangeduid met $\subset$. Dit symbool kan worden gebruikt bij elke deelverzameling, inclusief de juiste. Als we daarentegen spreken over twee verzamelingen die niet volledig gelijk zijn, wordt dit onjuiste deelverzameling genoemd. Als we expliciet duidelijk willen maken maken dat we alleen onjuiste verzamelingen bedoelen, gebruiken we het logische symbool $\subsetneq$.

Naast het axioma van scheiding, zijn er andere manieren waarop verzamelingen met elkaar verbonden kunnen zijn. Wij kunnen nieuwe verzamelingen tot leven laten komen uit de oude, bestaande verzamelingen. Nu zullen we twee (of meer) verzamelingen verbinden – of beter gezegd, verenigen (Halmos, 1960).

Als we de verzameling van alle kattenliefhebbers hebben en de verzameling van alle hondenliefhebbers, dan voelen we ons wellicht ertoe geroepen een verzameling te maken van alle kattenliefhebbers, alle hondenliefhebbers *of* alle mensen die zowel katten- als hondenliefhebber zijn. Dit kan als volgt:

Het axioma van (Booleaanse) vereniging: als A en B verzamelingen zijn, dan bestaat de verzameling $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B \text{ of beide}\}$, die de vereniging van A en B wordt genoemd.



Figuur 3: Venndiagram van een vereniging

In *figuur 3* zien we nog een venndiagram. Hier wordt de vereniging van A en B weergegeven. In dit voorbeeld zien we:

→ $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

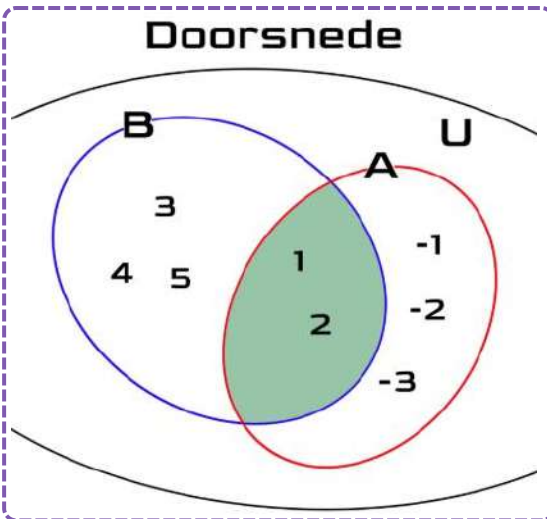
→ $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

De vereniging van A en B bevat dan alle elementen die in of A of B of *beide* voorkomen:

→ $A \cup B = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Het woordje 'of' speelt een belangrijke rol bij een vereniging. Dit wordt genoteerd met het symbool $\cup$, en het betekent dat beide A en B is inbegrepen. Dus in het venndiagram is dat het gehele gebied binnen A en B (Reichard, 2021).

Aan de andere kant kunnen we ook alle elementen die alleen in zowel A en B zijn inbegrepen tekenen. Dit heet een doorsnede. De doorsnede van de verzameling kattenliefhebbers en de verzameling hondenliefhebbers is de verzameling van degenen die zowel katten- als hondenliefhebber zijn.



Figuur 4: Venndiagram van een doorsnede

Wij zien in *figuur 4* dat alleen het gebied waar A en B overlappen gemarkeerd is. Dit is de doorsnede van A en B. Hiervoor geldt:

→ $A \cap B = \{1, 2\}$

Bij een vereniging speelt 'of' een grote rol, en *hier* speelt 'en', ook wel $\cap$, juist een grote rol. Het woordje 'en' stelt altijd de overlapping van twee (of meer) verzamelingen voor. Oftewel, het punt waarbij verzamelingen dezelfde elementen delen (Reichard, 2021).

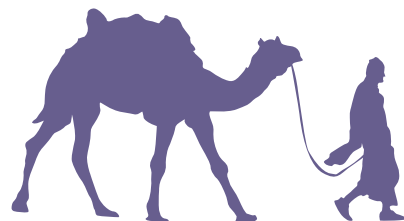
Een doorsnede heeft helaas niet haar eigen axioma verdiend, maar zij wordt afgeleid uit het axioma van vereniging en het gebruik van het complement (Holmes, 2012):

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$$

Met behulp van de geliefde wet van De Morgan kunnen we de doorsnede creëren door de formule om te vormen.

Wet van De Morgan*: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

De doorsnede van A en B kan ook gezien worden als alles wat niet in het complement van A en in het complement van B zit. Dit is in *figuur 4* alles buiten het gekleurde gebied. Dit is nogal verwarrend, maar probeer het je voor te stellen in de contexten van venndiagrammen. Als twee verzamelingen, in tegenstelling tot een doorsnede, helemaal geen elementen gemeen hebben, zoals {2.555, geel, Egypte} en {de geur van rucola, Monopoly, het jaartal 1945}, dan zijn zij disjunct (Halmos, 2012).



Oefeningen 1.1: Denken in hokjes 1

Wat je moet kunnen

- Voorbeelden van verzamelingen herkennen en opschrijven
- Gebruik van $\in$, $\subseteq$, $\cap$ en $\cup$ begrijpen
- Venndiagrammen interpreteren en tekenen

Opdracht 1 ★☆☆☆☆

Bekijk het venndiagram hiernaast. Noteer in logische symbolen het gemarkeerde deel van het venndiagram.

Opdracht 2 ★★☆☆☆

Toon aan met behulp van **het axioma van extensie** (blz.14) dat de lege verzameling uniek is. *Dit mag je zowel slechts uitleggen als formeel proberen bewijzen.*

Opdracht 3 ★★☆☆☆

Bewijs de volgende identiteit:

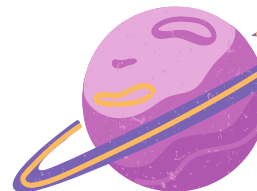
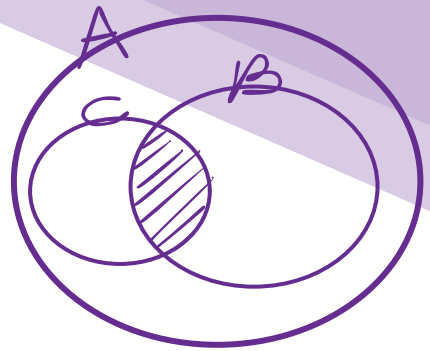
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Tip: Gebruik of venndiagrammen of laat zien dat links $\subseteq$ rechts en rechts $\subseteq$ links.

Opdracht 4 ★☆☆☆☆

Noteer voor elk van de volgende collecties de verzameling in logische symbolen en geef de kardinaliteit aan.

- a) De verzameling van alle even getallen kleiner dan 10 en groter dan 0.
- b) De verzameling van alle planeten in ons zonnestelsel.



1.1.4 Voorbij de Booleaanse bewerkingen

Alle axioma's die we tot nu toe hebben behandeld, kunnen worden geïmplementeerd zonder dat we meer dan alleen de lege en de universele verzameling hoeven te gebruiken. Maar wij willen uiteraard niet alleen gelimiteerd zijn tot die twee verzamelingen. Dus laten we onze wereld van verzamelingen openstellen voor meer mogelijkheden. Dit doen we met behulp van de volgende axioma's. Hieruit kunnen we meer verzamelingen dan slechts U en $\emptyset$ afleiden. Ten eerste:

Het axioma van éénpuntsverzamelingen: voor elk object x bestaat de verzameling $\{x\} = \{y \mid y = x\}$, en deze wordt de éénpuntsverzameling van x genoemd.

We kunnen dus een verzameling x maken van alle objecten y , zodanig dat y gelijk is aan x – en dit geldt voor alleen x zelf. Nu hebben we een verzameling met één lid. Als volgt kunnen we ook te maken hebben met machtsverzamelingen (Halmos, 2012):

Het axioma van de machtsverzameling: voor elke verzameling X bestaat er een verzameling $P(X)$ die alle deelverzamelingen van de verzameling X als elementen bevat.

Zoals je misschien al hebt opgemerkt, kunnen we dus verzamelingen opstellen die andere verzamelingen bevatten. Dit is een natuurlijk gevolg van het axioma van onbeperkte comprehensie: alle samenstellingen zijn mogelijk. Laten we een voorbeeld bekijken van zulke 'verzamelingen van verzamelingen'. Hieronder is $P(A)$ de machtsverzameling van A :

Stel: $A = \{1, 2, 3\}$

Dan volgt: $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{3\}\}$

$P(A)$ bevat dus alle mogelijke verzamelingen die je kunt opstellen uit A . Zoals je ziet bevat het ook $\emptyset$, want $\emptyset$ is een deelverzameling van elke verzameling. Alle elementen binnen $P(A)$ zijn dus verzamelingen (Halmos, 1960).

Het heet ook niet voor niets een machtsverzameling. Want $|P(A)| = 2^3 = 8$. De kardinaliteit van een gegeven $P(X)$ is 2^n , waarbij n het aantal elementen is van X . Ook doet de volgorde van de elementen in een doodgewone verzameling er niet toe. $\{1, 2, 3\}$ is bijvoorbeeld gelijk aan $\{3, 2, 1\}$. Dit zit anders bij *geordende paren*, specifieker nog *Kuratowski paren*:

Het axioma van geordende paren: voor alle a en b bestaat het geordende paar (a, b) .

Twee geordende paren zijn gelijk precies dan wanneer hun respectieve elementen gelijk zijn:

$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ en } b = d$ (Holmes, 2012).

Hierbij is $(a, b) \neq (b, a)$. Ook is $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Hier spreken we dus weer van verzamelingen van verzamelingen. Met behulp hiervan kunnen wij ook het volgende axioma opstellen:

Het axioma van cartesische producten: Het cartesisch product van twee verzamelingen A en B is de verzameling van alle geordende paren (x, y) waarvoor geldt dat $x \in A$ en $y \in B$.

Oftewel: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ en } y \in B\}$

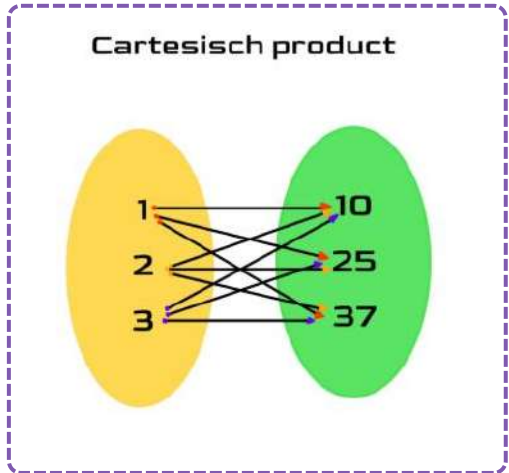
'Cartesisch' komt oorspronkelijk van deze meneer:
een legendarische filosoof en wiskundige

Cogito ergo sum!

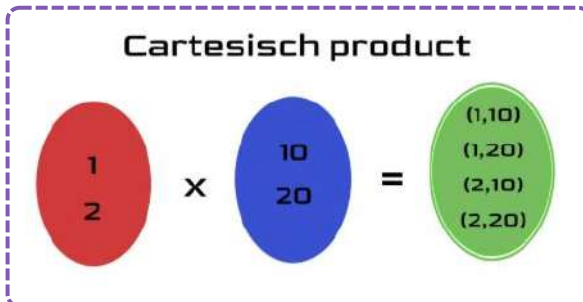
René Descartes

Stel dat A en B twee dozen met verftubes bevatten. A bevat alle verftubes met de warme kleuren; die noemen we x. En B bevat alle verftubes met de koude kleuren; y. Je pakt eerst 2 tubes uit A en vervolgens uit B. Je kunt deze nu ordenen op verschillende manieren. Hiermee moet je wel rekening houden met de orde x,y (Pinter, 2014).

In dit geval is $A \times B = \{(rood, blauw), (rood, groen), (oranje, blauw), (oranje, groen)\}$. Dit is enigszins vergelijkbaar met het algebraïsch product dat jij (hopelijk) al kent. Zie ter illustratie *figuur 5 en 6*. In *figuur 5* stelt elke pijl een geordend paar voor dat gemaakt wordt uit de elementen van beide verzamelingen. In *figuur 6* zie je duidelijk het resultaat van de 'vermenigvuldiging' van twee andere verzamelingen.



Figuur 5: pijldiagram van het cartesisch product



Figuur 6: het cartesisch product van $A \times B$

Let op 

Veel van de besproken axioma's in dit deel zullen later in de geschiedenis verdwijnen (de aanpassing komt aan bod in deel 3)

1.1.5 Relaties

Tot nu hebben wij dus met behulp van een aantal axioma's nieuwe verzamelingen kunnen maken. Nu wil ik meer focus leggen op hoe we verzamelingen kunnen verbinden met elkaar. Wij richten ons nu op de *relaties* van verzamelingen. Hiermee wordt net zoiets bedoeld als de relatie tussen jij en jouw jongere broertje of zusje. Dan geldt voor de relatie R, x (dit ben jij) is ouder dan y (het lieve broertje of zusje). R is hierbij alleen een relatie als alle elementen in R geordende paren zijn (Halmos, 1960).

Omdat duidelijk te maken dat x en y, van de paar (x, y) een relatie hebben kunnen we dit zo formuleren:

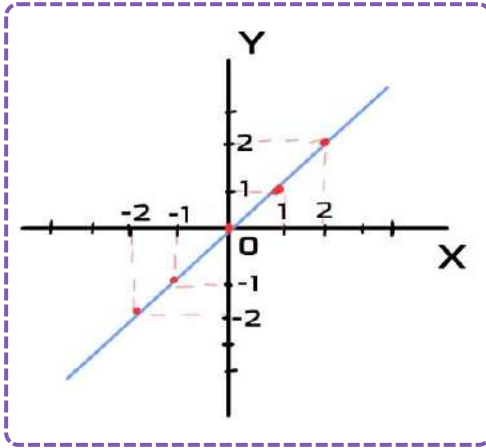
$$xRy$$

De twee belangrijkste axioma's voor het construeren van relaties zijn:

Het axioma van het diagonaal: de verzameling $[=] = \{(x, x) \mid x \in U\}$ bestaat (Holmes, 2012).

Het axioma van de projecties: de verzamelingen $\pi_1 = \{(x, y), x \mid x, y \in V\}$ en $\pi_2 = \{(x, y), y \mid x, y \in V\}$ bestaan (Holmes, 2012).

Het eerste axioma bewijst gelijkheid. Het enige wat er wordt gesteld is dat er een verzameling '[=]' bestaat, die alle geordende paren bevat die gelijk zijn aan zichzelf. Dit axioma is essentieel voor veel bewijzen en formules die opgesteld worden binnen de verzamelingenleer. En ook jij zult de effecten van dit axioma vast wel eens ergens tijdens een doodgewone wiskundeles zijn tegengekomen. Bekijk maar eens *figuur 7*.



Figuur 7: grafiek met de diagonale lijn

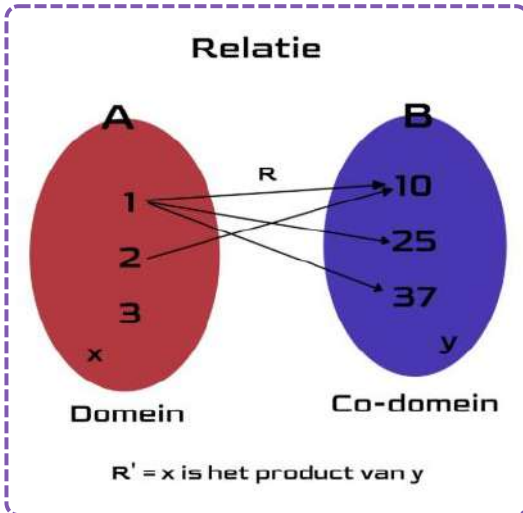
De diagonale lijn snijdt de x-as en de y-as precies bij 0. Op deze lijn zijn de waarden van x en y altijd gelijk. Dat betekent: als $x = 1$, dan is y ook 1; als $x = -2$, dan is $y = -2$. Dit is een voorbeeld van geordende paren die gelijk zijn aan zichzelf. Dus (x, x) . De diagonale lijn in de grafiek kan je ook herkennen als de functie $f(x)=x$. Dat betekent dat elke invoerwaarde (x) dezelfde waarde als uitvoer (y) geeft (maar zo meteen komen we nog terug op functies binnen de verzamelingenleer). De grafiek laat dus zien dat de functie de invoer “onveranderd” doorgeeft. Daarom ligt elk punt op deze lijn op de plaats waar x en y gelijk zijn, zoals $(1,1)$ of $(-2,-2)$ (Holmes, 2012).

Het tweede axioma is bijna net zo belangrijk als het eerste. Dit zal later ook meer van toepassing zijn bij *Cantors diagonaal*. We kunnen later met behulp van dit axioma zelfs werken met oneindige verzamelingen. Het axioma stelt dat er twee verzamelingen zijn, π_1 en π_2 . Bij π_1 krijg je het paar $((x, y), x)$. Hier wordt het eerste element nog eens gepaard met het paar (x, y) . Bij π_2 wordt hetzelfde gedaan, maar dan met het tweede element. Heel abstract natuurlijk maar dit kunnen we vertalen naar: $((\text{Elif}, 8.5), \text{Elif})$, $((\text{Bas}, 4.0), \text{Bas})$.

Stel je voor dat Elif een 8.5 heeft gehaald voor Grieks en Bas een 4.0. Er bestaat dan de relatie $(\text{Elif}, 8.5)$ en $(\text{Bas}, 4.0)$. Stel, je wilt alleen op een cijfersysteem de leerling opzoeken met het corresponderende cijfer. We kunnen dan de naam “projecteren” naar de paren.

Dan kan je spreken van de relaties $((\text{Elif}, 8.5) \text{ Elif})$, $((\text{Bas}, 4.0) \text{ Bas})$. Dit is niets meer dan $((x, y) x)$. Ook wel π_1 . Alhoewel deze voorbeelden soms handig kunnen zijn, moet je in je achterhoofd houden: ze worden helaas nooit zo concreet toegepast. Maar de abstractie heeft ook zijn eigen charme en pracht.

Neem een relatie R op A en B , waarbij $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y \text{ deelbaar is door } x\}$. Deze relatie is net hetzelfde als de relatie 'jonger dan' tussen jouw en je broertje of zusje. R bevat altijd een aantal van de elementen van $A \times B$. Wij kunnen stellen dat R altijd een deelverzameling is van een gegeven $A \times B$.



Figuur 8: pijldiagram van een relatie R

In *figuur 8* zien we deze relatie die net genoemd is toegepast op willekeurige getallen. Hierbij wordt gebruik gemaakt van een 'domein' en 'codomein'. Het domein is verzameling A . Het is de verzameling van het 'eerste' element van de paren in R ; x . Het codomein is verzameling B . Het is, zoals te zien is in *figuur 8*, het doelwit is van het domein. Hier wijzen alle pijltjes naar, en hier worden alle elementen naar toe gestuurd. Het is een representatie die alle mogelijke doelwitten van het domein bevat.

In *figuur 8* is het resultaat van $R = \{(1, 10), (1, 25), (2, 25), (3, 37)\}$.

Naast de relatie die we net hebben besproken, kunnen we nog een aantal andere verschillende soorten relaties hebben tussen verzamelingen. Hieronder worden de drie belangrijkste geformuleerd:



Een reflexieve relatie: R op verzameling A is reflexief als voor elke $x \in A$, geldt $(x, x) \in R$.

- **Oftewel:** elk element uit A staat in relatie met zichzelf. Deze wordt gefundeerd door het axioma van de diagonaal.

2

Een symmetrische relatie: R op Verzameling A is symmetrisch als $(x,y) \in R$, dan is ook $(y, x) \in R$.

- **Oftewel:** Als elk element x in relatie tot y staan, dan moet y ook in relatie tot x staan (het heet niet voor niets een *symmetrische* relatie).

3

Een transitieve relatie: R op verzameling A is transitief als $(x, y) \in R$ en $(y, z) \in R$, dan is ook $(x, z) \in R$.

- **Oftewel:** Als x in relatie staat tot y en y in relatie tot z , dan staat x ook in relatie tot z .

Als een relatie aan al van deze eigenschappen tegelijkertijd voldoet, dan is die equivalent. Een voorbeeld van zo'n relatie is de identiteitsrelatie:

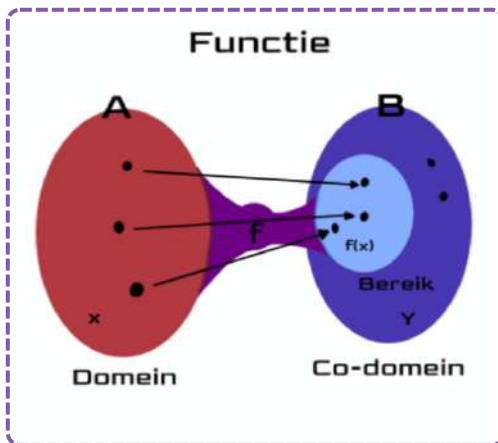
$$I_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$$

Aangeduid met I_A (de identiteitsrelatie op verzameling A). Dit is de kleinste reflexieve relatie, met alleen het paar (a, a) . Dit is ook precies de verzameling die wordt aangeduid met het axioma van het diagonaal (Bagaria, 2014).

1.1.6 Functies

Naast 'gewone' relaties, krijgen we ook veel te maken met functies. Dit zijn een specifieke type relatie. *Figuur 9* is een illustratie van een functie. Deze wordt genoteerd met $f(x)$. Dit komt natuurlijk erg bekend voor. Toch zijn deze functies binnen de verzamelingenleer net wat anders. Een functie van A naar B , wordt genoteerd als:

$$F: A \rightarrow B$$



Figuur 9: pijldiagram van een functie F

In *figuur 9* zie je de functie F met domein A en het codomein B , waarbij het bereik in B zit. Een functie bestaat uit een input en een output. Het domein bestaat uit alle mogelijke inputs en het codomein uit alle mogelijke outputs. Het bereik in dat geval zijn alle werkelijke outputs. Dit zijn de punten waar de pijlen naar wijzen. Het bereik is een deelverzameling van het codomein.

Hierop is de functie van toepassing. Voor elk element $x \in A$, komt er precies één paar (x, y) voor in F . Dit systeem is te vergelijken met een machine. Je stopt een element uit A in de machine, en je krijgt precies één element uit B terug. In tegenstelling tot een relatie, mag een element in het domein van een functie alleen maar één partner hebben. Elke x mag met alleen maar één y een relatie hebben. Zo kun je ook wel zeggen dat elk element van het domein volledig monogaam is – ze zijn gelimiteerd tot één partner. Een relatie daarentegen kan ook uit polygame elementen van een domein bestaan – zij mogen gerust zoveel partners hebben als ze maar willen (Bagaria, 2014; Halmos, 1960).

Een voorbeeld van een toegepaste functie is $f(x)=y$, waar bijvoorbeeld geldt:

➡ $F(1)=A$, $F(2)=B$, $F(3)=C...$

In dit geval is de input een willekeurig getal en de output precies één corresponderende letter. We spreken binnen verzamelingenleer van 3 belangrijke functies:

1

Een injectie: als, bij een functie $F:A \rightarrow B$ voor alle elementen $a \in A$ en $b \in A$ geldt: $a \neq b$, dan is $f(a) \neq f(b)$.

- **Oftewel:** elke input in f leidt tot een unieke output.
- **VB:** Er is $f(x)=3x$, waarvoor geldt:

$$f(1)=3$$

$$f(2)=6$$

$$f(3)=9$$

Elke x leidt tot één unieke y . Zo is $f(x)=x^2$ geen injectie, want $f(2)=4$ en $f(-2)=4$ (Bagaria, 2014; Kooi, 2025).

2

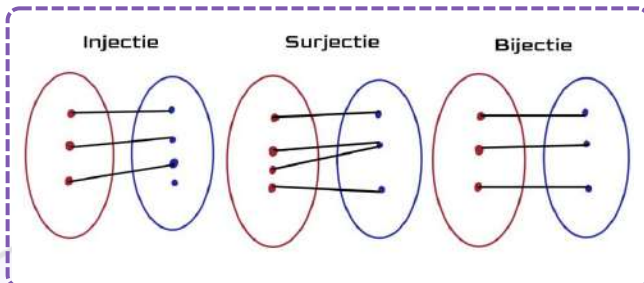
Een surjectie: als, voor een functie $F:A \rightarrow B$, er bij elke $b \in B$, een $a \in A$ bestaat, zodat $f(a)=b$.

- **Oftewel:** er is voor elke a in het domein een corresponderende y in het codomein. In tegenstelling tot een injectie kunnen er geen eenzame elementen in het codomein zijn; elk element heeft een partner (Bagaria, 2014; Kooi, 2025).

3

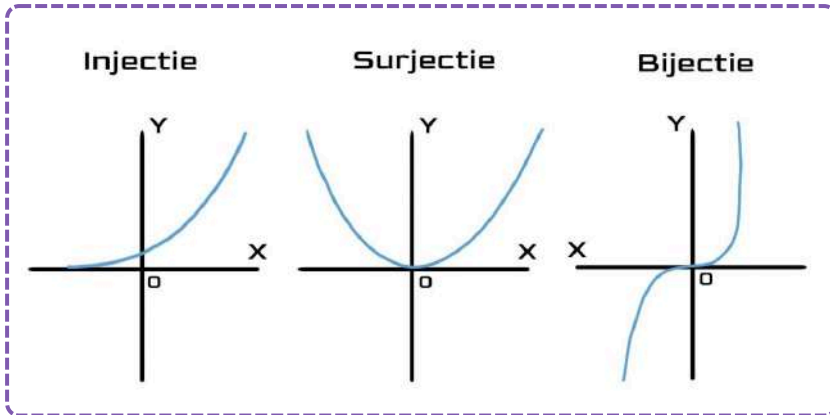
Een bijectie: Een bijectie bevat de eigenschappen van zowel een injectie als een surjectie. Dus elke a in A heeft een unieke output en elke b in B heeft een corresponderende a (Bagaria, 2014; Kooi, 2025).

Voor een verduidelijking van alle soorten functies, zie de geïllustreerde pijldiagrammen in *figuur 10*.



Figuur 10: pijldiagrammen van een injectie, surjectie en bijectie

In *figuur 10* zien we een pijldiagram van een injectie, surjectie en bijectie. Je ziet bij een injectie dat elk punten van het codomein precies één partner heeft. Dus elke input (de punten van het domein) hebben één unieke output (de bereikte punten binnen het codomein). Bij een surjectie, daarentegen, kan een punt van het codomein wél meerdere partners hebben. Maar elk punt in het codomein moet minimaal één partner hebben. Die eigenschap is nogal duidelijk te zien in *figuur 10*. Een bijectie vervult, zoals wordt afgebeeld, beide eigenschappen. Elk punt in het codomein heeft precies één partner en dat geldt ook voor de punten in het domein (Bagaria, 2014; Kooi 2025; Nagwa, z.d.).

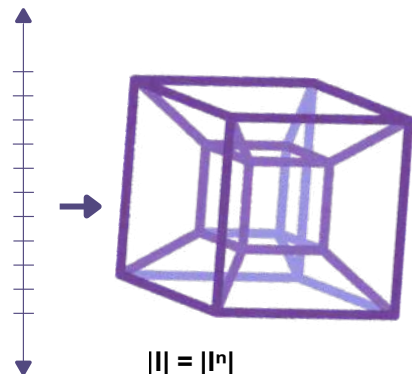


Figuur 11: grafieken van een injectie, surjectie en bijectie

Deze functies kunnen we ook vanuit een ander perspectief bekijken. Zij worden namelijk ook visueel toegepast in grafieken. *Figuur 11* is geeft een weergave van een injectie, surjectie en bijectie in de vorm van een grafiek. Alle coördinaten x zijn analogisch met de punten in het domein. En alle coördinaten y zijn analogisch met alle punten in het codomein (Nagwa, z.d.).

De lijn van de injectieve functie voldoet aan de eigenschap van een injectie, maar niet een surjectie. We zien dat elke x -coördinaat correspondeert met slechts één y -coördinaat; aldus een injectie. Maar het is ook duidelijk dat de lijn niet langs elke y -coördinaat komt. Dit is het geval bij de coördinaten onder $y=0$. De lijn gaat bijvoorbeeld wel langs de negatieve x -coördinaten, maar niet de y -coördinaten. Dus zijn er y -coördinaten die geen partner, oftewel geen corresponderende x -coördinaat hebben (Nagwa, z.d.).

De surjectieve functie – oftewel de klassieker: de parabool, daarentegen, heeft geen eenzame coördinaten in het domein. Voor elke x -coördinaat is er een y -coördinaat. En hier geldt *wel* dat een y -coördinaten meerdere partners kan hebben (Nagwa, z.d.).



"Ik zie het, maar ik geloof het niet!"

Aldus de doorgedraaide Cantor, nadat hij had bewezen dat er een bijectie bestaat tussen een 1D-lijnstuk en hogere dimensies, zoals de 4e.

Als we nu onze aandacht richten op de bijecte grafiek, dan zal het ons opvallen dat elke coördinaat precies één partner heeft. Derhalve zien we de combinatie van beide voorafgaande grafieken (Kooi, 2025).

Kortom: functies vertellen ons precies welk getal bij welk getal hoort. Meer mystiek zit er echt niet achter. Appeltje-eitje! Althans, dat blijven we herhalen zodat niemand huilt. Maar nu kan de pret echt beginnen.

Oefeningen 1.1: Denken in hokjes 2



Wat je moet kunnen

- Het begrijpen en toepassen van functies.
- Het verschil tussen een injectie, surjectie en bijectie.

Opdracht 1 ★☆☆☆☆

Welke van deze functies is injectief?

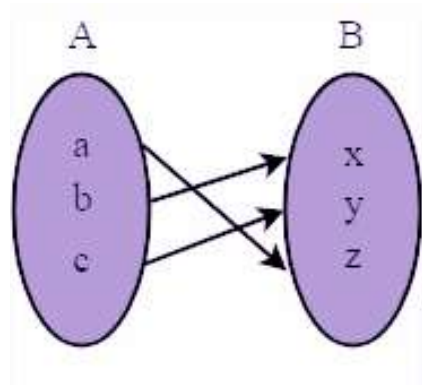
- a) $f(x)=x+1$
- b) $f(x)=x^2$
- c) $f(x)=7$

Opdracht 2 ★☆☆☆☆

Leg uit waarom de verzameling $C=\{x \in \mathbb{R} \mid x^2=-9\}$ leeg is.

Opdracht 3 ★★☆☆☆

Kan er een bijectie $f:X \rightarrow P(X)$ bestaan? Leg jouw antwoord uit.



1.2 Het aftelbare en het ontelbare

Binnen de verzamelingenleer spreken we vaak van *aftelbare* en *ontelbare* verzamelingen. De verzameling $\mathbb{N}$ is een aftelbare verzameling. Je kan beginnen bij 1 en verder blijven tellen tot je in je graf beland. Je komt nooit tot het einde, maar dat doet er niet toe. $\mathbb{N}$ is een aftelbare verzameling, omdat er een bijectie bestaat met de natuurlijke getallen – met zichzelf dus (Bagaria, 2014; Kooi, 2025).

Als een verzameling aftelbaar is, kan je het altijd gelijkstellen aan $\mathbb{N}$. Er bestaat een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en die verzameling. Stel $A = \{\text{Frankrijk, Groenland, Iran}\}$. We kunnen bewijzen dat A aftelbaar is door een bijectieve functie op te stellen:

→ **$f(1) = \text{Frankrijk}$, $f(2) = \text{Groenland}$, $f(3) = \text{Iran}$**

Er bestaat dus een één-op-één afbeelding tussen de positieve gehele getallen en de elementen van A ; de bijectie $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ bestaat (Bagaria, 2014).

Hoe kan $\mathbb{N}$ zelf dan eigenlijk aftelbaar zijn? $\mathbb{N}$ is in principe voor dezelfde reden als A aftelbaar: je kunt namelijk gerust de functie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ opstellen. Dit is niet zo onzinnig om te doen bij A , maar het is hier nu nogal vreemd. $\mathbb{N}$ wordt raar genoeg bewezen, doordat we een één-op-één afbeelding kunnen maken tussen de positieve gehele getallen – $\mathbb{N}$ zelf, en $\mathbb{N}$. De vraag is natuurlijk tot in hoeverre dit nou écht een geldig bewijs is (Bagaria, 2014).

Maar nu komt juist het tegen intuïtieve deel. Er bestaan namelijk ook ontelbare verzamelingen en die bewijzen we als volgt:

Neem $\mathbb{R}$, de verzamelingen van alle hele getallen *en* kommagetallen tussen 0 en 1; de getallen op de getallenlijn. Net als $\mathbb{N}$, is $\mathbb{R}$ een verzameling met een oneindig hoeveelheid elementen. Wij kunnen dan de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ opstellen. Daaruit kan komen (Kooi, 2025):

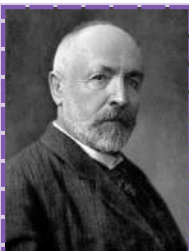
$F(0) = 0.1283648$

$F(1) = 0.6585909$

$F(2) = 0.7549488$



En dit gaat zo oneindig lang door... Maar Georg Cantor wist in 1874 te bewijzen dat er geen één-op-één afbeelding is tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. Er zijn meer elementen in $\mathbb{R}$, dus $\mathbb{R}$ is groter dan $\mathbb{N}$. Dit wist Cantor te bewijzen door zo ongeveer te doen wat weergegeven wordt in *figuur 12*. (Kooi, 2025)



Ontmoet Georg Cantor:

Cantor (1845-1918) was een Duitse wiskundige die geboren was in Rusland. Wiskunde was niet zijn eerste passie; dat was componeren. Cantor wilde het conservatorium in, zijn vader wilde dat absoluut niet. Hij studeerde uiteindelijk aan de universiteit van Zürich en later in Berlijn, waar hij les kreeg van de grote wiskundigen van zijn tijd: Kummer, Weierstrass en Kronecker. Weierstrass adoorde hem. Kronecker zou later zijn leven zuur maken. Hij hield zich veel bezig met het oneindige, en was er van overtuigd dat het een goddelijk concept was. En de logica was de manier Gods schepping te begrijpen.

We zien in *figuur 12* een opstelling van een bijectieve functie, met als input een element van $\mathbb{N}$ en als output een element uit $\mathbb{R}$. Cantor wilde elk natuurlijk getal gelijkstellen aan een reëel getal. Als we precies alle natuurlijke getallen konden gelijkstellen aan alle reële getallen, dan zou $\mathbb{R}$, net als $\mathbb{N}$, aftelbaar zijn. Maar op dat moment verscheen er een probleem (Bagaria, 2014; Kooi, 2025).

In *figuur 12* zien we rechts voorbeelden van reële getallen. Wat als we uit reeks 1 het eerste getal nemen en hier 1 bij optellen? En we doen hetzelfde bij de tweede reeks met het tweede getal. En zo ook bij de derde, enzovoorts... In *figuur 12* zien we dan dat als we uit deze nieuwe getallen een nieuw reëel getal maken, dan krijgen we een compleet nieuw getal die nergens in die reeks daarboven voor kan komen. Ons nieuw getal kan uiteraard niet hetzelfde zijn als het eerste getal in de reeks, omdat 2 in dit geval 3 is geworden.

$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$
$f(1) =$	<u>0.2</u> 3898967...
$f(2) =$	0.6 <u>5</u> 793919...
$f(3) =$	0.10 <u>4</u> 82855...
$f(4) =$	0.8937 <u>5</u> 621...
$f(5) =$	0.90486 <u>8</u> 35...
$f(6) =$	0.783829 <u>6</u> 7...
$f(7) =$	0.4357798 <u>2</u> ...
$f(8) =$	0.9432688 <u>6</u> ...
...	...
$f(n) =$	0. <u>36476986</u> ...

Figuur 12: Georg Cantors diagonaalargument

Dit geldt ook voor de tweede rij met betrekking tot het tweede getal uit de rechter kolom. En dit gaat zo oneindig lang door. Als we $f(n)$ dan toevoegen aan de reeks en het gelijkstellen met een gegeven natuurlijk getal, kunnen we dit proces simpelweg gewoon weer herhalen. Het maakt dus niet uit wat je doet. Je kunt altijd één reëel getal blijven opstellen die nog niet is gelijkgesteld aan een natuurlijk getal. De conclusie? $\mathbb{R}$ is niet aftelbaar en $\mathbb{R} > \mathbb{N}$ (Kooi, 2025)!

Het voelt ontzettend vreemd om te geloven dat sommige oneindige verzamelingen groter zijn dan andere, en toch is dat echt zo. Dit is zelfs niet het enige voorbeeld: ook de oneindige machtsverzamelingen $P(\mathbb{R})$ en $P(\mathbb{N})$ zijn altijd groter dan de oorspronkelijke verzamelingen. Het bijbehorende bewijs staat bekend als de *diagonaalmethode of het diagonaalargument* van Cantor. Aanvankelijk hadden wiskundigen hier grote moeite mee, maar uiteindelijk hebben zij dit resultaat moeten accepteren. Tegenwoordig wordt dit fenomeen terecht erkend als een wiskundig feit (Frumin, 2025; Kooi, 2025).



We hebben een aantal concepten bekeken binnen de verzamelingenleer. We legde focus op de identiteit van een verzameling, het maken van nieuwe verzamelingen en relaties tussen verzamelingen. Toch moet ik jou met groot verdriet en pijn mededelen dat we eigenlijk maar nog maar het topje van de ijsberg hebben behandeld. Verzamelingenleer is veel breder en dieper dan hoe het in de afgelopen paar pagina's is geïllustreerd. We zullen later veel formeler te werk moeten gaan. Desalniettemin kan je hopelijk wel de rest van de theorie in dit boek overleven met de kennis die hiervoor met jou is gedeeld. En dus gaan we door!

Het is belangrijk om even in te zien dat de theorie die we net hebben behandeld, de theorie is van hoe verzamelingenleer in het heden in elkaar zit. Wij maken straks een onderscheid tussen twee 'types' verzamelingenleer. In deel 3 zullen we veel te maken krijgen met de tweede type. Deze bevat axioma's die we tot op vandaag de dag nog gebruiken, maar die zijn net niet volledig gepresenteerd. Hiermee zullen we namelijk later kennis maken. Maar als eerst richten we ons blik op hoe het in Gods naam zo ver is kunnen komen.

Oefeningen 1.2: Het aftelbare en het ontelbare

Wat je moet kunnen

- Je weet het verschil tussen aftelbare en niet-aftelbare verzamelingen te beschrijven.
- Je kunt Cantors diagonaalbewijs reproduceren

Opdracht 1 ★★☆☆☆

Stel je een spelletje voor: een stoelendans met $\mathbb{N}$ stoelen en $\mathbb{R}$ spelers. Leg uit waarom er altijd te veel spelers zullen zijn.

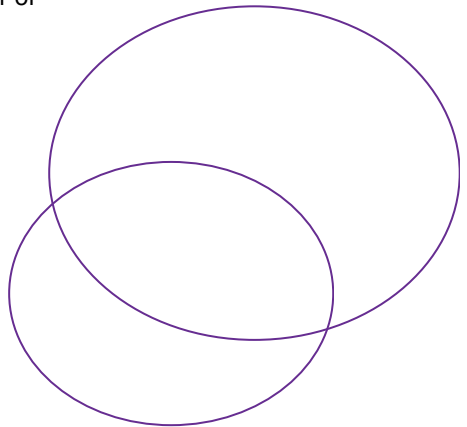
Opdracht 2 ★★☆☆☆

Beantwoord de volgende stellingen en onderbouw:

- a) De verzameling van alle even natuurlijke getallen is aftelbaar of niet-aftelbaar?
- b) De verzameling van alle decimale getallen tussen 0 en 1 die alleen cijfers 0 en 1 gebruiken, is aftelbaar of niet-aftelbaar?

Opdracht 3 ★★☆☆☆

Neem $\mathbb{N}$ en zijn machtsverzameling $P(\mathbb{N})$. Teken een Venndiagram waarin je $\mathbb{N}$ en $P(\mathbb{N})$.



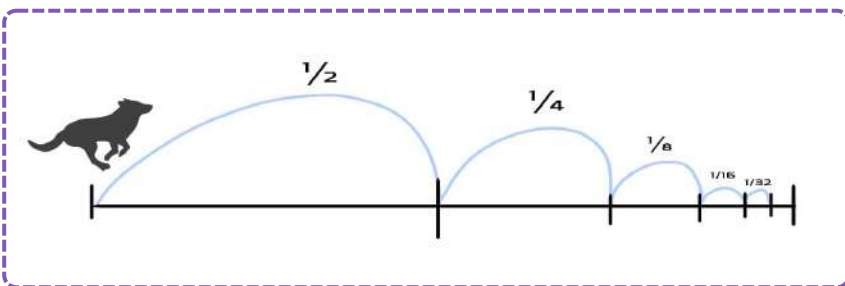
1.3 De geboorte en evolutie van verzamelingen

Het concept van een verzameling bestond op een bepaalde manier altijd al. Wij 'denken' namelijk constant in verzamelingen, in groepen of categorieën. Maar pas vrij recent hebben wij deze gedachten tot een formeel systeem kunnen omvormen (Pinter, 2014).

Als je één jaar zou moeten noemen voor de officiële geboorte van verzamelingenleer dan is het wel het jaar **1874**. Dit is het jaar dat Georg Cantor, één van de beste Duitse wiskundige aller tijden, bewees dat de verzameling $\mathbb{R}$ groter is dan de verzameling $\mathbb{N}$ (Frumin, 2025; Kooi, 2025; Bagaria, 2007).

In de late negentiende eeuw publiceerde Cantor een reeks artikelen, waarbij hij steeds meer gebruik maakte van zijn 'naïef' idee van een verzameling. Als eerst gebruikt bij concretere problemen, maar daarna werd het algemener toegepast. Toen ik aangaf dat zijn concept van verzamelingenleer nogal 'naïef' of simpel was bedoel ik dat het eigenlijk nog niet tot een formeel systeem (een systeem die gebruikt maakt van symbolen en axioma's) werd gemaakt dat sterk in zijn schoenen stond. Er werd geen gebruik gemaakt van axioma's en het vertrouwde vooral op het intuïtieve concept van een verzameling. Zijn theorie was desalniettemin erg belangrijk en handig voor wiskundigen, ook al hadden ze dat nog niet door. Het duurde helaas even voordat het gebruikt werd. Cantor werkte namelijk met iets heel gevaarlijks voor wiskundigen toentertijd: hij werkte met oneindigheid. Waarom was dit zo afschuwelijk (Bagaria, 2012; Pinter, 2014)?

Nou, heb jij weleens gehoord van Zeno's beroemde dichotomie paradox? Deze ziet er zo uit:



Figuur 13: een illustratie van de dichotomie paradox van Zeno

We zien in *figuur 13* een getallenlijn met reële getallen. De paradox speelt zich als volgt af: stel een dat jouw hond een bestemming van 1 kilometer wil bereiken. Eerst zal hij dan een halve kilometer moet afleggen. Daarna de helft van die afstand, namelijk een kwart van een kilometer. Dan een achtste. Dit gaat oneindig lang door...

De conclusie die Zeno trok is dat de hond nooit zijn destinatie kan bereiken. Maar dat is toch absurd (Hugget, 2002; Mulisch, 1980)?!

Sinds Aristoteles, één van de grondleggers van de Westerse filosofie, hebben zowel filosofen als wiskundigen van dit probleem af proberen te komen. De bekendste en meest geaccepteerde uitweg voor wiskundigen was om een onderscheid te maken tussen twee concepten van het oneindige: het *potentiële* oneindige en het *actuele* oneindige. Deze namen verklappen eigenlijk al het verschil tussen de twee: het potentiële oneindige is een concept van oneindigheid dat op een punt begint en oneindig lang door *kan* gaan, maar nooit werkelijk het punt van oneindigheid bereikt (hoe dat er ook uit mag zien). Daarentegen bestaat een actuele oneindigheid wel werkelijk uit een oneindige tegelijk- bestaande hoeveelheid punten of objecten. Deze punten hebben dezelfde *ontologische status* (Hugget, 2002; Pinter, 2014).

Wiskundigen besloten dat we bij zo'n paradox spreken van een potentiële oneindigheid. In theorie kunnen de stappen tot de destinatie eeuwig doorgaan, maar de totale afstand blijft eindig. Het probleem werd zo onder het tapijt geschoven. Wiskundigen hadden een positief beeld van een potentiële oneindigheid, maar een actuele werd als veel problematischer en zelfs paradoxaal beschouwd (Pinter, 2014).

Met dit in gedachte kan jij je wel voorstellen wat de reactie was geweest toen Cantor niet alleen actuele oneindige verzamelingen introduceerde, maar ook nog eens bewees dat sommige groter kunnen zijn dan anderen. Dit belemmerde de acceptatie voor Cantors verzamelingenleer ontzettend. Er ontstond ongelofelijk veel kritiek, onder andere door de beroemde logicus Wittgenstein (Ferreirós, 2007; Pinter 2014).

Ook de wiskundige Leopold Kronecker zei met veel haat in zijn hart als reactie op, onder andere, de actuele oneindige verzamelingen van Cantor:

"God schiep de natuurlijke getallen; al het andere is het werk van de mens."

Gelukkig veranderde deze instelling binnen een aantal jaar. Grotendeels wegens noodzaak. Vanaf de jaren 1890 begonnen ze het te waarderen. Het was immers een ongelofelijk nuttig systeem om met verschillende wiskundige concepten te werken. Voor je het wist werden zelfs de meest controversiële aspecten van Cantors theorie geaccepteerd, simpelweg vanwege hoe handig het bleek te zijn voor de gehele wiskunde. Er werden sindsdien veel werken over gepubliceerd die duidelijk maakten hoe het allerlei verschillende wiskundige takken kan verenigen. Deze wiskundigen waren onder andere Dedekind en Hilbert. En zij droegen ontzettend veel bij aan het populariseren van de leer. Het werd op dat punt niet zomaar geaccepteerd, maar het werd zelfs als een heilig fundament van de hele wiskunde beschouwd. Dankzij veel van de werken van andere wiskundigen toentertijd, werd vanaf dat moment de verzamelingenleer echt als zijn eigen, aparte tak binnen de wiskunde gezien (Ferreirós, 2007; Pinter, 2014).



Wist je dat?

Cantor ontving zoveel kritiek en haat wegens zijn theorie dat hij letterlijk in het gekkenhuis belandde.

Maar uit deze liefde volgde al snel liefdesverdriet. Het moment dat het met open armen werd verwelkomd als onderdeel (en zelfs meer dan slechts een onderdeel) van de wiskunde, doken er binnen een aantal jaar wat problemen op. Eén van de belangrijkste was Russells paradox. Deze paradox werd ook onafhankelijk rond dezelfde tijd ontdekt door Ernst Zermelo, een figuur die nog een prominente rol zal spelen in dit boek (Kooi, 2025).

Cantor zelf ontdekte ook een aantal problemen en paradoxen binnen zijn eigen theorie. Dedekind en Hilbert botsten eveneens tegen wat heftige obstakels aan. Hieruit volgde voor hen veel twijfel over de stabiliteit van Cantors verzamelingenleer (Ferreirós, 2007).

Het bestaan van deze grote lading aan paradoxen werd verspreid over de gehele wiskundige gemeenschap na de publicatie van Bertrand Russells 'Principia Mathematica' en het werk van Gottlob Frege, een collega en trouwe vriend van Russel, de 'Grundgesetze der Arithmetik' in 1903. Ondanks het feit dat al deze paradoxen uit vrij onomstreden premissen bestonden, zagen wiskundigen, met name Dedekind en Hilbert, de drastische gevolgen er toch niet helemaal van in (Ferreirós, 2007).

Al snel werd het duidelijk dat er iets moest veranderen. Verzamelingenleer was voor velen te belangrijk om het naar aanleiding van zulke problemen zomaar in de prullenbak te werpen. Het zou gerevolutioneerd moeten worden! Dit was ongetwijfeld geen appeltje-eitje.

Niettemin waren veel wiskundigen vastberaden om deze theorie aan te passen. Plotseling dook er een ontstellende hoeveelheid aan tegenstellende versies van de originele verzamelingenleer op (geen zorgen hoor, hiervan bespreken wij er later de belangrijkste). Er was ook een ongeloofelijk breed aanbod aan verschillende remedies voor deze ellende, en om die reden was het onduidelijk welke gebruikt moest worden. Sommigen, zoals Russell, vonden dat het systeem helemaal vervangen moest worden door een krachtigere, terwijl anderen, zoals Zermelo, vonden dat het huidige systeem slechts moest worden verfijnd. Tot op de dag van vandaag wordt Zermelo's bewerkte verzamelingenleer, wat later de ZFC is geworden, geaccepteerd en beschouwd als de standaard (Ferreirós, 2007; Frumin, 2025).

Sindsdien was verzamelingenleer vrij meta-theoretisch. Dit houdt in dat in plaats van te redeneren met de theorie zelf (met verzamelingen, relaties en axioma's), redeneer je over de hele theorie zelf (analyse van de consistentie en beperkingen). Verzamelingenleer zelf werd op dat punt een studie op zich. Dit heeft de branche meta-wiskunde gelanceerd (Ferreirós, 2007).



Wist je dat?

De schoolrooster-app

'Zermelo' is vernoemd naar de wiskundige Ernst Zermelo, vanwege zijn wiskundige precisie en ordening.



1.4 Waarom wiskundigen van verzamelingen houden

*"De theorie van verzamelingen vormt het fundament van de moderne wiskunde."
~ Georg Cantor*

Dit is waarschijnlijk de beste reactie op de stelling van dit kopje. Toch lijkt me Cantor niet de beste persoon om dit van aan te nemen, gezien hij natuurlijk zelf de grondlegger is van de hele theorie. Het klinkt daardoor een beetje te zelfingenomen en het schijnt zeker ook in zijn eigen belangen te zijn geschreven. Desalniettemin had hij zeker geen ongelijk.

Zoals net is geïllustreerd waren wiskundigen, na over drempels heen te zijn gestapt, grote fans van verzamelingen. Dit kwam doordat het een ontzettend handige tool was binnen de wiskunde. Hoe komt het eigenlijk dat het zo'n nuttige tool was? Deze vraag zullen we hier beantwoorden (Ferreirós, 2007; Pinter 2014).

1.4.1 De grondslag van een getal

Beide wiskundigen en filosofen wilden graag wiskundige concepten kunnen gronden op één theorie. En toevallig was de verzamelingenleer hiervoor perfect. Een voorbeeld van het simpelste fenomeen dat ze probeerden te gronden was de definitie van de natuurlijke getallen.

➡ ***"Wat is nou precies een getal?"***

Dit klinkt op het eerste gezicht als een ongelooflijk belachelijke vraag met een erg voor-de-hand-liggend antwoord. Niettemin is het een vraag die zeker gesteld moet worden. Zodra je echt weet wat een getal is kun je ook verwarring voorkomen over of 1 bijvoorbeeld gelijk is aan 0.999999 of niet. Daarnaast kun je dan formeel bewijzen dat optellen, delen enzovoorts ook echt werkt, zonder te moeten vertrouwen op slechts je intuïtie (Ferreirós, 2025; Holmes, 2012; Kaplan, 2022).

Intermezzo

Van de vele mensen (waaronder grotendeels leerlingen), die ik heb geïrriteerd met de vraag die ik zojuist benoemde, zijn de meest voorkomende antwoorden:

1. “Een getal is een cijfer.”
2. “Een getal is een hoeveelheid.”
3. “1 is gewoon 1!”

Het eerste antwoord is feitelijk simpelweg onjuist: een getal is het concept achter ‘1’, ‘2’ of ‘3’, terwijl een cijfer niets meer dan het symbool is. Je kunt zelfs twee cijfers hebben die hetzelfde getal representeren: het getal drie is in het Westen ‘3’ en in het Midden-Oosten vaak ‘٣’ (uitgesproken als *thalatah*).

Voor het tweede antwoord zijn er een aantal tegenvoorbeelden te geven in de vorm van de volgende vragen: is π een hoeveelheid? En wat stel een negatieve hoeveelheid dan eigenlijk voor? De mogelijke antwoorden hierop zullen niet plausibel genoeg zijn en, nog belangrijker, kunnen nooit worden toegepast in een formeel bewijs.

Het derde antwoord – helaas het meest voorkomende – laat ik voor wat het is. Neem deze zijspoor niet al te serieus, het is enkel een persoonlijke anekdote en kan niet worden onderbouwd.



Oké, maar wat is nou werkelijk het antwoord? Binnen de verzamelingenleer kan een getal op een aantal manier worden gedefinieerd. De simpelste definitie lijkt mij die van Russell en Frege:

Neem het getal 3; $3 = \{X \mid \exists f: X \rightarrow \{0,1,2\}\}$, waarbij f bijectief is. (Russell en Frege maakte zelf gebruik van andere symbolen, maar zo is het iets ‘moderner’ geformuleerd.)

- **Letterlijk:** 3 is de verzameling van een gegeven verzameling X , zodanig dat er een functie f bestaat ($\exists f$) van X naar de verzameling $\{0,1,2\}$, waarbij f bijectief is (dus voor elk element in X moet er precies één uniek corresponderend element in $\{0,1,2\}$ zijn, zonder dat er elementen in $\{0,1,2\}$ overblijven).

→ **Oftewel:** het getal 3 is de verzameling van alle verzamelingen met een kardinaliteit van drie (Kaplan, 2025).

Een andere, manier om een getal te definiëren, specifiek een *ordinaal* getal, is volgens de definitie van Von Neumann:

Een getal $n = \{0,1,2, 3,\dots,n-1\}$, waarop de *opvolgerfunctie* $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ kan worden toegepast (Fruimin, 2025; Holmes, 2012; Kunen, 2011).

- **Letterlijk:** een getal n gedefinieerd als de verzameling van alle natuurlijke getallen kleiner dan n .

VB: $3 = \{0,1,2\}$

De opvolgerfunctie $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ (de functie van hoe we het volgende getal kunnen maken) is de functie S met als input α (een gegeven ordinaal getal) en met als output de vereniging van α met de verzameling van α .

VB: Zo is de opvolger van 3: $S(3) = 3 \cup \{3\} = 4$, oftewel $\{0, 1, 2, 3\}$.

Concreet zien de Von-Neumann getallen er 0 tot en met 3 er zo uit:

0: $\{\}$ of $\emptyset$, de verzameling met geen elementen. 1: $\{\emptyset\}$ of $\{0\}$, de verzameling van de lege verzameling, oftewel een verzameling met precies één element. 2: $\{0, 1\}$, de verzameling met twee elementen. 3: $\{0, 1, 2\}$, de verzameling met drie elementen. Zo zijn er door meerdere wiskundigen nog andere definities gegeven, maar de twee hierboven zijn worden het meest gebruikt. De eerste wordt een *kardinaal* getal genoemd en de tweede een *ordinaal* getal. Een getal kon vanaf nu formeel bewezen worden en gebruikt worden om andere concepten formeel te bewijzen. Dit was een ontzettend waardevolle ontdekking in de grondslagen van de wiskunde. En het was één van de redenen dat wiskundigen toch besloten de verzamelingenleer van Cantor te omarmen.

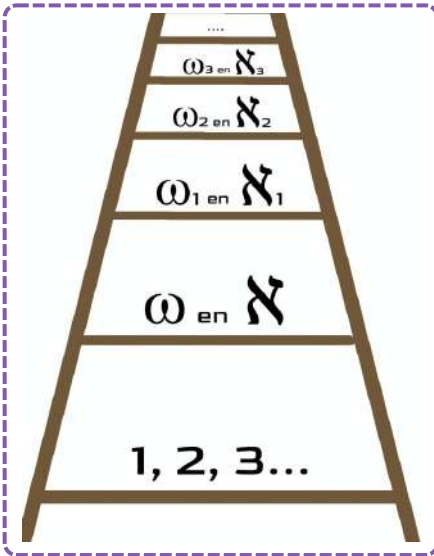
Daarnaast kunnen we ook definities geven voor veel andere concepten, zoals functies en relaties. Eerder in dit boek hadden we al behandeld dat een relatie, en als gevolg ook een functie, kan worden gezien als een deelverzameling van $A \times B$.

1.4.2 Werken met meer dan oneindig

Sinds de geboorte van verzamelingen, kon men binnen de wiskunde ook eindelijk echt gaan rekenen met oneindigheid. We zagen al eerder een voorbeeld daarvan waarbij Cantor heeft kunnen bewijzen dat $\mathbb{N}$ kleiner is dan $\mathbb{R}$. Er ontstonden ook verschillende groottes van oneindige verzamelingen. Maar hoe kan dat nou? Een oneindige verzameling is per definitie toch het grootste wat er is? Zeker niet, tenminste niet binnen de wiskunde. Zulke grotere verzamelingen waren de *transfinitie* verzamelingen. Het stopt niet alleen bij “het ene is groter dan het ander”, maar er werd gewerkt met hoeveel groter zo een verzameling kon zijn. Dit was nog een ontdekking van Georg Cantor. Deze ordes van grootte worden genoteerd met $\aleph$ (aleph), de eerste letter van het Hebreeuwse alfabet, en hierover volgt nu een (veel tē) beknopte uitleg (zie *figuur 14* voor een visualisatie van de ordes van oneindigheid): we beginnen met alle eindige ordinalen. Een ordinaal geeft een positie aan in een reeks, zoals de eerste, tweede, derde, enzovoorts.

Ordinalen zijn, zoals we zagen, altijd verzamelingen, want we gaan uit van de Von Neumann-definitie. De getallen 1, 2 en 3 bijvoorbeeld zijn eindig, omdat ze volgens de definitie van een getal van Von-Neumann, een eindig hoeveelheid elementen hebben. Dit is per definitie het geval onder $n = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$. Maar zo kun je de vraag stellen wanneer we dan het oneindige bereiken. Dit is ω , de eerste transfinitie verzameling. Dit is dus het ‘oneindigste’ getal, het eerste ordinale getal dat komt na alle eindige getallen zonder duidelijk voorganger. ω heeft een kardinaliteit van $\aleph_0$. ω is dus eigenlijk gelijk aan de verzameling van alle natuurlijke getallen. $\aleph$ is de kardinaliteit van een verzameling met een oneindig aftelbaar aantal elementen, en die verzameling was $\mathbb{N}$ (Cantor, 1895; Ferreirós, 2007; Kooi, 2025).

Wij kunnen dan ook gaan tellen met ω . Zo is er $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega \times 10$, enzovoorts. $\omega + 1$ is het ordinaal dat direct na ω komt. En dan komt ω_1 en het bijbehorende kardinaal $\aleph_1$. ω_1 is de verzameling van alle aftelbare ordinale getallen, inclusief ω , en alles wat we na omega kunnen tellen. ω_1 is in tegenstelling tot ω zelf niet aftelbaar. Dus zodra je alle mogelijke ordinalen hebt kunnen aftellen komt ω_1 . Deze verzameling moet dan ook groter dan $\aleph_0$ zijn.



Figuur 14: ladder van oneindigheid

De kardinaliteit van ω_1 is $\aleph_1$. Dit is ook de kardinaliteit van de reële getallen (Cantor, 1895; Ferreirós, 2007; Kooi, 2025).

Oke, maar daar moet het dan toch echt wel stoppen? Nee, daar stoppen we zeker niet. Na ω_1 komt ω_2 . Dit is het tweede onafelbaar ordinale getal. Het bevat alles wat komt na $\aleph_1$. De kardinaliteit van die verzameling $\aleph_2$. Dit soort getallen zijn ontzettend abstract en je vraagt je misschien wel af of we dat zomaar kunnen doen. Waar komt ω_2 zomaar vandaan? Maar vergis je niet, wiskunde is geen vak zoals natuurkunde of biologie. Wiskundige 'wetten', of axioma's, zijn niet net als natuurkundige wetten afgeleid uit pure observaties. In plaats daarvan zijn ze bedacht. Je kunt er één net zo makkelijk bedenken als dat je één kunt schrappen.

Maar... ze moeten wel consistent zijn en werkelijk wat opleveren. En dat is een stuk moeilijker dan het klinkt. Als uit een axioma een contradictie volgt, dan moet het in de prullenbak. Ze zijn dus niet zomaar onderdeel van een denkbeeldig spel. Ze zijn ontzettend nuttig, en zorgen ervoor dat de wiskunde een consistente basis heeft waaruit alles anders afgeleid en bewezen kan worden. We bouwen zo ex nihilo de wiskunde op. Hetzelfde geldt voor transfinitie verzamelingen. Het is zeer onwaarschijnlijk dat ω_2 werkelijk bestaat in de materiële wereld. Maar het is opgebouwd uit een ontzettend nuttig axioma vanuit de verzamelingenleer, namelijk: *het axioma van regulariteit* (waar we later op terug komen). ω is hieruit afgeleid en met behulp van ω kunnen we ook veel andere concepten afleiden. Ze bestaan dus wel, maar binnen een consistent wiskundig systeem of model. En dit kan net zo betekenisvol zijn als een observatie van ω_2 .

Het oneindige is in de werkelijkheid misschien nergens te vinden, maar het leeft in de wiskunde en in de wereld van onze geest.

1.4.3 Verzamelingen in actie

Tot nu toe is het allemaal erg theoretisch geweest – zelfs voor een vak als wiskunde. Maar wat voor toepassingen heeft de verzamelingenleer in de praktijk en binnen andere branches van de wiskunde?

Ik heb vaak genoeg aangegeven dat dit vak het fundament is van de *gehele* wiskunde, maar hoe ziet dat er uit? Wat voor wiskundige branche je ook behandelt, je ontsnapt verzamelingen niet – hoe hard je ook probeert. We kunnen natuurlijk niet alles behandelen, maar laten we een aantal belangrijke voorbeelden bekijken (Sangalad, 2019).

1. Analyse

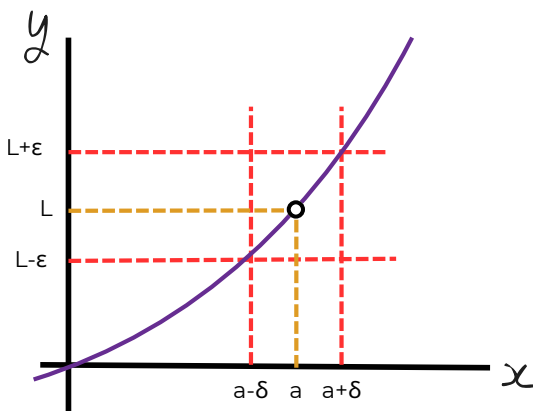
We hadden eerder al gezien hoe verzamelingenleer een formele definitie kan geven voor een functie. Dit alleen al is natuurlijk ontzettend belangrijk. Maar we kunnen nog verder gaan dan dat. Alle concepten binnen analyse hangen van verzamelingen af.

Analyse houdt zich bezig met continue veranderingen. Het wordt vaak gezien als de striktere en formelere versie van calculus. Een belangrijk concept binnen analyse is een limiet. Deze wordt volledig formeel gedefinieerd met behulp van verzamelingenleer (zie ter ondersteuning tabel 1):

Definitie: Gegeven de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

we zeggen dat $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$.

Dit wordt de ε - δ -definitie (epsilon-delta-definitie) van een limiet genoemd. In eerste instantie lijkt dit een manier te zijn om jouw joie de vivre op het spel te zetten. Maar – geen 'maar', dat is ook gewoon zo – eigenlijk komt het op een vrij simpel idee neer.



Conceptueel voegt deze definitie weinig toe aan wat een limiet is. Het idee dat een limiet van x naar a , de output van een functie is als een waarde zo dicht mogelijk bij a komt, maar a zelf nooit bereikt, is voldoende. Maar met dit intuïtief idee kun je niets bewijzen zolang het niet strak gedefinieerd is. Hiervoor is ε - δ -definitie handig. Deze kunnen we zonder bepaalde fundamenteën van de verzamelingenleer simpelweg niet opstellen.

Bekijk de schets hierboven. Vertaald naar menselijke taal zegt de definitie: kies een willekeurige waarde $\varepsilon > 0$. Dit is hoe dichtbij we willen dat de functie komt bij L , de limiet. Er bestaat er een $\delta > 0$ (hoe dicht we x moeten nemen bij a), volledig afhankelijk van de waarde van ε . Als de absolute waarde van $x - a$ ($|x - a|$), oftewel het verschil tussen x en a , groter is dan 0 en kleiner dan δ , dan is het verschil tussen de output $f(x)$ en L kleiner dan ε . Dus als je x dicht genoeg bij a kiest (afstand $< \delta$), dan komt $f(x)$ automatisch dicht bij L , de limiet (afstand $< \varepsilon$) (Sanderson, 2017).

Stel je voor dat je voor het vak tekenen een belachelijk precies logboek moet maken: elke streek, elke handkramp, elke micro-twijfel moet erin, om een zogenaamd "perfect logboek" te bereiken. Dat is L , de limiet. Jij probeert er steeds dichterbij te komen, maar hoe kleiner de afwijking (ε) die toegestaan wordt, hoe minder vrijheid (δ) je hebt bij het tekenproces zelf: elke beweging moet nóg netter, nóg gedetailleerder, nóg nutteloos preciezer. Je logboek wordt steeds 'beter', dichterbij dat ideale, maar je haalt het nooit. Je kunt beter opgeven; je blijft er alleen maar eindeloos naartoe proberen kruipen – en dat is precies wat de ε - δ -definitie zegt.

Achter deze definitie ligt veel verzamelingenleer geschuld. Als eerst wordt er natuurlijk gebruik gemaakt van een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, oftewel een afbeelding van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, volgens de definitie van verzamelingen. Daarnaast kunnen we ook formeel überhaupt gebruik maken van $\mathbb{R}$ wegens verzamelingen. Maar daarnaast zijn de intervallen $(|x-a| \text{ en } |f(x)-L|)$ niets meer dan deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. In essentie wordt er gezegd: voor elke ε -verzameling rond $f(a)$ bestaat er een δ -verzameling rond a die daarop wordt afgebeeld. De gehele formele constructie van een limiet zou niet mogelijk zijn zonder verzamelingen.

Dit geldt voor veel meer binnen analyse dan slechts limieten uiteraard. Ook geldt het voor continuïteit (er zijn binnen een functie geen gaten of breuken, zoals degene die te zien is in de schets hiervoor op het punt L). Dit concept benut ook veel van de zojuist benoemde ideeën binnen de verzamelingenleer.

2. Abstracte algebra

Een ander domein van de wiskunde die wat explicieter en met veel plezier gebruik maakt van verzamelingen is abstracte analyse. Dit vakgebied houdt zich bezig met het bestuderen van de structuren van algebra en vooral de arithmetica (rekenkunde).

En in dit geval zijn structuren = verzamelingen + operaties. Deze structuren zijn onder andere groepen, ringen en velden.

Een groep is een verzameling G met één binaire operatie $*$ (als plaatsvervanger voor onder andere $+$ of $\times$), waarvoor geldt (Paulin, z.d.):

1

(*associativiteit*) $(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in G.$

2

(*het bestaan van een identiteitselement*) $\exists e \in G \mid a * e = e * a = a \quad \forall a \in G.$

3

(*het bestaan van een inverse*) Gegeven een $a \in G$, $\exists b \in G \mid a * b = b * a = e.$

Het belangrijkste hierbij is dat elk element binnen de groep moet blijven. De optelling of vermenigvuldiging van twee elementen van G moet resulteren in een ander element binnen G (dit is een *binair* operatie). Anders is de verzameling G geen groep. Daarnaast maken het bestaan van inverse elementen aftrekken en delen mogelijk. Want aftrekken is niets meer dan optellen met een negatief getal ($4+(-2)=2$) en delen is vermenigvuldigen met een breuk ($10 \times \frac{1}{2} = 10 : 2$). En elk getal a heeft een inverse.

Een voorbeeld van een groep is een klok met modulus 12 (het aantal getallen tot je weer vanaf 1 start), ook wel $\mathbb{Z}_{12}$ (waarbij $\mathbb{Z}$ de verzameling van alle gehele getallen is). Een klok is associatief: elke optelling resulteert in een ander element of getal binnen de klok. Het bevat een identiteitselement: in dit geval is dat 12; $12+a=a$ en $12 \times a=a$. Als je naar een land zoals Somao reist, die 12 uur voorloopt op Nederland, zal je er nogal dom uitzien wanneer jij de klok van jouw horloge verzet, gezien je weer op precies dezelfde plaats zal belanden.



Een klok bevat ook een inverse: voor elk getal kun je een optelling uitvoeren dat resulteert in het identiteitselement (12). Zo is $9+3=12$. Dit geldt allemaal ook voor vermenigvuldiging.

Naast groepen zijn er ook **ringen**:

Een ring is een verzameling R met twee binaire operaties $*$ (namelijk $+$ en $\times$), waarvoor geldt (Paulin, z.d.):

1 R is een Abelse groep bij optelling (een groep is Abels als het commutatief is, dus er geldt: $a * b = b * a \ \forall a, b \in G$).

2 R is een monoid bij vermenigvuldiging (een groep dat niet per se inversen heeft).

3 $+$ en $\times$ zijn gerelateerd via de distributieve wet:
 $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$ en $x \times (y + z) = x \times y + x \times z \ \forall x, y, z \in R$

Een ring is dus niets meer dan een groep die geniet van net wat meer vrijheid, maar ook gestructureerder is. De klok is hier eveneens een voorbeeld van een ring. Ook veel getallenverzameling, zoals $\mathbb{Z}$, zijn ringen.

Als laatste wil ik nog kort **lichamen** introduceren:

Een lichaam is een ring $(R, +, \times)$, een ring met de binaire operaties optelling en vermenigvuldiging, waarvoor geldt (Priestley, 2011; Paulin, z.d.; Friedberg, Insel en Spence, 1979):

1 $(R, +)$ is een Abelse groep.

2 $(R \setminus \{0\}, \times)$, een ring zonder 0 en met vermenigvuldiging, is een abelse groep.

3 $+$ en $\times$ zijn gerelateerd via de distributieve wet.

4 $0 \neq 1$, het identiteitselement bij optelling (0) is niet hetzelfde als het m identiteitselement bij vermenigvuldiging.

Wat een lichaam hierdoor specialer maakt is dat je *altijd* kunt optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen binnen een lichaam. Een vrij klassiek voorbeeld van een lichaam is $\mathbb{R}$.

Een lichaam is zo een speciale ring.

Zoals we zien maakt abstracte algebra expliciet gebruik van verzamelingen en zou het niet op dezelfde manier bestaan zonder die theorie.

3. Topologie

Het woord topologie komt uit het Oud-Grieks (*topos* en *logos*), en het betekent letterlijk de studie van plaatsen of ruimtes. Topologie houdt zich bezig met de eigenschappen van ruimtes die hun structuur behouden na vervormingen. Denk hierbij bijvoorbeeld aan knopen. Een knoop is een topologische ruimte die niet kan worden doorgesneden. Twee knopen worden als topologisch hetzelfde beschouwd als je de ene kunt vervormen tot de andere zonder te knippen of te lijmen.



Binnen de topologie zijn er een aantal essentiële concepten die direct afhangen van de verzamelingenleer. Dit zijn, onder andere (Hart, 2007; Munkres, 2000):

→ Metrische ruimte:

Definitie: Een *metriek* op een verzameling X is een functie $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ die aan de volgende eigenschappen voldoet (voor alle elementen $x, y, z \in X$):

1. $d(x, y) > 0$, $d(x, x) = 0$ en als $d(x, y) = 0$ dan $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$, en
3. $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$, dit heet een *driehoeksongelijkheid*. Het paar (X, d) heet dan een **metrische ruimte**.

→ Verbondenheid:

Definitie: Laat X een topologische ruimte zijn. Een *scheiding* van X is een paar M, N , van disjuncte niet-lege open verzamelingen van X wiens vereniging gelijk is aan X . De ruimte X wordt gezien als *verbonden* als er geen scheiding is van X .

→ Compactheid:

Definitie: Een topologische ruimte is compact als elke *open overdekking* van die ruimte een eindige *deelovertdekking* heeft.

Kort toegelicht is een metriek een soort afstandsmeter: een functie die aangeeft hoe ver elementen in een verzameling uit elkaar liggen. Daardoor zijn de eigenschappen vrij intuïtief. Zo moet een metriek $d(x,y)$ altijd positief zijn wanneer $x \neq y$; maar wanneer de afstand 0 is, gaat het om hetzelfde element. Samen vormen de verzameling X en de afstandsfunctie d een metrische ruimte: een ruimte waarin je afstanden kunt meten met behulp van d .

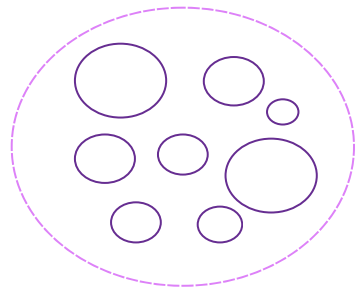
Ook een scheiding en verbondenheid is redelijk intuïtief. Een scheiding van X is letterlijk het snijden van X in twee stukken; net als bij twee knopen, zijn ze niet gelijk als je de één moet knippen en in elkaar lijmen om de ander te krijgen. Wat de definitie concreet zegt is dat het opsplitsen van X leidt tot twee disjuncte verzamelingen (verzamelingen die niet overlappen) die samen X vormen. De ruimte X is dan natuurlijk verbonden als dit niet mogelijk is.

Kort gezegd is een ruimte compact als het altijd mogelijk is om een eindige selectie van open verzamelingen te vinden die alles dekken. Een open overdekking is hierbij een verzameling van zulke open verzamelingen waarvan de vereniging alle punten van X bevat.

De Klein-fles hiernaast is een bovenzintuiglijke visualisatie van een topologische ruimte; echt schitterend. Ondanks zijn complexe vorm is het oppervlak verbonden: je kunt het niet in twee niet-overlappende stukken splitsen. Bovendien is het compact: elke selectie open verzamelingen die het oppervlak bedekt kan altijd worden teruggebracht tot een eindige selectie die nog steeds het hele oppervlak dekt.

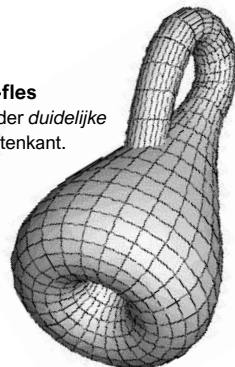
Een open verzameling

Een verzameling waarbij elk punt of element de 'rand' niet aanraakt. Denk aan een open interval zoals $(1,3)$.



De Klein-fles

Een 4D object zonder duidelijke binnen- of buitenkant.



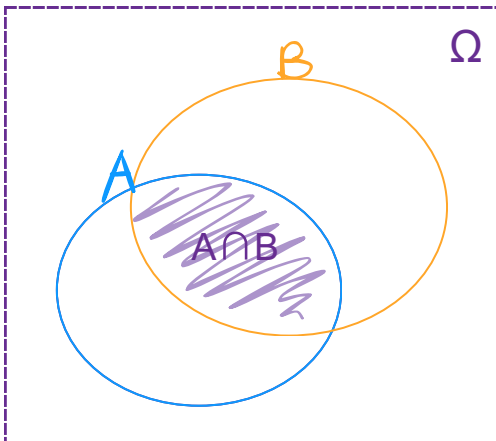
Topologie is niets meer dan verzamelingenleer de ruimte ingebracht (samen met natuurlijk de toevoeging van wat extra eigenschappen).

4. Kansrekenen

Verzamelingenleer vormt het kader voor kansrekenen, waarbij Venndiagrammen een cruciale rol spelen. Het is vooraf belangrijk om aan te geven dat er niet één universele definitie van een kans is. Er zijn verschillende interpretaties van kansrekenen, maar elke maakt op één of ander manier gebruik van verzamelingen.

De volgende essentiële eigenschappen van kansrekenen maken gebruik van verzamelingen (Friedrich Miescher Institute for Biomedical Research, 2013):

Als eerst is de steekproefverzameling Ω de verzameling van alle mogelijke uitkomst van een gegeven experiment. Dit vormt het kader van een kansberekening en het is vergelijkbaar met het universum U .



Figuur 15: Venndiagram van de kans $P(A \cap B)$

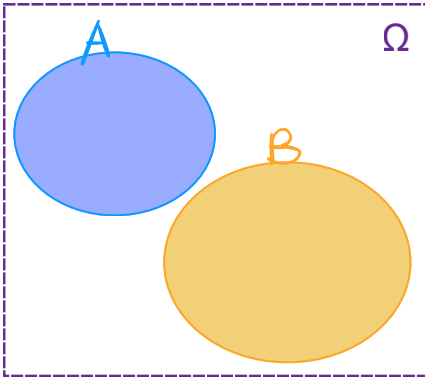
Daarnaast willen we ons richten op de kans op een gegeven experiment of gebeurtenis. Hier komen we weer verzamelingen tegen; een gebeurtenis A is een deelverzameling van alle mogelijke uitkomsten van een experiment. Dus: $A \subseteq S$ waarbij S de steekproefverzameling is. Dit kan zowel de lege verzameling $\emptyset$ als de volledige steekproefverzameling S zelf omvatten.

De algebra die kansrekenen benut heet een σ -algebra, genoteerd met $\mathcal{B}$. Een verzameling van deelverzamelingen heet een σ -algebra, als zij voldoet aan de volgende drie eigenschappen:

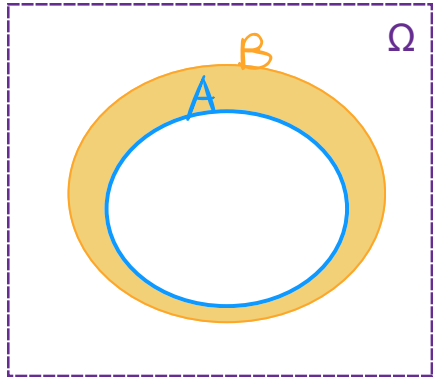
1. $\emptyset \in \mathcal{B}$
2. Als $A \in \mathcal{B}$, dan geldt $A^c \in \mathcal{B}$ (B is gesloten onder complementvorming, dus het complement 'verlaat' de verzameling $\mathcal{B}$ niet).
3. Als alle verzamelingen $A_1, A_2, \dots$ in $\mathcal{B}$ zitten, dan zit hun aftelbare unie ook in $\mathcal{B}$.

Door middel van Venndiagrammen kunnen we verschillende gebeurtenissen net wat tastbaarder maken. En heel anders dan gewone relaties binnen de verzamelingenleer zal dit niet zijn. Zie bijvoorbeeld *figuur 15* hierboven. De kans op A , een kat bezitten, neemt een bepaalde oppervlakte van Ω in, wiens totale oppervlakte gelijk is aan 1; zeg 0.2. Dus de kans op A , oftewel $P(A)$, is gelijk aan 0.2 of 20%. De kans op B , het bezitten van een ringstaartmaki, daarentegen, neem een oppervlakte van 0.3 in. De kans op $A \cap B$ is dan waar A en B overlappen, laten we zeggen 0.1, oftewel 10%.

Dit Venndiagram maakt ook duidelijk hoe $P(A \cup B)$ niet altijd gelijk is aan $P(A) + P(B)$. De volgende gebeurtenissen kunnen we op dezelfde manier omzetten in Venndiagrammen:

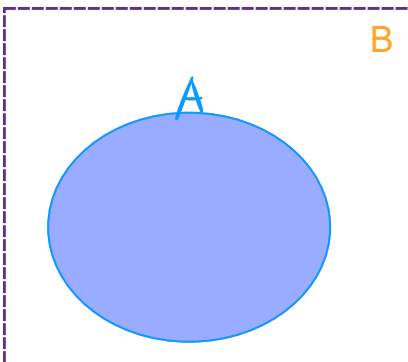


Figuur 16: Venndiagram van de kans $P(A \cup B)$



Figuur 17: Venndiagram van de kans $P(B|A)$

Figuur 16 echter is een weergave van een voorbeeld waarbij $P(A \cup B)$ wel gelijk is aan $P(A) + P(B)$. De kans op A of B is in dit geval namelijk de kans op A en op B, maar niet op beide; we hebben te maken met een *exclusieve 'of'*. Hierbij is $P(A \cap B) = \emptyset$. In *figuur 17* zie je de kans op B - de kans op A. Bijvoorbeeld de kans op het gooien van een even getal, behalve het getal 2 en 4, met een dobbelsteen (Friedrich Miescher Institute for Biomedical Research, 2013).



Figuur 18: Venndiagram van $P(A | B)$ uitgedrukt in B

Een ander schitterend voorbeeld – en mijn persoonlijk favoriet – is *Bayes' stelling*:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Hier zien we de formule voor het berekenen van de voorwaardelijke kans. Dit beschrijft hoe groot de kans op gebeurtenis A is onder de voorwaarde dat gebeurtenis B waar is.

In het Venndiagram hiernaast stelt $P(A | B)$ het blauwe gebied binnen B voor, *uitgedrukt als een deel van de totale oppervlakte van B*. De stelling zelf kan het beste beschreven worden door middel van een Venndiagram.

A en B tonen de gebeurtenissen, en het blauwe overlappende gebied $A \cap B$ (in *figuur 15*) liet zien waar beide gebeurtenissen tegelijk plaatsvinden. Nu is Ω gelijk aan B. De stelling laat zien hoe je je ideeën en verwachtingen kunt bijstellen wanneer nieuw bewijs opduikt, zowel in wetenschap als in het dagelijks leven. Dus jouw geloof wordt letterlijk bijgesteld op basis van een gebeurtenis B.

Zoals je kunt zien zou kansrekening nihil zijn zonder verzamelingenleer.



ALL ABOUT THAT
BAYES

5. Argumenten en tegenargumenten

Verzamelingenleer is niet alleen ontzettend nuttig voor 'traditionele' wiskunde, maar het is ook een hulpmiddel voor argumenten analyseren. Er wordt immers ook veel gebruik gemaakt van Venndiagrammen bij (tegen)argumenten. Neem het volgende argument met de bijbehorende proposities:

P1. *Alle vissen kunnen zwemmen.*

P2. *Mijn buurvrouw kan zwemmen.*

Conclusie: *Mijn buurvrouw is een vis.*



Het bestaat, zoals het argument hierboven, uit twee stellingen, ook wel premissen genoemd, en een conclusie. Maar dit argument is logisch niet geldig. Dit houdt in dat de conclusie niet volgt uit de premissen. Daarentegen is het argument *deductief* als de conclusie noodzakelijk uit de premissen volgt. De structuur daarvan heet een syllogisme, het argument bestaat dan uit twee premissen en een conclusie. Een syllogisme is altijd deductief. De fout die hier wordt gemaakt heet *het bevestigen van het consequent*. Bij een als-dan bewering ' $P \Rightarrow Q$ ' – als P dan Q – is P het *antecedent* (wat vóór 'als' komt) en Q het *consequent* (wat na 'dan' komt). Je neemt bij zo een drogredenering dan aan dat als $P \Rightarrow Q$ geldt, dat $Q \Rightarrow P$ dan ook geldt. Bij $P \Rightarrow Q$, is P altijd een deelverzameling van de objecten waarvoor Q waar is. Als je er ook vanuit gaat dat dan $Q \Rightarrow P$ geldt. Dan zeg je eigenlijk dat de verzameling van objecten waarvoor P geldt een onjuiste deelverzameling is van de objecten waarvoor Q geldt, en als gevolg precies dezelfde objecten bevat als de verzameling waarvoor Q geldt. Dus overlappen P en Q volledig. Wij kunnen de eerdergenoemde redenering vertalen naar (Dowden, 2020):

P1. *Als x een vis is (P), dan kan x zwemmen(Q).*

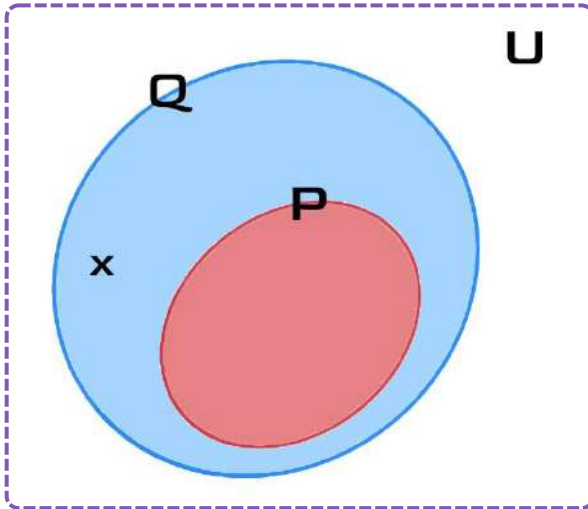
P2. *Mijn buurvrouw kan zwemmen(Q).*

Conclusie: *Mijn buurvrouw is een vis(P).*

Hier kunnen we dus duidelijk zien dat P2 de aanname de aanname $Q \Rightarrow P$ veronderstelt, ondanks dat dit in het argument niet is aangegeven. In dit geval is de incorrecte veronderstelling: als x kan zwemmen dan is x een vis.

Om te bewijzen dat deze redenatie ongeldig is kunnen we een tegenargument bedenken. Dus wij moeten bewijzen dat er een x kan zijn wat geen vis is, maar wel kan zwemmen. Oftewel we moeten bewijzen dat de verzameling waarvoor geldt P geen onjuiste, maar juiste deelverzameling is van de verzameling waarvoor geldt Q. Wij kunnen dit tegenargument duidelijk presenteren met behulp van een Venndiagram:





Figuur 19: Venndiagram van een tegenargument

De bijbehorende proposities in *figuur 15* zijn:

P= Alles wat een vis is.

Q= Alle dingen die kunnen zwemmen.

We zien duidelijk dat er een x kan zijn buiten de verzameling dat voldoet aan P , maar binnen Q . Het blauwe gebied is alles buiten P en binnen Q . Beide premissen van het argument zijn dus waar, maar de conclusie hoeft niet waar te zijn. Dus de conclusie volgt niet uit de premissen. Dit hebben we duidelijk kunnen maken met behulp van een Venndiagram en hier is het duidelijk dat we ook een aantal regels van verzamelingenleer kunnen gebruiken als instrument voor correcte argumentatie (Reichard, 2021).

Verzamelingen zijn bijgevolg erg handig voor rationele analyse, omdat ze een formeel kader bieden waarin we argumenten kunnen formuleren en toetsen. Ze maken argumenten en tegenargumenten overzichtelijker.

We kunnen uit alles wat ik net heb beschreven concluderen dat verzamelingenleer gezien kan worden als de uniforme taal van de wiskunde en logica. Het definieert alles, zodat er geen ambiguïteit ontstaat. Het is een nuttig instrument voor veel takken binnen wiskunde en het startte de noodzaak voor fundamentele bewijzen op. En juist daardoor zou de wiskunde instorten als het fundament te fragiel blijkt te zijn.

Oefeningen 1.4: Waarom wiskundigen van verzamelingen houden

Wat je moet kunnen

- Je kunt met symbolen over transfiniete verzamelingen werken.
- Je kunt het belang van verzamelingenleer binnen andere takken van de wiskunde uitleggen.

Opdracht 1 ★★☆☆☆

Definieer de kardinaliteit de natuurlijke en reële getallen met de Aleph-notatie.

Opdracht 2 ★★★☆☆

Leg in je eigen woorden uit hoe verzamelingenleer de basis vormt voor de volgende takken van wiskunde:

- a) Abstracte algebra (groepen, ringen, velden)
- b) Analyse (limieten, functies)
- c) Topologie (open verzamelingen, continuïteit)

Opdracht 3 ★★☆☆☆

Bedenk hoe de ontdekking van oneindige niet-aftelbare verzamelingen de manier waarop wiskundigen over wiskundige objecten denken heeft veranderd.

1.5 Naïeve verzamelingenleer: naïef, maar niet onschuldig

Toen we de geschiedenis van verzamelingenleer besproken, werd Cantors verzamelingenleer als 'naïef' beschreven. Maar dit was niet zonder reden. Dit is de officiële benaming van zijn verzamelingenleer vóór de opkomst van de paradoxen. Verzamelingenleer kan opgesplitst worden in twee takken: naïeve verzamelingenleer en axiomatische verzamelingenleer. Voor beide is er geen concrete definitie. We spreken dan eerder over een theorie die bestond tijdens een bepaalde periode. De naïeve versie bestond rond het einde van de negentiende eeuw en rond het begin van de twintigste eeuw kwam de axiomatische theorie op dagen (Ferreirós, 2007).

Hoe kan het verschil dan het beste worden beschreven? Nou, naïeve verzamelingenleer ontstond vooral uit wiskundige intuïties die al een hele tijd in de lucht hingen en werd niet zo zeer opgebouwd uit bewijs. Het werd, in tegenstelling tot de axiomatische theorie, niet zo formeel genoteerd. Hieronder is een subtiel voorbeeld van het inhoudelijk verschil, waar we later verder op in gaan (Holmes, 2012).

Naïef: $E = \{x \mid x \text{ is een even getal}\}$

Axiomatisch: $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is even}\}$

Kort gezegd ligt het verschil in het specificeren dat x altijd binnen een bestaande verzameling moet zitten. Het grootste verschil ligt vooral ook in hoe het is opgebouwd. Naïeve verzamelingenleer maakt wel impliciet gebruik van axioma's, maar bestudeert ze niet (Holmes, 2012).

Onder het kopje '*Denken in hokjes*' heb ik een introductie gegeven van een verzamelingenleer dat wel een mengeling was van beide types. Ik introduceerde een aantal axioma's die naïeve verzamelingenleer veronderstelde, maar deze werden later aangepast en er werd meer aan toegevoegd onder de axiomatische versie.

Doordat er niet veel aandacht was besteed aan de axioma's van de leer, was het erg vatbaar en gevoelig voor verschillende paradoxen en problemen. Het was onder andere vatbaar voor Russells paradox, Cantors paradox en de Burali-Forti paradox. Het grootste probleem lag in het feit dat er geen grenzen waren voor wat voor verzameling je kon maken. Er ontstonden dus nieuwe versies van de verzamelingenleer die vaak wel beperkingen zetten aan wat voor verzamelingen mogelijk waren (Frumin, 2025; Kaplan, 2022).

Hoewel er vanaf dat moment meer aandacht werd besteed aan het bestuderen van de verzamelingenleer zelf, wordt dit in het heden niet echt meer gedaan. Vandaag worden de 'intuïtieve' noties van verzamelingenleer veel gebruikt bij binnen alle wiskundige takken, maar de regels worden zelden besproken of bestudeert (behalve door de specialisten van dat vakgebied), gezien wiskundigen ook zonder het bestuderen van de regels te werk kunnen gaan (Frumin, 2025).

Maar dit betekent niet dat de axiomatische verzamelingenleer niet waardevol is. Integendeel; ZFC, een axiomatische theorie, is immers de standaard geworden.

1.5.1 Nieuwe spelregels



Ondanks het feit dat wij ook zonder de theorie van de axioma's kunnen rekenen met verzamelingen, is het wel belangrijk dat ons systeem consistent is, anders is het vrijwel waardeloos. Wat heb je immers aan zo'n systeem als het toch maar vol storingen en fouten zit. Hoewel nuttig, leidt het dan wel nog altijd tot correcte resultaten?

Dus begonnen er veel wiskundigen te spelen met het originele systeem. Het was immers te waardevol om helemaal weg te gooien. Een aantal varianten werden bedacht. Op dat moment gingen wiskundigen pas echt axioma's introduceren, zodat we een aantal paradoxen kunnen voorkomen. Het heet daardoor ook de *axiomatische* verzamelingenleer. Net als naïeve verzamelingenleer heeft het geen concrete definitie, maar verwijst het eerder naar een tijdperk. In dit geval verwijst het naar een stroming die gezien kan worden als reactie op de paradoxen die ontstonden rond het begin van de twintigste eeuw. Op dat moment werd verzamelingenleer een stuk strikter en erg rigide aangepakt. Alles werd een stuk formeler genoteerd. Er werden vooral nieuwe axioma's gegenereerd om paradoxen te voorkomen. Deze moesten af zien te komen van een aantal problemen, zonder onopzettelijk grenzen te leggen waar geen grenzen hoorden te zijn. Deze axioma's werden sterk bestudeert en zo konden ze de verzamelingenleer weer vernieuwen (Holmes, 2012; Kooi, 2025).

Vrij weinig veranderde werkelijk in de praktijk. Aan de oppervlakte zag het meeste er hetzelfde uit. De aanpassingen aan de fundering kunnen vergeleken worden met het vervangen van de fundering van een brug. Voor de mensen die langs lopen is er helemaal niks veranderd, maar als de fundering niet verplaatst werd, zou het op een gegeven moment gaan instorten. Wij zullen in *deel 3* de meeste invloedrijke oplossingen op één van de paradoxen, namelijk die van Russell, bekijken, waarbij we niet alleen ons zullen richten op de axiomatische verzamelingenleer.

In dit eerste deel hebben we geleerd hoe verzamelingen worden gevormd en hoe nieuwe verzamelingen uit bestaande gemaakt kunnen worden. We hebben de belangrijkste logische symbolen binnen de verzamelingenleer leren kennen, evenals de manier waarop we ze moeten gebruiken. We keken naar hoe verzamelingen onderling in relatie staan en hoe functies daarbij een rol spelen. Specifiek, met bijtieve functies ontdekten we dat sommige oneindige verzamelingen groter kunnen zijn dan andere.

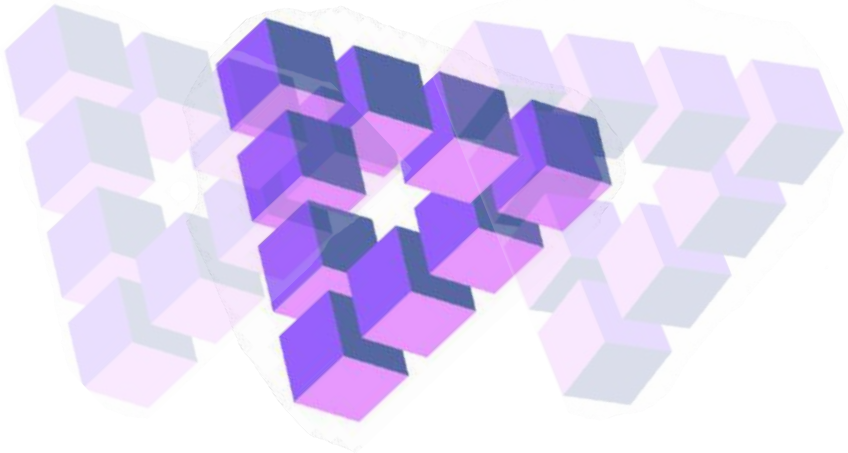
Daarnaast bekeken we hoe Cantor de verzamelingenleer in de wiskundewereld heeft gelanceerd, welke kritiek hij op zijn theorie ontving, en hoe de theorie zich verder ontwikkelde na de introductie van een aantal problemen. We ontdekten dat er twee vormen van verzamelingenleer bestaan – de naïeve en de axiomatische – en bekeken het verschil daartussen. Ten slotte, hebben we ook gezien precies waarom deze inzichten zo'n grote rol spelen in de wiskunde en hoe het de basis vormt van een heleboel uiteenlopende concepten.

In het volgende deel richten we ons op de paradox die zorgde voor de meeste onrust onder zowel filosofen, logici en wiskundigen met betrekking tot deze grondslag van de wiskunde. En nu we de basis onder de knie hebben en de context voor ons duidelijk is kunnen we de paradox volledig begrijpen.



DEEL 2:

RUSSELL EN DE PARADOX



“Weinig is zo rampzalig voor een wetenschappelijk auteur als wanneer één van de fundamenteën van zijn bouwwerk aan het wankelen wordt gebracht nadat het werk voltooid is. In precies die positie kwam ik terecht door een brief van de heer Bertrand Russell, juist toen het drukken van dit deel bijna voltooid was.” ~ Gottlob Frege

Dit is een citaat van Frege nadat hij een korte brief heeft ontvangen van Bertrand Russell over Russells paradox. Dit was een schitterend passende reactie op de paradox. Wij zullen in dit deel kennis maken met de paradox en erachter komen precies waarom het voor veel wiskundigen zo ontzettend onrustbarend was. Voor we dat doen, kijken we eerst naar wat überhaupt een paradox precies inhoudt en wie Russell nou eigenlijk was om zoiets te ontdekken.

2.1 Paradox: Contradictie of illusie?

Er bestaan een aantal verschillende definities van het begrip paradox. Hier zal ik aan jou de verschillende definities presenteren en ik zal toelichten welke definitie relevant is voor ons – met terloops wat opmerkingen over hoe er maar één correcte omschrijving is en dat de overigen zich slechts voordoen als een paradox; het zijn pseudo-paradoxen.

2.1.1 De kunst van het verkeerd redeneren

De filosoof en logicus Willard Quine stelde dat er drie types paradoxen zijn. Het eerste type paradox wordt ook wel een *valse paradox* genoemd. Hierbij is de conclusie die we trekken duidelijk onjuist door een verkeerde aanname of onjuiste redenering. Laten we een voorbeeld nemen van zo een paradox (Al-Khalili, 2012).

De stelling $1=2$ is toch absurd? Er werd desalniettemin een bewijs opgesteld om 1 gelijk te stellen aan 2. Dit bewijs gaat als volgt:

1. Begin met de aanname: $x=1$
2. Vermenigvuldig beide kanten met x ; $x^2 = x$
3. Trek 1 van beide kanten af: $x^2 - 1 = x - 1$
4. Ontleed beide kanten in haakjes: $(x-1)(x+1) = (x-1)$
5. Deel beide kanten door $(x-1)$: $x + 1 = 1$
6. Voer voor x weer 1 in: $1 + 1 = 1$
7. Dus: $2=1$ (oftewel, $1=2$)

De conclusie is hier uiteraard onwaar, maar op het eerste gezicht lijkt deze redenering voor de meesten wel juist te zijn. Er zit echter een schandalige fout in stap 5. Gezien wij x gelijk hebben gesteld aan 1 in stap 1, is delen door $(x-1)$ hetzelfde als delen door 0. Delen door nul is wiskundig niet mogelijk. Waarom precies? Delen wordt gezien als de inverse van vermenigvuldigen. Zo is de inverse van $10:5=2$, $5 \times 2=10$. Wij kunnen vaststellen dat $x:y=z$ gelijk is aan $y \times z = x$. Bij 0 ziet de formule er anders uit omdat het product van $0 \times z$ altijd 0 is. Hierbij is 0 zowel y als z . Als we dan iets anders invoeren in y , krijgen we geen resultaat. Dus stap 5 in deze redenering is wiskundig onmogelijk; de conclusie volgt niet uit de uitgangspunten.

Dit soort 'paradoxen' zijn volstrekt onschuldig en makkelijk op te lossen zodra je iets langer nadenkt over het probleem. Aldus kan dit als niets meer dan een simpele redeneerfout worden genoemd; geen paradox! Dit soort denkfouten worden immers op een dagelijkse basis gemaakt, wegens de manier waarop ons brein te snel conclusies trekt. Hiervan kan je leren iets langer na te denken over een bepaald probleem voor je een conclusie trekt. Dus een valse paradox is net een trucje voor je brein: het lijkt logisch, het voelt juist, maar met wat extra denkwerk valt de illusie snel uit elkaar (Al-Khalili, 2012).

2.1.2 Een gebrek aan informatie

Het volgende type paradox die Quine aan ons voorlegt wordt een *waarachtige paradox* genoemd. Deze enigszins onnozele naam wordt het gegeven, omdat de conclusie tegen-intuïtief, maar wel waar is. Het lijkt absurd, maar met beschikking tot meer informatie is het achteraf wel logisch. Hierbij spreken we vaak ook van een *schijnbare tegenstelling*. Een voorbeeld van zo'n paradox is de verjaardagsparadox en het Monty Hall-probleem. De verjaardagsparadox wordt als volgt geformuleerd (Al-Khalili, 2012):

→ In een groep van 23 personen, hoe groot is de kans dat minstens twee daarvan dezelfde verjaardag delen?

Wij gaan er hier vanuit dat de kans op elke verjaardag net zo groot is en dat er geen tweelingen tussen zitten. Dit kun jij nu voor jezelf gaan uitrekenen.

Op wat voor antwoord jij ook bent geland, betwijfel ik dat het is groter dan 50%. Dit klinkt op het eerste gezicht bijna absurd. Zodra wij het stap voor stap berekenen, is het echter erg logisch en zelfs voor-de-hand-liggend (Al-Khalili, 2012).

De fout die de meesten maken is dat ze simpelweg 23 delen door 365. Dan kom je uit op een antwoord van ongeveer 6%. Maar dit is helemaal niet hoe het berekend moet worden (Al-Khalili, 2012).

De berekening ziet er als volgt uit:

$$1 - P(\text{de kans op geen match}) = 365/365 \times 364/365 \times 363/365 \times \dots \times 365/365 - n + 1$$

Dit kan beknopter genoteerd worden met de factor: $1 - (365 - 23)! / 365^{23}$. Met deze berekening kom je uit op een antwoord van afgerond 0,5073, of 50,73%. De fout die de meeste mensen maken is dat ze kijken naar de kans dat één specifiek paar een verjaardag deelt. In plaats daarvan moet je kijken naar de kans dat alle mogelijke combinaties van paren een verjaardag delen (Al-Khalili).

Het aantal verschillende combinaties die we kunnen maken is niet 23, maar 253. Er zijn dus 253 verschillende manier om 2 personen te kiezen uit een groep van 23. Dit is te bewijzen met het gebruik van de wiskundige combinatie: $(23 \text{ boven } 2)$. Dit wil zeggen: $(23 \times 22) : 2$. Zodra wij gaan rekenen met alle mogelijke paren, wordt het een stuk makkelijker.

Bij deze 'paradox' lijkt de conclusie erg tegenintuïtief, maar het volledig juist. Zodra je meer informatie krijgt, verdwijnt vaak de schijnbare tegenstelling. Meer dan een simpel gebrek aan informatie is dit niet.

2.1.3 Zelfreferentie

Het laatste type paradox is wat mij betreft de enige echte. Deze wordt ook wel een *antinomy* genoemd. Dit is een werkelijke tegenstrijdigheid die niet zomaar opgelost kan worden. Dit wordt ook een logische paradox genoemd. Zulke paradoxen berusten vaak op zelfreferentie. Dit houdt in dat een bepaalde stelling iets 'stelt' over zichzelf. Dit leidt niet *altijd* tot problemen, maar in sommige gevallen wel. Dit worden paradoxen (Al-Khalili, 2012).

Een voorbeeld van een zelfreferentiële stelling die *niet* problematisch is, is: “Deze zin bevat vijf woorden.” (Kooi, 2025).

Zelfreferentie op zich is niet het probleem, maar soms leidt het tot een loop van tegenstellingen. Een populaire variant van een zelfreferentiële paradox is de leugenaars paradox. Stel je voor je loopt langs een dronken, en nogal afschrikwekkende man op een late dinsdag avond en hij roept zonder enig besef:

“Deze uitspraak is een leugen!”

Aan jou is de vraag: is wat hij net zei werkelijk een leugen? Je denkt er even over na en beseft na een tijdje dat er geen echt antwoord op is. Als wat hij zegt wel een leugen is, dan spreekt hij de waarheid. Dus dan is het toch geen leugen? Oké, wat als hij juist de waarheid verteld, dan liegt hij, omdat hij *zelf* zegt dat hij liegt en wat hij zegt is blijkbaar juist. Je zit nu vast in een oneindige loop van tegenstellingen. Wat jouw antwoord ook is, het leidt tot een tegenstelling (Al-Khalili).

Dus bij de valse paradox is de conclusie niet waar, maar de redenering is schijnbaar juist. Bij een waarachtige paradox is de conclusie juist waar, maar lijkt het onzinnig. Hoe zit het dan met een antinomie? Een antinomie heeft geen logische conclusie. Het is een echte tegenstelling die ontstaat uit zelfreferentie. Onder dit type paradox valt ook Russells paradox. Russells paradox heeft veel gemeen met de eerder besproken paradox. Beide ontstaan namelijk uit zelfreferentie. Hoe wordt deze dan opgelost? Nou, gewoon niet. In plaats daarvan worden er binnen verzamelingenleer pogingen gedaan om ervoor te zorgen dat het überhaupt niet kan ontstaan binnen het systeem.

Wij zullen zo de paradox in detail analyseren, maar voor we daarmee aan de slag gaan, wil ik aan jou eerst even de man achter de paradox introduceren: Bertrand Russell.

Oefeningen 2.1: Paradox: contradictie of illusie?

Opdracht 1 ★★☆☆☆

De verjaardagsparadox voelt voor veel mensen absurd. Beschrijf in je eigen woorden welke intuïtieve aanname mensen verkeerd maken.

Opdracht 2 ★★☆☆☆

Bekijk de volgende zinnen:

1. "Deze zin bevat vijf woorden."
2. "Deze zin is onwaar."

- a) Leg uit waarom zin 1 niet tot een paradox leidt.
- b) Leg uit waarom zin 2 wel tot een paradox leidt.

Opdracht 3 ★★☆☆☆

Ontwerp zelf een voorbeeld van:

- a) een valse paradox
- b) een waarachtige paradox
- c) een antinomie

Wat je moet kunnen

- Je kunt de onderscheidt tussen de drie types paradoxen herkennen en uitleggen.
- Je kunt de aard van elk type paradox uitleggen.

2.2 De man achter de paradox

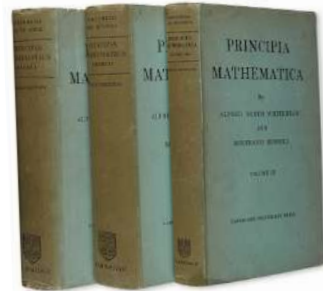
Bertrand Russell, geboren in Engeland in 1872, verdient zonder twijfel de titel van een van de invloedrijkste personen van de afgelopen eeuw op het gebied van zowel filosofie als wiskunde. Zijn bijdragen aan beide disciplines zijn enorm en hebben ontzettend veel betekend voor de academische wereld. Russell leverde niet alleen belangrijke wiskundige bijdragen, maar was ook invloedrijk binnen de taal filosofie en de politieke theorie (Grayling, 2002).

In het volgende gedeelte wil ik zijn belang binnen deze verschillende gebieden beargumenteren en de context schetsen waarin hij de paradox lanceerde. Zo heb je hopelijk een breder beeld van wie Russell was om tot zo'n ontdekking als zijn paradox te kunnen komen.

2.2.1 Pionier in de fundamenteën van de wiskunde

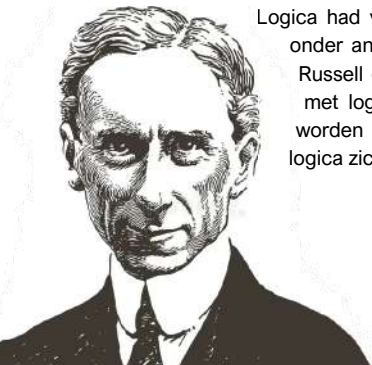
In de negentiende en twintigste eeuw heerste er een verlangen onder wiskundigen voor wat Leibniz een '*characteristica universalis*' noemde. Dit was een formele taal gegrond in wiskunde die alles zou kunnen definiëren en waarmee alle bewijzen konden worden opgesteld. Veel wiskundigen probeerden zo een taal te ontwikkelen. Dit gold ook voor Russell. Na zijn kennis-making met het werk van Peano, een wiskundige die net zo invloedrijk (als niet meer) was als Russell, werd Russell geïnspireerd om ook een *characteristica universalis* te ontwikkelen. Russell wilde alle wiskundige termen kunnen uitdrukken met alleen het gebruik van formele logica, en met deze formele logica wilde hij dan ook veel wiskundige proposities kunnen bewijzen.

Dit idee werd het '*logicisme*' genoemd. Deze pogingen van Russell werden allemaal verwerkt in zijn driedelig boek met een totaal van bijna 2000 pagina's – waarvoor geen enkele wiskundige de moed heeft om het volledig te lezen – de '*Principia Mathematica*'. Deze pil schreef hij gelukkig niet alleen, maar samen met Alfred Whitehead. Russells doel was om te bewijzen dat logica en wiskunde één waren. En eigenlijk ging hij nog verder dan dat. Logicisten geloofden dat logica vóór de wiskunde kwam. Logica was hetgeen waarop elke wiskundige tak was gegrond. Dit was een revolutionaire manier van kijken naar de logica. Velen geloofden dat logica puur de studie van *inferentie* was (het afleiden van een conclusie op basis van redeneringen).



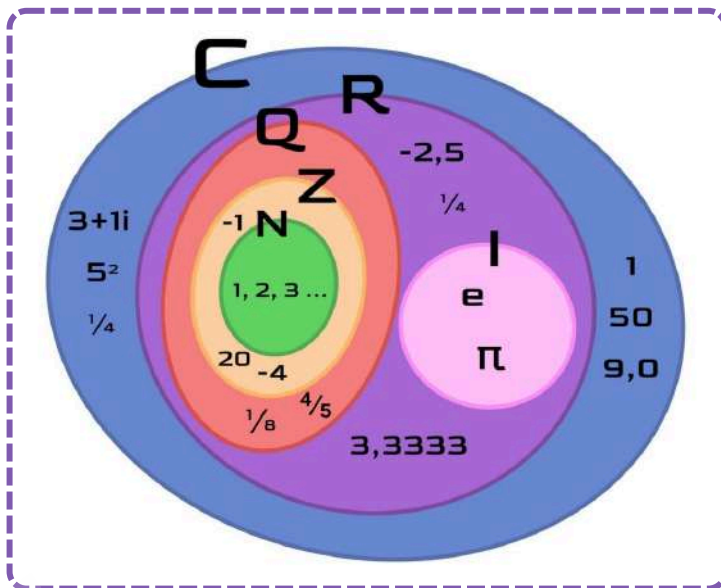
Logica had vrij weinig gemeen met wiskunde; maar dit idee veranderde dankzij, onder andere, Russell. Wiskunde en logica zijn namelijk met elkaar verweven.

Russell geloofde dat wiskundigen altijd al noodzakelijkerwijs ook bezig waren met logica. Zij hadden dit alleen niet door. Alles kon immers gereduceerd worden tot structuren van relaties. En dit, volgens Russell, is precies waar logica zich mee bezig hield (Grayling, 2002; Landini, z.d.).



De aanleiding voor Russells logicisme waren twee ontdekkingen: één van Cantor en één van Frege. Cantor heeft kunnen bewijzen (in Russells ogen) dat wiskunde juist bestaat uit relationele structuren. Russells plan was om te bewijzen dat *particulieren* (een concept als het getal 3 als op zichzelf staand object) niet nodig waren om met wiskunde te werken. Frege had ook veel bijgedragen aan Russells logicisme, hoewel Frege zich er ontzettend tegen verzette. In 1879 publiceerde Frege zijn 'Begriffsschrift'. Hierin presenteerde hij een formele logische taal. Zo ontstonden voor het eerst veel logische symbolen, zoals 'er bestaat ($\exists$)' of 'voor alle ($\forall$)'. Deze worden *kwantoren* genoemd; zij geven een hoeveelheid aan. Van deze taal kon Russell gebruik maken om wiskundige concepten in te gronden. Russell wilde niet alleen wiskunde gronden in logica, maar ook filosofie (Landini, z.d.).

Eén van de belangrijkste concepten die Russell presenteerde in de Principia was hoe een getal binnen logica kan worden gedefinieerd. Frege deed dit gelijktijdig met Russell zonder dat één van hen dat door had. Hun definitie van een getal hadden wij al besproken in *deel 1*. Zo was het getal 3 de verzameling van alle verzamelingen met een kardinaliteit van 3. Russell was ervan overtuigd dat zodra de natuurlijke getallen gedefinieerd waren, een heleboel problemen vermeden kunnen worden. Zij vormen namelijk de basis voor alle andere getallen, waaronder de reële en complexe getallen. In *figuur 20* hieronder kun je een Venndiagram zien van alle verschillende getallenverzamelingen. Zie voor de namen achter de symbolen *tabel 1* in de inleiding (Grayling, 2002).



Figuur 20: Venndiagram van alle type getallen

Hier is het duidelijk dat natuurlijke getallen ook een basis vormen voor elk ander type getal. Het uitdrukken van alle wiskundige termen met alleen het gebruik van formele logica was, door middel van het definiëren van nummers bijvoorbeeld, nogal makkelijk te actualiseren. Daarentegen bleek het bewijzen van wiskundige formules of concepten een stuk moeilijker te zijn. Dit werd al snel duidelijk na de opkomst van paradoxen binnen logische systemen, zoals die van Russell zelf (Grayling, 2002; Zalta, 1995).

Een groot deel van de Principia Mathematica bestond zo ook uit het oplossen van zijn eigen paradox. Deze oplossing wordt het 'type theorie' genoemd (waar wij het verder over gaan hebben in deel 3. (Grayling, 2002).

Ook die theorie heeft veel impact gehad, vooral op het gebied van informatica. Type theorie is zo de voorganger geweest van het systeem dat op dit moment wordt gebruikt voor de talen van programmeren.

Ondanks dat Russells doel voor de Principia niet volledig was gelukt, hadden alleen al de reacties op zijn (en Whiteheads) werk veel impact op beide wiskunde en logica. Maar vooral op hoe zij in relatie tot elkaar worden beschouwd. Logica werd niet langer gezien als de onderdaan van de wiskunde, maar juist als een gelijkwaardige. Beide vakken hebben invloed op elkaar en kunnen tot op een bepaalde hoogte ook niet zonder elkaar (Frumin, 2025).

2.2.2 Een nieuwe type filosofie

Eerder werd al benoemd dat Russell logica voor zowel wiskunde als filosofie gebruikte als de fundering. Russells zoektocht naar de fundamenteën van de wiskunde leidde hem onvermijdelijk ook naar de filosofie. Als logica de basis vormt van alle wiskundige structuren, dan ligt het voor de hand dat zij ook de fundamenteën van onze denken en taal kan beschrijven. Russell, net zoals Ludwig Wittgenstein, geloofde dat filosofie bedoeld was om aan te duiden waar we wel en niet over kunnen spreken. Zo zei Wittgenstein:

"Filosofie is geen geheel van doctrines, maar een activiteit.

Zonder filosofie zijn gedachten als het ware wazig en onduidelijk; haar taak is om ze helder te maken." ~ Ludwig Wittgenstein

Filosofie was niets meer dan het verduidelijkouwd uit een aantal logische bouwstenen. Deze bouwstenen determineren ook wat betekenisvol is om te zeggen en wat niet, oftewel wat zegt werkelijk iets over de staat van de wereld en wat niet. Dit wordt het 'logisch atomisme' genoemd (Wittgenstein, 1922; Grayling, 2002; Zalta, 1995).

Filosofie werd op die manier op een veel meer beperkte en rigide wijze gedefinieerd. Russell was één van de grondleggers van de 'analytische filosofie'. De analytische filosofie hield zich niet langer bezig met metafysische vragen, zoals 'Bestaat God?' of 'Wat is de ziel?'. Dit werd vervangen met vragen over enkel de taal en de wiskunde; het was namelijk het enige waar wij over *konden* spreken, omdat het niet buitenwerelds is. Dat gezegd hebbende, vond Russell, als een overtuigde atheïst, de vraag over God wel erg belangrijk,

omdat dat volgens hem implicaties had die wel invloed hadden op ons leven. Denk bijvoorbeeld aan het bestaan van een hemel of hel. Er is wat mij betreft niet veel dat een grotere impact op jouw leven kan hebben dan je een eeuwigheid moeten vervelen in de ergste (en warmste) plek die jij je maar kan voorstellen (Grayling, 2002).

Deze beperkingen vormde de filosofie tot een vak dat zich veel meer bezig hield met kwesties die over praktischere zaken die concrete toepassingen hadden. Er ontstonden zo vragen binnen taal over wat de referent van een zin eigenlijk is en hoe woorden het beste gedefinieerd moeten worden. Binnen de wiskunde ontstonden er ook een aantal vragen, zoals degene die we al behandeld hebben ‘Wat is een getal?’ of ‘Hoe kunnen wij een logisch/wiskundig systeem bewijzen?’.

Naast bepaalde beperkingen die de analytische filosofie legde op wat er besproken mocht worden, zorgde het ook voor een veel striktere omgang met argumenten en redeneringen. Argumenten werden veel vaker opgesteld met logische symbolen en er werden veel striktere regels gehanteerd. Alles werd gereduceerd tot een syllogisme met een aantal premissen en een conclusie. De logische geldigheid van een argument werd streng nagekeken en er werd veel gelet op drogredenen. Hier kun je een voorbeeld van een opgesteld argument voor en na de analytische filosofie bekijken (Buskes, 2014):

Vóór de analytische stroming:

"Met behulp van gunstige maatregelen zouden grote individuen kunnen worden gevormd die zowel anders als hoger zijn dan degenen die tot nu toe hun bestaan enkel aan toeval te danken hadden." ~Friedrich Nietzsche, Thus Spoke Zarathustra

Na de analytische stroming:

"P1. God is eenvoudig/onveranderlijk.

P2. Als God eenvoudig/onveranderlijk is, dan is hij niet aan tijd gebonden.

Conclusie: God is niet aan tijd gebonden."

~ William Lane Craig, Time and Eternity

Vaak worden argumenten van het tweede type dan ook nog gereduceerd tot logische symbolen. Het tweede type argument kenmerkt zich door een minder verhalende manier van argumenteren. Een argument wordt op deze wijze makkelijker geanalyseerd. Dit illustreert de vooruitgang die het reduceren van argumenten tot logica mogelijk heeft gemaakt. Dit betekent niet dat dergelijke argumenten nieuw zijn – ze bestonden al sinds Aristoteles – maar pas binnen de analytische stroming werden zij werkelijk belangrijk. We kunnen zien dat het zelfs een invloed heeft gehad op religieuze filosofen (zoals William Lane Craig), terwijl religie juist vaak wordt beschouwd als een verhaallijn (ook onder gelovigen). Dit maakt duidelijk precies hoe groot de invloed van de logica was op elke tak van de filosofie.

Russell had ook een invloed op hoe we keken naar de inductieve methode. Deze methode ligt aan de grondslag van de wetenschap. Het baseert zich namelijk op empirische observaties en trekt dan een algemene, en de meest waarschijnlijke, conclusie.

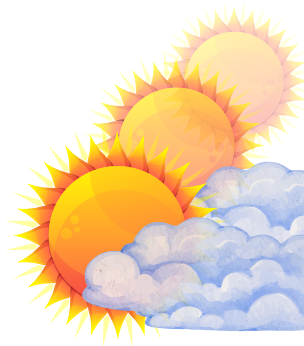
We produceren met inductie een algemene wet op basis van een collectie van individuele gevallen. Het is dus niet hetzelfde als deductie, waarbij de conclusie *noodzakelijk* volgt uit de premissen. David Hume heeft al veel eerder een probleem met deze methode ontdekt, die Russell verder ontwikkelde en populariseerde. Een veel gebruikt voorbeeld van een inductieve redenering is "De zon gaat morgen op, omdat het elke dag hiervoor ook is opgegaan." (Russell, 1912)

De kern van het probleem bij inductie ligt in het feit dat we de inductieve methode *zelf* niet kunnen bewijzen. Als we zeggen dat wij een algemene conclusie kunnen trekken op basis van huidige observaties, dan maken we hier ook een inductief argument. We zeggen namelijk dat op basis van het feit dat het altijd heeft gewerkt in het verleden, zal het ook nu weer werken. Dit verschilt in wezen niet van het argument dat de zon morgen zal opkomen. We kunnen het niet zeker weten. Wij kunnen inductie niet gebruiken als argument om inductie te bewijzen. Dit is volledig circulair (Russell, 1912).

Betekent dit dan nu dat we nooit meer kunnen geloven dat we morgen nog de zon te zien krijgen of dat zwaartekracht werkt. Wat voor nut heeft het dan nog om morgen wakker te worden? Zo kunnen we toch niet ons leven leiden? Gelukkig kunnen we volgens Russell inductie maar beter a priori aannemen. Dit houdt in dat we bepaalde aannames kunnen maken alleen op basis van onze ratio, zonder enige ervaring of observaties. Dit is verrassend vergelijkbaar met hoe we kijken naar axioma's. Degenen die a priori aannames uitsluiten geloven dat kennis alleen a posteriori kan ontstaan. A posteriori is het idee dat het enige waar we kennis van kunnen hebben, datgene is op basis van ervaringen en observaties (Grayling, 2002; Russell, 1912).

Je zult misschien wel merken dat de kern van het probleem van inductie erg overeenkomt met de kern van Russells paradox. Beide illustreren op een manier het probleem van zelfreferentie, of eerder circulariteit, binnen de logica. In dit geval is het dat het bewijzen van inductie leidt tot een oneindige circulaire loop waarbij inductie steeds nodig is om zichzelf te bewijzen, maar dat nooit efficiënt kan. Hij heeft duidelijk niet alleen met zijn paradox de beperkingen van logica kunnen illustreren, maar ook met wat het probleem van de inductie wordt genoemd (Russell, 1912).

Russell had nog veel meer op het vlak van filosofie aangedragen. Zijn bijdrage in de filosofie van religie of de ethiek was bijvoorbeeld ook enorm, maar ik heb slechts datgene behandeld wat voor ons relevant is. Logica, zoals we zagen, stond centraal in de filosofie van niet alleen Russell, maar van iedere analytische filosoof. We kunnen duidelijk zien dat Russell en veel andere logici tijdens de twintigste eeuw veel waarden hechtten aan logica. Het was dus ook niet raar dat deze ontwikkeling gelijktijdig plaats vond met de vele ontwikkelingen met betrekking tot logica binnen de wiskunde. De analytische filosofie was een tegenreactie op de continentale filosofie van de eeuwen daarvoor. Die hechtte, in tegenstelling tot het analytische, veel meer waarde aan argumentatie door middel van verhalen en gevoel. Dit werd heftig bestreden in de laatste eeuw. En deze tegenstrijd had toen een groot invloed gehad op de striktere manier waarop wij nu argumenten behandelen en kunnen weerleggen. Er ontstond zo een nieuwe en zeer welkome waardering voor formele argumentatie (West, 1996).



2.2.3 Een politiek figuur

Hoewel Russells naam vooral verbonden is aan wiskunde en filosofie, beschouwde hij kennis nooit als een doel op zich. Russell legde veel belang op educatie, en specifiek goede wetenschappelijk educatie. Hij maakte vaak opmerkingen zoals:

"Onderwijs is de sleutel tot de nieuwe wereld.... Het allerbelangrijkste dat een leraar bij zijn leerlingen zou moeten proberen te ontwikkelen, als de democratie wil overleven, is het soort tolerantie dat voortkomt uit de poging om degenen te begrijpen die anders zijn dan wijzelf."
~ Bertrand Russell

Russell geloofde dat veel vooroordelen zouden verdwijnen als wij onderwezen worden over de werkelijke staat van de mens en hoe wij wetenschappelijk gezien allemaal erg op elkaar lijken. Hij was ervan overtuigd dat het belangrijkste doel van onderwijs het ontwikkelen van jouw karakter is. Het ideale karakter zou verstandig, intelligent en onverschrokken moeten zijn. Hij besteedde veel aandacht aan het onderwijssysteem. Zo keek hij naar hoe leerkrachten worden opgeleid en de ideale middelen die een school nodig zou moeten hebben. De methodes die hij voorstelde aan scholen waren, opmerkelijk genoeg, niet altijd even pedagogisch verantwoord. Hij vond onder andere dat een leerling gestraft moest worden door middel van isolatie van de rest van de groep totdat hij zich beter gedraagt. Een gezellige leerkracht zou hij niet perse zijn geweest. Daar schreef hij later ook spijt van te hebben (Grayling, 2002; Zalta, 1995).

Je hoeft niet helemaal afgeschrikt te worden, want hij had ook wel wat 'gematigdere' adviezen. Hij geloofde dat kinderen al vanaf het moment dat ze uit de baarmoeder komen, elke mogelijkheid dat ze hebben iets geleerd moeten worden. Kennis was volgens Russell een middel tegen angst en het zorgt voor bevrijding. Hij vond dat kinderen ook aangemoedigd moesten worden om constant wat nieuws te leren. Achteraf schreef hij dat hij in die zin een iets te optimistische blik had van de psyche van kinderen. Dit lijkt me wel vanzelfsprekend waar te zijn (Grayling, 2002).

Hij nam later een andere positie in. Hij geloofde later dat de aandacht van kinderen behouden moest worden door het leerproces en de les aantrekkelijk voor ze te maken en ze onder dwang bij de les te houden. Russell was erg revolutionair in bepaalde opvattingen over het onderwijs, zoals dat seksuele voorlichting gegeven moest worden. Dit was een heel gevoelig onderwerp destijds en daarvoor ontving hij veel kritiek. Russell liet zijn kennis desalniettemin niet voor wat het was, maar startte zijn eigen school op. Deze hield het echter niet lang vol, aangezien Russell de hoop in de staat van de leerling verloor (Grayling, 2002).

Russells perspectief op oorlog was nog controversiëler dan zijn perspectief op het onderwijs; hij was een pacifist. Russell was van jongs af aan tot zijn dood op 97-jarige leeftijd volledig tegen het voeren van oorlog. Russell vond niet dat oorlog voeren *altijd* onnodig was, maar geloofde eerder dat er altijd een betere oplossing voor was. In dit opzicht vond Russell de tweede wereldoorlog een uitzondering. Hij had toch veel protesten geleid tegen de bemoeienis van Engeland in verschillende oorlogen. Dit had hem meerdere malen in de gevangenis laten belanden – en in deze kennelijk inspirerende omgeving besloot hij aan de Principia Mathematica te schrijven.

Maar onder tussen had hij veel protesten geïnspireerd en had hij zeer veel aanhangers gekregen voor zijn ideeën. Russells politieke activisme en zijn bijdragen aan (prima facie) uiteenlopende vakgebieden hebben een diepgaande invloed gehad op de ideeën van zijn studenten, aanhangers en zelfs tegenstanders. Hij liet een kettingreactie achter die tot op het heden doorgaat en de wiskunde, logica, filosofie en zelfs de politiek sterk en blijvend heeft gevormd (Grayling, 2002).

2.3 De spiegel van logica en hoe het barst

Wij zullen nu onze blik werpen op hetgeen dat zorgde voor de instorting van de hele verzamelingenleer. Laten we gelijk de deur intrappen met de formele notatie van Russells paradox:

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R$$

Deze formulering is redelijk makkelijk te begrijpen nu je bepaalde achtergrondkennis bezit. R is hier een gegeven verzameling. Er wordt gesteld: R bevat R mits R niet R bevat (wat hier belangrijk is, is echt het idee te kunnen begrijpen dat verzamelingen zichzelf kunnen bevatten). Dit is duidelijk een tegenspraak, en precies de tegenspraak waar Russells paradox op neer komt. Aan het einde van dit kopje zul je zien hoe we uit het axioma hieronder, het axioma van onbeperkte comprehensie (die al eerder in *deel 1* is behandeld), de paradox formeel kunnen afleiden (Bonevac, 2022).

$$\forall \phi \exists X [\forall y (y \in X \Leftrightarrow \phi(y))]$$

Deze keer hebben we het axioma volledig formeel beschreven, omdat we daar vanaf nu veel meer aan zullen moeten wennen voor *deel 3*. Het axioma is ook iets anders dan degene die we in *deel 1* hebben behandeld, omdat dat eerder een 'naïeve' interpretatie was van het axioma. X is hierboven een gegeven verzameling en y een gegeven element. Alle symbolen hierboven hebben wij behandeld, dus jij kan nu deze formulering ook voor jezelf als oefening even vertalen. Dit axioma stelt: voor alle ϕ (predicaten) bestaat er een verzameling X , zodanig dat voor elk element y , is y een element van X mits y voldoet aan ϕ . Dit klinkt waarschijnlijk nog steeds een beetje onduidelijk. Dit komt erop neer dat je een verzameling kan maken die aan elk en alle predicaten voldoet. Oftewel, er is geen limiet aan wat je kan proppen in die verzameling. Wat je ook kunt bedenken, zo'n verzameling bestaat (Bonevac, 2022)!

Russel zelf had dat in zijn woorden op een net wat andere manier geformuleerd. Russells paradox werd als eerst aan zijn collega Frege in een brief geïntroduceerd. De inhoud van deze brief liet Frege verlamd en uiterst geschrokken achter. Laten wij kijken naar het belangrijkste stukje in deze brief (Kooi, 2025):

"Laat w het predicaat zijn van "een predicaat dat niet van zichzelf kan worden geprediceerd." Kan w van zichzelf worden geprediceerd? Uit elk mogelijk antwoord volgt de tegenspraak daarvan. We moeten daarom concluderen dat w geen predicaat is. Evenzo bestaat er geen klasse (als geheel) van die klassen die, als geheel, geen leden van zichzelf zijn. Hieruit concludeer ik dat onder bepaalde omstandigheden een definieerbare verzameling geen geheel vormt..."
~Bertrand Russell, 1901



In essentie definieert Russell hier een predicaat ω , waarbij ω een predicaat is “dat door zichzelf niet kan worden geprediceerd.” Russell heeft dus eigenlijk lang zitten spelen met alle mogelijke verzamelingen tot hij tot een onmogelijk predicaat of ϕ kwam. Een voorbeeld van zo’n predicaat als ω is “Deze zin is niet waar.”, die, met uitzondering van wat kleine verschillen, al eerder behandeld is. Russell vult dus een ϕ in, in het axioma van onbeperkte comprehensie, wat ook wel het axioma van abstractie wordt genoemd in oudere wiskundige teksten. En wat komt eruit? Niks. Je ontvangt een foutmelding (Bonevac, 2022).

Het probleem ligt niet in de kern van verzamelingenleer, maar eerder in het axioma van onbeperkte comprehensie. Je kunt daaruit namelijk de Russell verzameling afleiden; de verzamelingen van alle verzamelingen die zichzelf niet bevatten. Het is net alsof je een club opricht voor alle mensen die niet in die club gaan zitten. Dit is waanzin. Geef logica de kans om naar zichzelf te kijken, en je zult zien hoe de spiegel barst. Immers, logica is de spiegel zelf; zij kan niet op zichzelf reflecteren zonder bepaalde consequenties teweeg te brengen. Om geen beperkingen te zetten aan de soort verzamelingen die gemaakt kunnen worden is een gevaarlijk idee. Wel was niet iedereen het er mee eens dat het probleem *hier* ligt, en ook dit zullen we later in *deel 3* bekijken (Bonevac, 2022; Irvine, 1995).

Wij kunnen Russells paradox zo stap-voor-stap formeel afleiden uit het axioma van onbeperkte comprehensie:

- 1) Neem het axioma aan: $\forall \phi \exists X | \forall y (y \in X \Leftrightarrow \phi(y))$
- 2) Bepaal een eigenschap ϕ , waarbij $\phi =$ verzamelingen die geen element zijn van zichzelf:
 $\phi = y \notin y$
- 3) Bepaal een verzameling die voldoet aan ϕ : **$R = \{y | y \notin y\}$** , die wordt afgeleid uit $\exists R | \forall y (y \in R \Leftrightarrow y \notin y)$
- 4) Bepaal een y , zodanig dat **$y = R$** . Dan krijg je: **$R \in R \Leftrightarrow R \notin R$**
- 5) Er ontstaat een tweevoudige contradictie:
Als **$R \in R$** waar is, dan geldt **$R \notin R$** en als **$R \notin R$** waar is, dan geldt **$R \in R$** (Bonevac, 2022).

Hoewel dit er ontzettend droog uitziet – en dat is het enigszins ook – is het een zeer waardevolle training in redeneren en kritisch nadenken. Daarnaast is dit uiteraard een fenomenale oefening in het begrijpen van de kern van axioma’s en de paradox. Hou dit de komende tijd in gedachte, beste lezer, en laat je niet demotiveren. Focus je op de betekenis achter de symbolen. Net als elk andere natuurlijke taal is ook deze nuttig. Maar waarmee wordt dit axioma hierboven dan precies verplaatst? Daar is geen eenduidig antwoord op, maar de mogelijke plaatsvervangers worden in *deel 3* gepresenteerd.

2.3.1 Voorbij Russells paradox

Hoewel we net natuurlijk al de ontwikkeling van Russells denken hebben behandeld, vond ik het belangrijk om een onderdeel te wijden aan alleen de ontwikkeling van de paradox zelf. Het motief achter Russells paradox heeft zich namelijk in veel meer hoeken van de logica genesteld. Dit kunnen we terugzien bij Cantor, een inspiratiebron van Russell. Deze man wordt niet zonder reden zo veel opgenoemd.

Hij heeft namelijk echt zijn voetafdruk achtergelaten in de logica en meta-wiskunde. En het heeft hem zeer veel gekost. Wegens zijn de eerder besproken heftige kritiek op zijn werk, belandde hij in een gekkenhuis. Dus voor zijn contributies zou ik dan nog extra dankbaar zijn. (Irvine, 1995) Dat gezegd hebbende zal het moeilijk zijn om dankbaar voor zijn werk te blijven zodra we er een beetje op inzoomen. Wij gaan precies dat doen. We gaan inzoomen op Cantors diagonaalargument, maar dan toegepast op de machtsverzameling. Een vaak essentieel onderdeel in argumenten zoals het diagonaalargument is een nummering of opsomming. Zo waren de getallen van $\mathbb{N}$ een nummering van $\mathbb{R}$. Wat ik nu wil aantonen is dat Russells paradox niet alleen geïnspireerd is door Cantors diagonaal, maar dat het zelf ook een versie van het diagonaalargument is. Het enige verschil is dat Russells paradox geen gebruik maakt van een nummering of een opsomming. Nochtans gebruikt het het basisprincipe van Cantors diagonaal (Irvine & Deutsch, 1995).

Cantors diagonaal baseert zich op Cantors lemma. Deze gaat als volgt (Irvine & Deutsch, 1995):

Cantors lemma: Laat f een functie zijn met domein X en bereik Y . Dan geldt de diagonaalverzameling $D_f = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in Y$.

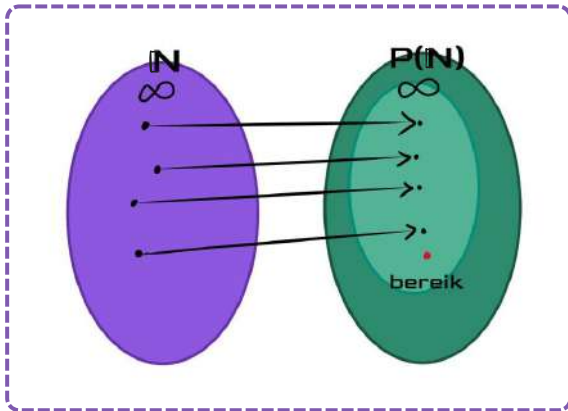
Dit ziet er niet precies zo uit als het diagonaalargument waar we in deel 1 kennis mee hebben gemaakt, maar dit is helaas wel de formele formule erachter. In deel 1 beschouwden wij al dat het neerkwam op dat er geen bijectieve functie was van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{R}$.

Dit hierboven is precies waar in dat staat. Laten we dit afspelen met $f: \mathbb{N} \rightarrow P(\mathbb{N})$. Zoals al eerder genoemd kunnen we bewijzen dat de machtsverzameling van $\mathbb{N}$ groter is dan $\mathbb{N}$. Deze lemma kunnen als volgt ontmantelen door te bewijzen dat er geen bijectieve functie bestaat (Irvine & Deutsch, 1995):

Bewijs:

- 1) Laat $\mathbb{N}$ het domein X zijn en $P(\mathbb{N})$ het bereik Y . 2) Dan geldt $D_f \subseteq \mathbb{N}$.
- 3) Daarmee geldt per definitie $D_f \in P(\mathbb{N})$. 4) Stel nu dat er een element $x \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor geldt dat $f(x) = D_f$. 5) Dan geldt $x \in D_f$, maar per definitie van $D_f = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ geldt $x \notin D_f$.
- 6) Dit leidt tot de tegenstelling: $a \in D_f \Leftrightarrow a \notin D_f$. 7) Hierbij geldt $D_f \in Y$, dus een bijectie is niet mogelijk. 8) Dit is te herleiden tot $D_f = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin f(x)\} \in P(\mathbb{N})$.

Stap 6 leidt tot een paradox vergelijkbaar met die van Russell: $x \in f(x) \Leftrightarrow x \notin f(x)$. Deze lemma representeert alle verzamelingen waar geen bijectie tussen mogelijk is.



Figuur 21: Pijldiagram van Cantors diagonaal van $P(\mathbb{N})$ naar $\mathbb{N}$

In het figuur hierboven zien we een pijldiagram van $\mathbb{N}$ en $P(\mathbb{N})$. Zoals je ziet is er altijd een x in $P(\mathbb{N})$ die geen partner heeft in $\mathbb{N}$ (het rode puntje). Maar doordat $\mathbb{N}$ oneindig is, is er ook weer een x in $\mathbb{N}$ die kan corresponderen met een x in $P(\mathbb{N})$. Maar wacht. Dan blijft er nog steeds een eenzame x in $P(\mathbb{N})$, het is namelijk nog groter dan $\mathbb{N}$. Denk aan een versie van de stoelendans. Voor elk persoon is er een stoel, maar dan springt er nog een stoel tot leven zonder persoon. Zo ontstaat er weer een nieuwe persoon, en dan weer een stoel. En dit gaat oneindig lang door. Dit voelt ontzettend raar, maar dat is het niet voor de wiskunde (Kooi, 2025).

Zoals $\mathbb{N}$ en $P(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, maar ook Russells verzamelingen. Uit deze stappen kunnen we, net zoals uit het axioma van onbeperkte comprehensie, $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ halen.

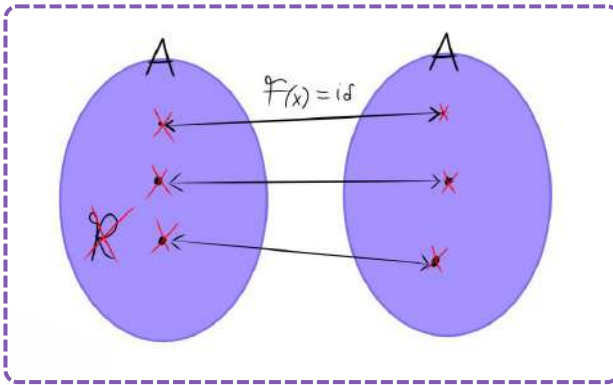
Laten we dit toetsen (Irvine & Deutsch, 1995):

1. Begin met ervan uitgaan dat $X=Y$.
2. Definieer dan een nieuwe verzameling $R = \{x \in X \mid x \notin x\}$.
3. Volgens Cantors lemma geldt $R \notin Y$, en uit stap 1 volgt dan $R \notin X$.
4. Dus kunnen we concluderen dat de diagonaalverzameling R niet kan bestaan. (Irvine, 1995)

Hierboven houdt het argument zich niet meer bezig met een bijectieve functie, maar met de identiteitsfunctie I . Bij een identiteitsfunctie geldt het domein = het codomein (Bagaria 2014; Irvine & Deutsch, 1995).

Kan jij je nog de universele verzameling U herinneren. Nou, in principe is $X=Y$ te vertalen naar de universele verzameling, oftewel alle verzamelingen zoals Russell ze zou noemen. Wanneer we dan een functie opstellen met de verzameling die als predicaat 'bevat alle verzamelingen die zichzelf niet bevatten' (ook wel $\{x \in X \mid x \notin x\}$), dan kom je erachter dat R noch in X noch in Y kan zitten. Dit is tenminste de conclusie die Russell trok. Russell geloofde namelijk dat de universele verzameling wel moest bestaan. Dus in plaats van de U af te wijzen, wees hij R af. Van R had hij alle bestaansrechten afgenomen.

Een heel kleurrijk beeld heb je hier waarschijnlijk niet bij, maar het stelt eigenlijk niets anders voor dan dat we geen grenzen hebben aan verzamelingen en daardoor kan $X=Y$ mogelijk zijn. Op zich is dit niet zo een groot probleem tot je de verzameling R introduceert. Weer laat dit zien dat we beperkingen aan de soort verzamelingen die we kunnen maken moeten leggen. Hieronder in *figuur 22* zie je de absurde identiteitsfunctie van Russell (Irvine & Deutsch, 1995).



Figuur 22: pijldiagram van Russells diagonaalargument

In *figuur 22* zie je dat beide het domein en het codomein gelijk zijn en er bestaat een identiteitsfunctie van A naar A . Zoals te merken is aan de rode kruisjes door alles heen, kan R niet in A bestaan. Oftewel, het kan niet binnen de universele verzameling bestaan.

In tegenstelling tot Cantors diagonaalargumenten, is die van Russell wel hoogst problematisch. Dat er bepaalde oneindige verzamelingen groter zijn dan andere is een oncomfortabel feit dat we maar moeten accepteren, echter is er principieel logisch gesproken niks verontwaardigend aan. Maar dat de verzameling R eigenlijk onmogelijk is, zorgt voor een catastrofale aardbeving binnen verzamelingenleer. Logici moeten dan de oorzaak onder de grond gaan behandelen.

We zien duidelijk dat Cantors diagonaal nauw verwant is met Russells paradox en zoals we zullen zien zijn deze twee logische fenomenen niet de enige twee die verwant zijn. Want de aardbevingen zelf zijn geen oorzaak van het probleem. Ze zijn slechts het symptoom (Ramanayake, 2025).

Oefeningen 2.3: De spiegel van logica en hoe het barst

Opdracht 1 ★★☆☆☆

Wat is de belangrijkste les van Russells paradox voor verzamelingenleer en logica?

Wat je moet kunnen

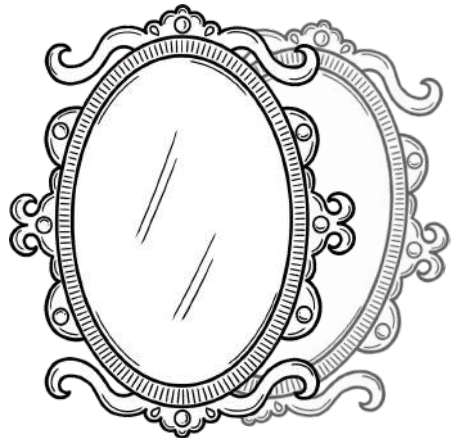
- Zelfreferentie herkennen
- Het principe van diagonalisatie begrijpen en kunnen toepassen
- Je kunt Russells paradox vanuit onbeperkte comprehensie opstellen

Opdracht 2 ★★☆☆☆

Noteer de Russell-verzameling formeel en leg uit waarom het niet kan bestaan in de universele verzameling U ?

Opdracht 3 ★★☆☆☆

Stel je een club voor "Alle mensen die niet in hun eigen club zitten". Wie mag er lid zijn? Teken een diagram van de leden en probeer het probleem visueel te maken.



2.4 De gevolgen voor de logica

Wanneer we spreken van de gevolgen van Russells paradox, hebben we het niet per se over de gevolgen van de paradox zelf. We spreken dan eerder van de gevolgen van de reacties erop en de oorzaak ervan. De paradox zelf is niet het probleem. Het bracht slechts transparantie tot wat het groter probleem zou kunnen zijn. Russells paradox is niet de enige in zijn soort. Er zijn genoeg vergelijkbare paradoxen die rond die tijd opkwamen dagen. Deze leidden allemaal tot dezelfde onthulling van een lek binnen de logica. En in 1931 werden logici en wiskundigen geconfronteerd met de onverwachte overstroming. Ik zal jou, beste lezer, nu door deze tijdlijn meesleuren en daarna de invloed hiervan uitleggen. We beginnen hierbij met de overvloed van paradoxen.

2.4.1 Uit het ene springt het vele

De titel van het kopje hierboven is enigszins misleidend, gezien deze paradoxen over het algemeen afhankelijk van elkaar werden ontdekt. Toch werd de opmerkelijke correlatie later al snel gevonden.

De oudste paradox binnen de verzamelingenleer ontstond in 1897. Deze werd ontdekt door Burali-Forti – en werd ook natuurlijk naar hem vernoemd. Deze paradox richt zich op de getallen, die we in *deel 1* al een beetje hebben leren kennen, maar die we nu nog dieper meer zullen onderzoeken (Cantini, 2025).

Herken je onze oude vriend ω , het eerste transfinitie ordinaalgetal? Dit is exact de hoofdpersoon binnen Burali-Forti's verhaal. Herinner jij je nog dat ω gedefinieerd werd als de verzameling van alle eindige ordinaalgetallen? Daarmee vormt ω zelf ook weer een ordinaal, maar dan het eerste oneindige. Of zulke concepten in de werkelijkheid nou echt bestaan kun je je oneindig lang blijven afvragen, maar theoretisch is het zeker mogelijk. Want het mooie aan wiskunde is dat het onmogelijk ook mogelijk is. Tot zover is er niets aan de hand. Maar Burali-Forti vroeg zich vol zelfvertrouwen in 1897 af wat er zou gebeuren als we dit idee doortrekken? Stel, we nemen niet alleen alle eindige ordinalen, of alle aftelbare ordinalen, maar de verzameling van alle ordinaalgetallen überhaupt. We noemen die verzameling Ω (Cantini, 2025).

En hier knalt de logica hard tegen een muur aan. Want als Ω de verzameling is van alle ordinaalgetallen, dan zou Ω zelf ook een ordinaal moeten zijn – het bezit immers precies het essentiële eigenschap van een ordinaal; het is goed geordend. Maar zodra we dat aannemen, zou Ω per definitie ook een element van zichzelf moeten zijn; elk ordinaal hoort in die verzameling, dus ook Ω . Tegelijkertijd moet Ω groter zijn dan elk ander ordinaal, dus ook groter dan zichzelf. Dus kan zo een verzameling niet bestaan (Cantini, 2025).

Hiermee had Burali-Forti gezorgd voor meer trillingen onder de grond van de naïeve verzamelingenleer. Hier bleek het idee dat je van alle soort dingen gewoon een verzameling kunt maken, weer gevaarlijk te zijn.

Sommige verzamelingen zijn zo ongelofelijk groot dat ze niet meer als verzameling mogen bestaan. Dit werd later opgelost door te spreken van een *klasse* van alle ordinaalgetallen, en niet van een verzameling. Alleen zo vermijden we die aardbeving. Maar hier komen we later nog op terug in *deel 3*.

De grondlegger van de verzamelingenleer zelf, Georg Cantor natuurlijk, had niet veel later ook vergelijkbare problemen ontdekt. En 4 jaar na die ontdekkingen heeft hij een aantal vrienden van zich geschrokken achter gelaten nadat hij een brief met een nieuw probleem aan hen had geopenbaard. Deze brief behandelde een zeer speciale verzameling: de verzameling van alle mogelijke verzamelingen, die M werd genoemd. Voor M bestaat het kardinaalgetal m , het maximale. Meer dan m kan je niet uit een verzameling halen. En toch kan dat wel (Cantini, 2025)?

Hoe zit het namelijk dan met $P(M)$? Per definitie is $P(M)$ groter dan M . Dan moet er ook een groter kardinaalgetal bestaan. Dus noch M , noch m kan werkelijk bestaan? Niet volgens Cantor. Cantor geloofde (toegegeven, zonder enig bewijs) dat we kunnen spreken van twee verschillende verzamelingen; een inconsistente en een complete verzameling. Het eerste type is een verzameling die geen element kan of mag zijn van andere verzamelingen. Daarentegen kan een complete verzameling dat wel. Dit komt doordat het een kleinere kardinaliteit bezit. Hoewel hier niet echt bewijs voor was, was een oplossing wel noodzakelijk en dringend. Cantor kon het niet toelaten om zijn werk uit elkaar te zien vallen. Hij was niet de enige die dat dacht. Zo zei ook zijn goede vriend Hilbert (Cantini, 2025):

*“Niemand zal ons verdrijven uit het paradijs dat Cantor voor ons heeft geschapen.”
~ David Hilbert*

Het patroon heb je denk ik nu wel door. Het probleem zit steeds in het feit dat we elke en alle verzamelingen kunnen maken. Ook de volgende paradox in deze tijdlijn leidt hieronder, namelijk Russells paradox.

Deze hebben we natuurlijk al besproken, maar rond dezelfde tijd als Russell, heeft ook Ernst Zermelo de paradox onafhankelijk ontdekt. Zermelo's versie luidt als volgt: neem de verzameling O_1 aan, O_1 is de deelverzameling van O die alle elementen bevat die niet elementen van zichzelf zijn. O_1 is een deelverzameling van O . Per definitie van O , geldt $O_1 \in O$. Maar is $O_1 \in O_1$? Dit is per definitie van O niet mogelijk. Maar sinds $O_1 \in O$ en O dus geen element is van zichzelf moet O_1 wel volgens de definitie van O een element zijn van zichzelf (Cantini, 2025).

Daaruit volgt:

$$O_1 \in O_1 \Leftrightarrow O_1 \notin O_1$$

Het volgende probleem kan niet precies worden afgeleid uit dezelfde oorzaak. Desalniettemin blijven er wel wat essentiële overeenkomsten. Als we heel even terug in de tijd gaan richting 1878 zullen we kennis maken met één van de grootste problemen van de wiskunde tot op de dag van vandaag is Cantors continuümhypothese (CH). In veel opzichten heeft de CH ook geleid tot de officiële geboorte van Cantors verzamelingenleer (Cartini, 2025; Koellner, 2013).

David Hilbert had in de twintigste eeuw een lijst geproduceerd met de belangrijkste en meest baanbrekende onbeantwoorde wiskundige problemen. Op deze lijst stond de CH op nummer 1. Dit is niet zonder reden gedaan. Later werd het ook bewezen door Kurt Gödel dat de CH niet alleen nog niet opgelost is, maar dat het niet opgelost kan worden (Cartini, 2025; Hazewinkel, 2003; Koellner, 2013).

Heel simpel gezegd stelt de CH dat er geen oneindige verzameling bestaat tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. Oftewel, er is geen stap op de ladder tussen de treden $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. Er bestaat geen verzameling groter dan $\mathbb{N}$, maar kleiner dan $\mathbb{R}$ (Cartini, 2025; Hazewinkel, 2005; Koellner, 2013).

Nu, minder simpel gezegd: er is geen kardinaal k tussen $\aleph_0$ en $2^{\aleph_0}$. Dit betekent precies hetzelfde als zeggen dat er geen kardinaal bestaat tussen de kardinalen van $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. Kan jij je nog herinneren dat we zeiden in deel 1 dat $\mathbb{R} = \aleph_1$? Nou, dit was niet per se waar. Dit is juist hetgeen wat de CH stelt. Maar bewezen is dit zeker niet. Wat juist wel bewezen is, is dat $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$. Dus weten we tenminste dat $2^{\aleph_0} = \mathbb{R}$. Maar of $\aleph_1 = \mathbb{R}$ is, is slechts hetgeen wat, onder andere, Cantor wil bewijzen; Dat de kardinaliteit van $\mathbb{R}$ de volgende stap is op de oneindige ladder, dus dat $\mathbb{R}$ een kardinaliteit van $\aleph_1$ heeft. In andere woorden, na de ontdekking dat $2k > k$, waarbij k een oneindig cardinaal getal is, is de vraag waar $2k$ dan ligt op de ladder van oneindigheid (zie ter visuele ondersteuning *figuur 14*). We houden ons dan specifiek bezig met wat voor aleph gelijk is aan de kardinaliteit van 2 tot de macht $\aleph_0$, omdat dit specifiek betrekking heeft op de reële getallen, ook wel het continuüm genoemd (denk hierbij aan de getallenlijn) (Koellner, 2013).

En zoals al gezegd, is de hypothese over het continuüm dus dat $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Dit klinkt misschien op het eerste gezicht niet als een ontzettend boeiende of baanbrekende stelling, maar het 'antwoord' erop is dat zeker wel. De CH maakte duidelijk dat er bepaalde stellingen zijn binnen de verzamelingenleer (en andere formele systemen) die noch bewezen, noch weerlegd konden worden; ze zijn onbeslisbaar. In 1940 bewees Kurt Gödel dat de CH volledig consistent is met de axioma's van de verzamelingenleer (specifieker nog van de ZFC). Maar een tijdje later bewees Paul Cohen juist dat de tegenstelling of ontkenning van de CH ook volledig consistent is met ZFC. Samen leidde dit tot de conclusie dat de CH afhankelijk is van de verzamelingenleer. Wij kunnen binnen de verzamelingenleer hier niks over stellen (Koellner, 2013).

Net als Russells paradox en vele gelijkwaardige paradoxen, toonde de CH de grenzen en de onmacht van de verzamelingenleer duidelijk aan. Het verschil deze keer is echter dat er geen oplossing is of überhaupt kan zijn.



Wist je dat?

Gödel's bijnaam als kind was "Herr Warum" wegens zijn onverwilde nieuwsgierigheid. Maar als oude man was hij ontzettend achterdochtig en zo bang dat hij vergiftigd zou worden dat hij niets zou eten zolang het niet uit de keuken van zijn vrouw kwam. Hij stierf, toen zij ziek werd, aan verhogering (met een gewicht van 29 kilo).

De CH leidde ertoe dat er een zeer noodzakelijke vraag gesteld moest worden binnen de wiskunde: wat is nou eigenlijk waarheid? Kunnen dingen waar zijn buiten formele systemen? Waarvoor zijn deze systemen dan bedoeld? Deze vragen zijn essentieel en onmisbaar (Koellner, 2013).

Als we nu even doorspoelen naar 1931, komen we wat mij betreft pas echt in het diepste punt van onze logische tunnel terecht. In 1931 publiceerde de Oostenrijkse wiskundige Kurt Gödel zijn artikel 'Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme'. Hierin presenteert Gödel twee verwante revolutionaire ontdekkingen voor de fundamenteën van de wiskunde. Gödel presenteert hier zijn twee onvolledigheidsstellingen die een structuur vergelijkbaar met Russells paradox bleken te hebben.

Verdieping 2.4: Gödel's onvolledigheidstheorema's

Wegens het belang van deze ontdekkingen wil ik hier iets meer aandacht aan toe wijden. De essentie hiervan is redelijk eenvoudig en daarmee zullen wij dus ook beginnen en ons zo omhoog werken tot een gesimplificeerde versie van het formele bewijs. Kort gezegd, beweert Gödel twee dingen:

1. In elk consistent formeel systeem, die complex genoeg is om met getal, bestaan er ware uitspraken die noch bewezen, noch weerlegd kunnen worden binnen de grenzen van dat systeem.
2. Elk consistent formeel systeem kan nooit zijn eigen consistentie bewijzen (Gödel, 1931; Raatinkainen, 2020).

Beide theorema's, bewezen wiskundige stellingen, tonen de limieten van een formeel systeem aan. We kunnen niet alles bewijzen binnen bepaalde systemen. Gödel behandelt een aantal belangrijke termen in zijn twee theorema, waarvan wij een aantal al eerder hadden opgenoemd, maar nog niet concreet gedefinieerd. De drie belangrijkste begrippen zijn (Raatinkainen, 2020):

1. **Een formeel systeem:** een systeem dat gebruik maakt van axioma's en de regels van inferentie om theorema's en andere stellingen te kunnen bewijzen. Het systeem zelf bepaalt welke formules axioma's zijn.
2. **Een compleet systeem:** een systeem dat elke uitspraak die het kan formuleren, kan bewijzen of de ontkenning ervan kan bewijzen.
3. **Een consistent systeem:** een systeem dat consistent is leidt niet tot uitspraken waarvan beide de uitspraak en zijn ontkenning bewezen kunnen worden.

Gödel legt zijn focus op twee specifieke formele systemen in 1931: het systeem van de Principia Mathematica (PM) en ZFC (een vorm van een axiomatische verzamelingenleer). Wij moeten als eerst even inzoomen op wat we precies bedoelen met een systeem dat complex genoeg is om met rekenkunde te werk te kunnen gaan. Tot in hoeverre moeten we ermee kunnen werken? We hadden in *deel 1* wel al twee systemen besproken, namelijk die van Von-Neumann en Russell/Frege. Toch kijken hiervoor nu even naar de Robinson-rekenkunde (1950), vaak ook aangeduid met Q. Dit is de zwakste vorm van zo'n systeem. En zodra je de axioma's daarvan bekijkt zal je snappen waarom het zwak wordt genoemd. Dit is echt het absolute fundament van alle wiskunde. Simpel dan dit kan het niet worden, en toch kan Gödels bewijs hierop toegepast worden. Het systeem bestaat uit de volgende zeven axioma's (Gödel, 1931; Hart, 2025; Raatinkainen, 2020):

$$\begin{aligned} &\neg(0=x') \\ &x'=y' \rightarrow x=y \\ &\neg(x=0) \rightarrow \exists y(x=y') \\ &x+0=x \\ &x+y'=(x+y)' \\ &x \times 0=0 \end{aligned}$$

Giuseppe Peano, wiskundige en logicus,
wie zijn eigen variant van het Latijn heeft gemaakt.



$$x \times y' = (x \times y) + x$$

Ze zien er niet heel vriendelijk uit, maar zodra je ze leert kennen zul je merken dat ze je beste vrienden zijn in het dagelijks leven. Het teken ' is het symbool voor de opvolger- of succesorfunctie. Kort gezegd, is dat in dit geval niets meer dan het volgende getal dat komt na het getal n . De opvolger van 0 is 1, van 1 is 2, van 2 is 3... etc. In dit geval moet je x' lezen als de opvolger van x . $x' = 1$ is de opvolger van 0. Makkelijker kan het niet toch? Maak gebruik van tabel 1 en probeer maar eens deze axioma's te ontcijferen (Hart, 2025; Raatinkainen, 2020).

Het eerste axioma stelt dat 0 zelf geen opvolger is van een getal. Uiteraard. Er komt niks voor nul. Zo stelt de tweede axioma dat als de opvolgers van twee getallen gelijk zijn, dan zijn die getallen ook gelijk. Je kunt dit ook zien in de vorm van functies. Weet je nog wat een injectie was? Nou, het tweede axioma stelt dat de opvolger functie dus injectief is. Elke y' heeft slechts één y als partner. Het getal twee kan namelijk geen 2 opvolgers hebben. Het is 3, het blijft 3 en er is geen enkel ander getal dat als opvolger 3 heeft. 3, net als elk ander opvolger, neemt zijn monogame relatie erg serieus (Hart, 2025; Raatinkainen, 2020).

Het derde axioma toont aan dat alle getallen behalve 0, zelf de opvolgers zijn van een ander getal. 2 is zowel de opvolger van 1, als het getal dat 3 als opvolger heeft. Dan krijgen we $x+0=x$. Dit heb je al geleerd op de basisschool en dieper dan dat kan ik het niet maken. Het vijfde dat $x +$ de opvolger van y gelijk is aan de opvolger van x plus y . Dus $1+2' = (1+2)'$. Aan beide kanten is het antwoord 4. Zo kun je simpel optellen en aftrekken. En zo komen we langs het zesde axioma, die ook weinig uitleg vergt volgens mij. De zevende toont aan dat vermenigvuldiging wordt gedefinieerd via optelling. x keer de opvolger van y is gelijk aan x keer y plus x . Zo is $2 \times 3' = (2 \times 3) + 2$ (Hart, 2025; Raatinkainen, 2020).

Dit is zo ontzettend simpel, waarom komt dit überhaupt hier aan bod? Deze gedachte is zeker niet heel gek, maar de 'complexiteit' zit niet in $1+1=2$, maar in het formaliseren van alles wat je vanzelfsprekend vindt. Op de basisschool krijg je te horen: "dit zijn de regels van rekenen, gebruik ze.", maar hier leer je waarom deze regels eigenlijk gelden en hoe je ze vanaf vrijwel niks kan opbouwen. Dit zijn de regels achter de bekende rekenregels. Met slechts deze zeven axioma's kun je optellen, vermenigvuldigen, delen en veel meer. Misschien vraag jij je dan wel af (zoals ik); als dit dan het 'bewijs' is voor de rekenregels, wat is het bewijs voor deze axioma's? Hier is helaas geen echt uniform antwoord op; het is een diep filosofisch vraag en er zijn verschillende antwoorden op geweest. Wiskundigen zul je hier waarschijnlijk eerder mee irriteren, gezien zij vaker zullen denken: "Dit is zo overduidelijk waar, het heeft geen argumentatie nodig. Hiermee kunnen we rekenen en het werkt. Dat is alles dat we hoeven te weten." (Hart, 2025).

Voor nu is het beste historische antwoord erop dat het idee begon bij de oude Grieken en dat de ongelofelijke sterke intuïtie achter de axioma's nooit veranderde. Dit is voor veel het fundament en hier stopt het. Er is geen verder bewijs voor deze regels. Ze bestaan doordat onze manier van denken bestaat. Je kunt ze zien als formele intuïties waar niemand aan twijfelt (Hart, 2025).

Even terug naar het onderwerp... Elke wiskundige stelling kan toch niet met Q bewijzen. Precies daarom is het zo 'zwak'. Als we aan deze zeven axioma's, het axioma van inductie toevoegen, dan krijgen we te maken met het systeem van Peano, de PA .

Dit is het systeem dat wiskundigen tot op de dag van vandaag leren en toepassen. Dit is dus de standaard geworden. Deze achtste axioma gaat als volgt (Hart, 2025; Raatinkainen, 2020):

$$\varphi(0) \wedge \forall x[\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')] \rightarrow \forall x \varphi(x)$$

Dit heet *het axioma schema van inductie*. Het woord 'schema' is hier nogal belangrijk, want dit is niet slechts één axioma, maar een oneindige verzameling van axioma's. Eén axioma per formule. Wat hier staat is dat als een eigenschap φ waar is voor 0 en het is waar voor een x , dan is het ook waar voor x' . En zodra we dat weten, dan weten we dat φ geldt voor alle getallen. Neem bijvoorbeeld aan $\varphi = x+0=x$, dan volgen we deze stappen (Raatinkainen, 2020):

$\varphi(0) = 0+0=0$.

Nu volgt de inductie, $x[\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')]$

Stel dat φ waar is voor een gegeven x , dus $x+0=x$

Dan moet dit ook waar zijn voor x' , dus $x'+0=x'$

Dit impliceert de conclusie: voor alle x geldt $x+0=x$. Oftewel, $\forall x \varphi(x)$.

Uit de PA kan je elke elementaire wiskundige stelling beschrijven. Gödels eerste theorema heeft het dus over systemen zoals Q of PA (op zijn minst), wanneer hij spreekt over een systeem waarmee we met rekenkunde te werk kunnen. Voor het tweede theorema wordt er gesproken over een complexer systeem dan één die slechts Q bevat. Hierbij kan PA het beste als minimum gezien worden. Daarnaast wordt ervan uitgegaan dat elk systeem ook wat logische afleidingsregels bezit (Raatinkainen, 2020).

Een heel populair voorbeeld van zo'n regel is de *modus ponens*, dit syllogisme gaat als volgt (Reichard, 2021):

P1. P is waar.

P2. $P \rightarrow Q$

Conclusie: Q is waar.

Elk grondig formeel systeem maakt gebruik van deze logische regels. Als een bewijs of stelling A afgeleid kan worden uit een gegeven systeem F, wordt dat genoteerd met $F \vdash A$; F bewijst A, of uit F kan A worden afgeleid. Daarentegen wordt de negatie genoteerd met $F \not\vdash A$ (Raatinkainen, 2020).

Er zijn daarnaast ook wel systemen die geen rekenkunde behandelen (zoals ZFC), waar deze theorema van Gödel wel van toepassing op is. Zolang een theorie als Q geïnterpreteerd kan worden in een theorie als ZFC, dan is de theorema toepasbaar. Een gegeven theorie T1 kan geïnterpreteerd worden in een theorie T2 zolang alle eenvoudige concepten op een of ander manier vertaald kunnen worden van T1 tot T2 (Raatinkainen, 2020).

Voor zijn eerste theorema formuleert Gödel een onbewijsbare stelling binnen de PM om zijn theorema te bewijzen. Gödel wilde hiermee slechts de onvolledigheid van de PM (en als resultaat ZFC) bewijzen. Hij had echter niet in de gaten dat zijn theorema's veel breder en algemener zijn dan hij voor ogen had (Gödel, 1931; Raatinkainen, 2020).

Een belangrijk onderdeel van Gödels bewijs is het concept van recursieve functies. Heel simpel gezegd is een functie recursief als het 'berekenbaar' of 'computabel' is.

Een recursieve functie is een functie die zichzelf gebruikt in de definitie. Je begint met een basisgeval (waar je direct het antwoord weet) en een recursiestap (hoe je van een kleiner geval naar het volgende gaat). Zo kun je stap voor stap een hele functie opbouwen. De formele definities kun je hieronder zien, maar negeren zo nodig (Dean, 2024; Raatinkainen, 2020):

Basisgeval: $f(0)=1$

Recursiestap: $f(n+1)=(n+1) \cdot f(n)$

De recursie stap toont de output van f aan. Een recursieve functie wordt ook berekenbaar of computabel genoemd, omdat het heel vaak wordt toegepast in computers. Recursieve functies zijn zo de basis van de informatica en het programmeren. We zullen zometeen kijken naar hoe Gödel hier gebruik van maakte (Hart, 2025; Raatinkainen, 2020).

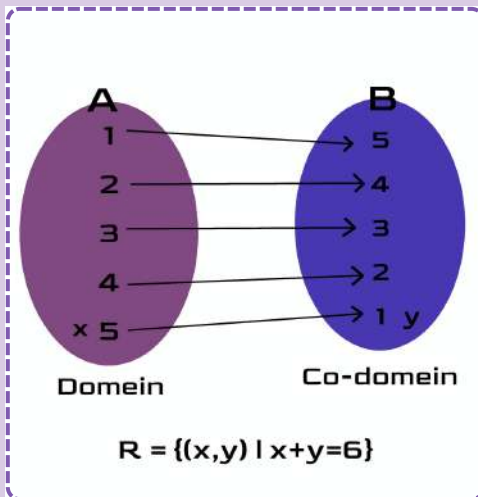
Als eerst gaan we analyseren wanneer Gödel een systeem consistent vond. Gödel maakte gebruik van wat hij ω -consistentie noemde. Een formeel systeem F is consistent als het volgende *niet* voorkomt (Raatinkainen, 2020):

1. Voor elk getal n kan je in F bewijzen dat een eigenschap bij een formule $A(n)$ niet geldt:
 $F \vdash \neg A(n)$

VB: $A(n) \mid n > 100$, dus kies een $A(n)$, zodat n groter is dan 100.

2. F kan dan bewijzen dat elk getal hier niet aan voldoet, dus er is geen getal groter dan 100. Klinkt raar, maar een systeem dat dit bewijst ondanks dat het niet waar is) kan desalniettemin wel consistent zijn. F kan ook bewijzen dat er wel een x bestaat waarvoor $A(x)$ geldt: **$F \vdash \exists n A(n)$**

VB: Als we hetzelfde voorbeeld aannemen, betekent dit dat F ook bewijst dat er wel minstens één n is die groter dan 100.



Figuur 23 Pijldiagram van de relatie van $x+y=6$

Dit is volledig tegenstrijdig. Als deze twee voorwaarden voor F zouden gelden, dan betekent dat dat F een tegenstelling kan bewijzen. Het kan zowel een stelling als zijn negatie bewijzen. Op dat moment is F dus niet ω -consistent. Hoewel Gödel zich beperkte tot de ω -consistentie, bewezen wiskundigen na hem dat zelfs een zwakkere consistentie ook van toepassing was op zijn bewijs.

$$\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \mid A$$

Deze zwakkere consistentie wordt de 1-consistentie genoemd (1, want lager kan het niet). Alles dat je hoeft te weten over de 1-consistentie is dat het alleen de simpelste formules betreft, de Σ_1 -formule. Deze zien er zo uit (Raatinkainen, 2020):

De uitspraak is waar als je minstens één n -tuple $(a_1, \dots, a_n)$ kunt vinden met $A(a_1, \dots, a_n)$; anders is ze onwaar. Simpler gezegd betekent dit dat als je minstens één rijtje van x kunt koppelen aan een aantal waardes die voldoen aan A , a_1 , a_2 , etc.... dan is de uitspraak waar. Denk bijvoorbeeld weer aan de uitspraak $x > 100$. Bestaat er een rijtje aan x , die je kunt koppelen aan een rijtje van a ? Zoals $a_1=101$, $a_2=102$, etc... Dan is de uitspraak waar. A kan hier ook spreken over paren. Denk weer eens aan relaties. $A(x, y)$ met xRy , waarbij $R = x + y = 6$. Als je hiervoor ook een rijtje van x en y kunt vinden, dan is de uitspraak waar (zie figuur 19 ter visuele ondersteuning). Hierbij geldt de uitspraak: $\exists x \exists y A(x, y)$ Deze consistentie is de simpelste vorm van consistentie. Dus zelfs op deze 1-consistentie is Gödels eerste theorema van toepassing. Dat zegt een heleboel over de kracht van zijn theorema's. We nemen vanaf nu dan ook aan dat de systemen waarop Gödels theorema's van toepassing zijn, minstens 1-consistent zijn (Raatikainen, 2020).

Een ander belangrijk begrip in Gödels bewijs is de representabiliteit binnen een formeel systeem. Een verzameling E is is *sterk representabel* binnen F als:

$$\exists A(x) \forall n (n \in E \Rightarrow F \vdash A(n))$$

Letterlijk betekent dit: er bestaat een formule $A(x)$ met een variabele x , zodat voor alle n , F bewijst $A(n)$ als n een element van E is. Anders gezegd, betekent dit dat $A(x)$ hier gezien kan worden als het hulp maatje van F . $A(x)$ helpt F uitzoeken of n in E zit. Als $A(x)$ dat wel kan, dan is het een bewijs in F . Dus als F samen met wat hulp van de formule $A(x)$ kan bewijzen dat n een getal is in E , dan is E representabel in F . Als $A(x)$ een ontzettend onbehulpzaam maatje is van F en het bewijst dat n niet in E zit, dan bewijst F de negatie van A . Ontzettend eenvoudig gezegd: F kan iets zeggen over E , dus E is sterk representabel in F (Raatikainen, 2020).

Als F dat niet kan, dan is E *zwak representabel* in F , als een formule $A(x)$ bestaat, zodat voor elke n :

$$n \in E \Rightarrow F \vdash A(n)$$

Het cruciale verschil tussen een zwakke representabiliteit in F , is dat een zwak systeem alleen maar $n \in E$ kan bewijzen en niet $n \notin E$. De negatie kan zo'n systeem nooit bewijzen. Een systeem met een sterke representabiliteit juist wel. Gödel toont zo aan dat er verzamelingen bestaan die slechts zwak representabel zijn binnen een formeel systeem F . (Raatikainen, 2020)

Er is een algemene observatie dat recursieve verzamelingen sterk representabel zijn, terwijl specifiek recursief opsombare verzamelingen juist zwak representatbel zijn. Gödel gebruikte zelf het woord *beslisbaar* in plaats van representabel. Hier gaan we vanaf nu mee door. Deze theorema gaat als volgt (Raatikainen, 2020):

Het beslisbaarheids theorema

In een consistente verzameling die op zijn minst Q bevat geldt:

1. Een verzameling (of relatie) is sterk beslisbaar als en alleen als het recursief is.
2. Een verzameling (of relatie) is zwak beslisbaar als en alleen als het opsombaar recursief is.

Als eerst moeten we even duidelijk maken wat opsombaar recursief is. Weet je nog toen we zeiden dat recursief ook berekenbaar kan betekenen? Nou, neem dit maar heel letterlijk. Kan een computer het berekenen? Dan is het in ieder geval wel recursief (maar neem de formelere definitie maar beter aan).

Als een computer een moet beslissen of $n \in E$ kan dit bij een opsombare recursie wel een letterlijke eeuwigheid duren. Je kan ook geen antwoord krijgen. Maar dit is niet het geval bij een 'gewone' recursieve verzameling. Deze 'gewone' recursiviteit duiden wij vanaf nu aan met R, en de opsombare met r.e. (recursively enumerable) (Dean, 2024).

Het is nog belangrijk om je te realiseren dat als een formule beslisbaar is in F, betekent niet hetzelfde als dat het definieerbaar is. Definieerbaar is een fantastisch woord in deze context, omdat het letterlijk gaat over de taal die een systeem F gebruikt; wat voor symbolen gebruikt het? Hoe noteert het nummer? Dus de vraag is of een verzameling letterlijk vertaald kan worden in een systeem F. Een definieerbaar systeem is dus niet per se beslisbaar (Raatikainen, 2020).

Alles wat wij nu hebben behandeld lijkt nu nog weinig met elkaar te maken te hebbe, maar hou het nog even vol. Jouw verlichting is nabij. Nu komen we echt op een leuk deel van Gödels bewijs van zijn eerste theorema aan; Gödelnummering. Wat probeert Gödel te nummeren? Gödel probeert aan elke uitspraak binnen een systeem (de PM, om preciezer te zijn) één corresponderend natuurlijk getal aan te wijzen. Gödel is hier in principe bezig met coderen. Elke uitspraak krijgt een code. En deze codes zien er vaak erg bizarre uit. Deze codering was bijzonder effectief. Gödel kon voor letterlijk elke uitspraak een corresponderende code geven. In veel opzichten werkte hij net als een computer (Raatikainen, 2020).

Gödel begint met de meest primitieve en eenvoudige symbolen in een gegeven systeem en werkt zo op tot volledige uitspraken. Deze primitieve symbolen krijgen elk hun eigen natuurlijke nummer. Met wat computer skills kan je zo 'sequences' daarvan maken. De simpelste Gödelnummers zien er waarschijnlijk ongeveer zo uit (Kooi, 2025; Raatikainen, 2020):

#('0')=1	#('(')=6
#('')=2	#(')=7
#('+')=3	#('→')=8
#('×')=4	#('¬')=9
#('=')=5	#('∀')=10

Tabel 2: 10 Gödelnummers op primitieve symbolen toegepast

Gödel doet, zoals je ziet, zelfs de moeite om elk individueel haakje te nummeren. Elk van de 'sequences' die Gödel hieruit krijgt en die corresponderen tot een unieke uitspraak of formule binnen F, krijgen ook weer hun eigen Gödel nummer toegewezen. Zo ontwierp Gödel nummers van nummers. Dan, eindelijk... als laatst, krijgen ook nog bewijzen van een systeem F, die zelf 'sequences' zijn van het Gödelnummers van formules, hun eigen Gödelnummers toegewezen (Kooi, 2025; Raatikainen, 2020).

Het Gödelnummer van een of ander formule A wordt genoteerd met $\ulcorner A \urcorner$. Nu komt het belangrijke deel. We hebben nu alle logische operatoren ($\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$...) vertaald naar een nummer, waar je in tabel 2 een aantal voorbeelden van kunt zien. En ook alle formules zijn vertaald naar een Gödelnummer, zoals:

$$\begin{aligned} A &= 101 \\ \neg A &= 202 \\ B &= 303 \\ A \rightarrow B &= 404 \end{aligned}$$

Nu wij al deze getallen hebben, van logische symbolen tot volledige uitspraken, kunnen we rekenkundige functies toepassen hierop. Deze werken hetzelfde als de logische symbolen: (Raatinkainen, 2020)

Neem de negatie functie, **neg(x)**: pak het getal van formule A (namelijk 101) en geef het getal van $\neg A$ (namelijk 202) terug. De input is $\ulcorner A \urcorner$ en de output is $\ulcorner \neg A \urcorner$. Oftewel, **neg($\ulcorner A \urcorner$) = ($\ulcorner \neg A \urcorner$)**.

- Of neem de implicatie functie, **impl(x, y)**: pak het getal van de formule A (101) en B (303) en geef het getal van $A \rightarrow B$ (404). De input is $\ulcorner A \urcorner$ en $\ulcorner B \urcorner$ en de output is $\ulcorner A \rightarrow B \urcorner$. Oftewel, **impl($\ulcorner A \urcorner$, $\ulcorner B \urcorner$) = ($\ulcorner A \rightarrow B \urcorner$)**.

Wij kunnen zelfs formules maken binnen dit systeem die toegepast kunnen worden op de Gödelnummers:

- Neem **fmla(x)**: fmla(x) is waar als en alleen als x de Gödelnummer is van een goedgevormde formule (goedgevormd betekent slechts, het bevat geen rare volgorde). Dit werkt in principe als een checkfunctie. Zo kan gelden fmla(777) = waar, maar fmla(666) = onwaar.
- Of neem **M(x, y, z)**: M(x, y, z) is de formule van de redeneerregels. Toegepast op de *modus ponens* M waar als en alleen als de modus ponens geldig is. M(x, y, z) kan waar zijn als: **M($\ulcorner A \urcorner$, $\ulcorner A \rightarrow B \urcorner$, $\ulcorner B \urcorner$)**.

Elke uitspraak kun je zo met alleen maar nummers formuleren. Heel anders dan een taal zoals Chinees werkt dit niet – en het is ook net zo moeilijk om te leren. Niet alleen uitspraken, maar ook operatoren en functies kun je in deze ‘Gödeltaal’ vertalen bijvoorbeeld. En elk van die operatoren, functies en formules zijn beslisbaar in tenminste Q. Het punt hiervan is dat je op een gegeven moment met dit systeem van Gödel zó een gecompliceerde uitspraken kunt bouwen, dat er *zelfreferentie* kan ontstaan. (Kooi, 2025; Raatinkainen, 2020)

We kunnen zo ook het volgende zeggen in deze taal; x (de Gödelnummer) is een bewijs van de formule y in het formeel systeem F. Ook deze uitspraak heeft volgens Gödel zijn eigen unieke formule verdient, namelijk (Raatinkainen, 2020):

$$\text{PrfF}(x, y)$$

Deze symbolen, komen direct van het Engels: Prf= proof. Als een getal dan bewijsbaar is in F, kan deze predicaat worden genoteerd als (Raatinkainen, 2020):

$$\text{ProvF}(x)$$

We kunnen nu kijken naar hoe Gödels bewijs een variant is van Cantors diagonaalbewijs die wij eerder bekeken. De diagonalisatie lemma is vergelijkbaar met die van Cantor:

De Diagonalisatie Lemma

Laat $A(x)$ een willekeurige formule zijn van de taal van F , met precies één variabele.

Dan kan er een zin D mechanisch (dus op een systematische wijze) gevormd worden zó dat (Raatinkainen, 2020): $F \vdash D \leftrightarrow A(\ulcorner D \urcorner)$

Hier wordt beweerd dat binnen het systeem F , het bewijsbaar is dat D logisch equivalent is aan $A(\ulcorner D \urcorner)$. Niet alleen is deze lemma vergelijkbaar met Cantors diagonaal, maar ook op een manier met Russells paradox. Het wordt ook vaker de Lemma van zelfreferentie genoemd (Kooi, 2025; Raatinkainen, 2020).

D' zegt hier namelijk over zichzelf: “Ik ben bewijsbaar is F mits ik voldoe aan de formule A ”. Als $A(x) = “x$ is niet bewijsbaar”, dan zou D zeggen van zichzelf: “Ik ben niet bewijsbaar.” Toegegeven, is dit eigenlijk iets te kort door de bocht. Want binnen F wordt hier eerder gezegd dat D en $A(\ulcorner D \urcorner)$ slechts dezelfde waarheidswaarde hebben (zijn ze waar of niet waar?), en niet precies dezelfde betekenis. D is hier een gewone zin en $A(\ulcorner D \urcorner)$ is een andere zin die gaat over het Gödelnummer $\ulcorner D \urcorner$. Het is dus geen letterlijke zelfverwijzing, maar het komt zeker genoeg in de buurt (Raatinkainen, 2020).

Nu kunnen we al deze kennis toepassen op de diagonalisatie Lemma. We kunnen een zin G in een systeem F formuleren, zodanig dat (Raatinkainen, 2020):

$$F \vdash GF \leftrightarrow \neg \text{Prov}_F(\ulcorner GF \urcorner)$$

Hier hebben we het! We hebben nu een paradox geformuleerd, vergelijkbaar met $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$. Nu bewijst het formeel systeem F de uitspraak G als en alleen als (het Gödelnummer van) G niet bewijsbaar is in F . Een tegenstelling! Als $F \vdash GF$ zou bewijzen, dan toont F wel weer aan dat GF bewijsbaar is. Maar G is alleen maar *waar* als het niet bewijsbaar is. Dus als $F \vdash GF$ bewijst dan bewijst het $\neg GF$, maar dan is F niet langer minstens 1-consistent. Deze verbluffende loop eindigt maar nooit. Alles wat we hiervoor hebben besproken (functies, beslisbaarheid, consistentie en Gödelnummering) definieerde vooral onze termen van het systeem waarin deze paradox voor kan komen. In vrijwel elk nuttig systeem dus. Je moet wel begrijpen dat er wat nuance in zit. Het is niet letterlijk een paradox, maar F kan eerder G noch $\neg G$ bewijzen als het consistent is, omdat er anders de paradox uit volgt. Zolang een systeem consistent is zijn er bepaalde onbewijsbare uitspraken binnen dat systeem (Kooi, 2025; Raatinkainen, 2020).

Deze onbeslisbare zin G wordt vaak in het heden ‘de Gödel zin van F ’ genoemd. Deze zin kan heel goed waar zijn in F , maar F kan het zelf niet bewijzen. Er bestaan dus ware, maar onbewijsbare uitspraken. Om alles mooi af te sluiten over het eerste theorema, wil ik eindigen met de formele stelling (Raatinkainen, 2020):

Gödels Eerste Onvolledigheidstheorema

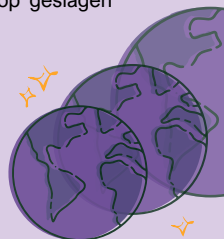
Stel dat F een formeel systeem is dat Robinson-rekenkunde Q bevat. Dan kan een zin GF in de taal van F mechanisch gevormd worden zodanig dat:

1. Als F 1-consistent is, dan geldt $F \not\models GF$.
2. Als F 1-consistent is, dan geldt $F \not\models \neg GF$.

Later zijn er nog een aantal aanpassingen en verbeteringen toegepast op deze theorema (onder andere door Rosser), maar Gödel heeft de eerste keer al echt de spijker op de kop geslagen (Raatinkainen, 2020)!

Het is ook wel leuk om te weten dat er toch andere logische universums bestaan waar je wel G of zijn negatie kan bewijzen. Dit heten modellen. Het is net een wiskundige 'multiverse'. Nu kunnen we beginnen met de tweede onvolledigheidstheorema.

Laten we nu gelijk beginnen met de formelere versie van Gödels tweede theorema (Frumin, 2025; Raatinkainen, 2020):



Gödels Tweede Onvolledigheidstheorema

Stel dat F een consistent formeel systeem is dat elementaire rekenkunde bevat.

Dan geldt: $F \not\models \text{Cons}(F)$

Met andere woorden: het formeel systeem F kan zijn eigen consistentie niet bewijzen. Deze stelling gaan wij nu even uit elkaar halen. In principe is deze stelling niets meer dan de implicatie waar de eerste stelling ons mee achter laat. We hebben eerder gezien dat – erg flauw gezegd – een systeem consistent is als het geen tegenspraken kan bewijzen. Gödel bewijst nu dat F zijn eigen consistentie niet kan bewijzen. Laten we beginnen met een duidelijke tegenstelling: $0=1$, of misschien de cirkel is vierkant of “Deze zin bestaat niet”. Voor ons gemak nemen we $0=1$. Als F consistent dan bewijst het de negatie van $0=1$. Dit kunnen we zo symboliseren (Raatinkainen, 2020):

$$\text{Cons}(F) \leftrightarrow \neg \text{Prov}_F (\ulcorner 0=1 \urcorner)$$

F is consistent als en alleen als het Gödelnummer van $0=1$ niet bewijsbaar is in F . Of nog simpler $\text{Cons}(F)$ betekent F is consistent. Nu komt de link met de eerste stelling: We hebben eerder gezien dat als F consistent is, dan kan F noch GF noch $\neg GF$ bewijzen. Dus als F consistent is dan moet onze zin GF (“Ik ben niet bewijsbaar in F ”) waar zijn. Oftewel (Raatinkainen, 2020):

$$F \vdash \text{Cons}(F) \rightarrow GF$$

Stel je nu eens voor dat F wel zijn eigen consistentie kan bewijzen ($F \vdash \text{Cons}(F)$). Dan kan óók GF bewijzen (zoals hierboven wordt aangetoond). Maar volgens onze eerste regels mag F dat niet doen. Als die dat wel zou doen, dan zou Gödels eerste theorema niet kloppen. Maar we hebben al bewezen dat die juist wel klopt! Dus F kan niet zijn eigen consistentie bewijzen, want dat zou anders leiden tot een tegenstelling – of leuker gezegd een paradox. Dus:

$$F \not\models \text{Cons}(F)$$

Heb je dat kunnen volgen? Misschien niet. Ook mijn hersenen hebben een aantal salto's gedaan toen ik dit probeerde te snappen. Maar dit is wat je eruit moet onthouden: (Raatinkainen, 2020)

1

Eerste theorema: er bestaat een zin GF die onbewijsbaar is in F. Elk nuttig formeel systeem bevat dus onbewijsbare, maar correcte uitspraken.

2

Tweede theorema: als het systeem zijn eigen consistentie zou kunnen bewijzen, zou het ook GF kunnen bewijzen → tegenspraak → dus kan het dat niet.

Dit tweede theorema die wij net hebben uitgewerkt is – niet schrikken – nog maar de incomplete versie van het echte bewijs dat een aantal jaar later door Hilbert in woorden – of eerder in getallen – werd gebracht. Maar de essentie ligt in wat wij net hebben besproken (Raatikainen, 2020).

Deze ontdekkingen van Gödel voelen voor jou misschien wel erg ‘out there’ of een beetje onnozel, maar ze zijn werkelijk revolutionair geweest in de wiskunde. Gödel toonde, waarschijnlijk beter dan wie dan ook, de werkelijke grenzen van de wiskunde aan. We hebben geen echt ‘bewijs’ voor alles wat wij aannemen in de wiskunde – en ik ben er zelf van overtuigd dat we dat ook nooit zullen vinden. Wiskundige waarheden zijn a priori waarheden die niet zo zeer afhangen van wat wij kunnen infereren, oftewel afleiden, uit fenomenen die we zien in de wereld, maar eerder ons gevoel. Dat klinkt nogal controversieel om te zeggen. Jij denkt bij wiskunde vaak niet aan formules die zijn afgeleid uit gevoelens of grafieken die zijn getekend op basis van de stemming van de dag. Toch, als we héél diep gaan graven, zullen we vinden dat al onze bewijzen en formules afhangen van onze intuïties. Net als bij de axioma’s: “Waarom is het waar?” “Omdat het zo is.”

Wiskunde is in die zin erg praktisch. Dat komt ook duidelijk naar voren als we kijken naar de reactie op Gödels bewijs. De eerste paar jaren zijn er een heleboel wiskundigen bijna doodgegaan aan een hartaanval. Daarna kon het men nog weinig schelen. ‘Traditionele’ wiskundigen – in tegenstellingen tot filosofen of zelfs logici – denken vaak wat praktischer na. Werken onze berekeningen? Kunnen ze toegepast worden? Zo ja, dan maakt het helemaal niet uit of dat systeem nou wel of niet zijn eigen consistentie kan bewijzen (Frumin, 2025; Hart, 2025; Ramanayake, 2025).

Dit is wel iets te haastig gezegd, gezien dat als er nou echt iets mis zou zijn met het fundamenteel systeem dat zij benutten (stel het bewijst $1+1=\text{appel}$), dan zouden ze dat wel wat problematischer vinden. Maar de essentie van mijn punt verandert niet. Wiskunde werkt in een hele fundamentele zin op intuïtie. Deze intuïties zijn voor de meeste ook zo ongelofelijk en ontzettend vanzelfsprekend. Zoals ‘de zon bestaat of het bestaat niet, je kan niet beiden hebben’ – wie zou daar nou tegen in gaan (*hoest* *hoest* filosofen...)? Maar meer dan een ontzettend sterk gevoel is dat niet. Het is nog niemand gelukt om dit volledig te bewijzen. Ben je het daar niet met mij eens, dan ga ik met plezier met jou in debat erover (mijn gegevens staan in dit boek vermeld)! En de logica (of meta-wiskunde) probeert net als een onderdaan ervoor te zorgen dat er niet aan deze intuïtie getwijfeld hoeft te worden. De logica dient de wiskunde en niet andersom. Als er iets mis is met het systeem, dan moet dat – zolang dat kan – gerepareerd worden zodanig dat het weer overeenkomt met de intuïties van de wiskundigen (Ramanayake, 2025).

Ik moet wel vermelden – met wat pijn in mijn hart, als strikte tegenstander van de ‘traditionele’ wiskunde – dat dit punt niet bedoeld is om de wiskunde te ondermijnen. Ik laat daarentegen juist zien dat er niks ‘bovennatuurlijks’ is aan de wiskunde.

Het is in zijn essentie helemaal niet zo ver weg van de werkelijkheid. Het is de werkelijkheid. Tenminste... onze werkelijkheid en hoe wij het interpreteren. Deze intuïties deelt iedereen. En wiskunde heeft vanuit een universeel gevoel van de werkelijkheid talloze systemen kunnen opbouwen, waardoor we de wereld kunnen meten en dingen kunnen berekenen over de wereld. Mensen denken vaak aan Engels als de internationale of grensoverschrijdende taal. Maar dat is het niet. Die rol is al sinds het begin van de mensheid ingenomen door de wiskunde. Iedereen spreekt het, maar sommigen hebben een net wat uitgebreider vocabulaire dan anderen.

Om dit allemaal weer terug te brengen naar de rode draad van dit boek, Russells paradox, wil ik hiermee aantonen: zulke ontdekkingen, zoals die prachtige van Russell, illustreren juist dit punt hierboven – en nog veel meer. Zoals ik al eerder zei is Russells paradox slechts een symptoom – maar wel een hele interessante – van een groter probleem. Dit probleem is juist de kwetsbaarheid van de fundamenteën van de wiskunde. We zagen dat de manier waarop deze kwetsbaarheid was aangetoond steeds opnieuw en opnieuw ontzettend vergelijkbaar was met de voorafgaande ontdekking. Elk ‘probleem’ toont aan dat er veel te makkelijk tegenstellingen gemaakt kunnen worden binnen bepaalde systemen of theorieën. Hoewel deze ontdekkingen op het moment zelf erg zorgwekkend en onwenselijk waren, leverden ze later wel fraaie ontwikkelingen.

Achteraf gezien, kunnen we ze misschien beter dankbaar zijn.

Oefeningen verdieping 2.4: Gödels theorema's

Wat je moet kunnen

- De impact van Gödels stellingen op de wiskunde begrijpen.
- Je begrijpt hoe Gödels bijdrage de kracht van formele systemen ondermijnt.

Opdracht 1 ★★☆☆☆

Leg uit hoe Gödel nummers gebruikt om wiskundige uitspraken om te zetten in getallen. Maak een kort lijstje met simpele symbolen.

Opdracht 2 ★★☆☆☆

Noem een gebied buiten wiskunde waar Gödel's onvolledigheidsstellingen op een metaforische wijze toepasbaar zijn.

Opdracht 3 ★★★★★

Stel een systeem F voor met axioma's A_1, A_2, A_3 . Voeg een formele stelling G toe: " G is niet bewijsbaar in F ".

- Toon aan: als F consistent is, kan G niet bewezen worden.
- Wat gebeurt als G wel bewijsbaar is?

2.4.2 De opkomst van de meta-wiskunde

Paradoxen zijn niet slechts problemen, maar ze openen ook vele deuren. Ze openen de deuren tot de analyse van wiskundige systemen, bewijzen en het opbouwen van de wiskunde uit het niets. Kortom, ze openen de deur tot de **meta-wiskunde**.

De onderwerpen die de meta-wiskunde bestudeerd zijn: geformaliseerde deductieve theorieën. Deze officiële benaming begon met Alfred Tarski. Eén van de belangrijkste taken van de meta-wiskunde is juist om deze geformaliseerde deductieve theorieën te creëren. Op een bepaalde manier begon dit al met Cantors creatie van de verzamelingenleer. Hier begon het creëren van de fundamenteën van de wiskunde. Dit werd pas echt later meta-wiskunde genoemd. In de tijd van Cantor werd deze taak namelijk niet zo serieus genomen. De fundamenteën moesten er zijn, maar er was geen strikte studie naar hoe of hoe goed deze fundamenteën werkten. Pas na dat er problemen ontdekt werden binnen deze fundamenteën, en binnen specifiek de naïeve verzamelingenleer, ging men er ook onderzoek naar doen. En zo kwam, erg beknopt gezegd, de meta-wiskunde tot leven (Elsevier, z.d.).

Maar wat bedoelen we nu precies met de studie van geformaliseerde deductieve theorieën? We weten al wat we bedoelen met een formele taal (een taal gebaseerd op logische symbolen) en we weten wat deductie inhoudt. Dus natuurlijkwijs hebben we het over theorieën die gebruik maken van logica, haar symbolen en haar wetten (deductie). Als we zulke theorieën of systemen willen creëren moeten we ons wel realiseren, zegt Tarski, dat hier limieten aan zitten. Het liefst zouden we namelijk een methode willen die alles waar we mee willen werken kan bewijzen. Maar dit moet wel ergens stoppen. Tarski's conclusie lijkt erg op de conclusie die we hiervoor trokken met betrekking tot Gödel. Niet alles kan bewezen worden. Deze methode die we dus zullen gebruiken binnen de meta-wiskunde, kan op een bepaald punt iets niet langer bewijzen. Het kan namelijk niet zijn eigen validiteit bewijzen; de wet van identiteit kan niet aantonen dat het zelf altijd werkt. Dus zullen we zijn validiteit maar moeten aannemen op basis van intuïtie. Tarski vond dus dat we een onderscheid moeten maken (Elsevier, z.d.):

"Wanneer we ons voornemen een bepaalde discipline op te bouwen, onderscheiden we allereerst een kleine groep uitdrukkingen binnen die discipline die ons onmiddellijk begrijpelijk lijken; deze uitdrukkingen noemen we primitieve termen of ongedefinieerde termen.... Sommige van deze uitspraken, die voor ons de schijn van evidentie hebben, worden gekozen als de zogeheten primitieve uitspraken of axioma's... " ~ Alfred Tarski, Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Science, 1936



Ontmoet Alfred Tarski:

Alfred Tarski (1901-1983) was een Poolse logicus. Tarski stond bekend om zijn ongewoon heldere definities van waarheid; zijn *T-schema* "een propositie p is waar dan en slechts dan als p " is nog steeds legendarisch. Belangrijker nog, zijn aandeel in het beroemde *Banach-Tarski paradox* (waarin een bol in een eindig aantal stukken kan worden opgesplitst en weer samengevoegd tot twee identieke bollen) had enorm veel impact op het de implicaties van het keuzeaxioma binnen de wiskunde.

Dit is het beste citaat dat de origine van de axioma's (en de meta-wiskunde) duidelijk maakt. Wat Tarski hier dus zegt is dat er sommige uitspraken zijn, die zo voor-de-hand liggend of evident zijn dat we ze aannemen als primitieve termen, of beter gezegd: axioma's (Elsevier, z.d.). Verder zegt Tarski ook een tijdje later in hetzelfde werk:

"We komen overeen om elke andere uitspraak alleen dan als waar te aanvaarden, wanneer we erin geslaagd zijn haar geldigheid vast te stellen, en om daarbij niets anders te gebruiken dan axioma's, definities en dergelijke uitspraken van de discipline waarvan de geldigheid reeds eerder is vastgesteld."

En dit is precies hoe men binnen de wiskundige logica te werk gaat met bewijzen opstellen. En, beste lezer, dit is ook precies hetgeen wat ik van jou gedurende dit boek, uit voorzorg, heb verstoep. De strikte routine die wiskundige en logici volgen is dus: **axioma** → **definities** → **bewijs** → **theorem**a. Toen wij in het eerste deel de axioma's van verzamelingen hadden behandeld, hadden wij echter, zoals je ziet, een aantal stappen overgeslagen om te komen tot het resultaat. De definities of het bewijs hebben we achtergelaten. Maar niet zonder reden, gezien die versie meer overeenkwam met Cantors naïeve verzamelingenleer. In *deel 3* gaan we hier echter – het spijt me alvast – wel meer aandacht aan besteden. Dus, zodat je alvast een voorproefje krijgt, geef ik even duidelijke definities voor elk concept (Halmos, 1960):

1. **Axioma's:** Fundamentele regels die als vanzelfsprekend worden aangenomen.
2. **Definities:** nieuwe concepten worden die precies worden omschreven op basis van de - axioma's – hierdoor ontstaan in ons geval nieuwe verzamelingen zonder nieuwe axioma's toe te hoeven voegen.
3. **Bewijzen:** logische redeneringen, zoals de modus ponens, die laten zien dat bepaalde uitspraken volgen uit zowel de axioma's als de definities.
4. **Theorema's:** de stellingen of resultaten die zijn bewezen via die bewijzen (zoals Gödels twee theorema's).

Het is juist deze discipline of routine die de kern vormt van de meta-wiskunde. Alles moet precies. Alles moet zorgvuldig. Want alles moet kloppen! We kunnen geen haperingen in het systeem hebben. Naast de taak van de meta-wiskunde om de formele systemen te creëren voor wiskundigen, is het ook haar taak om deze systemen en theorieën te onderzoeken en te corrigeren zo nodig (Elsevier, z.d.).

Voor elk wiskundig systeem onder een andere tak van de wiskunde is er dan een andere aanpak. En voor elke heeft Tarski ook een methodologie bedacht. De meta-wiskunde houdt zich niet slechts bezig met de fundamente van verzamelingenleer, maar ook de algebra, analyse of meetkunde. Wegens die reden, kunnen we het volgende beweren (Elsevier, z.d.):

"Strikt genomen zou de meta-wiskunde niet beschouwd moeten worden als één enkele theorie."
~ Alfred Tarski

2.5 Wat betekent dit voor taal?

Net spraken wij over hoe Russells paradox zich manifesteerde binnen verschillende hoeken van de logica. Maar dit gaat eigenlijk nog veel verder. Zulke paradoxen zijn niet alleen een kwestie voor de wiskunde of de logica, maar ook voor de taal. “Deze zin is onwaar.” is immers ook een taalkundige uitspraak. Zelfreferentie is niet alleen een probleem van de wiskunde, maar ook van de taal. In dit deel wil ik een aantal voorbeelden van taalkundige paradoxen, vergelijkbaar met die van Russell, naar voren brengen en aantonen wat ze ons kunnen vertellen over taal – en misschien zelfs zijn relatie met de wiskunde.



Ook Russells paradox werd door Russell zelf vertaald naar de natuurlijke taal, om zijn originele paradox beter te kunnen illustreren. Russel verwoorde zijn paradox op deze manier: in een klein dorpje woont een man die barbier is; deze barbier scheert alle en alleen alle mannen in het dorp die zichzelf niet scheren. Vraag: “Scheert de barbier zichzelf?” Dit staat nu bekend als de barbier paradox. Als jij ja antwoordt op de vraag dan scheert hij zich niet; hij scheert allen die zich niet scheren. Maar als hij zich niet scheert dan scheert hij zich wel, toch?? Paradox. Je kunt makkelijk hier de vergelijking trekken met $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$. Je kunt R hier definiëren als de barbier, en $\in$ kun je definiëren als een vorm van ‘scheren’. Zo heb je de barbier paradox te pakken gekregen!

Zulke varianten van circulaire paradoxen ontstonden tijdens de negentiende en twintigste eeuw ook, met als aandachtspunt de staat van de natuurlijke taal. Laten we beginnen met een paradox die gezien kan worden als een kruising tussen het taalkundige en het wiskundige: Berry’s paradox. Het werd als eerst gepostuleerd door G.G. Berry, de bibliothecaris van de universiteit van Oxford, die het door heeft verteld aan Russell. Het werd gepopulariseerd door de Principia Mathematica. Het gaat ongeveer als volgt (Bolander, 2024; Cantini, 2025; Ramanayake, 2025):

“...het kleinste getal dat niet kan worden aangeduid met een beschrijving van minder dan 100 letters.”

Er bestaan oneindig lange getallen, maar geen oneindig lange beschrijvingen. Als deze zin het heeft over het kleinste getal dat niet beschreven kan worden met minder dan 100 letters, dan is dat toch zelf ook een beschrijving? En deze beschrijving bestaat uit maar 81 letters! Zo hebben we dit getal beschreven in minder dan 100 letters. Maar de beschrijving zegt zelf dat het niet kan worden beschreven met minder dan 100 letters? Dus we eindigen weer met een paradox. Het probleem ligt hier weer in de zelfreferentiële *impredicatieve* definitie. Dit is een definitie die verwijst naar een object of concept dat zelf nog niet volledig gedefinieerd is (Bolander, 2024).

Net als Russells paradox, is het probleem dat er geen grenzen liggen aan wanneer iets wel en niet over zichzelf mag spreken. Hiervoor had Tarski een oplossing bedacht.

Tarski maakte een onderscheid. Hij geloofde dat wij in ons dagelijks leven *objecttaal* gebruiken. Dit zijn zinnen die spreken over gebeurtenissen, of mogelijke gebeurtenissen, binnen onze ervaringswereld. Dit zijn doodgewone zinnen zoals "Het uitzicht is lelijk.". Maar er bestaat nog een categorie: de *meta-taal*. De meta-taal bezit altijd een kopie van de objecttaal. Dus elke zin in de objecttaal bestaat ook in de meta-taal. De meta-taal moest, volgens Tarski, kunnen spreken over de syntax en waarheid van de objecttaal. Tarski liet zelfs operatoren van de verzamelingenleer toe. In veel opzichten begon het op een formele logische taal te lijken. De meta-taal bezat ook zijn eigen axioma's. Deze axioma's stelden de fundamenteen waarvan iemand moet uitgaan als ze een betekenisvolle zin willen produceren (Hodges, 2022).

Wat lost dit onderscheid eigenlijk op? We kunnen het best de leugenaars paradox als voorbeeld nemen. Tarski geloofde dat de paradoxale zin ("Deze zin is onwaar") problematisch is, omdat het de functie van de meta-taal overneemt. Objecttaal mag niet over zichzelf spreken (en oordelen over waarheid). Deze paradox zou opgelost worden als we hem vertalen naar "De zin "Deze zin is onwaar." is waar/onwaar." Probeer hem nu nogmaals te beantwoorden. Je zult zien dat je tegen geen contradicties meer aan zal lopen (Elsevier, z.d.; Hodges, 2022).

De oplossing van de kappers paradox is iets subtieler. Als je strikt objecttaal en meta-taal scheidt, kun je zeggen: "x scheert y." (objecttaal) en "Volgens deze definitie scheert de barbier zichzelf?" (meta-taal). Tarski stopte echter niet slechts bij meta-taal en objecttaal. Zo kan er nog een laag ontstaan binnen deze hiërarchie van Tarski; de meta-meta-taal. Dit is de taal die spreekt over de meta-taal. Objecttaal is de echte tekst, meta-taal is het commentaar op de tekst, meta-meta-taal is het commentaar op het commentaar. Ik sluit me echter niet aan bij het nut van dit onderscheid. Binnen de natuurlijke taal heeft het geen praktisch nut, daar was Tarski waarschijnlijk van bewust, en het doet steeds het probleem verder op schuiven.

Paradoxen met dezelfde structuur zoals die van Russell lijken wel enig impact te hebben gehad op de filosofie van taal. Er ontstond namelijk in de twintigste eeuw veel discussie over hoe taal gesproken moet worden (wat onder andere door zulke paradoxen beïnvloedt werd). Je ziet echter niemand beweren dat we een ander syntactisch systeem nodig hebben voor taal, zoals dat wel door meerdere werd gedaan bij wiskunde. Het verschil ligt geloof ik echter in de functie. Wiskunde kan niet functioneren als het fundament tegenstellingen bewijst. Als er een tegenstelling bewezen kan worden, dan kan alles bewezen worden; en precies dan wordt de wiskunde nutteloos.

Dit geldt echter niet voor taal. De structuur van taal beweert niks over de wereld. Het is slechts een manier om over de wereld te communiceren. Hoe nuttig het is ligt aan hoe het gebruikt wordt. De waarheidscriteria zijn contextafhankelijk. Dit idee werd door Wittgenstein (binnen de Tractatus) gepopulariseerd. Niemand communiceert met paradoxen, omdat het geen informatie geeft aan de ander. Dit is het functionalistisch idee binnen de filosofie van de taal. Deze paradoxen zijn geen functioneel onderdeel van taal; maar van logica. Dusdanig vormen ze geen problemen voor de taal, het is slechts een communicatie middel voor de overdracht van deze *logische* problemen. Tarski's meta-taal en objecttaal zijn dus nogal overbodig binnen de taal, maar bieden wel hulpmiddelen voor de logica.

Het kan helpen met preciezer communiceren en argumenten analyseren. We kunnen dus concluderen dat paradoxen exclusief logische of wiskundige vraagstuk zijn.

Toen ik was begonnen met het schrijven van dit hoofdstuk, was mijn doel om de titel van dit boek wat meer na te leven. Russells paradox was immers niets meer dan een symptoom van een groter probleem. De hele logica zat rond het begin van de twintigste eeuw in de knoop. Er moest meer aandacht worden besteed aan niet alleen de praktische applicaties van de wiskunde en logica, maar ook aan de fundamenteën. Zo kwam de meta-wiskunde tot leven. Russells paradox is in ons verhaal de rode draad, maar het is niet *het* centrale probleem. Dat bleek de logica zelf te zijn.

In dit hoofdstuk hebben we kennis gemaakt met de verschillende soorten paradoxen en het karakter van Russell zelf. We hebben op een formele wijze de bekende paradox niet alleen bekeken, maar ook kunnen afleiden uit het probleem. Ook bleek dat de paradox niet de enige van zijn soort is en dat de logica onder meer problemen leed. Wij hebben een aantal van deze problemen behandeld en hebben de invloed ervan kunnen beschouwen.

De invloed strekt zich immers verder uit tot buiten de wiskunde naar de taal en nog veel verder. De problemen zoals die van Russell hebben veel toegevoegd aan het kritisch denken en evalueren. Het is absoluut niet overdreven om te zeggen dat hun invloed de hoeksteen vormt van de moderne logica. Logica is immers de kunst van het redeneren en kritisch denken. Nu we een diagnose hebben van het probleem willen we uiteraard ook een geneesmiddel. Er bestaat een variatie aan opties. Deze gaan we in het volgende deel bekijken. Toch blijven die problemen en velen gestelde vragen binnen de wiskunde minstens net zo belangrijk als de oplossing. Dus wil ik dit hoofdstuk eindigen met het volgende citaat van Georg Cantor:

“De essentie van de wiskunde ligt in haar vrijheid. In de wiskunde moet de kunst van het stellen van een vraag hoger worden gewaardeerd dan het oplossen ervan.”

Oefeningen 2.5: Wat betekent dit voor taal?

Wat je moet kunnen

- Je kunt het verschil tussen meta-taal en objecttaal herkennen en uitleggen

Opdracht 1 ★★★★★

Vertaal de zin “Deze zin is onwaar” naar meta-taal.

Opdracht 2 ★★★★★

Bedenk praktische voorbeelden van meta-taal en objecttaal in je dagelijks leven. Denk bijvoorbeeld regels op school, een instructieboek of sociale media.

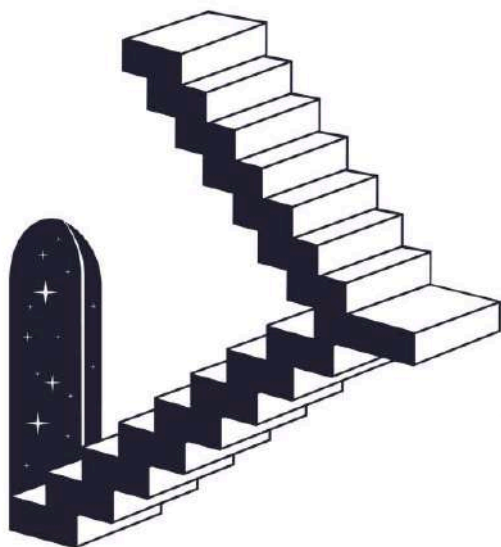
Opdracht 3 ★★★★★

Bedenk een korte omschrijving van een object in je kamer die een Berry-achtige paradox oplevert.





DEEL 3: POGINGEN TOT EEN UITWEG



Naar aanleiding van Russells paradox moest de naïeve verzamelingenleer de prullenbak in. Wiskundigen probeerden een uitweg te vinden met verschillende strategieën en aanpassingen om de paradox te vermijden. In dit hoofdstuk onderzoeken we deze pogingen, en ontdekken we hoe de zoektocht naar een sterker logisch fundament tot verrassende en complexe oplossingen leidt. We zullen om deze methodes echt ons eigen te maken ook veel formeler te werk gaan!

3.1 Zermelo- Fraenkel: een strakkere aanpak

"Het is beter om ongelijk te hebben dan om vaag te zijn."

~ Freeman Dyson, een wis- en natuurkundige

We maken alvast een sterke start! Laten we beginnen met ZF, een afkorting voor de theorie van Zermelo-Fraenkel (en wat later ZFC werd). Dit vormt de basis van de verzamelingenleer die we tot op de dag van vandaag nog benutten. Het citaat hierboven illustreert perfect het motto van ZF: alles moet tot in de detail worden uitgewerkt en bewezen! ZF is de eerste versie van een axiomatische verzamelingenleer.

Zoals al vrij duidelijk is te horen aan de naam, zijn de oprichters van deze leer de wiskundigen Ernst Zermelo en Abraham Fraenkel. Als gevolg van de paradoxen moest de verzamelingenleer geaxiomatiseerd worden. En Zermelo in 1908 was als eerste klaar voor die uitdaging! Zermelo's methode was sterk beïnvloed door David Hilbert. Zo was Zermelo's strengere of 'volwassen' aanpak een direct gevolg van Hilberts invloed. Later schoof Fraenkel ook aan en voegde zijn eigen uitwerkingen toe met betrekking tot een aantal axioma's. Zo was ZF geboren. ZF is niets meer dan acht axioma's gecombineerd met formele taal. Toch was het oprichten van ZF geen makkelijke taak. Er moet zowel voor gezorgd worden dat er geen tegenstellingen uit voort kunnen vloeien als ervoor zorgen dat er weinig kwijt geraakt wordt. We zullen straks beide kanten van die munt analyseren. Of, zoals Zermelo het zelf formuleert (Bagaria, 2014; Hallet, 2013):

"Bij het oplossen van het probleem moeten we aan de ene kant deze principes voldoende beperken om alle tegenstrijdigheden uit te sluiten, en aan de andere kant ze voldoende ruim nemen om alles wat waardevol is in deze theorie te behouden."

Ontmoet Zermelo en Fraenkel:

Ernst Zermelo (1871-1953) was een Duitse wiskundige en had naast wiskunde ook interesse in poëzie en filosofie. Hij werd uiteindelijk hoogleraar aan de universiteit van Zurich, maar ontving veel kritiek over zijn 'rare' karakter en zijn negatieve houding tegenover Hitlers regiem. Sindsdien had hij wiskunde volledig achterwegen gelaten.

Abraham Fraenkel (1891-1965) was een Israëli wiskundige en Zionist geboren in Duitsland. Hij heeft aan tientallen universiteiten in Duitsland wiskunde gestudeerd, maar vond eindelijk zijn plaats als decaan in Israël aan de universiteit van Jeruzalem. Daar had hij zijn naam van Adolf naar Abraham veranderd.



Ernst Zermelo



Abraham Fraenkel

3.1.1 De 8 wonderen van ZF

Bereid je mentaal goed voor. Wat je hieronder gaat zien, is niets minder dan het fundament van ZF – nein, van de hele wiskunde. Dit zijn de acht regels waaruit bijna jouw volledige numerieke belevingswereld is opgebouwd; de wiskundige wapens tegen alle machtige paradoxen. Aanschouw, de acht axioma's van ZF (Kunen, 1980):

1. Het axioma van extensionaliteit:

$$\forall x \forall y ((\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \Rightarrow x = y)$$

2. Het axioma van regulariteit:

$$\forall x (\exists y (y \in x) \Rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)))$$

3. het axioma van scheiding:

Voor elke formule ϕ met vrije variabelen onder $x, z, w_1, \dots, w_n$,

$$\forall z w_1, \dots, w_n \exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow x \in z \wedge \phi)$$

4. Het axioma van paren:

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$$

5. Het axioma van vereniging:

$$\forall \mathfrak{X} \exists A \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in \mathfrak{X} \Rightarrow x \in A)$$

6. Het axioma van vervangingsschema:

Voor elke formule ϕ met vrije variabelen onder $x, y, A, w_1, \dots, w_n$,

$$\forall A \forall w_1, \dots, w_n (\forall x \in A \exists! y \phi \Rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \phi).$$

7. Het axioma van oneindigheid:

$$\exists x (0 \in x \wedge \forall y \in x (S(y) \in x))$$

8. Het axioma van de machtsverzameling:

$$\forall x \exists y \forall z (z \subset x \Rightarrow z \in y)$$

De bovenstaande axioma's vormen samen het fundament van de verzamelingenleer. Elk axioma legt één aspect van de structuur van dit universum vast: extensionaliteit bepaalt identiteit, regulariteit voorkomt vicieuze cirkels, scheiding en vervanging maken het mogelijk nieuwe verzamelingen te construeren, terwijl oneindigheid en machtsverzameling de noodzakelijke bouwstenen leveren om de wiskunde op te bouwen. Er wordt in de klassieke verzamelingenleer gebruik gemaakt van *eerste-orde logica* (en soms wat *tweede-orde logica*) voor het formuleren van de axioma's. Dit is het kader van logische symbolen die we vaker in het boek zijn tegen-gekomen; de kwantoren ($\forall, \exists$), element van ($\in$) en de logische operatoren (zoals $\Rightarrow, \wedge, \neg$). Deze waren in de tijd van Zermelo en Fraenkel nog niet gangbaar en dus werd het niet benut. Wij zullen er echter wel gebruik van maken (Hallet, 2013).

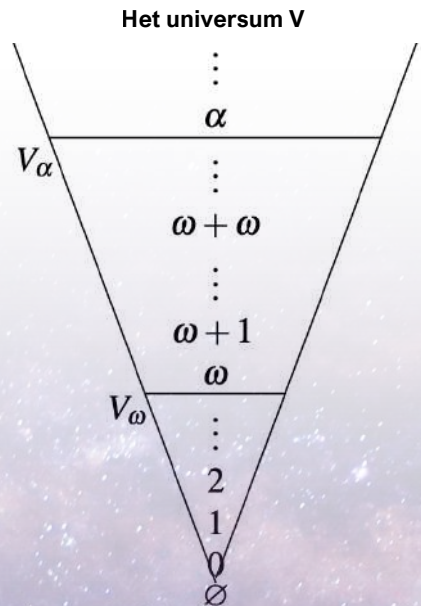
In de volgende secties zullen we elk axioma individueel kort uitleggen en de implicaties ervan toelichten (door middel van een aantal bewijzen). Bekijk *tabel 1* zo nodig voor ondersteuning.

We beginnen gelijk met een bekende axioma, het axioma van extensionaliteit. Er is niet veel aan veranderd qua betekenis; twee verzamelingen (x en y ; binnen eerste-orde logica worden verzamelingen met kleine letters genoteerd) zijn gelijk als ze dezelfde elementen (z) bevatten. Dit betekent dat de *manier waarop* een verzameling wordt gedefinieerd irrelevant is; alleen het resultaat (de elementen) telt. De verzamelingen $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is priem en } x < 6\}$ en $\{2,3,5\}$ zijn gelijk; de *resultaten* zijn hetzelfde. Zonder extensionaliteit zou gelijkheid van verzamelingen niet herleidbaar zijn tot $\in$ -relaties, waardoor vrijwel elke bewijsvoering in de verzamelingenleer onpraktisch wordt (Hallet, 2013; Hart, 2020).

Het is belangrijk om op te merken dat het axioma er impliciet van uit gaat dat x , y en z allemaal *erfelijke verzamelingen* zijn. Ze worden erfelijk genoemd, want, net als iets wat van ouder op kind wordt doorgegeven, wordt bij deze verzamelingen het 'verzamelingskarakter' van elk element doorgegeven aan de elementen van dat element, en zo door, totdat men bij de lege verzameling komt. Een erfelijke verzameling bevat alleen elementen die zelf ook verzamelingen zijn; het is een verzameling van verzamelingen. Erfelijke verzamelingen vormen de basis van het klassieke universum van verzamelingen $V = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$, waarbij V_{α} de verzameling is van alle verzamelingen van rang α met $V_0 = \emptyset$. De volgende laag wordt dan zo geconstrueerd $V_{\alpha+1} = \mathbf{VUP}(V_{\alpha})$, waarbij $P(x)$ de machtsverzameling is. Elke rang of laag berust op de Von Neumann-constructie (die eerder was behandeld in *deel 1*) (Kunen, 1980).

Denk aan een boom van verzamelingen: De wortel is $\emptyset$. Elke volgende laag bevat alle mogelijke verzamelingen die je kan maken van de verzamelingen in de vorige lagen. Het universum V is de hele boom samen met alle takken en bladeren onder een *cumulatieve hiërarchie*. Kortom, V is de vereniging van alle (*goed-gefundeerde*) verzamelingen van rang of laag α . Een verzameling is goed-gefundeerd zolang deze 'erving' niet oneindig lang door gaat zonder eindbestemming. Deze infodump zal later nog erg nuttig blijken (Kunen, 1980).

De bijzondere eigenschap van extensionaliteit is dat het bewezen is onafhankelijk te zijn van de andere zeven axioma's, waaronder het axioma van regulariteit. Deze axioma stelt dat voor alle verzamelingen x ($\forall x$) geldt het volgende: als x minstens één element heeft ($\exists y (y \in x)$), dan bestaat er een element $y \in x$ dat geen element deelt met x ($\Rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y))$). In andere woorden: er is een element y in x dat geen elementen van x zelf als lid heeft. Dit axioma garandeert dat elke verzameling één 'onderliggend' element heeft. Dit is equivalent aan: als $x \neq \emptyset$, bestaat er een element $y \in x$, zodat $x \cap y = \emptyset$ (Kunen, 1980).



Het derde axioma, van scheiding, die we later wat harder aan zullen pakken, beschrijft kortweg hoe je deelverzamelingen kunt vormen uit een bestaande verzameling op basis van een bepaalde voorwaarde ϕ (Kunen, 1980).

En nu de vierde, het axioma van paren; gegeven twee elementen x en y , dan bestaat er een verzameling z , zodanig dat zowel x als y element is van z – simpeler kan het toch niet? Dit axioma garandeert de aanwezigheid van een verzameling met twee elementen óf een verzameling met slechts één element; een *éénpuntsverzameling*. Als $x=y$, dan, volgens het axioma van extensionaliteit bevat z precies één element. Daarnaast, dient dit axioma als het fundament voor de geordende paren. En nu komen we bij het absolute hoogtepunt: het bewijs (Koepke, 2008)!

Definitie 1.1: $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ is het geordende paar van x en y (Koepke, 2008).

We starten met een definitie! Dit bewijst en stelt helemaal niks, maar het is syntacties erg betekenisvol. We willen natuurlijk wel weten waar we het precies over hebben als we bepaalde concepten of symboliek introduceren; in dit geval (x, y) .

Lemma 1.1: $\forall x \forall y \exists z \mid z=(x,y)$ (Koepke, 2008).

Deze lemma, oftewel hulpstelling, beweert dat het gerodende paar werkelijk bestaat, in tegenstelling tot een definitie moet het bewezen worden. We willen laten zien dat het geordend paar (x,y) in de verzamelingenleer netjes kan worden opgebouwd met alleen maar verzamelingen – en wel als $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$.

Bewijs: 1) Gegeven zijn de verzameling x en y . **2)** Op basis van het axioma van paren nemen we m en n zodat $m=\{x\}$ en $n=\{x,y\}$. **3)** Weer volgens het axioma kiezen we een z zodanig dat $z=\{m, n\}$. **4)** We stellen dat $z=(x, y)$. Merk op dat $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{w \mid w = \{x\} \vee w = \{x, y\}\}$. **5)** Dan is $z = (x, y)$ equivalent aan $\forall w (w \in z \Leftrightarrow w = \{x\} \vee w = \{x, y\})$, $\forall w (w = m \vee w = n \Leftrightarrow (w = \{x\} \vee w = \{x, y\}))$. En dit volgt uit de keuze van m en n (Koepke, 2008).

Met dit bewijs hebben wij geordende paren afgeleid uit het axioma van paren. We hoeven het geordend paar (x,y) niet als iets nieuws aan te nemen; we kunnen het gewoon in elkaar zetten. Met het axioma van paren (en impliciet ook het axioma van extensionaliteit) maken we eerst de verzamelingen $\{x\}$ en $\{x,y\}$. Die stoppen we vervolgens samen in één nieuwe verzameling z , $z=\{\{x\}, \{x,y\}\}$. De volgorde zit niet in een extra structuur, maar in het feit dat x in beide deelverzamelingen voorkomt en y slechts in één; precies dit zorgt voor die 'orde'. Maar daar stopt het nog niet:

Lemma 1.2: $(x, y) = (x', y') \Rightarrow x = x' \wedge y = y'$ (Koepke, 2008).

We willen ook een essentieel eigenschap kunnen *bewijzen* over geordende paren – namelijk de ordening. Deze eigenschap wordt door lemma 1.2 gesteld en bewijzen we als volgt:

Bewijs: Stel $(x, y) = (x', y')$, oftewel **1)** $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$.

Geval 1) $x = y$. Dan $\{x\} = \{x, y\}$, $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}$, $\{\{x\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$, $\{x\} = \{x'\}$ en $x = x'$, $\{x\} = \{x', y'\}$ en $y' = x$. Dus $x = x'$ en $y = x = y'$ zoals verwacht.

Geval 2) $x \neq y$. **1)** impliceert $\{x'\} = \{x\}$ of $\{x'\} = \{x, y\}$. De rechterkant zou $x = x' = y$ impliceren, wat tegenstrijdig is met de aanname. Dus $\{x'\} = \{x\}$ en $x' = x$. Dan impliceert **1)**: $\{x, y\} = \{x', y'\} = \{x, y'\}$ en $y = y'$ (Koepke, 2008).

Dit hierboven is niet zomaar een 'bewijs'; dit is een bewijs met een *gevalsonderscheiding* – met daarnaast nog zelfs een klein sneaky *bewijs uit het ongerijmde* in geval 2 (je bewijst dat a waar is door aan te tonen dat $\neg a$ onwaar is). We willen laten zien dat twee geordende paren alleen gelijk kunnen zijn als hun eerste en tweede componenten ook gelijk zijn, oftewel dat $(x,y)=(x',y')$ precies betekent dat $x=x'$ en $y=y'$. De opsplitsing in geval $x=y$ en $x \neq y$ is onmisbaar. De verzamelingen $\{x\}$ en $\{x,y\}$ precies dan samenvallen (en worden gereduceerd tot $\{\{x\}\}$) wanneer $x=y$, en anders verschillend zijn, wat invloed heeft op hoe de gelijkheid van de paren kan worden afgeleid. In het bewijs geeft het accent een ander variabel aan, die – in dit geval – dezelfde positie innemen binnen het geordend paar.

We kunnen *lemma 2.2* ook veel eenvoudiger formuleren – want dit bewijs vraagt te veel doorzettingsvermogen van mijn ogen – maar wel helaas ten koste van wat wiskundige precisie:

$$(x,y)=(m,n) \Leftrightarrow x=m \wedge y=n,$$

waarbij (x,y) gedefinieerd wordt volgens *definitie 1.1*. Een ongeordend paar daarentegen kan worden beschreven als

$$\{x,y\}=\{m,n\} \Leftrightarrow ((x=m \vee x=n) \wedge (y=m \vee y=n)).$$

En met behulp van dit bewijs hebben we nu een concept dat voor een groot deel van, onder andere, calculus en lineaire algebra essentieel is. En met een formeel bewijs, kunnen we alles anders ook formeel afleiden. Een ander essentieel concept is dat van een vereniging en een doorsnede. Het axioma van vereniging vormt het fundament hiervan. Hier wordt een nieuw – nogal elegant – symbool geïntroduceerd: $\mathfrak{F}$. Dit is het symbool voor een verzameling van verzamelingen (de Franktur-letter F). Dit axioma stelt dus dat voor alle verzamelingen van verzamelingen er een verzameling A bestaat, die alle elementen bevat van een element Y (van $\mathfrak{F}$). Kortom: verzamelingen verzamelen, het ultieme middel tegen verveling. En hieruit kunnen we stellen (Halmos, 1960; Kunen, 1980; Koepke, 2008; Hart, 2020):

$$A=\bigcup \mathfrak{F}$$

Zo simpel kunnen verzamelingen soms ook zijn. Daaruit volgt ook deze, enigszins bekendere definitie (Kunen, 1980):

$$A \cup B = \bigcup \{A,B\}$$

Om deze definities te bewijzen gebruiken we een algemener bewijs met de bijbehorende lemma 2.3 (Kroepke, 2008):

Lemma 2.3: Het axioma van vereniging is equivalent aan $\forall x \bigcup x \in V$.

Bewijs: Beschouw de volgende equivalenties:

$$\begin{aligned} & \forall x \bigcup x \in V \\ \Leftrightarrow & \forall x \exists y (y = \bigcup x \wedge y \in V) \\ \Leftrightarrow & \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in \bigcup x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists w \in x \ z \in w) \end{aligned}$$

Een element zit in de vereniging van een verzameling verzamelingen als en alleen als het in een van de afzonderlijke verzamelingen zit.” Dat is precies wat de definities van $A=\bigcup \mathfrak{F}A$ en $A \cup B = \bigcup \{A,B\}$ beweren. Equivalentie is immers niets meer dan een stelling anders verwoorden (Jech, 2003).

Een wat leuker trucje is om uit het axioma van vereniging de doorsnede naar voren te toveren. Dit bewijs ziet er als volgt uit: Stel dat A een niet-lege verzameling van verzamelingen is, en dat we willen

$$\cap A = \{x \mid \forall C \in A, x \in C\}$$

Eerst gebruiken we het axioma van vereniging om alle elementen te verzamelen die in enige verzameling van A voorkomen:

$$U: \cup A$$

Vervolgens gebruiken we het axioma van scheiding om de elementen te selecteren die daadwerkelijk in alle verzamelingen van A voorkomen. Zo definieert men de doorsnede als: $\cap A := \{x \in U \mid \forall C \in A, x \in C\}$. Op deze manier is $\cap A$ een deelverzameling van de vereniging, en voldoet het volledig aan de axioma's van ZF. Let wel op: dit werkt alleen als $A \neq \emptyset$. Voor de lege familie wordt de doorsnede gedefinieerd als $\emptyset$ (Jech, 2003; Kunen, 1980).

Dankzij deze constructie ontstaat elke doorsnede als een echte verzameling, zonder gebruik te hoeven maken van een universele verzameling. Het axioma van vereniging geeft dus een manier om elementen te verzamelen, en het axioma van scheiding selecteert vervolgens de elementen die voldoen aan de gewenste voorwaarden.

Na het axioma van vereniging beschikt de verzamelingenleer over een basismechanisme om bestaande verzamelingen samen te voegen. Wat nog ontbreekt, zijn principes die bepalen hoe ver het universum mag groeien en langs welke paden die groei mag plaatsvinden. De resterende axioma's van ZF zijn daarom geen losse toevoegingen, maar vormen samen een architectuur voor gecontroleerde expansie.

Het vervangingsschema, of het axioma van vervanging, behoort tot de technisch meest veeleisende axioma's van ZF, maar conceptueel is het idee gelukkig simpel: een verzameling mag uniform worden getransformeerd. Een uniforme transformatie is eigenlijk gewoon een functie f die elk element van een verzameling A koppelt aan precies één element y . Het geeft aan dat als voor elk $x \in A$ er één unieke y bestaat dat voldoet aan $\varphi(x, y)$, er een verzameling B bestaat van al deze y -elementen (Jech, 2003; Kunen, 1980).

Wat dit axioma garandeert, is dat het beeld van een verzameling onder een definieerbare functie zelf weer een verzameling is. Zonder deze garantie zouden veel alledaagse constructies, zoals de verzameling van alle ordinaalgetallen kleiner dan een gegeven ordinaal, simpelweg niet aantoonbaar bestaan. In de cumulatieve hiërarchie speelt vervanging een cruciale stabiliserende rol. Het zorgt ervoor dat wanneer een verzameling A zich volledig bevindt binnen een bepaald niveau V_α , de afbeeldingen van haar elementen ook niet uit het universum vallen. Het axioma van vervanging zorgt ervoor dat je een verzameling stap voor stap kunt omzetten of uitbreiden, zelfs oneindig ver, zonder dat het resultaat buiten het universum van verzamelingen valt. Zo voorkomt het dat transfinitie processen netjes binnen de regels van ZF blijven (Kunen, 1980).

Het axioma creëert geen nieuwe verzamelingen ex nihilo, maar formaliseert slechts de grenzen van het universum onder bepaalde definieerbare functies (Jech, 2003).

We behandelen nu eindelijk mijn favoriete axioma: het axioma van oneindigheid. Zonder het axioma van oneindigheid blijft ZF een 'eindige' theorie. Alle eerdere axioma's zijn consistent met een universum waarin elke verzameling eindig is. Maar het axioma van oneindigheid maakt het universum V een stuk mooier. Dit axioma stelt het bestaan van een inductieve verzameling vast, een verzameling die de lege verzameling bevat en gesloten is onder de opvolgeroperatie. Vanuit zo'n verzameling kan de structuur van de natuurlijke getallen worden afgeleid (Kunen, 1980).

Belangrijk is dat ZF hiermee geen specifieke oneindige verzameling benoemt, maar slechts het bestaan van ten minste één oneindige verzameling. Dit past bij de algemene minimalisme van ZF: het systeem beweert zo weinig mogelijk, maar precies genoeg om de klassieke wiskunde mogelijk te maken. Zonder dit axioma zou vrijwel alle analyse, algebra en topologie verdwijnen, ondanks dat de theorie formeel consistent blijft (Kunen, 1980).

Oneindigheid is dus geen logisch noodzakelijke stap, maar een bewuste uitbreiding van het universum, een keuze voor rijkdom boven veiligheid.

Als laatste hebben we te maken met het axioma van de machtsverzameling. Dit axioma introduceert de krachtigste groeimechaniek binnen ZF. Waar vereniging en vervanging de omvang van verzamelingen slechts lineair of gecontroleerd vergroten, leidt machtsverzameling tot exponentiële sprongen. Het is dit axioma dat Cantors theorema mogelijk maakt en de hiërarchie van kardinaliteiten genereert (Kunen, 1980).

Binnen de cumulatieve hiërarchie kunnen we dit axioma zien als de overgang:

$$V_{\alpha+1} = V_{\alpha} \cup \mathcal{P}(V_{\alpha})$$

Hier wordt zichtbaar hoe het universum bij elke stap rijker wordt dan bij de vorige. Machtsverzameling zorgt ervoor dat geen enkel niveau "maximaal" is: uit elke verzameling volgt onvermijdelijk een grotere. Jech benadrukt dat juist dit axioma verantwoordelijk is voor de diepste onafhankelijkheidsresultaten van de verzamelingenleer (Jech, 2003). Zonder machtsverzameling is er geen continuümprobleem; met machtsverzameling ontstaat onmiddellijk de vraag hoe groot $2^{\aleph_0}$ eigenlijk is. In die zin is CH geen toeval, maar een rechtstreeks gevolg van dit axioma.

Filosofisch is machtsverzameling daarom ook het meest beladen axioma. Het beweert het bestaan van verzamelingen die niet constructief of expliciet gegeven kunnen worden (in deze filosofische theorieën duiken we in 3.5 dieper). Tegelijkertijd is het ook onmisbaar voor vrijwel elke moderne theorie die met functies, reële getallen of topologische structuren te werk gaat.

Gezamenlijk vormen vervanging, oneindigheid en machtsverzameling de motor van het universum V . Zij bepalen niet alleen dat het universum groeit, maar ook hoe en waarom. Zonder vervanging zou de hiërarchie instabiel zijn, zonder oneindigheid zou zij triviaal blijven, zonder machtsverzameling zou zij haar diepte verliezen. Tegelijkertijd bereiden juist deze axioma's de weg voor latere problemen. De flexibiliteit die zij introduceren, maakt het onmogelijk om sommige vragen definitief te beantwoorden binnen ZF zelf. Dit zullen we later beter ontdekken.

3.1.2 tegenstrijdigheden uitroeien

Stel je voor dat je een grote doos vol spullen hebt en je wilt alleen de rode spullen eruit halen. Je bekijkt elk item en legt alleen de rode in een nieuwe doos. Dit eenvoudige idee ligt aan de basis van het axioma van scheiding in de verzamelingenleer: je kunt een nieuwe verzameling maken door een eigenschap te gebruiken om elementen uit een bestaande verzameling te selecteren. Zo ontstaat nooit zomaar een verzameling uit het niets; alles wat je maakt is altijd een deel van iets dat al bestaat. Formeel wordt dit vastgelegd als: Voor elke formule ϕ met vrije variabelen onder $x, z, w_1, \dots, w_n, \forall x \forall y (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi)$, waarbij y de verzameling is van alle elementen in z waarvoor de eigenschap ϕ geldt.

Stel dat $z = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en we willen alleen de even getallen eruit halen. Dan kiezen we een ϕ waarvoor geldt x is even. De scheiding levert dan:

$$y = \{x \in z \mid x \text{ is even}\} = \{2, 4\}$$

Hier zien we duidelijk dat B een deelverzameling van A is. Er ontstaat niets buiten de gegeven verzameling, en alles blijft netjes georganiseerd. Het axioma van scheiding is ook essentieel om paradoxen te vermijden. De beroemde Russell-paradox laat zien dat een verzameling van alle verzamelingen die zichzelf niet bevatten niet kan bestaan zonder tegenstrijdigheden. Met scheiding kun je alleen een verzameling van elementen maken binnen een bestaande verzameling a :

$$R_a = \{x \in a \mid x \notin x\}$$

Zo blijft R_a gelimiteerd tot a , en ontstaat er geen paradox. Het axioma zorgt er dus voor dat de verzamelingenleer consistent blijft en dat nieuwe verzamelingen altijd gecontroleerd ontstaan.

Het axioma van regulariteit (ook wel fundering genoemd) legt ook een belangrijke beperking op aan de structuur van verzamelingen: het voorkomt dat een verzameling zichzelf bevat of dat er oneindige cirkelvormige ketens van lidmaatschap bestaan. Formeel zegt het axioma: $\forall x (\exists y (y \in x) \Rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)))$. Dit betekent: elke niet-lege verzameling x bevat minstens één element y dat geen gemeenschappelijk lid met x deelt. Met andere woorden, er bestaat altijd een 'onderste laag' in elke verzameling binnen ons universum V (Kunen, 1980).

Een belangrijke consequentie is dat geen verzameling zichzelf kan bevatten, en dat elke keten van lidmaatschap uiteindelijk eindigt bij de lege verzameling (Kunen, 1980; Jech, 2003)!

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid x_n = \emptyset$$

Hier betekent $x_0 \ni x_1$ x_0 bevat x_1 als element. $x_1 \ni x_2$ betekent x_1 bevat x_2 , enzovoort.

Dankzij regulariteit krijgt het universum van verzamelingen een duidelijke hiërarchische structuur, het bekende cumulatieve universum V . Elke verzameling behoort tot een bepaalde laag. Op deze manier ontstaat een universele hiërarchie waarin elke verzameling enkel elementen bevat van eerdere niveaus. Hierdoor is het onmogelijk dat een verzameling zichzelf of een van haar eigen bovenliggende lagen bevat (Kunen, 1980).

Het cumulatieve universum en regulariteit werken samen met het axioma van scheiding om paradoxen zoals die van Russell uit te roeien. Zelfs als men probeert een problematische verzameling zoals $R = \{x \in A \mid x \notin x\}$ te construeren, blijft R gelimiteerd tot een bestaande verzameling A en kan het zich niet uitbreiden tot een universele set. Formeel:

$$\forall \alpha (R \notin V_\alpha)$$

Wat betekent dat de paradox nooit een echte verzameling wordt, maar hooguit een proper class. Dus kortom: regulariteit geeft het universum een sterk fundament. Alle verzamelingen hebben een onderste laag, circulaire lidmaatschappen zijn onmogelijk en de cumulatieve hiërarchie maakt de structuur overzichtelijk en veilig voor nog verdere wiskundige constructies.

3.1.3 Hoe niks verloren gaat

Aan het begin van de eeuw waren sommige wiskundigen bang dat de restricties van ZF, zoals het axioma van scheiding en het verbod op de universele set, zouden betekenen dat veel belangrijke wiskunde verloren ging. Maar het tegenovergestelde bleek waar te zijn: alles wat nodig is voor wiskunde kon nog steeds worden gebouwd.

Elke wiskundige structuur S , een verzameling getallen, een functie, een vectorruimte, een groep, een matrix, een meetkundige figuur, past binnen een bepaalde laag V_α , zó dat:

$$S \subseteq V_\alpha$$

Op deze manier zijn alle klassieke wiskundige constructies volledig beschikbaar binnen ZF, ondanks de restricties en 'beperkingen' (Kunen, 1980).

Neem de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$. Zelfs zonder universele verzameling kunnen ze elegant worden gedefinieerd:

$$0 = \emptyset, n+1 = n \cup \{n\}$$

Deze definitie, die we in *deel 1* op een minder formele wijze zijn tegen gekomen, maakt inductie mogelijk en vormt de basis voor verdere constructies: de gehele getallen $\mathbb{Z}$, de rationale getallen $\mathbb{Q}$ en de reële getallen $\mathbb{R}$. Elk van deze verzamelingen leeft veilig in zijn eigen passende laagje V_α van het cumulatieve universum. Het universum V is rijk genoeg om alle wiskunde die iemand nodig zou hebben te bevatten, maar blijft toch vrij van paradoxen (Kunen, 1980).

Niet alleen getallen, maar ook complexere structuren passen binnen ZF:

- Functies kunnen worden gedefinieerd als verzamelingen van geordende paren, met elk paar in een vooraf gedefinieerde laag.
- Ringen, groepen en vectorruimtes zijn verzamelingen met extra operaties, die via scheiding en regulariteit veilig worden geconstrueerd.
- Matrices, grafen en meetkundige objecten kunnen worden opgenomen als verzamelingen van verzamelingen, altijd binnen een goed gedefinieerd laagje V_α .

ZF zorgt ervoor dat alle wiskundige bouwstenen veilig bewaard blijven, netjes gerangschikt in lagen van het cumulatieve universum. Zo kunnen wiskundigen vrij creëren zonder paradoxen, alsof ze spelen in een perfect geordend legostenen-universum.

Oefeningen 3.1: Zermelo-Fraenkel: een strakkere aanpak

Wat je moet kunnen

- De axioma's van ZF begrijpen en kunnen toepassen.
- Begrijpen hoe paradoxen door het axioma van scheiding en regulariteit worden vermeden.

Opdracht 1 ★★☆☆☆

In het cumulatieve universum V hoort elk object op een laag. Kies een object $x = \{0, 1, 2\}$. In welke laag V_α moet x leven?

Opdracht 2 ★★☆☆☆

Gegeven de verzameling $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

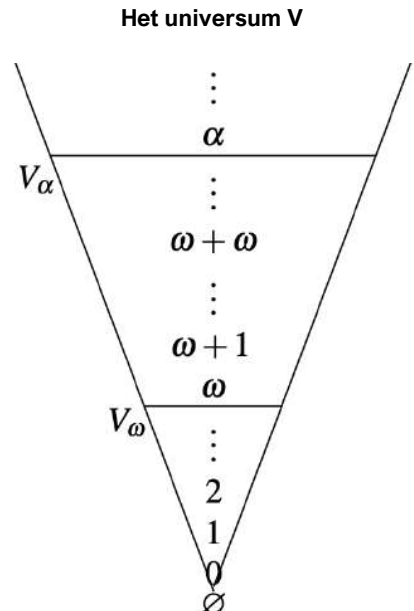
Definieer een nieuwe verzameling K via het axioma van scheiding met de eigenschap 'priemgetallen'.

Vraag:

- Schrijf K formeel op.
- Leg uit waarom K volgens ZF een echte verzameling is.

Opdracht 3 ★★★★★

Definieer een functie $f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ via geordende paren als verzamelingen.



3.2 De introductie van een keuze

Aan het begin van de twintigste eeuw stonden wiskundigen voor een nogal onzichtbaar probleem: hoe kan je voor een oneindige groep van niet-lege verzamelingen telkens één element kiezen, zonder dat er een expliciete regel bestaat om dat te doen? Ernst Zermelo introduceerde in 1904 de keuzeaxioma om dit te regelen. Dit axioma leek in eerste instantie bijna magisch, want het stelt het bestaan van keuzes zonder constructie. Later werd duidelijk dat het vergelijkbaar is met andere belangrijke resultaten, zoals de stelling van Zorn, Tukey's lemma en het feit dat elke verzameling geordend kan worden. Vandaag is de keuzeaxioma een onmisbaar en onzichtbaar instrument die wiskundigen in staat stelt oneindige keuzes te maken.

3.2.1 Het negende axioma

Na de strakke afbakening van de verzamelingenleer door Zermelo en Fraenkel leek de grootste schade van Russells paradox hersteld te zijn. Zelfreferentie was illegaal, verzamelingen werden niet langer 'uit eigenschappen geboren', en het universum van verzamelingen kreeg een duidelijke, samenhangende structuur. Toch bleek deze veiligheid een prijs te hebben: ZF bleek verrassend beperkt in wat het kon garanderen (Bell, 2008).

Een van de eerste plekken waar dit zichtbaar werd, was het schijnbaar onschuldige probleem van keuze. Informeel zegt het het volgende: gegeven een verzameling van niet-lege verzamelingen, zouden we toch uit elke verzameling één element moeten kunnen kiezen. Deze intuïtie is zo sterk dat die een lange tijd onuitgesproken bleef, totdat men probeerde haar formeel af te leiden. Dat bleek onmogelijk (Bell, 2008).

Om dit probleem in behandeling te nemen introduceerde Zermelo het keuzeaxioma. Volgens de moderne notatie beweert het:

$$\forall F((\forall x \in F)(x \neq \emptyset) \Rightarrow \exists f \forall x \in F(f(x) \in x))$$

waarbij f een functie is met domein F . Deze functie heet een keuzefunctie. Letterlijk staat er: voor elke verzameling x van niet-lege verzamelingen bestaat er een functie die uit elke verzameling precies één element kiest.. Het essentiële punt is niet wat dit axioma zegt, maar wat het niet zegt. Er wordt geen constructie gegeven en geen expliciete regel. Het axioma garandeert slechts *bestaan*. Dit lijkt tegenstellend met de eerdere axioma's van ZF, die alle (direct of indirect) een meer constructief karakter leken te hebben (Bell, 2008).

Juist dit maakt het keuzeaxioma nogal filosofisch problematisch. In de *constructivistische* en *intuitionistische* logica geldt het principe dat bestaan geaccepteerd moet worden zolang het *construeerbaarheid* is. Het keuzeaxioma schendt dit principe volledig. Het zegt gewoon: er bestaat een keuze, zelfs als geen enkel expliciete constructie beschreven kan worden.

Daarmee introduceert het keuzeaxioma, oftewel AC, een vorm van een niet-constructief bestaan wiens effect tot ver buiten de verzamelingenleer reikt (Bell, 2008).

Toch is deze stap logisch volledig onproblematisch. Het keuzeaxioma leidt niet tot een tegenspraak binnen ZF. Sterker nog, Gödel en Cohen hebben laten zien dat AC onafhankelijk is van de overige axioma's van ZF. Zowel $ZF + AC$ als $ZF + \neg AC$ zijn consistent, zolang ZF zelf consistent is (Bell, 2008).

Dit onafhankelijkheidsresultaat is ontzettend belangrijk geweest. Het betekent dat het keuzeaxioma geen onzichtbare paradox introduceert, maar ook niet kan worden afgeleid uit de bestaande structuur van de theorie. Keuze is geen noodzakelijke waarheid binnen de verzamelingenleer, maar wel een bewuste toevoeging. Met de introductie van AC verandert ZF in ZFC. Filosofisch dwingt dit ons tot een ongemakkelijke conclusie: de vraag of het keuzeaxioma 'waar' is, kan niet binnen de verzamelingenleer zelf worden beantwoord. Het verschuift van een wiskundige naar een metatheoretische discussie.

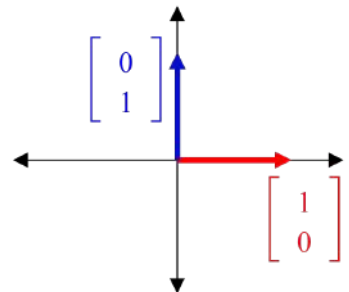
3.2.2 De kracht van keuze

De ware impact van het keuzeaxioma blijkt niet echt uit de formulering, maar wel uit de vele equivalenten van de axioma. Dat deze equivalenten bestaan, is op zichzelf al veelzeggend: de axioma beïnvloedt de gehele van de wiskunde.

Een klassiek voorbeeld hiervan is de *welordeningstelling*: elke verzameling kan worden welgeordend. Welordening stelt dat alles zo is geordend dat je altijd een eerste element kunt aanwijzen. De implicatie hiervan is groot. De AC maakt ons in staat om willekeurige verzamelingen te organiseren langs een lineaire orde, zonder rekening te houden met hun aard of grootte. Dit vermogen werkt in vrijwel alle abstracte structuren. In de algebra verschijnt het als *Zorn's lemma*, in de analyse als *compactheidsstellingen*; in de logica als *maximaliteitsprincipes*. Steeds opnieuw blijkt dat zodra een structuur 'maximaal' moet worden, keuze nodig is (Kunen, 1980).

Zonder AC ontstaat een wiskunde die 'lokaal' wel functioneert, maar globaal minder nuttig is. Veel resultaten blijven geldig voor specifieke, erg goed-gedefinieerde dingen, maar verliezen enige algemene geldigheid. De theorie wordt afhankelijk van context. Sommige vectorruimten hebben bijvoorbeeld een basis en andere niet. Het keuzeaxioma zorgt ervoor dat je uit elke verzameling vectoren stap voor stap een basis kunt kiezen, zodat je alle vectoren in de ruimte kunt vormen (Bell, 2008).

Het alternatief is technisch gezien beheersbaar, maar redelijk onbevredigend. Het keuzeaxioma zorgt hier voor een bepaalde uniformiteit. Het maakt algemene uitspraken mogelijk zonder steeds uitzonderingen te moeten stellen.



Daarmee wordt ook duidelijk waarom sommige paradoxale consequenties van de AC vaak geaccepteerd worden. De Banach-Tarski-paradox is hier een voorbeeld van. Kort gezegd stelt de Banach-Tarski paradox dat je een 3D bol kunt snijden in een eindig aantal stukjes en die vervolgens kunt herordenen tot twee identieke kopieën van de originele bol. Dit klinkt onmogelijk, maar het kan wiskundig juist dankzij het keuzeaxioma. Het is niet zozeer een teken van inconsistente wiskunde, maar het vergroot het bereik van de wiskunde, maar wel helaas voorbij onze intuïties (Bell, 2008).

In dat opzicht past de AC binnen de bredere beweging die dit hoofdstuk beschrijft. Net als bij ZF, zien we hier hetzelfde fenomeen terugkomen: hoe ver zijn we bereid te gaan om paradoxen te vermijden zonder de charmante expressiviteit van de wiskunde te verliezen? Het keuzeaxioma beantwoordt deze vraag op een specifieke manier. Het accepteert niet-constructief bestaan tegen de prijs van volledigheid.

ZFC is geen logische noodzaak, maar een compromis. Het is het punt waarop de wiskunde expliciet kiest voor abstractie boven intuïtie (Kunen, 1980).



Oefeningen 3.2: De introductie van een keuze

Opdracht 1 ★★☆☆☆

Bedenk een concreet voorbeeld van een oneindige familie waarbij geen 'natuurlijke' keuzeregel voor de hand ligt.

Opdracht 2 ★★☆☆☆

De welordeningstelling zegt: elke verzameling kan worden welgeordend.

- Leg uit wat een welordening betekent.
- Leg intuïtief uit waarom “een eerste element kunnen aanwijzen” neerkomt op een vorm van keuze.

Opdracht 3 ★★☆☆☆

De Banach–Tarski-paradox is een gevolg van AC. Geef aan in eigen woorden waarom dit resultaat paradoxaal lijkt en leg uit waarom juist dit geen tegenspraak is binnen ZFC.

Wat je moet kunnen

- Het keuzeaxioma conceptueel en formeel kunnen begrijpen.
- De implicaties van het keuzeaxioma kunnen begrijpen.



3.3 Russells oplossing: type theorie

In het begin van de 20e eeuw werkte Bertrand Russell natuurlijk mee aan de grondslagen van de logica en wiskunde. Hij wilde alles stevig logisch opbouwen, maar toen ontdekte hij een probleem dat iedereen die logisch nadenkt recht in het gezicht kijkt: zijn beroemde paradox. Dit was een flinke tegenslag voor het naïeve idee dat alle denkbare verzamelingen zomaar kunnen bestaan (Coquand, 2006).

Russell had hier zijn eigen slimme oplossing op: een hiërarchie van typen. Russell's grote idee, die hij presenteerde in de *Principia Mathematica*, was eigenlijk simpel (maar briljant): misschien ontstaat de paradox omdat we dingen van alle niveaus door elkaar gooien. Dus stelde hij voor om elke logische uitdrukking en verzameling een type te geven. Hij gooide verzamelingen niet per se de deur uit, maar besloot ze te ordenen. Hij ordende ze op een soort niveau waarop het hoort te functioneren (Coquand, 2006).

Dit is het idee in gewone taal:

- Niveau 0: individuen (zoals getallen of objecten),
- Niveau 1: verzamelingen van individuen,
- Niveau 2: verzamelingen van verzamelingen van individuen,
- enzovoort.

Volgens Russell mag iets alleen verwijzen naar dingen van een lager type, nooit naar zijn eigen type of hoger. Daardoor kan je niet langer zeggen “de verzameling van alle verzamelingen die niet zichzelf bevatten”, want dat zou een verboden sprong tussen types zijn.

Je kunt Russell's aanpak bijna vergelijken met een schoolreis: iedereen moet in de juiste bus stappen. Geen oudere leerlingen in dezelfde bus als de kleuters, want anders eindigen we in chaos. Type-theorie zorgt ervoor dat iedereen op het juiste niveau blijft, zodat we niet in tegenstrijdigheden terechtkomen.

Dus wat begon als een lastig paradoxje, eindigde in een nieuw logica-idee dat later zelfs doorsloeg naar computerwetenschap en programmeertalen (waar type systemen inmiddels heel gewoon zijn).

3.3.1 Van eenvoudig naar uitgebreid

In zijn vroege werk gaf Russell al een eenvoudige versie van de theorie van typen rond 1903. Later, toen hij samen met Alfred North Whitehead *Principia Mathematica* publiceerde (1910-1913), werkte hij een veel uitgebreidere versie uit (inclusief een ingewikkelder hiërarchie die hij de *ramified type theory* noemde). Tot nu toe klinkt Russell's oplossing bijna triviaal: stop dingen netjes in lagen, en laat ze niet met elkaar mengen. Maar zodra we proberen deze intuïtie exact te formuleren binnen de logica, blijkt dat er veel meer nodig is dan zo'n simpel lijstje met alle niveaus (Coquand, 2006).

Maar wat betekent het eigenlijk dat iets een type heeft? En hoe zorg je ervoor dat deze typen netjes in een logisch systeem passen, zonder dat alles in chaos eindigt?

Russell realiseerde zich al snel dat het probleem niet alleen in verzamelingen zat, maar diep in de logische taal zelf. De oplossing moest dus syntactisch zijn: de taal moest zo worden opgebouwd dat uitspraken die per definitie onwaar zijn, simpelweg niet meer geformuleerd konden worden (Coquand, 2006).

In zijn simpelste vorm – wat later bekend zou worden als de simple theory of types – stelde Russell een strikte hiërarchie van logische objecten voor. Het idee is eigenlijk heel simpel, maar ook briljant.

Formeel kunnen we het zo verdelen:

- Type 0: individuen
- Type 1: predicaten over individuen
- Type 2: predicaten over predicaten van individuen
- enzovoort

We kunnen deze structuur inductief opbouwen: Er bestaat een basistype 0, het type van individuen. Als A een type is, dan bestaat er ook $P(A)$, het type van predicaten over objecten van type A. Zo ontstaat er een duidelijke hiërarchie:

$$0, P(0), P(P(0)), P(P(P(0))), \dots$$

Hierbij geldt een belangrijke principe: een object van type $P(0)$ kan alleen worden toegepast op objecten van type 0, nooit op zichzelf. Een object van type $P(P(0))$ kan alleen spreken over predicaten van individuen, niet over zichzelf.... Enzovoorts. Kortom: zelf-applicatie is binnen de type theorie onmogelijk. Een uitdrukking zoals $x(x)$ is dus niet verkeerd in de zin van 'fout', maar het is gewoon geen geldige zin binnen het systeem (Coquand, 2006).

Met deze structuur van type theorie kunnen we precies zien waar Russell's paradox de mist in gaat. De paradox stelt een verzameling R waarvoor geldt: $x \in R \Leftrightarrow x \notin x$. Om zoiets te definiëren moet x tegelijkertijd een element zijn dat lid kan zijn van R en zelf een verzameling zijn waarop het predicaat ' $\in$ ' kan worden toegepast. Met andere woorden: x zou tegelijk een individu én een verzameling moeten zijn; het moet meerdere typen tegelijk hebben.

Binnen Russell's type-hiërarchie mag dat gewoon niet meer. Elk object heeft precies één type en de lidmaatschapsrelatie werkt alleen tussen objecten die verschillende niveaus hebben. De paradox verdwijnt dus niet omdat ze door een sterk systeem wordt weerlegd, maar omdat ze grammaticaal verboden is volgens de regels van dat systeem (Coquand, 2006).

Deze oplossing was charmant en krachtig, maar bracht ook een onverwachte bijwerking: de logica werd plotseling een stuk complexer. Waar men vroeger gewoon sprak over "alle verzamelingen", moest nu bij elke uitspraak expliciet worden gesproken van welk type een object was. Dit leidde tot een enorme explosie aan symboliek in Principia Mathematica – één van de redenen waarom niemand het durft te lezen. Zelfs de meest simpele uitspraken kregen lange type-notaties, omdat elke variabele zijn eigen had. Russell en Whitehead accepteerden dit ongemak zonder problemen – het rest van het volk uiteraard niet: consistentie was voor hen belangrijker dan gemak of elegantie.

Maar al snel bleek dat zelfs deze eenvoudige type-theorie nog niet voldoende was. Russell ontdekte al snel dat sommige definities problematisch blijven, zelfs wanneer zelf-lidmaatschap verboden is. Dit gebeurt bij de zogenaamde impredicatieve definities: definities waarin een object wordt gedefinieerd met behulp van een groep waartoe het zelf behoort. Een klassiek voorbeeld hiervan is: “*Het kleinste getal dat alle eigenschappen bezit die alle natuurlijke getallen bezitten.*” Zo'n definitie verwijst impliciet naar een verzameling waarvan het object zelf deel uitmaakt.

Hoewel hier geen duidelijke zelf-referentie optreedt, ontstaat er toch een cirkelredenering. Om dit te voorkomen breidde Russell zijn theorie verder uit tot wat bekend werd als de *ramified theory of types* (Coquand, 2006).

In deze uitgebreidere theorie van types krijgt elk type niet alleen een niveau, maar ook een *orde*. Informeel kunnen we zeggen dat het type bepaalt waarover iets spreekt en de orde bepaalt over welke predicaten het mag kwantificeren.

Formeler zegt men:

- Predicaten van orde 1 mogen alleen verwijzen naar individuen.
- Predicaten van orde 2 mogen spreken over predicaten van orde 1.
- Predicaten van orde 3 mogen spreken over predicaten van orde 2.
- Enzovoort.

Zo ontstaat er een *tweedimensionale hiërarchie*: **type**×**orde**.

Een predicaat van orde n mag nooit kwantificeren over predicaten van orde groter of gelijk aan n . Hierdoor worden ook onzichtbare vormen van zelf-referentie uitgesloten (Coquand, 2006).

Deze ramified structuur was logisch gezien extreem veilig, maar praktisch vrijwel onbruikbaar. Veel standaard wiskunde bleek onmogelijk zonder ontzettend hoge orden. Om dit probleem te omzeilen introduceerde Russell het *axioma van reducibiliteit*. Dit axioma stelt dat voor elk predicaat van hogere orde een equivalent predicaat van orde 1 bestaat:

$$\forall P(n,k) \exists Q(n,1) \forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x))$$

Dit klinkt nog iets te abstract. Dit axioma zegt in gewone taal dat elke eigenschap die je met een predicaat van hogere orde beschrijft, ook beschreven kan worden met een gewoon predicaat van eerste orde. Met andere woorden: hoe abstract of complex een eigenschap ook is, er bestaat altijd een eenvoudiger predicaat dat voor elk object precies dezelfde waarheid oplevert. Stel dat $P(x)$ betekent: “ x behoort tot alle verzamelingen die alle even getallen bevatten” (dit is een hogere-orde beschrijving). Dan bestaat er een eerste-orde predicaat $Q(x)$, namelijk: “ x is even”, zodat voor elk getal x geldt: $P(x) \leftrightarrow Q(x)$ (Coquand, 2006).

3.3.2 De geboorte van programmeertalen

Hoewel Russell met zijn hiërarchie een elegante oplossing had, bleef er nog steeds één probleem bestaan: zoals elke wiskundige jou zal vertellen, was Principia Mathematica niet normaal zwaar en onpraktisch.

Bewijzen werden honderden pagina's lang, en logisch redeneren werd eerder een oefening in jouw uithoudingsvermogen dan een nuttig hulpmiddel. Dit leidde tot een nieuwe vraag: kunnen we redeneren niet eenvoudiger beschrijven, los van verzamelingen (Urquhart, 2003)?

Een antwoord daarop kwam van Alonzo Church. In plaats van objecten en verzamelingen centraal te stellen, stelde Church dat *functies* het meest fundamentele wiskundig begrip zijn. Alles, van getallen tot ingewikkelde proposities, kan worden gereduceert tot een functie of toepassingen van een functie op argumenten. Zo ontstond de *lambda-calculus*. (Korbmacher, 2012).

De syntax van de lambda-calculus is verrassend eenvoudig en misschien enigszins bekend:

1. Variabelen: $x, y, z, \dots$

2. Applicatie: $(f\ x)$, de functie f toegepast op argument x .

3. Abstractie: $\lambda x.t$, de functie die elke invoer x afbeeldt op het resultaat t .

t is hier een term binnen de lambda-calculus die het resultaat van de functie beschrijft waarin x kan voorkomen. Het hart van het systeem is de beta-reductie; of simpelweg het herschrijven van termen:

$$(\lambda x.t)\ a \rightarrow t[x:=a]$$

Bijvoorbeeld:

$$(\lambda x.x+1)\ 4 \rightarrow 5$$

Rekenen wordt hiermee niets meer dan symbolisch objecten herschrijven. Er zijn geen axioma's over getallen of verzamelingen, alleen regels over de manipulatie van symbolen (Korbmacher, 2012).

Church liet zien dat deze minimale constructies net zo expressief konden zijn als elke andere formele theorie: elk berekenbaar proces kan namelijk in een lambda-term worden uitgedrukt. Dit staat nu bekend als *Church's Thesis*. Maar in dit ongetypeerde systeem doken nieuwe problemen op. Zelf-applicatie werd namelijk wel toegestaan. Neem bijvoorbeeld:

$$\Omega = (\lambda x.x\ x)$$



Ontmoet Alonzo Church

Alonzo Church (1903–1995) was een briljante Amerikaanse wiskundige en logicus die een enorme invloed had op de moderne computerwetenschap. Hij ontwikkelde het lambda-calculus, wat later de basis werd voor bijna alle programmeertalen. Church hielp ook Alan Turing, die dankzij hem de ideeën achter de eerste computers en kunstmatige intelligentie verder kon ontwikkelen. Ondanks zijn enorme intellect leefde Church een rustig en bescheiden leven, en gaf hij les aan generaties studenten terwijl hij bleef nadenken over abstracte wiskunde. Vandaag de dag zijn zijn ideeën overal terug te vinden, van de apps op je telefoon tot de computers die de wereld aandrijven, en laten zien hoe een rustige denker het digitale tijdperk mee vormgaf.

Deze term reduceert eindeloos:

$$\Omega \rightarrow \Omega \rightarrow \Omega \rightarrow \dots \text{etc.}$$

Dit is een duidelijke echo van Russell's paradox (Korbmacher, 2012).

De oplossing was opnieuw weer typen. In de getypeerde lambda-calculus krijgt elke term een type $x:A$, en functies een functietype $f:A \rightarrow B$. Applicatie is alleen toegestaan als de types overeenkomen. Hierdoor wordt zelf-applicatie opnieuw onmogelijk, net zoals bij Russell: paradoxen worden niet ontkend, maar grammaticaal uitgesloten (Korbmacher, 2012).

De getypeerde lambda-calculus vormt zo een voortzetting van Russell's idee. Waar hij werkte met verzamelingen van steeds hogere orde, werkt Church met functies tussen types. De formele restricties vervangen de ingewikkelde ramified hiërarchie van Russell, en de kern blijft hetzelfde: niet alles wat we kunnen bedenken mag ook formeel bestaan (Urquhart, 2003).

Later kwam de Curry-Howard-correspondentie. Dit was nog krachtiger: proposities worden types, bewijzen worden programma's, en evaluatie van programma's wordt bewijsvoering. Logica en berekening zijn zo één geworden. Een implicatie $A \rightarrow B$ is letterlijk een functie die bewijzen van A omzet in bewijzen van B. Zo vormen Russell, Church en Curry-Howard een lijn: van paradoxpreventie via een hiërarchie van typen tot de basis van de computationele wiskunde.

Deze ontwikkelingen leidden tot de moderne type theorieën, zoals *polymorfe types*, *dependent types* en *homotopy type theory*. Het principe blijft steeds onveranderd: een bepaalde structuur in taal voorkomt logische fouten. Waar verzamelingenleer de paradoxen slacht door middel van axioma's, roeit type theorie ze uit via grammatica (Korbmacher, 2012).

Wie ooit dus een programmeertaal heeft gebruikt, heeft al met typetheorie gewerkt, vaak zonder het te beseffen. Type theorie vormt het formele fundament van vrijwel alle moderne programmeertalen, van eenvoudige functionele talen tot zelfs geavanceerde bewijssystemen (Coquand, 2006).

Wat Russell introduceerde als een noodzakelijke maatregel tegen paradoxen, blijkt achteraf een blauwdruk te zijn geweest voor computationale berekeningen. Typen bepalen niet wat waar is, maar wat überhaupt gezegd mag worden.

Dit principe krijgt zijn scherpste vorm in de lambda-calculus. Church liet zien dat berekening kan worden teruggebracht tot drie syntactische bouwstenen: variabelen, abstractie en applicatie.

Op dit punt valt de vage scheiding tussen logica en programmeren weg. Via de Curry-Howard-correspondentie wordt duidelijk dat deze twee in feite hetzelfde doen, maar in een andere taal. Een type is een propositie, een programma is een bewijs. Een functie van type $A \rightarrow B$ is een bewijs van implicatie $A \Rightarrow B$. Een fout programma is geen slechte uitvoering, maar een onmogelijke redenering.

Achteraf gezien was Russells typetheorie dus geen doodlopende weg, maar een vroege ontdekking van iets fundamenteels: betekenis ontstaat niet uit vrijheid, maar uit de structuur en syntax.

Dat idee vormt vandaag de kern van de formele logica, computationele wiskunde en praktisch elk serieus softwaresysteem. Zo heeft één oplossing tot het fundament van de werking van de hedendaagse computers kunnen leiden.

Oefeningen 3.3: Russells oplossing: type theorie

Wat je moet kunnen

- Type theorie kunnen begrijpen.
- Het herkennen van de verschillende vormen van type theorie.
- Het effect begrijpen van type theorie.

Opdracht 1 ★★★★★

Gegeven de volgende objecten:

- een getal 3
- de verzameling $\{1,2,3\}$
- het predicaat “is een natuurlijk getal”
- het predicaat “is een predicaat over natuurlijke getallen”

Wijs voor elk object het type aan in Russell's *simple theory of types*.

Opdracht 2 ★★★★★

Gegeven is de term: $\Omega = (\lambda x. x x)$

- a) Leg uit waarom deze term oneindig reduceert.
- b) Waarom is dit vergelijkbaar met Russell's paradox?

Opdracht 3 ★★★★★

Het axioma van reducibiliteit zegt dat elk hoger-orde predicaat equivalent is aan een predicaat van orde 1.

Waarom wordt dit axioma vaak als ad hoc gezien?

3.4 Een taalkundige aanpak

Russells paradox is voor velen niet slechts een wiskundig probleem. Het probleem lijkt minder te liggen bij wiskundige objecten dan bij de manier waarop we over die objecten spreken. De paradox ontstaat niet door een ingewikkelde constructie of een vage definitie, maar door een veel te eenvoudige beschrijving. De zin “de verzameling van alle verzamelingen die zichzelf niet bevatten” voldoet aan alle eisen van de grammatica, en toch blijkt juist deze beschrijving voldoende om een volledig logisch systeem te vernietigen.

Dat is precies wat Russells paradox zo verwarrend maakt: het gebruikt gewone manieren van denken die normaal prima werken, maar als je ze strikt wiskundig toepast, ontstaan er tegenstrijdigheden. Het laat zien dat natuurlijke taal en formele logica niet altijd goed samengaan. Wat in het dagelijks leven onschuldig lijkt te zijn, kan in de wiskunde grote problemen veroorzaken (Hazen, 1995).

Een taalkundige manier om naar Russells paradox te kijken en op te lossen gaat niet over welke verzamelingen er bestaan, maar over welke omschrijvingen je mag gebruiken. Het gaat dus meer om taal dan om objecten. Terwijl andere oplossingen proberen het universum van verzamelingen te veranderen, kijkt de taalkundige aanpak naar welke omschrijvingen of eigenschappen wel of niet mogen.

In natuurlijke taal is predicatie (iets zeggen over iets, zoals een eigenschap toekennen aan een object) heel flexibel. We kunnen eigenschappen bedenken zonder precies vast te leggen op welke objecten ze van toepassing zijn. Juist deze flexibiliteit kan voor problemen zorgen. Taal laat predicaten soms impliciet verwijzen naar alle objecten waarop het van toepassing zijn. In Russells paradox wordt een eigenschap gedefinieerd die verwijst naar alle verzamelingen, inclusief de verzameling die zelf door die eigenschap wordt beschreven. Zo'n definitie heet impredicatief, omdat het een totaal gebruikt waar het eigen object ook onderdeel van is. Impredicativiteit vormt een structureel probleem voor formele systemen: het introduceert een vorm van circulariteit die niet altijd zichtbaar is op het niveau van de syntax, maar wel logisch dodelijk kan zijn (Gupta, 1982).

Vanuit taalkundig perspectief kan Russells paradox daarom worden opgevat als een mislukte definitie. Het is niet fout qua grammatica, maar het begrijpt de regels voor betekenis niet goed genoeg. De eigenschap “zichzelf niet bevatten” kun je niet zomaar op elk object toepassen, omdat je eerst moet weten over alle objecten. Het probleem zit niet in de eigenschap zelf, maar in dat je die eigenschap gebruikt om iets te definiëren dat ook bij de dingen hoort waarop de eigenschap van toepassing is (Hazen, 1995).

Deze observatie leidt tot een belangrijke herwaardering van het begrip van een definitie. In de taalkundige aanpak wordt een definitie niet langer gezien als een losse beschrijving, maar als een constructie met strikte voorwaarden.

Niet elke zin die lijkt te verwijzen naar een object, slaagt er ook in dat object op juiste manier te introduceren. Sommige beschrijvingen zijn niet specifiek genoeg, te circulair of te context-afhankelijk.

Zelfreferentie hoeft ook niet altijd expliciet te zijn om problematisch te worden. Ook indirecte zelfverwijzing kan paradoxen veroorzaken: dat is wanneer een eigenschap of definitie stillertjes naar zichzelf verwijst door te veronderstellen dat het over alle dingen van een bepaald type gaat, inclusief zichzelf. Russells paradox laat dit zien: de definitie zegt niet letterlijk "ik", maar omdat het predicaat alle verzamelingen betreft, raakt het onvermijdelijk zichzelf en ontstaat een tegenstrijdigheid.

Volgens de taalkundige aanpak is het probleem niet dat je probeert te beantwoorden of de Russell-verzameling zichzelf bevat, maar dat je die vraag eigenlijk niet zou moeten stellen. De definitie klopt gewoon niet, en daardoor kun je er geen waarheid aan toekennen. Niet elke zin die logisch lijkt verdient dus ook een plek in een formeel systeem. Deze aanpak doet geen willekeurige beperkingen, maar volgt uit hoe eigenschappen en hun toepassingen werken. Predicaten die alleen op bepaalde gebieden werken gedragen zich anders dan predicaten die naar alle objecten verwijzen. Paradoxen ontstaan daarom wanneer je die twee soorten predicaten door elkaar gebruikt (Dummet, 1973).

In die zin functioneert Russells paradox als een diagnostisch instrument. Zij onthult waar taal haar eigen grenzen overschrijdt. De paradox laat zien dat expressieve kracht een prijs heeft, en dat formele systemen die te veel toelaten, hun eigen consistentie ondermijnen. Het beperken van expressiviteit is niet altijd een zwakte, maar juist vaak een noodzakelijk voorwaarde voor logische coherentie (Dummet, 1973).

De taalkundige aanpak sluit hiermee aan bij een bredere filosofische beweging, de analytische beweging, die taal niet ziet als een hulpmiddel, maar als een systeem met zijn eigen regels en grenzen. In plaats van de paradox te zien als een fout die gefixt moet worden, nodigt het taalkundige perspectief ons uit het te in te lezen als een waarschuwing. Zij toont wat er gebeurt wanneer onze beschrijvende vrijheid wordt verward met vrijheid van de formele grenzen. Niet alles wat gezegd kan worden, kan ook als een echte definitie functioneren.

Alle pogingen pakken hetzelfde probleem aan: de spanning tussen taal en logica. Hetgeen wat expressief is tegen hetgeen wat reductief en deductief is.

Oefeningen 3.4: Een taalkundige aanpak

Wat je moet kunnen

- Je begrijpt hoe beperkingen zetten op predicatie Russells paradox oplost

Opdracht 1 ★☆☆☆☆

Geef een niet-wiskundig voorbeeld van een grammaticaal correcte zin die toch geen goed gedefinieerd object introduceert.

Opdracht 2 ★★☆☆☆

Geef aan of de volgende definities impredicatief zijn:

- a) "Het kleinste natuurlijke getal dat alle eigenschappen bezit die alle natuurlijke getallen bezitten."
- b) "De verzameling van alle verzamelingen wiens kardinaliteit groter is dan één."
- c) "De functie die alle functies afbeeldt op hun eigen domein."
- d) "Het bewijs dat alle bewijzen correct zijn."

Opdracht 3 ★★☆☆☆

Vergelijk de drie strategieën om paradoxen te vermijden:

- ZFC (axioma's)
- Russell (typen)
- De taalkundige aanpak

Welke vind jij het sterkst en waarom?

3.5 Nieuwe systemen met nieuwe problemen

De titel van deze paragraaf is enigszins misleidend. Zoals we zagen had elk systeem zijn functie en elk heeft ook zijn beperkingen. Een wiskundig systeem 'faalt' slechts dan wanneer het niet langer benut kan worden. Elk formeel systeem dat krachtig genoeg is om wiskunde te beschrijven, faalt op een of ander fundamentele manier. Niet door een fout, maar door zijn eigen structuur. In deze paragraaf stappen we net buiten het sterk afgebakende speelveld van de logica en wiskunde. We vragen ons hier af wat er gebeurt zodra de logica niet in staat is ons te helpen.

Een van de belangrijkste problemen waar wiskundige systemen tegen aanlopen is interne consistentie en onvolledigheid. Dit hebben we al eerder besproken als resultaat van Gödels onvolledigheidsstellingen. Bijvoorbeeld, zelfs als een systeem feitelijk consistent is, kan het dit niet vanuit zichzelf aantonen zonder dat dit leidt tot een cirkelredenering of een quasi-paradox.

Maar doordat we dit al grondig besproken hebben wil ik eerder focussen op de beperkingen van deze systemen: niet veroorzaakt door één of ander theorema, maar door wat de aard van de wiskunde zelf. Ik wil hierbij onze aandacht richten op de formuleerbaarheid, modellen en afhankelijkheid binnen de wiskunde.

3.5.1 Waarover men niet formuleren kan, moet men zwijgen

Wat een wiskundig systeem niet kan uitdrukken, kan het ook niet bewijzen. Zodra we proberen te begrijpen waar wiskundige systemen hun grenzen bereiken, komen we vrijwel meteen uit bij een vraag die nogal eenvoudig klinkt: wat kunnen we eigenlijk zeggen binnen een systeem? Of wat is er überhaupt uitdrukbaar? Veel beperkingen van de wiskunde ontstaan namelijk niet doordat uitspraken onwaar zijn, maar doordat ze simpelweg niet goed geformuleerd kunnen worden binnen het gekozen formele kader.

Een formeel systeem bestaat uit een vaste taal: symbolen, regels en syntactische beperkingen die bepalen welke zinnen toegestaan zijn en welke niet. Ze hebben je vaak genoeg achtervolgd. Die taal is eigenlijk geen volledig neutraal medium. Zij bepaalt van tevoren wat er gezegd mag worden en wie er niet eens in aanmerking komt als kandidaat voor waarheid. Dit is een fundamenteel kenmerk van formalisering zelf (Weir, 2011).

Een eerste-orde theorie zoals ZFC kan bijvoorbeeld fantastisch spreken over verzamelingen en lidmaatschap, maar zij kan niet vrijuit spreken over alle eigenschappen van verzamelingen. Alleen eigenschappen die in de taal van de theorie formuleerbaar zijn, doen mee. Dat betekent dat er altijd objecten, relaties of intuïties bestaan die buiten beeld blijven, niet omdat ze zo mysterieus zijn, maar omdat de taal ze niet kan incorporeren.

Dit is precies waarom Gödelnummering (zie verdieping over Gödels onvolledigheidsstellingen in deel 2) zo'n schrikbarend effect had: het liet zien dat het systeem, ondanks zijn beperkingen, toch in staat is om over zichzelf te spreken. De ironie is echter dat dit soort zelfbewustzijn tegelijk ook de bron werd van onvolledigheid. Zodra een systeem genoeg kan zeggen om rekenkunde te beschrijven, kan het ook genoeg zeggen om zijn eigen grenzen tegen te komen (Weir, 2011).

Maar uitdrukbaarheid of formuleerbaarheid gaat verder dan zelfreferentie. Veel fundamentele problemen in de wiskunde ontstaan niet doordat we verkeerde axioma's kiezen, maar doordat onze formele talen te losjes of juist te fijn zijn. In sommige gevallen zijn ze te zwak: ze laten cruciale structuren weg. In andere gevallen zijn ze te sterk: ze dwingen een precisie af die onze intuïties nooit hebben gehad en ons ontzettend beperken.

Dit is goed te zien in discussies over mogelijke werelden binnen de wiskunde. In de metafysica (de studie over wat de wereld echt is) wordt vaak gesproken over *possible worlds* als manieren waarop de werkelijkheid had kunnen zijn. In de wiskunde gebeurt iets soortgelijks, maar dan formeler natuurlijk. Een theorie beschrijft geen unieke wereld, maar een verzameling mogelijke realisaties of 'tot leven gebrachten'; modellen, die voldoen allemaal aan dezelfde axioma's. Wat uitdrukbaar is binnen een theorie, bepaalt welke verschillen tussen die werelden zichtbaar zijn. Als een uitspraak niet uitdrukbaar is, dan is zij niet eens fout of onbewijsbaar, zij bestaat simpelweg gewoon niet binnen het systeem. En geen uitbreiding van axioma's kan het volledig oplossen, zolang de onderliggende taal beperkt blijft (Menzel, 2013).

Het *formalisme* omarmt deze conclusie met liefde – grotendeels. Vanuit een formalistisch perspectief is wiskunde niets meer dan het manipuleren van symbolen volgens de vaste regels. Vragen naar “betekenis” of “ware inhoud” komen daarna pas aanbod – als überhaupt. Wat telt, is wat formeel toegestaan is. Maar juist dit irriteert tot op de dag van vandaag nog veel wiskundigen en filosofen. Want de ervaring van wiskundige ontdekking voelt niet alsof men simpelweg symbolen verschuift; het voelt alsof men iets ziet wat er al was, en daarmee iets ziet over de werkelijkheid. Die spanning tussen het uitdrukbare en het betekenisvolle vormt één van de diepste bronnen van beperking in de wiskunde. Niet alles wat betekenisvol is, is formaliseerbaar. En niet alles wat formaliseerbaar is, voelt betekenisvol. Dat is geen bug in het systeem; dat is het systeem (Weir, 2011).

3.5.2 De wiskundige multiverse

Waar uitdrukbaarheid bepaalt *wat* we kunnen zeggen, bepalen modellen *waar* het gezegd kan worden. *Modeltheorie* dwingt ons om afscheid te nemen van het aantrekkelijk idee en enigszins intuïtief idee dat een wiskundige theorie één vaste werkelijkheid beschrijft. In plaats daarvan beschrijft het een hele groep van mogelijke universa – modellen – waarin dezelfde axioma's gelden, maar waarin de concrete inhoud kan en gerust mag verschillen (Hodges, 2001).

Formeel gezegd is een model een *structuur* waarin de axioma's van een theorie waar zijn. Maar filosofisch gezien is een model iets veel radicalers – en iets nog veel leukers. Het is een alternatieve manier waarop de wiskundige wereld eruit zou kunnen zien, zonder de regels te overtreden. Dat betekent dat waarheid in de wiskunde altijd relatief is aan een model, tenzij een uitspraak in alle modellen waar is (Hodges, 2001).

Hier komt nog een beperking aan bod: **bewijsbaarheid vereist model-onafhankelijkheid**. Een uitspraak is alleen bewijsbaar als zij in elk mogelijk model van een bepaalde theorie geldt. Zodra er twee modellen bestaan die het oneens zijn, valt de uitspraak buiten het bereik van bewijs. Zij is dan niet fout, maar onbepaald (Hodges, 2001).

De continuümhypothese is hier het bekendste voorbeeld van, maar zeker niet het enige. Afhankelijk van het gekozen model van ZFC (constructibel zoals L, of uitgebreid via forcing) krijgen we verschillende antwoorden. Elk van die antwoorden is intern consistent. Geen ervan is 'illegaal'. Dit heeft belangrijke filosofische gevolgen. Het wiskundige *platonisme* beweert dat er één objectieve wiskundige werkelijkheid bestaat, onafhankelijk van onze theorieën. Vanuit dat perspectief moet CH een vaste waarheid hebben, ook al kunnen wij die niet bewijzen. Modeltheorie ondermijnt dit idee ook subtiel: het laat zien dat onze beste formele beschrijvingen niet vragen om unieke wereld van ons (Linnebo, 2009).

Formalisme daarentegen heeft iets minder moeite met modeltheorie. Als wiskunde een spel is met regels, dan zijn verschillende modellen gewoon verschillende spellen die volgens dezelfde regels gespeeld worden. De vraag "Welk model is het echte?" verliest dan betekenis. Wat telt, is de consistentie en bruikbaarheid ervan (Horsten, 2007).

Toch voelt deze conclusie voor velen, waaronder mij, onbevredigend. Het idee dat er meerdere, onderling incongruente wiskundige universa bestaan die allemaal even geldig zijn, schuurt nogal met onze intuïtie dat wiskundige waarheden objectief en absoluut zijn. Maar die noodzakelijkheid geldt alleen binnen een gekozen kader. Modellen laten zien dat de wiskunde niet faalt doordat zij te zwak is, maar doordat zij te eerlijk is. Zij weigert meer vast te leggen dan haar axioma's rechtvaardigen. En precies daarom kunnen sommige vragen niet worden opgelost. Niet omdat het antwoord er niet is, maar omdat het systeem ruimte laat voor meerdere antwoorden. Als we dus zeggen dat een formeel systeem 'faalt', bedoelen we niet dat het kapot is en niet meer werkt. We bedoelen dat het zijn grenzen laat zien en dat het niet alles kan oplossen. En misschien is dat juist wel het meest betrouwbare wat wij van een systeem kunnen vragen.

3.5.3 Een beperking uitgewerkt

De continuümhypothese, oftewel de CH, hebben we kort al eerder opgenoemd in deel 2. Het is hier echter een essentieel concept om als voorbeeld te gebruiken (en later dieper in te duiken) wegens haar effect op wat de verzamelingenleer überhaupt is en wat we er echt mee kunnen. Het kan formeel worden uitgedrukt als de uitspraak dat er geen kardinaliteit κ bestaat waarvoor geldt

$$\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$$

Dit is equivalent aan de stelling dat elke oneindige deelverzameling van $\mathbb{R}$ aftelbaar is, of dezelfde kardinaliteit heeft als $\mathbb{R}$ zelf. Hier is kappa een mogelijke oneindige verzameling. De vraag is dus bestaat er een verzameling waarvan de kardinaliteit strikt groter is dan die van $\mathbb{N}$, maar kleiner dan de kardinaliteit van $\mathbb{R}$ (Koellner, 2013).



Plato

Legendarische filosoof

We laten de continuümhypothese los op ZFC. En het gave is dat het systeem niet één universum is, maar eerder, zoals we al eerder besproken, een multi-verse. Als T een theorie is, dan hebben we het niet over één vast universum, maar een hele verzameling aan mogelijke universa die allemaal aan dezelfde regels voldoen. Die verzameling noemen we **Mod(T)**: alle modellen waarin T waar is. Een uitspraak ϕ krijgt pas het predicaat “bewijsbaar” ($T \vdash \phi$) als zij zich in elk van die universa hetzelfde ‘gedraagt’. Oftewel, voor elk model $M \in \text{Mod}(T)$ moet gelden dat $M \models \phi$. Eén enkel model, wiens resultaten niet overeenkomen met de rest is al genoeg om ϕ onbewijsbaar te maken. Bewijsbaarheid is dus geen kwestie van goede argumenten, maar een soort unanimititeit tussen universa (Hodges, 2001; Koellner, 2013).

Deze definitie wordt vaak achteloos geaccepteerd, maar zij bevat een achterliggende keuze. Een theorie beschrijft geen object, maar een groep van mogelijke structuren. Zij beschrijft niet hoe de wereld is, maar hoe een wereld eruit moet zien om aan deze regels te voldoen. Dat onderscheid wordt pas ongemakkelijk wanneer universa het oneens blijken te zijn. Dat is precies wat er bij CH gebeurt.

Verdieping 3.5: De Continuümhypothese

Aan het begin van de twintigste eeuw leek de verzamelingenleer dus eindelijk sterk genoeg om de fundamenteën van de wiskunde te kunnen dragen. Cantors theorie had ons, net zoals Hilbert zei, een rijk universum gegeven van oneindigheden, kardinaliteiten en transfinitie verzamelingen. Toch bleef de hardnekkig Continuümhypothese. Het stelde natuurlijk de vraag: hoe groot is het continuüm?

Formeel gaat deze vraag terug op het onderscheid tussen verschillende oneindigheden. Cantor toonde aan dat de verzameling van natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ aftelbaar oneindig is, terwijl de verzameling van reële getallen $\mathbb{R}$ een strikt grotere kardinaliteit heeft. De kardinaliteit van $\mathbb{N}$ wordt aangeduid met $\aleph_0$, terwijl die van $\mathbb{R}$ gelijk is aan $2^{\aleph_0}$.

De continuümhypothese (CH) stelt zoals we zagen (iets formeler) het volgende:

$$\neg \exists \kappa (\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0})$$

In woorden: er bestaat geen kardinaal getal dat strikt tussen de kardinaliteit van de natuurlijke getallen en die van de reële getallen ligt. Het continuüm is dus de eerstvolgende oneindigheid na de kardinaliteit $\aleph_0$. Deze hypothese lijkt op het eerste gezicht een veel te technische uitspraak over kardinaliteiten, maar zij raakt de kern van Cantors grote project aan: het classificeren van verschillende types oneindigheid. Als CH waar is, dan is de hiërarchie van oneindigheden juist heel strak en ordelijk. Als CH onwaar is daarentegen, dan bestaat er een hele soort 'tussenwereld' van oneindigheden die niet direct zichtbaar zijn voor ons (Koellner, 2013). Er bestaat een onzichtbare werkelijkheid!

Cantor zelf was ontzettend overtuigd van de waarheid van CH. Niet omdat hij eigenlijk een bewijs had, maar omdat hij het conceptueel goed vond passen bij zijn visie op de aard van het oneindige. Dat maakte het continuümprobleem een mooie kandidaat voor Hilberts beroemde lijst van open problemen. Het werd niet zonder reden in 1900 gepresenteerd als het eerste probleem – de vraag waar alles mee zou beginnen.

Gödel was één van de eerste – en meest succesvolle – die de CH wilde aanpakken. Gödel's aanpak van het continuümprobleem was op het eerste gezicht nogal indirect. In plaats van te proberen CH rechtstreeks te bewijzen vanuit ZF of ZFC, koos hij voor een slimme omweg: hij creëerde een specifiek universum van verzamelingen waarin CH geldig is. Daarmee liet hij zien dat CH tot geen tegenspraak leidt, zolang de onderliggende axioma's dat zelf ook niet doen (Koellner, 2013).

Het centrale doel binnen deze strategie is het *constructible universe*, aangeduid met L . Dit universum is geen alternatief systeem van axioma's, maar het is daarentegen een *intern model* van ZF (en ook zelfs ZFC).

Anders verwoord: L is een geconstrueerde verzamelingenwereld van Gödel die volledig voldoet aan dezelfde axioma's zoals het standaard universum V binnen $ZF(C)$, maar waarin de 'legale' verzamelingen duidelijk beperkt worden. De filosofische motivatie achter het universum L is helder: paradoxen en onafhankelijkheidsproblemen ontstaan vaak doordat het verzamelingen-universum 'te groot' is volgens Gödel. Gödel's idee was om alleen die verzamelingen toe te laten die op een hele gecontroleerde manier kunnen worden opgebouwd. Het was niet willekeurig, maar stap voor stap, via definieerbaarheid.

Formeel wordt L geconstrueerd via een *transfiniete hiërarchie*, vrijwel een analogie op de cumulatieve hiërarchie van V , maar met een belangrijk verschil. Waar in V bij elke stap de machtsverzameling binnen het opstellen van transfiniete verzamelingen wordt genomen, gebeurt in L iets veel restrictievers:

- $L_0 = \emptyset$
- $L_{\alpha+1} = \text{Def}(L_\alpha)$
- $L_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} L_\alpha$ voor limietordinalen λ

Een limiet-ordinaal (zoals ω_1) is hier een ordinaal zonder directe voorganger en L_α geeft een bepaald niveau of rang aan binnen het universum L . Hier staat $\text{Def}(L_\alpha)$ voor de verzameling van alle deelverzamelingen van L_α die volgens de eerste-orde logica definieerbaar zijn binnen de grenzen van L_α . *Definieerbaarheid* speelt dus duidelijk een centrale rol: een verzameling bestaat in L alleen als het expliciet kan worden beschreven binnen de taal van de verzamelingenleer. Dit is definieerbaarheid (Koellner, 2013).

Het volledige constructible universum is dan:

$$L = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} L_\alpha$$

verzameling van alle ordinalen die in L_α (het α -de niveau van Gödel's constructibele universum) voorkomen, en dat is gewoon α zelf. Gödel bewees drie fundamentele resultaten over dit universum:

- $L \models ZF$
- $L \models AC$
- $L \models CH$

Het tweede punt is opvallend. Hoewel het axioma van keuze onafhankelijk is van ZF , geldt het automatisch wel in L . Dit is geen toeval, want definieerbaarheid impliceert juist een vorm van keuze. In L kunnen verzamelingen worden welgeordend, omdat hun constructie heel erg intrinsiek geordend is (Koellner, 2013).

Het derde punt, $L \models CH$, is het eigenlijke doel van Gödel's constructie. Omdat L zo zuinig is in het toelaten van verzamelingen, blijkt dat er gewoon geen ruimte is voor een aantal tussenliggende kardinaliteiten tussen $\aleph_0$ en $2^{\aleph_0}$. Elke reële verzameling in L verschijnt relatief vroeg in de hiërarchie, waardoor het continuüm precies $\aleph_1$ groot wordt. Belangrijk is dat Gödel hiermee geen bewijs van CH levert in absolute zin. Hij laat slechts zien dat CH geldt in een specifiek, streng gereguleerd universum, in een bepaald model dus. Filosofisch roept dit onmiddellijk een aantal leuke vragen op: is L het "juiste" universum van verzamelingen (Koellner, 2013)?

Veel deskundigen in dit gebied beantwoorden die laatste vraag met bevestiging. Het universum L sluit grote groepen van verzamelingen uit die men intuïtief wel zou willen toelaten, zoals niet-definieerbare deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. In die zin wordt L vaak gezien als te smal om het volledige concept van verzameling te representeren. Toch is Gödel's resultaat nog steeds fundamenteel, want het toont aan dat CH niet kan worden weerlegd op basis van de standaardaxioma's. Het continuümprobleem heeft daarmee directe oplossing verloren. Wie CH wil ontkachten, zal het verzamelingenuniversum expliciet ruimer moeten nemen (Koellner, 2013).

Waar Gödel liet zien dat CH kan gelden, liet Paul Cohen zien dat zij ook kan falen. In 1963 introduceerde hij een techniek die inmiddels bij de kern van de verzamelingenleer hoort: *forcing*. Met deze methode bewees hij dat de ontkenning van CH ook consistent is met ZFC, zolang ZFC ook zelf consistent is (Koellner, 2013).

Het verschil met Gödel's aanpak is redelijk groot. Gödel beperkte het universum; Cohen breidde het uit. In plaats van een speciaal subuniversum te construeren, begint forcing met een bestaand model $M \models ZFC$ en voegt daar systematisch nieuwe verzamelingen aan toe.

De kern van forcing bestaat uit drie ingrediënten:

1. een partieel geordende verzameling P (de forcing-notie),
2. voorwaarden $p \in P$ die partiële informatie representeren,
3. een *generieke filter* $G \subseteq P$.

Een partieel geordende verzameling P (de forcing-notie) is een verzameling van voorwaarden met een orde die aangeeft wanneer de ene voorwaarde sterker/informatie-rijker is dan de andere. Een generieke filter G kiest steeds consistent oneindig veel van deze benaderingen tegelijk, zonder ooit zelf volledig definieerbaar te zijn binnen het oorspronkelijke model.

Formeel wordt het uitgebreide model aangeduid als:

$$M[G]$$

waarbij geldt:

$$M \subseteq M[G] \text{ en } M[G] \models ZFC$$

Cohen toonde aan dat men P zo kan kiezen dat in $M[G]$ nieuwe reële getallen bestaan, genoeg om de kardinaliteit van het continuüm te vergroten, zonder $\aleph_0$ of $\aleph_1$ te veranderen. Het resultaat is een model waarin: $\neg CH$ geldt. Wat forcing revolutionair maakte, is dat het laat zien hoe flexibel het verzamelingenuniversum kan zijn. Niet alleen kan CH falen, maar de waarde van $2^{\aleph_0}$ kan in feite worden gestuurd, binnen hele brede grenzen. Door verschillende forcing-noties te kiezen, kan men modellen construeren waarin:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_2, \aleph_3, \dots$$

Of zelfs veel grotere kardinaliteiten (Koellner, 2013).

Belangrijk is dat forcing geen willekeurige uitbreiding is. Het bewaart gewoon alle axioma's van ZFC. De nieuwe verzamelingen worden toegevoegd zonder dat paradoxen ontstaan of bestaande structuren instorten. Dit maakt forcing tot een uiterst gecontroleerde, maar krachtige methode.

Filosofisch is de impact ook enorm groot. Cohen's resultaat toont aan dat CH niet slechts onbewijsbaar, maar onderbepaald is door ZFC. De waarheid van CH blijkt afhankelijk van het gekozen model. Daarmee verandert de aard van de vraag: "Is CH waar?" wordt vervangen met "In welk universum werken we?" (Koellner, 2013).

Gödel laat zien dat CH past binnen een erg minimalistisch universum van definieerbare verzamelingen. Cohen laat zien dat CH faalt zodra het universum rijker wordt gemaakt. Samen tonen zij dat ZFC het continuümprobleem volledig open moet laten.

In die zin is forcing niet slechts een technisch trucje, maar een definitieve bevestiging van Gödel's eerder besproken boodschap: formele wiskundige systemen zijn krachtig, maar niet almachtig. Zij bepalen niet één unieke wiskundige werkelijkheid, maar ze openen letterlijk universa aan mogelijke werkelijkheden. Elke consistent, maar onderling tegenstellend. Samen laten Gödel en Cohen zien dat ZFC onvolledig is met betrekking tot de vragen over het oneindige. Niet door een gebrek aan strakke techniek, maar door haar eigen structuur zelf.

Net als bij het axioma van keuze blijkt hier dat axioma's geen neutrale beschrijvingen zijn van een vast universum, maar kaders waarin meerdere, onderling onverbonden werelden mogelijk zijn. De vraag "is CH waar?" blijkt geen interne wiskundige of logische vraag meer te zijn, maar een vraag over welk verzamelingenuniversum wij wel of niet accepteren en welk voorkeur wij hebben (Koellner, 2013).

In dat opzicht vormt de continuümhypothese een vrijwel perfecte spiegel van Gödel's onvolledigheidsstellingen. Waar Gödel aantoonde dat er ware maar onbewijsbare uitspraken bestaan, laten CH en forcing zien dat er uitspraken zijn waarvan waarheid zelf modelafhankelijk is. Dit maakt CH niet minder belangrijk, maar daarom juist fundamenteler. Het laat zien dat de grenzen van de wiskunde niet alleen liggen bij wat we kunnen bewijzen, maar bij wat we überhaupt kunnen vragen binnen een bepaald formeel systeem.

Oefeningen verdieping 3.5: De Continuümhypothese

Opdracht 1 ★★☆☆☆

Beschrijf in je eigen woorden wat het betekent het conceptueel als de CH onwaar is.

Opdracht 2 ★★★★★

Gödel toonde aan dat: $L \models \text{ZFC} + \text{CH}$

Waarom is dit **geen** bewijs dat CH waar is?

Opdracht 3 ★★★★★

In het constructible universum L bestaan alleen definieerbare verzamelingen.

Waarom maakt definieerbaarheid het universum L 'kleiner' dan V ?

Opdracht 4 ★★☆☆☆

Vul de tabel in (zonder formules):

Gödel	Cohen
<i>Universum wordt...</i>	<i>Universum wordt...</i>
<i>Strategie</i>	<i>Strategie</i>
<i>Effect op CH</i>	<i>Effect op CH</i>

Wat je moet kunnen

- De stelling van Cantor, de CH, begrijpen en kunnen uitleggen.
- De essentie van L begrijpen.
- De essentie van Cohens forcing begrijpen

Opdracht 5 ★★★★★

Stel dat je een nieuw axioma mag toevoegen aan ZFC om CH te verdedigen of weerleggen. Zou je het universum uitbreiden of beperken? Leg je antwoord uit.

Hoe kunnen we ontsnappen aan de logische kortsluiting die Russells paradox blootlegt? Wat Russells paradox zo problematisch maakt, is dat het niet voortkomt uit een slordige definitie of een rekenfout, maar uit aannames die lange tijd als vanzelfsprekend werden beschouwd. Juist daarom dwingt de paradox ons om niet alleen naar specifieke verzamelingen te kijken, maar naar het fundament van het hele systeem waarin zij bestaan.

De verschillende pogingen tot een oplossing laten zien dat er geen eenvoudige 'reparatie' bestaat. ZFC probeert de paradox te omzeilen door strengere spelregels op te leggen: niet elke eigenschap mag zomaar een verzameling worden. Daarmee wordt Russells paradox effectief buitenspel gezet, maar daarentegen wordt wat vrijheid opgeofferd. De theorie wordt consistent, maar ook formeler en beperkter. De paradox verdwijnt niet zozeer doordat zij wordt opgelost, maar doordat zij niet meer geformuleerd mag worden.

Russells eigen typetheorie volgt een andere route. Hier wordt de paradox aangepakt door hiërarchie aan te brengen: verzamelingen mogen niet zomaar over zichzelf spreken. Deze oplossing zorgt voor een waarschuwingssignaal tegen zelfreferentie.

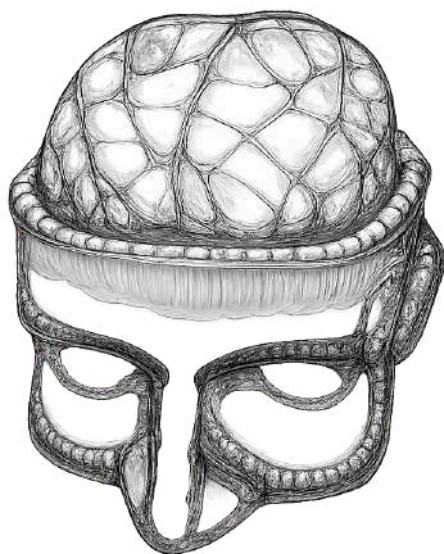
Ook taalkundige en semantische benaderingen tonen aan dat Russells paradox meer is dan een wiskundig probleem. Wat dit deel uiteindelijk laat zien, is dat Russells paradox niet simpelweg een fout is die gecorrigeerd moet worden, maar een structurele fout tot licht brengt. Elke oplossing kiest een kant: veiligheid boven vrijheid, consistentie boven intuïti en precisie boven expressiviteit. De paradox blijft daarmee de rode draad door alle oplossingen heen lopen, niet als een probleem dat definitief verdwijnt, maar als een soort herinnering aan de kwetsbaarheid van formele systemen voor de wiskundige en de mens.

Misschien is wiskunde niet almachtig, overal absoluut en overal objectief, maar dat betekent niet dat ze niet ontzettend nuttig is. Daarentegen maakt dat haar juist veelzijdig en breed inzetbaar.



DEEL 4:

PARADOX IN DE PRAKTIJK



Paradoxen worden vaak gezien als abstracte gaten in de logica, maar hun invloed reikt verder dan de theorie alleen. In de praktijk confronteren zij ons met de grenzen van ons begrip. Het begrijpen van een paradox is geen vanzelfsprekende kracht. Waar sommige paradoxen direct inzichtelijk lijken, vereisen andere een abstracter denkvermogen dat niet per se aanwezig is. In dit hoofdstuk onderzoeken we de psychologische voordelen van het begrijpen van een paradox, en of dit begrip kan worden aangeleerd door middel van educatie over logica.

4.1 Mijn aanpak

Ik zal vast niet de enige zijn geweest die weleens de vraag stelde: *"Wat heb je eigenlijk aan wiskunde?"*. Alles wat wij hiervoor besproken hebben was erg abstract. En hoewel we hebben gezien wat logica en de verzamelingenleer zo nuttig maakt binnen de wiskunde, is het ook belangrijk om aan te kunnen geven wat jij er persoonlijk aan hebt. Eind vorig schooljaar beantwoordde mijn wiskundedocent deze vraag. Hij beweerde dat het vak, misschien wel het beste, jouw capaciteit verbetert om kritisch na te denken. Ja, meneer, dit heeft u echt gezegd en ik heb het gedocumenteerd. Dit was de aanleiding voor het uitvoeren van dit onderzoek.

Ik geloof dat het herkennen van paradoxen, of specifiekere zelfreferentiële tegenstellingen, niet vanzelfsprekend is. Men moet logisch kunnen redeneren en echt kritisch kunnen nadenken. En de vraag is dan of kennis van wiskunde een positieve invloed hierop kan hebben. En zo ja, kan wiskunde-educatie, met name vanuit een taalkundig perspectief, helpen met logisch redeneren, of zijn degenen met een aanleg in wiskunde van nature beter in dit soort redeneringen? Hier worden een aantal aannames genoemd die ook onderzocht moeten worden. Deze veronderstellingen leiden tot een aantal deelvragen, die afgeleid worden uit onze onderzoeksvraag:

"Wat is het effect van uitleg over de verschillende oplossingen van Russells paradox op hoe goed mensen logisch paradoxale zinnen begrijpen?"

- 1 *Wat is de houding tegenover tegenstellingen en paradoxen, en hoe komt dat?*
- 2 *Wat voor correlatie is er tussen het begrip van een paradox en kennis van wiskunde?*
- 3 *Hoe helpt educatie bij het logisch redeneren (over paradoxen)?*

Hieronder staat mijn hypothese voor de hoofdvraag en deelvragen aangegeven:

Hypothese hoofdvraag: *"Uitleg over de verschillende oplossingen van Russells paradox, met name de taalkundige oplossing, verbetert het begrip van logisch paradoxale zinnen."*

Hypothese deelvraag 1: *Men herkent meteen dat tegenstellingen logisch onmogelijk zijn, maar het herkennen van dezelfde logische problemen bij paradoxen is niet zo makkelijk. Dit komt doordat wij als mensen meer redeneren met inductie dan deductie, en voor paradoxen is het minder duidelijk dat deductie van toepassing is.*

Hypothese deelvraag 2: *Er is een positieve correlatie tussen wiskundige kennis en begrip van paradoxen; mensen met meer wiskundige achtergrond zullen beter kunnen logisch redeneren.*

Hypothese deelvraag 3: *Educatie, zoals lessen over logica en de verzamelingenleer, verbetert het logisch redeneren en begrip van paradoxen bij alle deelnemers, ongeacht eerdere aanleg.*

Het gehele onderzoek bestond uit een steekproef met $n = 401$. Dit onderzoek werd uitgevoerd op drie groepen (elke groep zal later uitgebreider worden toegelicht): als eerste werden er straatinterviews ($n = 100$) uitgevoerd. Daarnaast werden zes controlegroepen gebruikt (met een totaal van $n = 135$ leerlingen) en acht lesgroepen (met $n = 166$ leerlingen). De straatinterviews bestaan uit een survey. Ze werden voornamelijk uitgevoerd in Leidschendam en Den Haag. Het is een *within-subjects design*, omdat het verschillende metingen (over de twee type vragen) op dezelfde deelnemers toepast. Daarnaast is het ook een quasi-experimenteel onderzoek, omdat deelnemers willekeurig benaderd worden in een publieke ruimte en er is geen controle over de achtergrond. De resultaten hiervan beantwoorden onze eerste deelvraag. Als tweede bekijk ik bij de controlegroepen wat voor effect het wiskundeniveau van de leerlingen (van Lyceum Ypenburg) heeft op de herkenning van paradoxen. Dit beantwoordt onze tweede deelvraag. Dit onderzoek is correlatieel; ik vergelijk deelnemers met verschillende achtergronden en manipuleer niets. Het laatste deelonderzoek vergelijkt klassen die les krijgen over verzamelingenleer en zelfreferentie met controlegroepen. We kijken naar of de lessen een sterke positieve correlatie hebben met het begrijpen van paradoxen. Ook dit onderzoek is quasi-experimenteel. Met de resultaten van dit onderzoek beantwoorden wij deelvraag 3.

Op basis van de resultaten van alle drie deelonderzoeken kan een cumulatieve conclusie worden getrokken en kan de hoofdvraag worden beantwoord. Er wordt daarnaast gebruik gemaakt van de relevante literatuur over dit onderwerp om de data te ondersteunen, toe te lichten of juist te relativiseren.

Al het materiaal dat gebruikt werd bij dit onderzoek is zelf ontworpen. Het bestaat uit verschillende vragenlijsten, waarbij ik grotendeels werk met dichotome uitkomsten (ja/nee, wel/niet herkend), en lesmateriaal (voor het derde deelonderzoek). Iedereen heeft toestemming gegeven om anoniem deel te nemen aan het onderzoek.

Tot slot moet er vooraf uiteraard erkend worden dat dit onderzoek een heleboel beperkingen heeft (die per onderdeel later uitgebreider worden besproken). Nu kunnen we beginnen met het bespreken van de resultaten!

4.2 Hoe schijnbaar is het een tegenstelling?

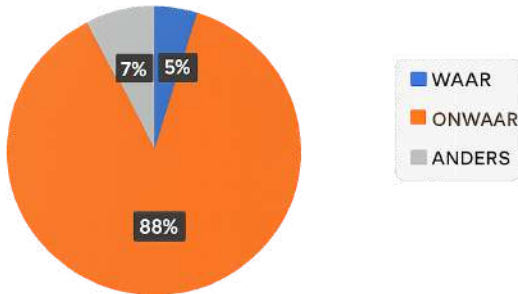
We behandelen als eerste de meest voor-de-hand liggende vraag en verreweg het leukste deel van het onderzoek om uit te voeren: de ervaring van tegenstellingen. Dit werd gemeten als onderdeel van de survey tijdens de straatinterviews (en de vragenlijst bij alle klassen). De volledige survey staat hieronder:

Vragenlijst straatinterviews:

1. De cirkel is vierkant. (Waar/onwaar/anders)
Op een schaal van 1 tot 10, hoe zeker bent u van dat antwoord?
2. $1+1=3$ (Waar/onwaar/anders)
Op een schaal van 1 tot 10, hoe zeker bent u van dat antwoord?
3. $1 =$ niet 1 (Waar/onwaar/anders)
Op een schaal van 1 tot 10, hoe zeker bent u van dat antwoord?
4. De kapper scheert alleen alle mannen die zichzelf niet scheren.
Dus de kapper scheert zichzelf. (Waar/onwaar/anders en waarom?)
Op een schaal van 1 tot 10, hoe zeker bent u van dat antwoord?
5. "Deze zin is onwaar."
Is deze zin waar of onwaar? (Waar/onwaar/anders en waarom?)
6. Wat is uw leeftijd?
7. Wat was uw opleiding?

Deze vragen waren gekozen, omdat ze naar mijn mening voor een algemeen publiek goed te begrijpen waren. Ik koos voor minimaal twee per categorie, zodat er algemenere conclusies getrokken kunnen worden. Voor nu richten we ons op de eerste drie vragen; de tegenstellingen. Het doel is om de aanname dat men tegenstellingen meteen als tegenstrijdig kan herkennen, duidelijk aan te tonen – hoewel dit al prima facie waar is. Er wordt ook rekening gehouden met de zekerheid die de deelnemers hadden op hun antwoorden om het verschil tussen de ervaring van tegenstellingen en paradoxen beter te herkennen. Deze resultaten worden later vergeleken met de paradoxen. Ze worden drie mogelijkheden gegeven: waar, onwaar en anders. Hierbij definieer ik 'anders' vooraf als 'ik weet het niet', 'niet van toepassing', 'beide' of 'geen van beide'. Dit antwoord zal relevanter worden bij de paradoxen. Het overduidelijk 'juiste' antwoord op de eerste drie vragen is onwaar. Laten we kijken of de meesten het hier mee eens waren:

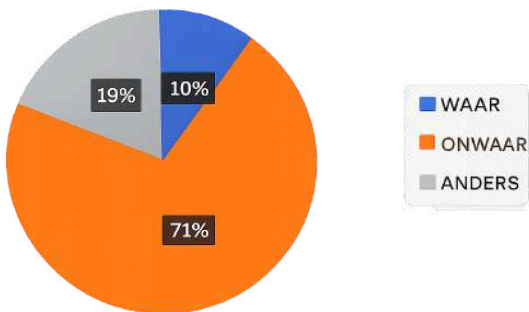
Antwoorden op tegenstellingen



Grafiek 1: gemiddelde verdeling van de antwoorden op tegenstellingen ($n = 100$)

Uit de data die weergegeven staat in het cirkeldiagram hierboven lijkt de meerderheid geen problemen te hebben met het herkennen van tegenstellingen. 88% herkent ze als onwaar, 7% antwoord 'anders' en met de overige 5% lijkt er iets hartstikke mis te zijn gegaan. De verwarring ligt vooral in vraag 3; zie het cirkeldiagram hieronder.

Verdeling antwoorden op: "1 = niet 1"



Grafiek 2: verdeling van de antwoorden op "1 = niet 1" ($n = 100$)

Het probleem is mijns inziens dat velen dit niet interpreteerden als $p = \neg p$. Velen legde uit dat $1 = 0.99$. Dit vind ik echter onzinnig. 0.99 komt erg dichtbij 1, maar is niet exact gelijk aan 1. Maar dit verklaart wel de verwarring. Nochtans kan er beweerd worden dat de meesten tegenstellingen overduidelijk onwaar vonden. De deelnemers herkennen tegenstellingen vaker dan toeval. Dit kunnen we aantonen met de *binomiale toets*:

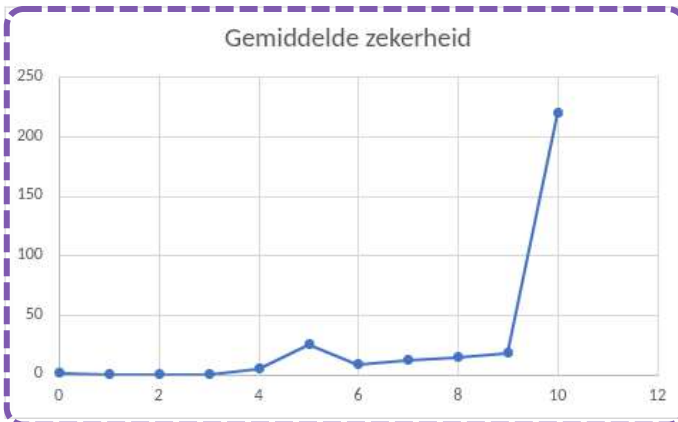
De binomiale toets berekent de kans dat 88 of meer deelnemers correct antwoorden puur bij toeval, als er slechts twee mogelijke variabelen zijn (juist of onjuist). In dit geval is de kans:

$$P(X \geq 88) = \sum_{k=88}^{100} \binom{100}{k} (0,333)^k (0,667)^{100-k} \approx 0$$

De kans op toeval is gelijk aan de som van de binomiale kansen dat 88 tot 100 mensen juist hebben gegokt (0.333) keer de overgebleven hoeveelheid die niet juist heeft gegokt. Hierbij is k het aantal keer op succes. Nu we deze berekening hebben kunnen we twee hypothesen vergelijken. Of we gaan uit van de *nullhypothese* H_0 : $p = 1/3$, de kans op het juiste antwoord gokken is 1 op de 3, óf we gaan uit van de *alternatieve hypothese* H_1 : $p = >1/3$, de kans om correct te antwoorden is groter dan 1 op de 3. Houdt er rekening mee dat dit een dichotomie is – er zijn maar twee mogelijkheden; er is geen andere hypothese mogelijk is.

Deze berekening is echter iets te simplistisch, omdat de kans waarschijnlijk niet *echt* 1 op 3 is. Het antwoord 'anders' zou vaker als vaak gezien worden, waardoor men het minder snel kiest. Daarnaast zouden velen ook een natuurlijk voorkeur kunnen hebben voor 'onwaar'. Desondanks blijft de uitkomst van de toets informatief, aangezien zelfs bij significante afwijkingen van deze kans de onderzochte proportie van de correcte antwoorden statistisch onwaarschijnlijk blijft onder de nullhypothese.

Gezien de kans op toeval ongeveer 1 op de 10^{29} (afgerond 0) is, kunnen we ervan uitgaan dat hypothese H_1 het meest plausibel is. Dus, we concluderen – vrij onomstreden – dat men waarschijnlijk gemakkelijk tegenstellingen herkent. Dit wordt ook nog eens ondersteund door de gemiddelde mate van zekerheid:



Grafiek 3: gemiddelde kwalitatieve zekerheid (schaal 1-10) van antwoorden op tegenstellingen ($n = 100$)

In *grafiek 3* zien we dat het grootste deel van de mensen volledig zeker waren over hun antwoord op de tegenstellingen. De zekerheid wordt gemeten op een Likertschaal van 1 (zeer onzeker) tot 10 (zeer zeker). Hier is de y-as het aantal mensen en de x-as alle waarden van de Likertschaal.

Zowel de modus als de mediaan is 10. Dit geeft aan dat de wet van non-contradictie ($A=B$ of $A \neq B$ is waar, niet beide) door de meesten intuïtief als een noodzakelijke waarheid wordt aangenomen. Dat gezegd hebbende, lijkt het me nooit een goed idee om ergens *absoluut* zeker van te zijn, gezien ik ervan overtuigd ben dat we *niks* 100% zeker kunnen weten; om dezelfde reden dat axioma's en a priori aannames niet bewezen kunnen worden.

In 4.1 had ik laten weten dat dit onderzoek niet de achtergrond van de deelnemers manipuleerde. Er werd echter wel gevraagd om twee eigenschappen tijdens de interview; namelijk leeftijd en een (academisch) achtergrond in wiskunde of taal (vraag 6 en 7).



Grafiek 4: leeftijdsverdeling van deelnemers aan de survey ($n = 100$)

Specifiek om deze eigenschappen werden gevraagd, omdat deze mogelijk de resultaten zouden kunnen vertekenen. Met betrekking tot leeftijd wilde ik erop letten dat dit redelijk representatief was. Ik denk dat dit enigszins is gelukt. De resultaten hiervan zie je hierboven in *grafiek 4*. Hier is de y-as het aantal deelnemers en de x-as de verschillende leeftijdscategorieën. Kleine spoiler – er waren echter niet genoeg mensen die paradoxen herkende om een betekenisvolle correlatie te kunnen meten tussen leeftijd en het begrip. Hetzelfde gold ook voor een achtergrond in wiskunde of taal; slechts 8 mensen hadden een achtergrond in één van beiden.

Deze resultaten schijnen niet heel waardevol te zijn op dit moment. Hun waarde zal echter duidelijker naar voren komen wanneer ze vergeleken worden met vergelijkbare tegenstellingen, geplaatst in een andere context. Paradoxen zijn immers niets meer dan circulaire tegenstellingen. Onderzoek toont dat mensen verrassend goed zijn in het herkennen van 'zuivere' tegenstellingen – zolang die worden gepresenteerd als abstracte, betekenisloze uitspraken. Er is weinig waar de gemiddelde mens minder om geeft dan elementaire wiskundige stellingen. Maar zodra we redeneren in een betekenisvolle context, verandert de houding nogal.

Khemlani & Johnson-Lair (2012) lieten zien dat het geven van verklaringen tegenstrijdige informatie minder zichtbaar maakt; deelnemers van de experimentele groep zijn dan meer bezig met het construeren van context en interpretaties dan met het herkennen van logische problemen.

Dit komt overeen met de bevindingen van Struchiner, de Almeida, & Hannikainen (2020) over hoe context het redeneren beïnvloedt, specifiek in een juridische omgeving. In meer concrete of betekenisvolle situaties worden mensen minder gestuurd door deductieve logica en meer door ervaring en intuïtie. Dit maakt duidelijk hoe beïnvloedbaar wij zijn door onze ervaringen en emoties. Er is genoeg reden om te vermoeden dat we geen logische wezens zijn, maar empirische; onze ervaring komt voor de logica. Kortom, zodra we betekenis, verhalen of context toevoegen, stappen we van logica over naar empirisch denken. Tegenstellingen worden als minder voor-de-hand liggend ervaren.

Dit sluit volledig aan bij de resultaten uit mijn onderzoek. En dit brengt ons zo naar de houding tegenover paradoxen.

Zoals bij elk onderzoek, kent ook deze zijn grenzen. Vooral voor het volgende deel zal dit relevant zijn. Elk persoon had bezit over een verschillende hoeveelheid informatie. De survey werd mondeling uitgevoerd en ik stond open voor het beantwoorden van vragen ter verduidelijking. Er werden geen antwoorden gegeven, maar dit had ertoe kunnen leiden dat iedere deelnemer een keuze maakte met net wat andere informatie. Daarnaast moet er ook erkend worden dat de schaal van zekerheid inherent subjectief is; wat voor de één een 7 is, zou voor de ander een 5 kunnen zijn. De resultaten over zekerheid zijn daarom geen absolute maatstaf, maar een indicator om verschillen tussen de uitspraken (tegenstellingen versus paradoxen) te vergelijken binnen dezelfde populatie.

Dit deel wil ik beëindigen met een korte, maar onmisbare anekdote over een straatinterview: samen met mijn zakenpartner hadden wij op een dag tijdens de straatinterviews een vrouw benaderd. Zij nam deel aan het onderzoek en haar antwoorden op de vragen waren legendarisch; met name haar antwoord op de tweede tegenstelling. Zij verklaarde de derde stelling vol zelfvertrouwen als waar. Haar reden daarvoor? Zij legde uit dat de talenten en krachten van ons twee samen gelijk is aan de kracht van drie mensen; dus, $1+1=3$. Deze ervaring samen met de verwarde en enigszins beledigde reacties op deze 'rare' vragen, maakte het stellen van de vraag of een tegenstelling waar is ontzettend leuk. Deze observatie heeft geen analytische waarde, maar is uitsluitend een voorbeeld van het type redeneringen dat vaker voorkwam te illustreren.

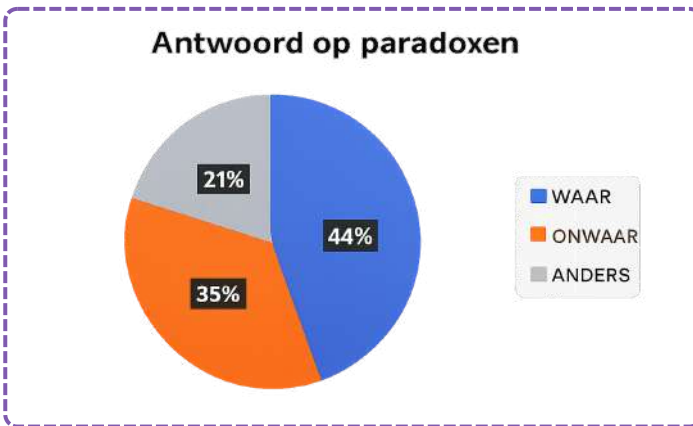
Conclusie

Uit de literatuur en de data van dit onderzoek kunnen we concluderen dat logische en/of wiskundige tegenstellingen gelijk opvallen als onmogelijk. Men heeft geen probleem deze te herkennen en is volledig zeker over hun vermogen om ze correct te identificeren. Dit verandert echter zodra er context wordt toegevoegd. Men redeneert niet alleen anders in een abstracte tegenover een concrete context: we redeneren gebrekkiger.

4.3 De ervaring van een paradox

De tegenstellingen gaven de meeste deelnemers weinig problemen. Paradoxen zijn echter een ander verhaal: hier wordt het logische denken echt op de proef gesteld. In 4.3 richten we ons op de data rondom vraag 4 en 5 uit de vragenlijst en beantwoorden we de eerste deelvraag.

Met beiden vragen hebben we al kennis gemaakt. Methodologisch is er weinig veranderd in vergelijking met hoe het begrip van de tegenstellingen werd onderzocht. Met uitzondering van één ding: deze keer werd er gevraagd aan de deelnemers om een uitleg te geven van hun antwoorden. Zo kan de reden voor mogelijke discrepanties tussen de antwoorden zichtbaarder worden.

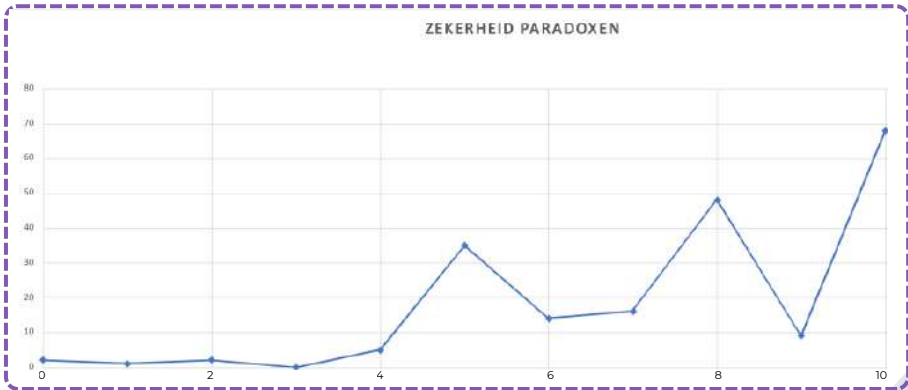


Grafiek 5: gemiddelde verdeling van de antwoorden op de paradoxen ($n = 100$)

In het cirkeldiagram hierboven zien we de resultaten van de houding tegenover paradoxen. Als we dit vergelijken met *grafiek 1* zien we dat de antwoorden hier veel meer verdeeld zijn. Het juiste antwoord zou hier idealiter 'anders' zijn, gezien een paradox zowel waar als onwaar is tegelijkertijd. Maar binnen dit onderzoek zou elk antwoord goed geteld kunnen worden, zolang het juist wordt uitgelegd: ze herkennen expliciet een logische tegenspraak of geven aan dat het niet past binnen een binaire waarheidslogica. Antwoorden die slechts één zijde van de tegenspraak benoemen, of die empirische aannames introduceren (bijvoorbeeld over de specifieke eigenschappen van de kapper of andere besproken voorbeelden), worden niet als correct beschouwd. Dit maakt het beperkt experiment met betrekking tot het exact kunnen heruitvoeren ervan. Dit onderzoek lijdt hierdoor onder dezelfde beperkingen als een onderzoek over het meten van (subjectief) geluk. De resultaten horen daarom geïnterpreteerd te worden als indicatoren voor bepaalde trends in redeneringen, en niet als exacte metingen van logisch of paradoxaal begrip.

Deel 4: paradox in de praktijk

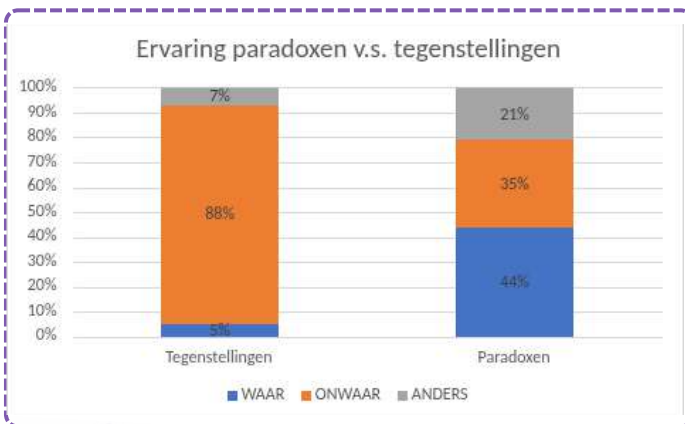
Er lijkt geen significant sterke voorkeur te zijn voor één antwoord: 44% koos 'onwaar', 35% koos 'waar' en 21% koos 'anders'. Ook zien we dat deelnemers niet altijd volledig zeker waren van hun antwoorden.



Grafiek 6: gemiddelde kwalitatieve zekerheid (schaal 1-10) van de som van antwoorden op beide paradoxen (vraag 4 en 5) paradoxen (n = 100)

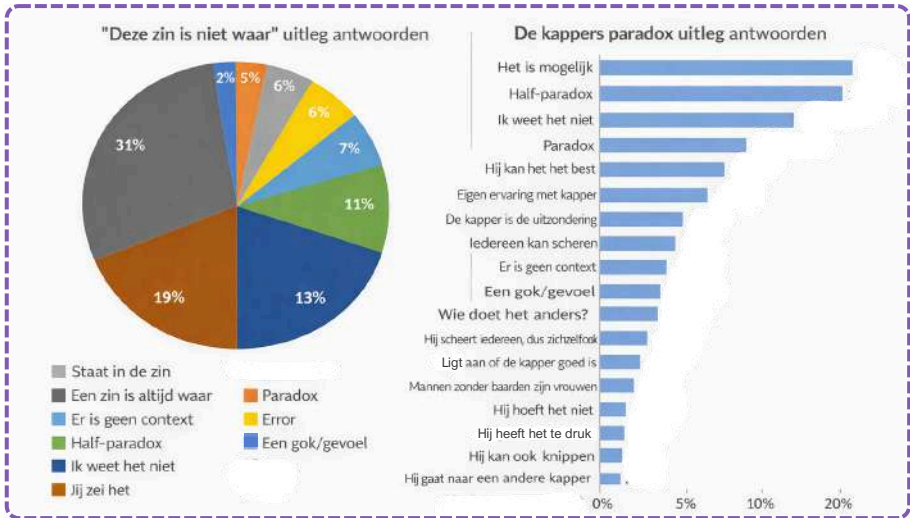
Ook hier maken we gebruik van een Likertschaal van 1 (zeer onzeker) tot 10 (zeer zeker). Hier is de modus van de antwoorden op zowel vraag 4 als 5 een 10. De mediaan voor is 8. Gezien de hoeveelheid mensen die werkelijk het juiste antwoord gaven, is dit veel te hoog. Mensen zijn veel te zeker van zichzelf!

Als we deze resultaten vergelijken met die van 4.2 zien we een duidelijk verschil. *Grafiek 7* maakt het verschil tussen de twee visueel duidelijk: de antwoorden op paradoxen zijn veel minder eenduidig. Als we met een berekening willen bewijzen dat er een duidelijk verschil is tussen de ervaring van tegenstellingen tegenover paradoxen, moeten we kijken naar hoeveel het juiste antwoord gaven. Om dit te doen bij paradoxen, kijken we naar de redeneringen.



Grafiek 7: vergelijking van de verdeling antwoorden op tegenstellingen en paradoxen (n = 100)

Grafiek 8 is een weergave van de verschillende antwoorden op vraag 4 en grafiek 9 van de antwoorden op vraag 5.



Grafiek 8: uitleg van de antwoorden op vraag 4 (rechts) en vraag 5 (links) (n = 100)

We zullen later in iets meer detail de verschillende antwoorden bespreken, maar voor nu is het belangrijk om te kijken naar de percentage van 'paradox'. Voor vraag 4 is dit percentage ongeveer 10% en voor vraag 5 is dit ongeveer 5%. Dus ongeveer 5-10% van de deelnemers herkende paradoxen. Dit is echter niet het percentage van de mensen die *beide* paradoxen herkent. We gaan nu uit van het minimale: namelijk dat men een paradox herkent zolang ze één van beiden vragen goed hebben uitgelegd. Maar neem dit aan met een korreltje zout. Nu kunnen we met een berekening het verschil tussen het begrip van tegenstellingen en paradoxen weergeven. Dit doen we door middel van (onder andere) *Cohen's h*. Deze berekening wordt gebruikt voor het berekenen van het verschil tussen twee proporties.

Verskil in juiste antwoorden: tegenstellingen (p_1) tegenover de kappers paradox (p_2):

$$2 \times \arcsin(\sqrt{p_1}) - 2 \times \arcsin(\sqrt{p_2})$$

$$2 \times \arcsin(\sqrt{0.88}) - 2 \times \arcsin(\sqrt{0.1}) = 1.7905$$

Verskil in juiste antwoorden: tegenstellingen (p_1) tegenover "Deze zin is onwaar." (p_2):

$$2 \times \arcsin(\sqrt{p_1}) - 2 \times \arcsin(\sqrt{p_2})$$

$$2 \times \arcsin(\sqrt{0.88}) - 2 \times \arcsin(\sqrt{0.05}) = 2.0$$

Hierbij is een (volgens conventie) 0.2 een klein verschil, 0.5 een middelmatig verschil en 0.8 een groot verschil. Een verschil van ongeveer 1.8 en 2.0 is dus enorm.

Een meer intuïtieve berekening van het verschil is door middel van de *odds ratio*. We maken gebruik van de ratio's van de de hoeveelheid mensen die juist antwoordden tegenover de hoeveelheid mensen die onjuist antwoordden.

Odds ratio tegenstellingen tegenover de kappers paradox:

Odds correct tegenstellingen = $88/12 \approx 7,33$

Odds correct paradox = $10/90 \approx 0,11$

$7.33 \div 0.11$

Odds Ratio ≈ 66 , deelnemers zijn 66 keer beter in het herkennen van tegenstellingen.

Odds ratio tegenstellingen tegenover "Deze zin is onwaar."

Odds correct tegenstellingen = $88/12 \approx 7,33$

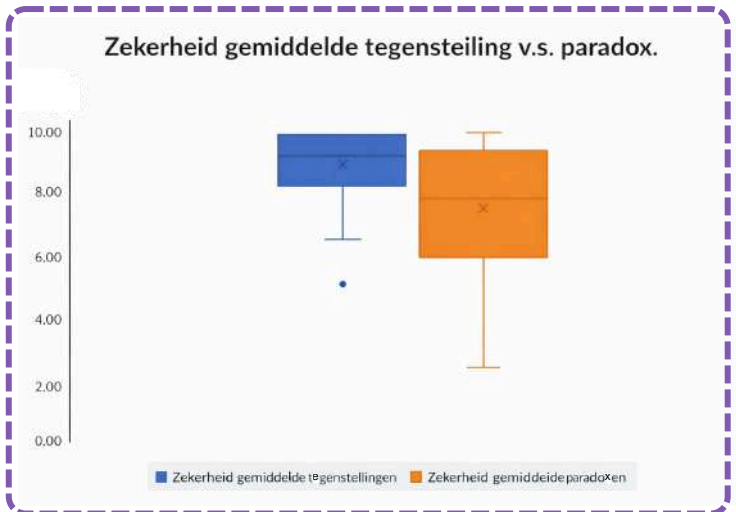
Odds correct paradox = $5/95 \approx 0,0526$

$7.33 \div 0.053 =$

Odds Ratio ≈ 139 , deelnemers zijn 139 keer beter in het herkennen van tegenstellingen.

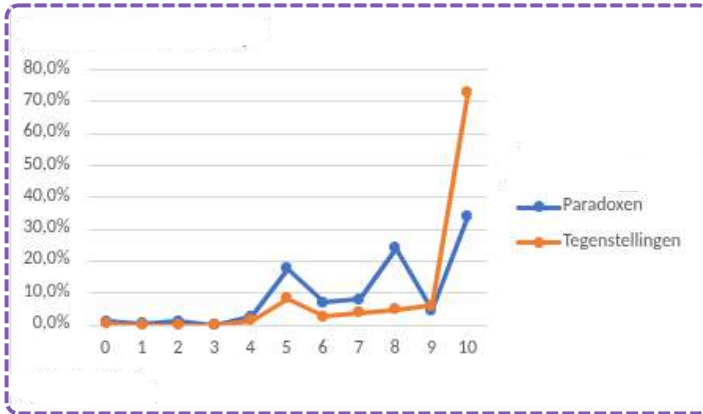
De odds ratio (OR) is 66 tot 139. Hier is 1.1-1.5 een klein verschil, 1.5-3 een middelmatig verschil en >3 een groot verschil. Wij hebben hier te maken met een enorm verschil. En houdt er rekening dat we er hierbij vanuit gaan dat slechts 1 van de twee paradoxen herkennen betekent dat je 'paradoxen herkent'. Alhoewel een aantal deelnemers *wel* beiden herkende als tegenstellend.

De deelnemers hadden zelf volgens mij ook zelf in de gaten dat ze tijdens de laatste vragen minder goed presteerden; hun gemiddelde zekerheid daalde enigszins.



Grafiek 9: boxplot van de vergelijking tussen de zekerheid tegenstellingen v.s. paradoxen ($n=100$)

In grafiek 9 zien we een boxplot van de zekerheid van de deelnemers op hun antwoorden. De y-as geeft de waardes van deze zekerheidsschaal weer. De boxplot laat zien dat de zekerheid bij tegenstellingen (blauw) hoog en geconcentreerd is, met een hoge mediaan en een kleine afstand tussen kwartielen. Bij paradoxen (oranje) ligt de mediaan lager, is de spreiding groter en is er een lager minimum, wat wijst op grotere onzekerheid en/of individuele verschillen.



Grafiek 10: vergelijking tussen de zekerheid tegenstellingen v.s. paradoxen in percentages ($n=100$)

Grafiek 10 geeft de spreiding van de antwoorden duidelijker weer. Het wordt duidelijk dat er meer onzekerheid is over paradoxen. Zodra een uitspraak paradoxaal wordt, verdwijnt de sterke zelf-verzekerdheid. De vraag is nu waarom: waarom herkent men paradoxen minder goed, gezien een paradox net zo inherent tegenstrijdig is als een 'gewone' tegenstelling?

Hiervoor moeten we terug komen naar *grafiek 8*. Welke redenen geven de deelnemers voor hun antwoorden op paradoxen? Voor we hier een aantal hypothesen aanbieden, moet er op worden gelet dat de uitgesproken redenen niet per se overeenkomen met de werkelijke motieven van de deelnemers. Maar voor het gemak gaan we hier wel vanuit; we kunnen immers toch niet iemands gedachten lezen. Een mogelijke verklaring voor deze waarneming is dat men paradoxen (van het type van vraag 4 en 5) minder goed herkent, omdat deelnemers geneigd zijn deze empirisch te benaderen. Om dit te beargumenteren maak ik gebruik van de data uit *grafiek 8* en de besproken onderzoeken van Khemlani & Johnson-Lair (2012), en Struchiner, de Almeida, & Hannikainen (2020). Dit ondersteunt deze verklaring. Maar aangezien dit onderzoek geen directe metingen bevat neurale processen of hersenactiviteit, is deze verklaring eerder een plausibele interpretatie, dan een causale conclusie.

Eerst wil ik een bepaalde opvatting toelichten; de reden 'half-paradox'. Dit is een naam die ik heb gegeven aan een redenatie die een aantal keer voorkwam. Bijvoorbeeld: "De kapper scheert zichzelf niet, omdat hij dan zou behoren tot de mannen die zich niet scheren." Dit klinkt vaak heel raar, omdat de deelnemer het niet volledig heeft doorgedacht. Deze redenatie heeft slechts de ene kant van het zwaard behandeld. Deze redenatie kwam 11% en 21% voor. De meerderheid van de redenen zijn echter ervaringsgericht van aard. Veel deelnemers noemen als reden dat "het mogelijk is", omdat we verder geen informatie hebben over de kapper. Of met betrekking tot vraag 5 wordt er vaker gezegd dat er "geen context" is, waarbij zij eigenlijk wel context verwachten. Het klinkt immers alsof er verwezen wordt naar een andere zin of een eigenschap. Het komt niet over als een puur logische vraag, maar als een inductieve. Eén van de redenen bij die vraag is "Het staat in de zin", waarbij er verwacht wordt dat de eigenschap in de zin zelf staat.

De meest voorkomende reden is echter "Een zin is altijd waar.". De reden wijst waarschijnlijk vaak op een verwarring tussen het bestaan van een zin en haar waarheidswaarde. Deze uitspraak laat zien dat de deelnemer geen deductieve evaluatie van de waarheidsmogelijkheden uitvoert, maar een inductieve generalisatie maakt op basis van eerdere ervaring met taal. In het dagelijks leven zijn zinnen vrijwel altijd bedoeld om iets waars of op zijn minst *betekenisvol* (het verwijst naar iets wat mogelijk is) te communiceren. Op basis van deze herhaalde ervaring concludeert de deelnemer impliciet: zinnen zijn waar.

Met betrekking tot de kappers paradox komen dit soort inductieve redeneringen of zelfs anekdotes nog duidelijker voor. Dit is niet gek gezien een verhaal over een kapper veel meer aansluit bij de belevingswereld van een persoon. Zo komen er antwoorden voorbij over of de kapper van de deelnemer zichzelf wel of niet scheert. Ook krijg je geinige redeneringen, zoals de kapper "heeft het te druk", dus scheert hij zich niet, "Hij gaat naar een andere kapper" of "Het ligt eraan of hij goed is". De meerderheid van de antwoorden zijn waarschijnlijk inductief beredeneerd. Men lijkt bij deze paradox extra aannames toe te voegen, omdat het mogelijk is. Ze proberen de gaten te vullen, terwijl het geheel zelf hol is.

Dit geldt voor zowel vraag 4 als 5 met respectievelijk minimaal ~59% ("Het is mogelijk" + "Hij kan het het beste" + "Eigen ervaring met kapper" + "De kapper is de uitzonder" + "Iedereen kan scheren" + "Er is geen context" + "Wie doet het anders?" + "Hij scheert iedereen, dus zichzelf ook" + "Ligt aan of de kapper goed is" + "Mannen zonder baarden zijn vrouwen" + "Hij hoeft het niet" + "Hij heeft het te druk" + "Hij kan ook knippen" + "Hij gaat naar een andere kapper") en ~63% ("Het staat in de zin" + "Jij zei het" + "Er is geen context" + "Een zin is altijd waar"). Neem deze interpretaties van de beredeneringen echter met een korreltje zout aan.

Dit sluit aan bij de eerder genoemde onderzoeken over redeneren en context. Ook suggereren de resultaten van Saponara et al. (2025) dat er een evolutionair motief is voor het prioriteren van inductief redeneren. Dit verhoogt onze overlevingskansen, omdat we hierdoor patronen beter herkennen en we kunnen toekomstige gevaren beter voorspellen. Daarnaast laat onderzoek van Gazzo Castañeda et al. (2023) zien dat inductief en deductief redeneren andere delen van de hersenen benutten. Probabilistisch redeneren het ophalen van eerdere kennis uit het geheugen vereist, terwijl deductief redeneren zich richt op de logische structuur van een gevolgtrekking.

Er zijn echter ook andere mogelijke verklaringen voor dit het fenomeen dat we bespreken. Als eerst zouden we kunnen poseren dat de formulering van een zin of paradox deelnemers mogelijk kan sturen naar een inductieve interpretatie, bijvoorbeeld door vage of algemene termen. In het geval van de tegenstellingen ging het namelijk om concrete voorbeelden. Maar deelnemers vullen informatie vaak aan vanuit hun eigen ervaringen of anekdotische kennis, ongeacht hoe concreet de zin is. Dit wijst erop dat inductief redeneren minstens deels voortkomt uit mentale modellen van de wereld, niet alleen uit de vaagheid van taal. Hoewel vage of algemene formuleringen het inductieve denken kunnen versterken, verklaren ze niet volledig waarom mensen inductief redeneren. De neiging tot inductie lijkt ook samen te hangen met evolutionaire adaptatie, cognitieve efficiëntie en persoonlijke ervaring.

Een andere mogelijke verklaring zou 'mentale storytelling' kunnen zijn. Mensen construeren bijvoorbeeld actief scenario's in hun hoofd om een paradox op te lossen, en vullen gaten in op basis van persoonlijke voorkeuren of verbeelding. Dit wordt ook wel het constructivistische model genoemd. In veel gevallen baseren deelnemers echter hun antwoorden op eerdere ervaringen of impliciete aannames, zonder dat er een volledig geconstrueerd scenario nodig is. Op basis van de data lijkt de eerste hypothese het meest plausibel te zijn, onder andere, omdat het veel verklarende kracht heeft (Tamir, Bricker, Dodell-Feder, & Mitchell, 2015).

Dit deel van het onderzoek bevat helaas wel veel beperkingen; met name over de interpretatie van de vaak vage antwoorden of redeneringen. Deze interpretaties zijn grotendeels op basis van mijn eigen ervaringen met de interviews en eerlijk gezegd deels ook op basis van een bias tegenover de conclusie die ik eruit trek. Ook hier is er weer sprake van een bepaalde subjectiviteit met betrekking tot de Likertschaal. Maar in het bijzonder is het belangrijke alle psychologische causale redeneringen die ik maak met een korreltje zout aan te nemen, gezien het geen definitieve conclusie is. Het is eerder een enigszins plausibele gevolgtrekking uit een aantal correlatieve resultaten.

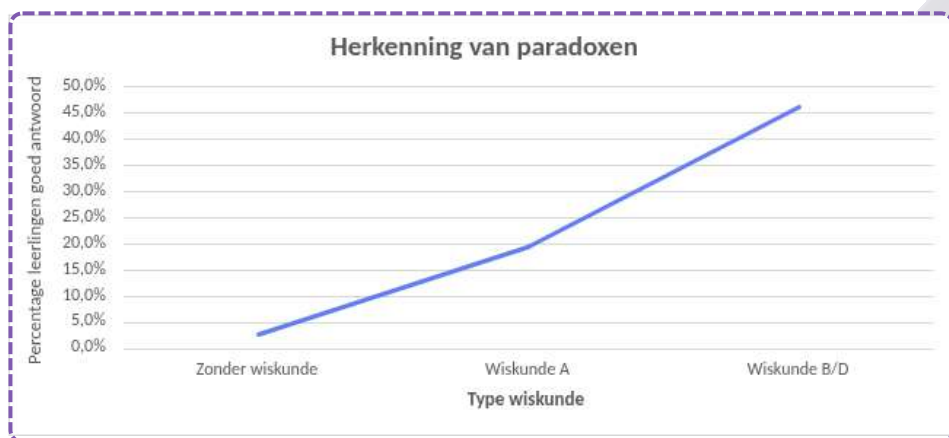
Conclusie

Uit de data van dit deel van het onderzoek kunnen we concluderen dat de gemiddelde persoon meer moeite heeft met het herkennen en begrijpen van paradoxen dan simpele tegenstellingen. Paradoxen falen waarschijnlijk niet door gebrek aan logica, maar door een verandering in redeneerstrategie. Zodra context mogelijk lijkt, schakelen deelnemers over op empirisch denken. Context maskeert contradicties. Als mens zijn wij schijnbaar niet altijd gemaakt voor deductieve redeneringen, maar eerder inductieve. De reden hiervoor zou mogelijk evolutionair kunnen zijn. In het bijzonder bij de kappersparadox blijkt dat men de paradox probeert op te lossen door extra aannames toe te voegen, waardoor de onderliggende cirkelredenering buiten beeld blijft. Dit, samen met de literatuur uit 4.2, bevestigt mijn hypothese bij de eerste deelvraag uit 4.1.

4.4 Maakt jouw achtergrond het verschil?

Nu we met enige zekerheid kunnen aannemen dat velen moeite hebben met het begrijpen van paradoxen wegens de logische structuur, is nu de vraag wat we daar mee moeten in de praktijk. Onze tweede deelvraag houdt zich hiermee bezig en neemt (misschien zonder genoeg reden) aan dat de hoeveelheid wiskunde kennis invloed heeft op hoe goed men een paradox begrijpt. De bijbehorende data wordt besproken en de mogelijke verklaringen ervoor.

We beginnen met de data.



Grafiek 11: correlatie tussen wiskundeniveau en het herkennen van paradoxen ($n = 135$) op Lyceum Ypenburg (3MAVO–6VWO)

Grafiek 11 geeft het verband tussen het wiskundeniveau op de middelbare school en het begrip van paradoxen. Dit werd uitgevoerd op het Lyceum Ypenburg. Er namen 6 klassen deel aan het onderzoek, waaronder MAVO-leerlingen. Hier werden de MAVO-leerlingen met wiskunde ingedeeld in het wiskunde A-niveau. Dit geldt ook voor wiskunde C op het VWO, wegens de lage hoeveelheid wiskunde C'ers. Vanwege ditzelfde probleem werden wiskunde D'ers niet in een aparte categorie ingedeeld. Deze leerlingen werden aan het begin van een les dezelfde vragenlijst gegeven als die onder 4.2 op papier. Ook hier, net als bij de straatinterviews, worden de antwoorden op de vragen over paradoxen goed gerekend op basis van de uitleg. De resultaten moeten wel worden gerelativeerd.

Gezien er meer MAVO-leerlingen geen wiskunde hebben dan VWO leerlingen. Dit heeft ook invloed op de resultaten. Desalniettemin verklaart dit niet volledig de significante stijging in het begrip van wiskunde A naar wiskunde B/D. De resultaten zijn respectievelijk 2,6%, 19,6% en 46,3%. Om duidelijk te bewijzen precies hoe sterk het verband is gebruiken we de berekening Cramér's V. Het tabel van onze data staat hieronder:

	Zonder wiskunde	Wiskunde A	Wiskunde B/D
Goed	1	9	19
Fout	37	37	22

Tabel 3: data van het aantal leerlingen met gegeven wiskundenniveau en het aantal goede/foute antwoorden op de paradoxen (2 × 3 tabel) met n = 135

Als eerst berekenen we de *Chi-kwadraattoets*. Dit geeft aan of er een verband is tussen de twee variabelen. Hieruit krijgen we ook een p-waarde. Het geeft aan of het verband statistisch significant is. Als de p-waarde klein is (< 0,05), is het resultaat meestal statistisch significant. De volledige berekening gaat als volgt:

$$\chi^2 = \sum (O_{ij} - E_{ij})^2 : E_{ij},$$

$$E_{ij} = \text{verwachte waarde per cel} = ((\text{rijtotaal } i) \times (\text{kolomtotaal } j)) : n$$

$$O_{ij} = \text{werkelijke waarde per cel}$$

$$\chi^2 \approx 21.7$$

$$\text{met p-waarde} = \text{ChiCD}(\chi^2, \text{max}, \text{df})$$

$$\text{df} = (\text{aantal rijen} - 1) \times (\text{aantal kolommen} - 1) = 1 \times 2 = 2$$

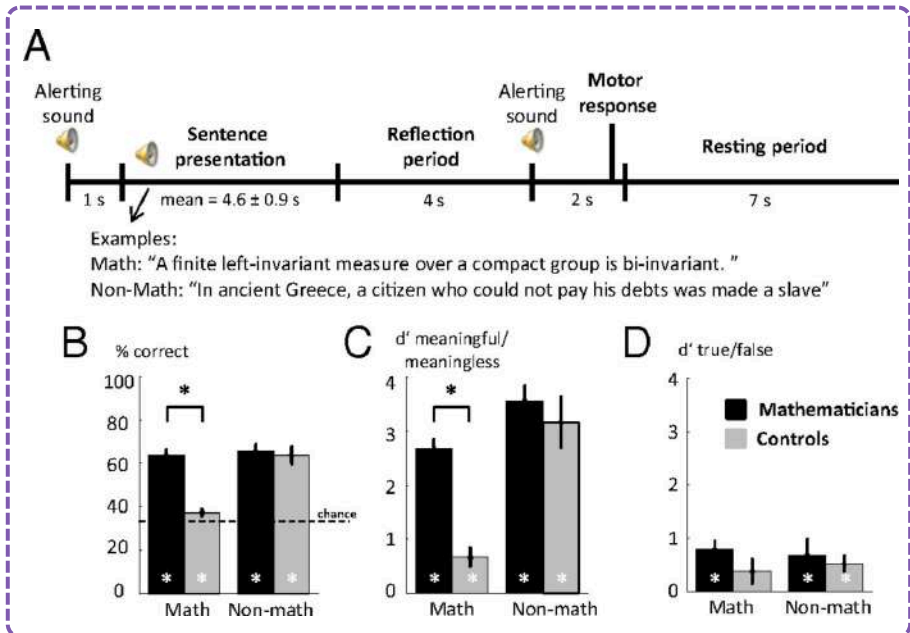
$$p = \text{ChiCD}(21.7, 10^{99}, 2) = 0.000019$$

$$\text{Cramér's V} = \sqrt{(\chi^2 : (n \times \min(r-1, k-1)))} = \sqrt{(21.7 : (135 \times (2-1)))}$$

$$\text{Cramér's V} \approx 0.40$$

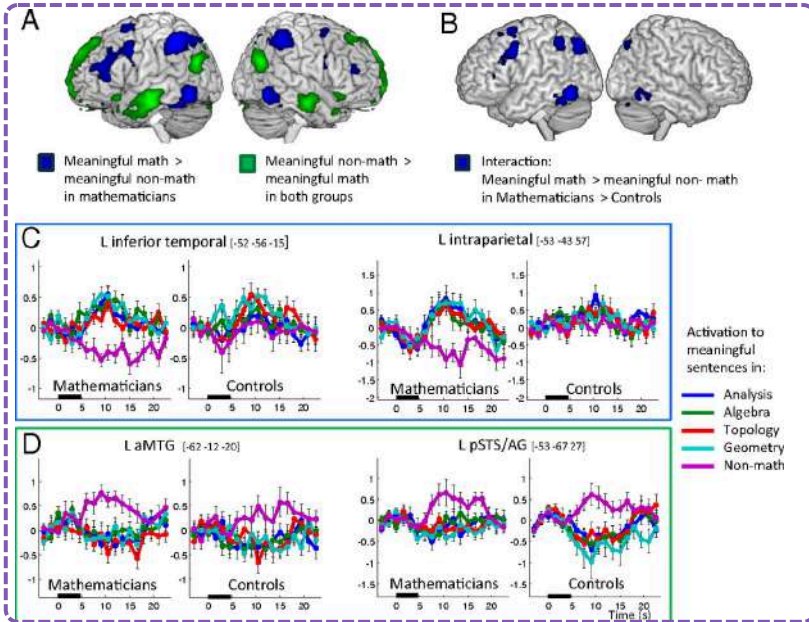
Hier is r = het aantal rijen en k = het aantal kolommen. Voor de Chi-kwadraattoets spreken we van een significant verband vanaf $p < 0.05$. Onze $p = 0.000019$. Dus kunnen we ook hier de nullhypothese, de hypothese dat het toeval is, verwerpen; het is statistisch significant. Voor Cramér's V geldt een klein verband voor waarde < 0.3 , een middelmatig verband voor waarden $0.3 < x < 0.5$ en een groot verband voor waarden > 0.5 . Er is sprake van een middelmatig verband tussen de variabelen (Cramér's V ≈ 0.40). Het lagere algemene succespercentage (~5-10%) kan echter tot een soort maximeffect leiden, waardoor correlatieberekeningen, zoals Cramér's V het verschil mogelijk onderschatten. Toch toont het een nogal betrouwbaar verband aan; er bestaat een correlatie tussen het wiskundenniveau van een leerlingen en het begrip van paradoxen.

Deze resultaten komen overeen met veel literatuur. Onder andere met het volgende onderzoek van Amalric & Dehaene (2016), die hier een neurowetenschappelijke verklaring voor hebben. Dit is wellicht het interessantste deel van het gehele onderzoek:



Grafiek 12: Paradigma en resultaten van de taak. (A) Deelnemers luisterden naar een gesproken uitspraak en classificeerden deze 4s later als waar, onwaar of betekenisloos. (B) Percentage correcte antwoorden. (C) d' voor het onderscheiden van betekenisvolle versus betekenisloze uitspraken. (D) d' voor het onderscheiden van waar versus onwaar binnen betekenisvolle uitspraken. Overgenomen van Amalric, M., & Dehaene, S. (2016). *Origins of the brain networks for advanced mathematics in expert mathematicians*.

In dit onderzoek bestudeerden Amalric & Dehaene wat voor effect wiskundige en niet-wiskundige stellingen hebben op het brein. *Grafiek 12* is een weergave van het proces. Wiskundigen en niet-wiskundigen academici werden beiden een aantal stellingen gegeven van beide varianten, die ze na 4 seconden moesten categoriseren als waar, onwaar of betekenisloos. Deze stellingen hadden beide dezelfde moeilijkheidsgraad. Het is geen verrassing dat wiskundigen de wiskundige stellingen beter beantwoordden. De vraag is echter waarom. Volgens velen werd er gedacht dat het redeneren over wiskunde hetzelfde deel van het brein inneemt als het analyseren van andere stellingen.



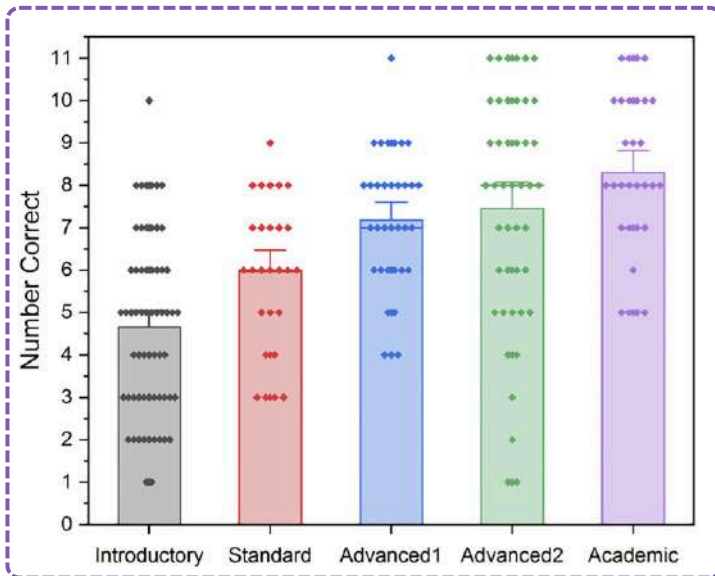
Grafiek 13: Specifieke hersengebieden geassocieerd met wiskundige expertise versus algemene semantische kennis. (A) Whole-brain weergave van gebieden geactiveerd tijdens reflectie op wiskundige uitspraken (blauw) versus algemene kennisuitspraken (groen). De kaarten zijn drempelwaarde ingesteld op $\text{voxel } P < 0.001$, $\text{cluster } P < 0.05$, gecorrigeerd voor multiple comparisons. (B) Effect van wiskundige expertise: interactie die aantoont dat het verschil tussen betekenisvolle wiskundige en niet-wiskundige uitspraken groter is bij wiskundigen dan bij controles. (C en D) Gemiddelde fMRI-signalen in representatieve gebieden die reageren op respectievelijk wiskunde (C) en algemene kennis (D). Overgenomen van Amalric, M., & Dehaene, S. (2016). *Origins of the brain networks for advanced mathematics in expert mathematicians*.

Deze conclusie bleek volgens de resultaten van dit onderzoek echter niet plausibel te zijn. *Grafiek 13* geeft het effect van het proces (uit *grafiek 12*) op verschillende domeinen van de hersenen weer bij wiskundigen en de controlegroep door middel van fMRI. *Grafiek 13* (A) staan de actieve hersengebieden tijdens wiskunde (bij slechts de wiskundigen) vs. niet-wiskunde (bij beide groepen) aangegeven. Hierbij is blauw: gebieden die actiever worden bij wiskundige uitspraken en groen: gebieden die actiever worden bij algemene kennis. Dit laat zien dat verschillende netwerken in de hersenen aanstaan voor wiskunde en voor gewone taal/algemene kennis. onder (B) wordt gekeken naar de verschillen tussen wiskundigen en niet-wiskundigen. Hier wordt gekeken naar de verschillen tussen wiskundigen en niet-wiskundigen: wiskundigen hebben veel meer activatie in het wiskundenetwerk dan niet-wiskundigen.

(C) en (D) geven het tijdsverloop weer: bij wiskundigen stijgt het signaal snel nadat een wiskundige zin is gehoord en blijft hoog ongeveer 15 seconden. Dit laat zien dat deze hersengebieden blijven doorwerken, terwijl de persoon nadenkt over de wiskunde. Bij niet-wiskundige uitspraken zie je juist activatie van andere gebieden (paars), bijvoorbeeld taalgebieden.

Dit patroon zie je minder sterk of anders bij de niet-wiskundigen. De hersenen van de controles lijken wiskundige stellingen te verwarren met algemene stellingen. Kort gezegd, wiskundigen hebben toegang tot een extra hersengebied speciaal voor wiskundige stellingen, die men kan helpen om accuratere wiskundige redeneringen uit te voeren.

Dit zou een mogelijke verklaring kunnen zijn voor de reden waarom het wiskundeniveau van middelbare scholieren invloed heeft op het begrip van logisch paradoxale stellingen. Er wordt een ander deel van de hersenen geactiveerd. Deze stellingen veronderstellen ook enige wiskundige capaciteiten. Dit hangt samen met de discussie over deductief tegenover inductief redeneren. Deze resultaten ondersteunen wellicht de verschillende redeneerstrategieën (zoals besproken in de vorige paragraaf). Er is echter meer bewijs nodig voor deze aanname. Kunnen we stellen dat wiskundigen beter kunnen redeneren? Volgens degelijk onderzoek wel; er bestaat tenminste een correlatie.



Grafiek 14: Gemiddeld aantal correcte antwoorden (numbcorr) per groep. Overgenomen van Cresswell, C., & Spielman, C. P. (2020). *Does mathematics training lead to better logical thinking and reasoning? A cross-sectional assessment from students to professors.*

De grafiek hierboven komt uit een onderzoek van Cresswell & Spielman (2020). De studie vond dat deelnemers met een hogere wiskundeopleiding betere prestaties hadden op de logica- en redeneertaken of spelletjes (in totaal 11); ze hadden meer antwoorden goed. Je kunt in grafiek 14 zien dat het gemiddelde aantal juiste antwoorden per groep stijgt. Maar uit het onderzoek bleek dat er geen groot prestatieverschil was tussen de groepen met de hoogste wiskundeopleiding (zoals te zien is in grafiek 14). De onderzoekers concluderen dat een duidelijke correlatie is tussen wiskundeniveau en prestaties op logisch redeneren.

Dit betekent dat er ook een correlatie is tussen (accuraat en effectief) logisch redeneren en activiteit in andere gebieden van de hersenen. Een hoger wiskundeniveau kan deze hersenactiviteit versterken. En volgens dit onderzoek kan het daardoor ook helpen met logisch redeneren.

Dat gezegd hebbende, kunnen we nog geen causale verbanden trekken. Dit geldt zowel voor mijn onderzoek als dat van Cresswell & Speelman (2020). Men zou namelijk ook kunnen concluderen dat degenen die een hoger wiskundeniveau hebben of volgen van nature beter zijn in wiskunde – of een 'talent' voor wiskunde hebben. Er is in ieder geval een sterke correlatie. Nu is de vraag of dat wiskunde deel van het brein getraind kan worden; is iemand van nature beter in wiskunde – en dus logisch redeneren – of kan het aangeleerd worden. Is logisch redeneren te leren?

Conclusie

Er is een duidelijk verband tussen het wiskundeniveau van middelbare scholieren en hun begrip van paradoxen. Leerlingen met hogere wiskundige kennis behalen significant betere resultaten, wat wordt bevestigd door de berekeningen en analyses (Cramér's $V = 0,40$). Eerder onderzoek laat zien dat wiskundigen, in tegenstelling tot niet-wiskundigen, specifieke hersennetwerken gebruiken voor wiskundige stellingen wat logisch redeneren kan ondersteunen.

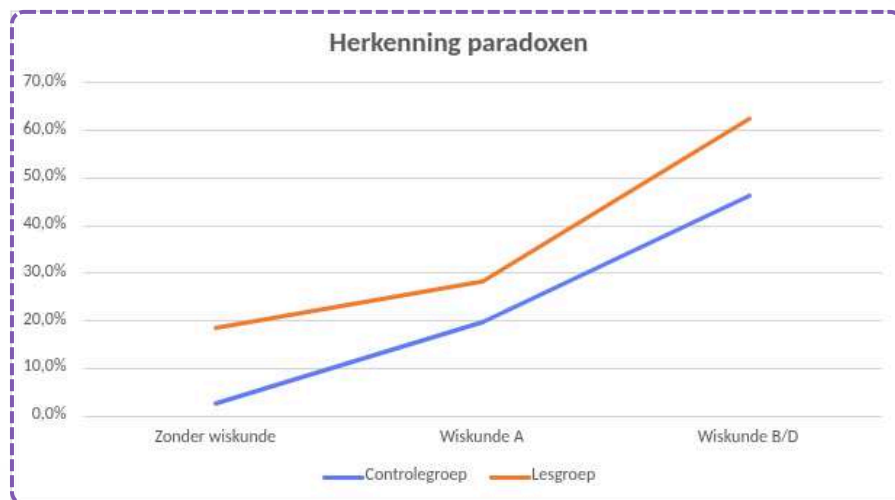
Hoewel er een sterke correlatie bestaat, kan er geen causaal verband worden getrokken: het is nog onduidelijk of logisch redeneren aangeleerd kan worden of vooral afhangt van aangeboren wiskundig talent. Wiskundige kennis lijkt echter een belangrijke factor bij het begrijpen van paradoxen. Dit sluit aan bij de hypothese van de tweede deelvraag onder 4.1.

4.5 Is de verwarring uit te roeien?

In deze paragraaf kijken we of logisch redeneren en het begrip van paradoxen gestimuleerd kan worden door middel van educatie. Op deze manier kunnen we beter beargumenteren of logisch of deductief redeneren aangeleerd kan worden of dat sommigen er simpelweg van nature beter in zijn.

Hiervoor heb ik een aantal lessen verzamelingenleer en Russells paradox gegeven. De opzet van deze lessen kunnen in detail bekeken worden in het ondersteunend ontwerpverslag. Maar kort beschreven ziet de opzet er zo uit: de lesgroepen ($n=166$) wordt in twee verdeeld. Ze starten beiden met een korte introductie tot de verzamelingenleer en worden daarna op twee verschillende manieren Russells paradox uitgelegd: een wiskundige (lesgroep A) en een taalkundige (lesgroep B) manier.

Het belangrijkste verschil in aanpak is dat lesgroepen A werd verteld dat Russells paradox ontstond uit de problematiek van het axioma van onbeperkte comprehensie en lesgroepen B werd verteld dat het ontstond door de verwarring tussen objecttaal en meta-taal. Er werd bij beide lesgroepen gelet op het niet letterlijk beantwoorden van de paradoxen op de vragenlijst of vergelijkbare versies. In *grafiek 15* worden de gemiddelde prestaties van beide lesgroepen vergeleken met de controle-groepen.



Grafiek 15: verschil in begrip van paradoxen. Controlegroepen ($n = 135$) versus lesgroepen ($n = 166$), Lyceum Ypenburg, 3MAVO-6VWO

In *grafiek 15* worden op de x-as de verschillende wiskundeniveaus weergegeven en op de y-as worden het aantal juiste antwoorden weergegeven tussen alle wiskundeniveaus en de twee groepen. Het gemiddelde percentage juiste antwoorden van de leerlingen zonder wiskunde groeide van 2,6% (controlegroep) naar 18,5% (lesgroep). Bij wiskunde A's groeide het van 19,6% (controle groep) naar 28,4% (lesgroep). En bij wiskunde B's groeide het van 46,3% (controlegroep) naar 62,5% (lesgroep). Voor het berekenen van de effectgrootte maken we weer gebruik van Cohen's h:

Verskil in juiste antwoorden: zonder wiskunde lesgroepen (p_1) tegenover zonder wiskunde controlegroepen (p_2):

$$2 \times \arcsin(\sqrt{0.185}) - 2 \times \arcsin(\sqrt{0.026}) \approx 0.57$$

Verskil in juiste antwoorden: wiskunde A lesgroepen (p_1) tegenover wiskunde A controlegroepen (p_2):

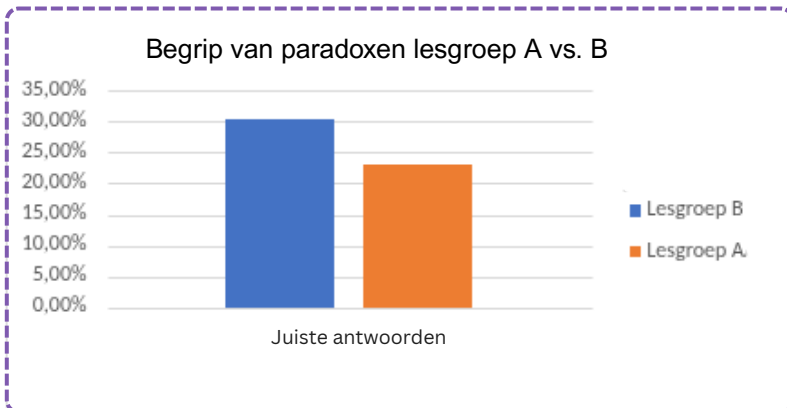
$$2 \times \arcsin(\sqrt{0.284}) - 2 \times \arcsin(\sqrt{0.196}) \approx 0.21$$

Verskil in juiste antwoorden: wiskunde B/D lesgroepen (p_1) tegenover wiskunde B/D controlegroepen (p_2):

$$2 \times \arcsin(\sqrt{0.625}) - 2 \times \arcsin(\sqrt{0.463}) \approx 0.33$$

Hierbij is een 0.2 weer een klein verschil, 0.5 een middelmatig verschil en 0.8 een groot verschil. Het grootste effect kunnen we zien bij de leerlingen zonder wiskunde: de effectgrootte zit net iets boven middelmatig. Daarentegen is het effect bij de wiskunde A's klein (met 0.21) en bij de wiskunde B/D's ook (met 0.33), hoewel het net iets meer richting matig gaat. De effecten zijn dus niet groot, maar het is niet triviaal – vooral voor één les. Zulke lessen hebben in dit onderzoek het meeste effect gehad op leerlingen zonder wiskunde. Dit onderzoek kan echter hoogstens als ondersteuning van een al plausibele conclusie.

In *grafiek 16* hieronder zien we het verschil in prestatie tussen de lesgroep A (met een percentage van 22,9%) en lesgroep B (met een percentage van 30,2%).



Grafiek 16: verschil in begrip van paradoxen. Lesgroepen A versus lesgroepen B ($n = 166$) Lyceum Ypenburg, 3MAVO-6VWO

Om het effect van het type les te berekenen benutten we nogmaals Cohen's h:

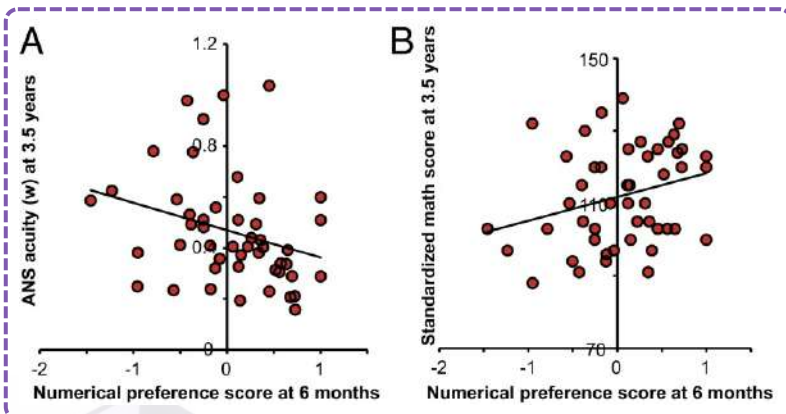
Verskil in juiste antwoorden: lesgroepen B (p_1) tegenover lesgroepen A (p_2):

$$2 \times \arcsin(\sqrt{0.302}) - 2 \times \arcsin(\sqrt{0.229}) \approx 0.17$$

Een effectgrootte van ~ 0.17 is een duidelijk klein effect: het verschil heeft waarschijnlijk eerder te maken met andere factoren, zoals het verschil in niveau van de klassen. Uit deze data kunnen we dusdanig geen plausible conclusie trekken. Dit ondermijnt tot op een bepaalde hoogte de hypothese bij zowel deelvraag 3 als de hoofdvraag van dit onderzoek.

Dit deel van mijn onderzoek is helaas ook verreweg het meest discutabel. Hoe de lessen werden opgezet heeft een groot effect op de resultaten: presteren leerlingen iets beter, omdat ze bepaalde redeneertechnieken leren of omdat ze op basis van de stof van de les het antwoord worden voorgerekauwd? Aan de andere kant, zou het probleem kunnen zijn dat de stof te moeilijk was voor de meesten om te begrijpen, waardoor het effect juist kleiner is. Daarnaast is één lesinterventie veel te kort om betekenisvolle data van te verzamelen.

Vanwege deze beperkingen is het belangrijk om te kijken naar de data uit andere onderzoeken. De meningen lijken op dit gebied nogal uiteen te lopen. Sommige onderzoeken lijken aan te tonen dat wiskundecapaciteiten genetisch zijn en andere niet. Zo bewijst Starr et al. (2013) dat peuters die als baby een sterkere voorkeur hadden voor de verandering in getallen hadden beter getalbegrip, scoorden hoger op gestandaardiseerde wiskundetests en konden beter tellen met woorden. Dit bleef waar zelfs na controle voor intelligentie. Dit toont aan dat er wel enig aanleg voor wiskunde aanwezig is. In *grafiek 17* zien we onder (A) een significante correlatie. Baby's met hogere voorkeurscores voor getallen hebben later betere nonsymbolische getalbegrip (gepresenteerd op de y-as: lager = beter). En in (B) zien we de positieve correlatie tot scores op wiskundetests.



Grafiek 17: numerieke voorkeurscores in de numerieke verandering-detectietaak op de leeftijd van 6 maanden zijn significant gecorreleerd met de scherpste van het Approximate Number System (ANS), zoals weergegeven door Weberfracties (w) (A), en met rekenvaardigheid (gestandaardiseerde rekenscores) (B) op de leeftijd van 3,5 jaar. Overgenomen van Starr, A., Libertus, M. E., & Brannon, E. M. (2013). *Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood*.

Een onderzoek van Echeveria, et al. (2025) nuanceert deze resultaten: hoewel aanleg een rol speelt, vormt iemands mindset (hoe leerlingen denken over hun eigen vermogen om wiskunde te leren) een veel belangrijkere factor in hoe goed iemand wiskunde leert en presteert. Met behulp van de een algoritme ontdekten de onderzoekers dat het meest invloedrijke factoren op de mindset van een leerling vorige wiskundecijfers, antwoorden op mindset-vragen en sommige aspecten van tijdmanagement en wiskundeangst zijn.

Verder onderzocht een experiment van Petrill, et al. (2009) de mogelijke genetische en omgevingsfactoren voor hoge wiskunde prestaties. Ze vonden dat een-eiige tweelingen (met hoge wiskunde prestaties) gelijk waren in hun prestaties dan twee-eiige tweelingen. Dit toont aan dat genetica een rol speelt – minstens in de algemene prestaties van kinderen. Ze vonden niettemin ook dat omgevingsfactoren een substantiële rol spelen in de prestaties van de tweelingen. Invloeden van de omgeving worden aangetoond, doordat zelfs genetisch identieke tweelingen niet volledig gelijk presteerden, en doordat twee-eiige tweelingen meer op elkaar lijken dan hun genetische overeenkomsten zou verklaren. Het gaat erom dat genetische aanleg de kans kan verhogen dat een kind goed presteert, maar omgeving, motivatie en ervaring blijven ook cruciaal. Factoren zoals schoolondersteuning, familie, toegang tot oefenmateriaal, leerervaringen en docenten dragen bij aan de prestaties van het kind.

Om dus een deterministische positie in te nemen is onproductief en niet in overeenstemming met de realiteit. Meerdere factoren spelen een rol. Zelfs een simpele "Hey, je bent hier erg goed in." van een docent of een klasgenoot had een leerling kunnen overtuigen om wat meer hun best te doen voor het vak of om de keuze voor wiskunde B in plaats van wiskunde A te maken. Daarentegen kunnen de kleinste commentaren ("Dat is een domme vraag...") ook een tegengesteld effect hebben. Dat lessen enig effect kunnen hebben op wiskundeprestatie is overduidelijk. Dit is in overeenstemming met de hypothese van de derde deelvraag (onder 4.1). In verband met de vorige paragrafen kunnen we daaruit voorzichtig concluderen dat wiskundekennis gecorreleerd is met deductief (of minstens *meer* deductief) en logisch redeneren en een beter begrip en herkenning van paradoxen. Hoe groot het effect *precies* is blijft echter nog een open vraag.

Algemene conclusie

Het onderzoek bevestigt dat paradoxen een aanzienlijk grotere uitdaging vormen dan simpele tegenstellingen. Uit de resultaten blijkt dat deelnemers tegenstellingen (zoals " $1 + 1 = 3$ " of "de cirkel is vierkant") vrijwel probleemloos herkennen en hierover zeer zeker zijn. Paradoxen, zoals de kappersparadox en de zin "Deze zin is onwaar," werden door slechts een klein deel van de deelnemers correct herkend (ongeveer 5–10%).

Het verschil tussen het begrijpen van tegenstellingen en paradoxen is statistisch en praktisch enorm: deelnemers waren 66 tot 139 keer beter in het herkennen van simpele tegenstellingen dan paradoxen. Het onderzoek laat zien dat het falen bij paradoxen niet per se voortkomt uit een gebrek aan logica, maar uit een verandering in redeneerstijl. Wanneer context en betekenis worden toegevoegd, stappen mensen over van deductief naar inductief redeneren.

Ze vullen gaten in met ervaring, aannames of verhalende interpretaties, terwijl de logische structuur van de paradox vaak onopgemerkt blijft. Dit sluit aan bij bestaande literatuur over contextafhankelijk redeneren en mogelijk evolutionaire adaptatie. Deze resultaten komen overeen met de hypothese.

Een tweede belangrijke bevinding betreft de rol van wiskundige kennis. De correlatie tussen het wiskundeniveau van middelbare scholieren en hun vermogen paradoxen te begrijpen was significant en middelgroot (Cramér's $V \approx 0,40$). Leerlingen met een hogere wiskundige achtergrond (bijvoorbeeld wiskunde B/D) presteerden veel beter dan leerlingen zonder wiskunde. Dit wordt ondersteund door eerder onderzoek dat aantoont dat wiskundigen specifieke hersennetwerken gebruiken bij logisch redeneren, wat het vermogen tot het verwerken van abstracte en paradoxale stellingen kan verbeteren.

Het derde deel van het onderzoek richtte zich op educatie: lessen over verzamelingenleer en Russells paradox hadden een positief, maar zeer bescheiden effect op het begrijpen van paradoxen. Het grootste effect werd gevonden bij leerlingen zonder wiskunde in de bovenbouw (Cohen's $h \approx 0,57$). Er bleek geen significant effect te zijn van één lesinterventie, noch lijkt er een betekenisvol verschil te zijn in effect tussen lesgroep A en B (Cohen's $h = \sim 0,17$), oftewel tussen de verschillende aanpakken. Dit ondermijnt de hypothese bij de hoofdvraag van dit onderzoek. Echter toont eerder onderzoek wel aan dat een gevoel voor wiskunde en logisch redeneren aangeleerd kan worden. Het wiskunde gedeelte van je hersenen kan getraind worden.

Dus om het antwoord op de vraag "Wat heb je eigenlijk aan wiskunde?" concreet te bevestigen: wiskunde helpt je om kritischer en logischer na te denken. Je herkent paradoxen beter en je ontwikkelt letterlijk een deel van je hersenen dat niet alleen helpt met wiskundige redeneringen, maar met redeneren überhaupt; een vaardigheid die essentieel is voor andere gebieden in je leven. Zoals John Locke, filosoof en natuurkundige, wat eloquenter zei:

"Ik heb de wiskunde genoemd als een manier om in de geest een gewoonte van nauwkeurig redeneren vast te stellen... elk afzonderlijk argument moet worden behandeld als een wiskundige demonstratie; de samenhang en afhankelijkheid van ideeën moet worden gevolgd totdat de geest bij de bron komt waarop het steunt, en de samenhang onderweg observeert..."
~ John Locke, *The Conduct of the Understanding*

CONCLUSIE

In dit boek stond één vraag centraal: **hoe toont Russells paradox de grenzen van taal en formele logica aan, en welke oplossingen zijn hiervoor bedacht?** Door dit stap voor stap te benaderen, vanuit zowel een wiskundig en filosofisch als taalkundig perspectief, is het duidelijk geworden dat Russells paradox veel meer is dan een 'denkfoutje'. De paradox legt een fundamenteel probleem bloot in de manier waarop wij (wiskundige) systemen bouwen om, op een bepaalde wijze, de werkelijkheid – en ons eigen denken – te beschrijven.

Allereerst hebben we onderzocht wat verzamelingenleer precies is. Verzamelingen blijken een onmisbaar fundament te vormen voor de moderne wiskunde en logica. We gebruiken ze niet alleen om wiskundige relaties te vormen en alles formeel te beschrijven, we gebruiken verzamelingen ook impliciet in ons dagelijks leven: we categoriseren, groeperen en abstraheren constant. Daarnaast is de verzamelingenleer een manier geweest om zelfs de simpelste concepten (zoals getallen) ex nihilo te scheppen. De naïeve verzamelingenleer, zoals die oorspronkelijk werd gebruikt door Cantor en zijn tijdgenoten, ging ervan uit dat voor elke denkbare eigenschap een verzameling gevormd kon worden. Juist deze prima facie onschuldige aanname blijkt later problematisch te zijn.

Vervolgens richtten we ons op de tweede deelvraag: wat is Russells paradox? Russells paradox ontstaat wanneer we de verzameling beschouwen van alle verzamelingen die zichzelf niet als element bevatten. De simpele maar verwoestende vraag of deze verzameling zichzelf wel of niet bevat, leidt onvermijdelijk tot een contradictie. Als zij zichzelf bevat, dan mag zij dat juist niet doen, en als zij zichzelf niet bevat, dan moet zij dat juist wel doen. Deze cirkelredenering laat zien dat het systeem van de naïeve verzamelingenleer zichzelf tegenspreekt.

Daarmee werd ook de derde deelvraag beantwoord: wat is de impact van Russells paradox op taal en logica? De paradox maakt duidelijk dat formele logica niet losstaat van taal. De manier waarop wij definities formuleren, voorwaarden stellen en abstracte concepten benoemen, kan directe gevolgen hebben voor de consistentie van een logisch systeem. Russells paradox toont aan dat zelfreferentie – iets wat in natuurlijke taal heel normaal is – in formele systemen gevaarlijk kan zijn. De logica blijkt dus niet onbeperkt toepasbaar zonder strikte regels, en taal blijkt minder onschuldig dan zij op het eerste gezicht lijkt. En Russells paradox toonde aan dat het niet de oorzaak is geweest voor het verval van de naïeve verzamelingenleer; het is slechts een symptoom. Het echte probleem zat in hoe het systeem benadert werd, en in het feit dat het speelveld geen duidelijke grenzen kende. Dus besloten wiskundige en logici te kijken wie het beste nieuwe regels kon bedenken zodat het spel zonder problemen gespeeld kon worden.

De vierde deelvraag richtte zich daarbij op de oplossingen die voor Russells paradox zijn bedacht en hoe deze van elkaar verschillen. Oplossingen zoals de typentheorie van Russell en het axiomatische systeem van Zermelo-Fraenkel (en later ZFC) proberen het probleem te vermijden door strengere regels op te leggen aan wat wel en niet als verzameling mag bestaan.

Deze oplossingen zijn effectief in het voorkomen van de paradox, maar dat kan ten koste gaan van intuïtieve vrijheid. Elke oplossing sluit bepaalde constructies uit en introduceert daarmee nieuwe filosofische vragen over wat 'bestaan' binnen de wiskunde eigenlijk betekent. Een perfect systeem bestaat niet; het is slechts perfect in zo verre het nuttig is binnen een specifiek gebied.

Tot slot hebben we met de onderzoeksvraag, die behandeld werd in deel 4, gekeken naar het effect van uitleg over deze oplossingen op het begrip van logisch paradoxale zinnen. Het doel was immers om te bewijzen dat paradoxen niet alleen fouten tonen in wiskundige systemen, maar ook in hoe jij – dagelijks – redeneert. Hieruit bleek dat wiskundekennis en redeneerwijze een grote rol spelen in hoe mensen paradoxen interpreteren. De verwarring die paradoxen oproepen is dus niet volledig uit te roeien, maar kan wel worden verminderd door inzicht te geven in de onderliggende structuren en aannames. Dit toont aan dat paradoxen, zoals Russells, niet alleen belangrijk zijn voor de abstracte wiskunde of logica, maar ook in jouw dagelijks leven.

Samenvattend laat dit werk zien dat Russells paradox niet alleen de grenzen van formele logica blootlegt, maar ook die van taal, intuïtie en menselijk begrip. De paradox dwingt ons om kritisch te kijken naar systemen die we als vanzelfsprekend aannemen en herinnert ons eraan dat zelfs de meest formele en rigoureuze wetenschap uiteindelijk fragiel is. Logica blijkt geen dogmatisch fundament te zijn, maar een zorgvuldig geconstrueerd bouwwerk – en soms raakt dat bouwwerk onvermijdelijk in de knoop.

Juist het herkennen van die beperkingen, en het vermogen om een consistent systeem op te bouwen *en* te analyseren, eist veel creativiteit en fantasie. In dat licht is de uitspraak van David Hilbert passend: toen hem werd verteld dat zijn student het vak wiskunde had opgegeven om dichter te worden, zei hij: *“Goed, hij had niet genoeg verbeelding om wiskundige te worden.”*

OVER DE SCHRIJVER

Ik ben Eva June Joanna van Opdorp (9 mei 2007), zit in de zesde klas van het gymnasium op Lyceum Ypenburg, en heb een uitgesproken interesse in filosofie. Ik ben geboren in Knokke-Heist, België, maar heb daar nooit gewoond. Tijdens mijn laatste schooljaar heb ik mij verdiept in onderwerpen uit de logica, verzamelingenleer, metawiskunde en de filosofie van de wiskunde, waaronder Russells paradox en vragen over zelfreferentie in formele systemen.

Ik heb nog geen formele opleiding gevolgd. Wel heb ik ontzettend veel geleerd door te lezen, te schrijven en nieuwsgierig te zijn. Het grootste deel van mijn kennis heb ik dus opgedaan door zelfstudie, waarbij ik mijn reguliere schoolcurriculum heb opgeofferd om me te verdiepen in onderwerpen die mij meer interesseren en uitdagen.

Dit is mijn tweede boek. Het is het resultaat van deze zelfstudie en vormt een eerste, zelfstandige poging om relatief complexe ideeën toegankelijk te maken voor een breder publiek, of in ieder geval voor mijzelf. Wanneer ik niet bezig ben met logica en filosofie, blijft er gelukkig ook nog tijd over voor het echte leven.

Welke academische richting ik later ook zal kiezen, ik vertrouw erop dat het een goede keuze zal zijn.

BIBLIOGRAFIE

A

- Al-Khalili, J. (2012). *Paradox: The Nine Greatest Enigmas in Physics*. Crown.
- Amalric, M., & Dehaene, S. (2016). Origins of the brain networks for advanced mathematics in expert mathematicians. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. <https://doi.org/10.1073/pnas.1603205113>

B

- Bagaria, J. (2014). Set theory. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- Bell, J. L. (2008). The Axiom of Choice. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- Blackwell, L. S., Trzesniewski, K. H., & Dweck, C. S. (2007). Implicit theories of intelligence predict achievement across an adolescent transition: A longitudinal study and an intervention. *Child Development*. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.00995.x>
- Bolander, T. (2008) Self-Reference and Paradox. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- Bonevac, D. (2022). *Russell's Paradox [Video]*. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=1K3rJ11uWo>
- Buskes, C. (2014). *Analytische filosofie: Een inleiding*. Vantilt.

C

- Cantini, A. (2007). Paradoxes and contemporary logic. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- Cantor, G. (1895). Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers: First article. *Mathematische Annalen*, 46(4), 481–512. <https://doi.org/10.1007/BF01443808>
- Coquand, T. (2006) Type Theory. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- Craig, W. L. (2001). Time and eternity: Exploring God's relationship to time. *Crossway*.
- Cresswell, C., & Speelman, C. P. (2020). Does mathematics training lead to better logical thinking and reasoning? A cross-sectional assessment from students to professors. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0236153>

D

- Dean, W. (2020). Recursive Functions. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- Dowden, B. (z.d.). Fallacies. *Internet Encyclopedia of Philosophy*.
- Dummett, M. (1973). *Frege: Philosophy of Language*. Harper & Row.

E

- Echeveria, J. M., Bajao, C. J., & Godinez, C. D. O. (2025). Modeling students' mindset in mathematics: A data mining approach for early intervention. *European Journal of Education and Pedagogy*. <https://doi.org/10.24018/ejedu.2025.6.6.934>
- Elsevier. (z.d.). Metamathematics. *ScienceDirect Topics*. <https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/metamathematics>

F

- Ferreirós, J. (2007). The early development of set theory. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- Friedberg, S. H., Insel, A. J., & Spence, L. E. (1979). *Linear algebra*. Prentice-Hall.
- Friedrich Miescher Institute for Biomedical Research, (2013). *Probability-1*. https://www.fmi.ch/courses/comp_neuroscience/files/Probability-1.pdf

Frumin, D. (2025). Ondersteunend ontwerpverslag: didactiek is de sleutel tot kennis. Persoonlijke communicatie.

G

Gazzo Castañeda, L. E., Sklarek, B., Dal Mas, D. E., & Knauff, M. (2023). Probabilistic and deductive reasoning in the human brain. <https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2023.120180>

Gödel, K. (1931). On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems. https://homepages.uc.edu/~martinj/History_of_Logic/Godel/Godel%20-%20On%20Formally%20Undecidable%20Propositions%20of%20Principia%20Mathematica%201931.pdf

Grayling, A. C. (2002). Russell: A Very Short Introduction. OUP Oxford.

Gupta, A. (1981). Truth and paradox. *Journal of Philosophy*

H

Hallett, M. (2013). Zermelo's Axiomatization of Set Theory. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*

Halmos, P. R. (1960). Naive set theory. Van Nostrand.

Hart, K. P. (2007). Topologie [PDF]. Delft University of Technology.

<https://fa.ewi.tudelft.nl/~hart/37/onderwijs/topologie/topologie.pdf>

Hart, K. P. (2020). MasterMath: College [Video]. Vimeo. <https://vimeo.com/748817710>

Hart, K.P. (2025). Ondersteunend ontwerpverslag: didactiek is de sleutel tot kennis. Persoonlijke communicatie.

Hazewinkel, M. (2005). Hilbert's 1990 ICM lecture. The 23 problems. CWI. [PDF]

<https://ir.cwi.nl/pub/10618/10618B.pdf>

Hodges, W. (2001). Model theory. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Hodges, W. (2022). Tarski's truth definitions. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Holmes, R. (2012). Naive set theory. Universiteit van Boise State.

Horsten, L. (2011). Philosophy of mathematics. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Hugget, N. (2002). Zeno's Paradoxes. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

I

Irvine, A. D., & Deutsch, H. (1995). Russell's paradox. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

J

Jech, T. (2003). Set theory (3e editie). Springer.

K

Kaplan, J. (2022) Russell's Paradox — a simple explanation of a profound problem [Video].

YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=ymGt7l4Yn3k>

Khemlani, S. S., & Johnson-Laird, P. N. (2012). Hidden conflicts: Explanations make inconsistencies harder to detect. *Acta Psychologica*. <https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2012.01.010>

Klos, T. (2016). Hoofdstuk 1: Wat is logica [PDF]. Technische Universiteit Delft. [OpenCourseWare. https://ocw.tudelft.nl/wp-content/uploads/Redeneren_en_Logica_Logica_H01.pdf](https://ocw.tudelft.nl/wp-content/uploads/Redeneren_en_Logica_Logica_H01.pdf)

Koellner, P. (2013). The Continuum Hypothesis. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*

Koepke, P. (2008). Set Theory [PDF]. <https://www.math.uni-bonn.de/ag/logik/teaching/2008WS/settheory.pdf>

Kooi, B. (2025). Ondersteunend ontwerpverslag: didactiek is de sleutel tot kennis. Persoonlijke communicatie.

Korbmacher, J. (2012). The Lambda Calculus. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Kunen, K. (1980). Set Theory: An Introduction to Independence Proofs. In *Studies in logic and the foundations of mathematics*. North-Holland.

L

Landini, G. (z.d.). Russell: Logic. *Internet Encyclopedia of Philosophy*.

Linnebo, Ø. (2009). Platonism in the philosophy of mathematics. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

M

Menzel, C. (2013). Possible worlds. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Mulisch, H. (1980). De compositie van de wereld. De Bezige Bij.

Munkres, J. R. (2000). Topology (2nd ed.). Prentice Hall.

N

Nagwa. (z.d.). Lesson Explainer: Injective Functions.

<https://www.nagwa.com/en/explainers/325195021481/>

P

Paulin, A. (z.d.). Introduction to abstract algebra [PDF]. University of California, Berkeley.

<https://math.berkeley.edu/~apaulin/AbstractAlgebra.pdf>

Petrill, S. A., Kovas, Y., Hart, S. A., Thompson, L. A., & Plomin, R. (2009). The genetic and environmental etiology of high math performance in 10-year-old twins. *Behavior Genetics*. <https://doi.org/10.1007/s10519-009-9258-z>

Pinter, C. C. (1971). A book of set theory. Addison-Wesley.

Priestley, H.A. (2011). Introduction to Groups, Rings and Fields. [PDF]. University of Oxford.

<https://people.maths.ox.ac.uk/flynn/genus2/sheets0405/grfnotes1011.pdf>

R

Raatikainen, P. (2013). Gödel's incompleteness theorems. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Ramanayake, R. (2025). Ondersteunend ontwerpverslag: didactiek is de sleutel tot kennis. Persoonlijke communicatie.

Reichard, L.A. (2021). Wiskunde C 5 vwo: Getal en ruimte. Noordhoff.

Russell, B. (1912). The problems of philosophy. Oxford University Press.

S

Sanderson, G. (2017). Limits, L'Hôpital's rule, and epsilon-delta definitions [Video]. YouTube.

<https://www.youtube.com/watch?v=kfF40MiS7zA>

Sangalad, L. V. (2019). Set theory and its role in modern mathematics – an analysis. *Journal of Emerging Technologies and Innovative Research*. <https://www.jetir.org/papers/JETIR1912270.pdf>

Saponara, M., Fernandez Domingos, E., Pacheco, J. M., & Lenaerts, T. (2025). Evolution favours positively biased reasoning in sequential interactions with high future gains. *arXiv*.

<https://arxiv.org/abs/2508.20799?utm>

Starr, A., Libertus, M. E., & Brannon, E. M. (2013). Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. <https://doi.org/10.1073/pnas.1302751110>

Struchiner, N., de Almeida, G. F. C. F., & Hannikainen, I. R. (2020). Legal decision-making and the abstract/concrete paradox. *Cognition*. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2020.104421>

T

Tamir, D. I., Bricker, A. B., Dodell-Feder, D., & Mitchell, J. P. (2015). Reading fiction and reading minds: the role of simulation in the default network. *Social Cognitive and Affective Neuroscience*. <https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC4733342/>

U

Urquhart, A. (2003). The theory of types. *The Cambridge Companion to Bertrand Russell* (pp. 286–309). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CCOL0521631785.009>

W

Weir, A. (2024). Formalism in the philosophy of mathematics. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

West, D. (1996). *Continental philosophy: An introduction*. Polity Press.

Whitehead, A. N., & Russell, B. (1910–1913). *Principia mathematica* (Vols. 1–2). Cambridge University Press.

Wittgenstein, L. (1922). *Tractatus Logico-Philosophicus*. Routledge & Kegan Paul.

BIJLAGE: ANTWOORDEN

OEFENOPGAVEN

1.1 Denken in hokjes 1

Opdracht 1

$$(B \cap C) \subset A$$

Opdracht 2

Axioma van extensie: Twee verzamelingen zijn gelijk als en slechts als ze precies dezelfde elementen hebben:

$$X=Y \Leftrightarrow (\forall z(z \in X \Leftrightarrow z \in Y))$$

Stel dat $\emptyset 1$ en $\emptyset 2$ beide lege verzamelingen zijn.

Dan geldt $\forall z(z \notin \emptyset 1) \wedge \forall z(z \notin \emptyset 2)$, dan geldt voor alle z :

$z \in \emptyset 1 \Leftrightarrow z \in \emptyset 2$ (omdat beide altijd leeg zijn).

Dus $\emptyset 1 = \emptyset 2$; De lege verzameling is uniek.

Opdracht 3

Laat $x \in A \cup (B \cap C)$

- Dan geval 1: $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Geval 2: $x \in B \cap C \Rightarrow x \in B$ en $x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Dus $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Stap 2 – Rechts $\subseteq$ Links

Laat $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- Dan $x \in (A \cup B)$ en $x \in (A \cup C)$
- Geval 1: $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$
- Geval 2: $x \notin A \Rightarrow x \in B$ en $x \in C \Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$

Dus weer $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

Opdracht 4

a) $\{2, 4, 6, 8\}$, met kardinaliteit $|A| = 4 \setminus \{2, 4, 6, 8\}$

b) De verzameling van alle planeten in ons zonnestelsel:

$\{\text{Mercurius, Venus, Aarde, Mars, Jupiter, Saturnus, Uranus, Neptunus}\}$, met $|B| = 8$

1.1 Denken in hokjes 2

Opdracht 1

- a) injectief
- b) niet injectief
- c) niet injectief

Opdracht 2

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -9\}$ is leeg, want een kwadraat van een reëel getal kan nooit negatief zijn.

Opdracht 3

Er kan geen bijjectie $f: X \rightarrow P(X)$ bestaan, want er geldt $|X| < |P(X)|$, dus je kunt X niet één-op-één en op volledig in $P(X)$ afbeelden.

1. 2 Het aftelbare en het ontelbare

Opdracht 1

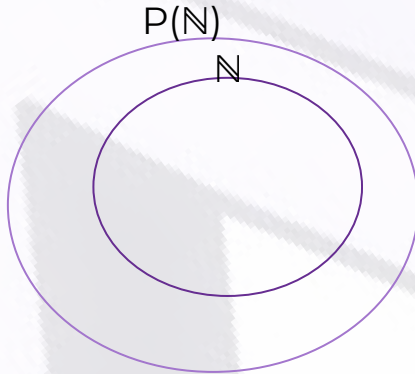
Omdat $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$, zijn er altijd meer spelers dan stoelen.

Opdracht 2

a) De verzameling van alle even natuurlijke getallen is aftelbaar. Je kunt ze namelijk één-op-één koppelen aan $\mathbb{N}$ via $n \rightarrow 2n$.

b) De verzameling van decimale getallen tussen 0 en 1 met alleen 0 en 1 is niet-aftelbaar, want Cantor's diagonalisatie laat zien dat deze reeksen dezelfde macht als $\mathbb{R}$ hebben.

Opdracht 3



1. 4 Waarom wiskundigen van verzamelingen houden

Opdracht 1

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$

$$|\mathbb{R}| = \aleph_1 \text{ (volgens het continuüm)}$$

Opdracht 2

a) Abstracte algebra: Groepen, ringen en velden bestaan uit verzamelingen met extra operaties; zonder verzamelingen kan je de elementen en structuren niet definiëren.

b) Analyse: Limieten, functies en reeksen worden gedefinieerd op verzamelingen zoals $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ en deelverzamelingen daarvan.

c) Topologie: Open verzamelingen en begrippen als continuïteit zijn opgebouwd uit verzamelingen en hun eigenschappen. Topologie is eigenlijk de studie van speciale verzamelingen.

Opdracht 3

Eigen antwoord, bijvoorbeeld:

De ontdekking van niet-aftelbare verzamelingen liet zien dat niet alle oneindige verzamelingen gelijk zijn. Wiskundigen beseften dat er verschillende groottes van oneindigheid zijn en dit leidde tot diepere inzichten in functies, continuïteit en abstracte structuren.

2.1 Paradox: contradictie of illusie?

Opdracht 1

Veel mensen denken dat de kans dat twee mensen dezelfde verjaardag hebben klein is, omdat er 365 dagen zijn. Intuïtief vergeten ze dat het gaat om alle mogelijke *paren* van mensen, niet slechts één paar. Hoe meer paren, hoe groter de kans dat er een match is.

Opdracht 2

- a) Geen paradox. De zin is gewoon waar of onwaar en veroorzaakt geen tegenstrijdigheid.
b) wel paradox Als de zin waar is, dan zegt hij dat hij onwaar is, maar als hij onwaar is, dan klopt de uitspraak dat hij onwaar is, en dat is tegenstrijdig.

Opdracht 3

Eigen antwoord.

2.3 De spiegel van logica en hoe het barst

Opdracht 1

Niet alle verzamelingen die je kunt bedenken bestaan als legitieme verzamelingen. Of: je moet voorzichtig zijn met zelfreferentie om tegenstrijdigheden te voorkomen.

Opdracht 2

$R = \{x \mid x \notin x\}$, de verzameling van alle verzamelingen die zichzelf niet bevatten.

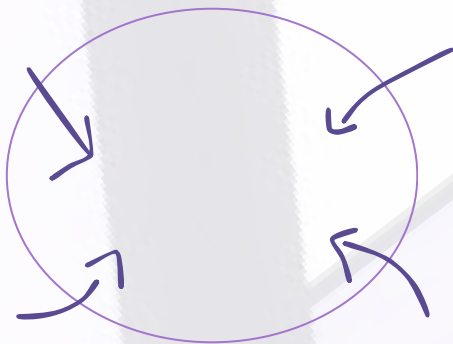
Het probleem: Stel $R \in R$. Dan moet $R \notin R$.

Stel $R \notin R$. Dan moet $R \in R$.

Aldus een paradox: R kan niet bestaan.

Opdracht 3

Onmogelijk. De pijlen in de diagram verwijzen naar zichzelf.



2.4 Verdieping Gödel

Opdracht 1

Het idee is: elk symbool in wiskunde krijgt een uniek getal.

Eigen antwoord, bijvoorbeeld:

- $0 = 1$
- $S = 2$
- $+= 3$
- etc....

Opdracht 2

Bijvoorbeeld: filosofie, taal of wetgeving. In elke formeel systeem bestaan waarheden die niet volledig afleidbaar zijn binnen dat systeem.

Opdracht 3

- a) Als F consistent is, stel dan dat G kan bewezen worden. Dan is G onwaar (want het zegt zelf dat het niet bewijsbaar is). Dit leidt tot een contradictie. Conclusie: G kan niet bewezen worden.
- b) Als G wel bewijsbaar is: dan zegt het "ik ben niet bewijsbaar" terwijl het wél bewijsbaar is, dus F is inconsistent.

2.5 Wat betekent dit voor taal?

Opdracht 1

Objecttaal, bijvoorbeeld: "Je mag niet rennen in de gang."

Meta-taal, bijvoorbeeld: "De regel 'Je mag niet rennen in de gang' is bedoeld om veiligheid te garanderen."

Opdracht 2

Bijvoorbeeld een boek op je bureau: "Het kortste voorwerp in mijn kamer dat niet met meer dan vijf woorden beschreven kan worden."

Opdracht 3

Bijvoorbeeld: "De uitspraak die zegt dat zij zelf onwaar is, is onwaar."

3.1 Zermelo-Fraenkel: een strakkere aanpak

Opdracht 1

$x \in V_2$

Opdracht 2

$K = \{n \in \mathbb{J} \mid n \text{ is priem}\} = \{2, 3, 5, 7\}$.

Volgens ZF is K een 'echte' verzameling, omdat we uit een bestaande verzameling J een deelverzameling kunnen vormen die aan de eigenschap priem voldoet.

Opdracht 3

Geordende paren (als verzamelingen volgens Kuratowski): $f = \{(0,1), (1,2), (2,0)\}$

Formeel als verzamelingen:

$(0,1) = \{\{0\}, \{0,1\}\}, (1,2) = \{\{1\}, \{1,2\}\}, (2,0) = \{\{2\}, \{2,0\}\}$

3.2 De introductie van een keuze

Opdracht 1

a) Een verzameling is welgeordend als er een *orde-relatie* bestaat waarbij elke niet-lege deelverzameling van X een eerste element heeft. Dit betekent dat je altijd het "kleinste" element van een deelverzameling kunt aanwijzen.

b) Om een eerste element uit elke deelverzameling te kiezen, moet je een soort regel van selectie hebben. Voor eindige verzamelingen is dat geen probleem, maar voor oneindige verzamelingen is dit precies de stap waarbij het keuzeaxioma nodig is.

Opdracht 2

Het is paradoxaal, want een bal kan worden opgesplitst in eindig veel stukken en via transformaties weer in twee ballen van dezelfde grootte worden gezet.

Waarom geen tegenspraak in ZFC: de stukken zijn niet-materiële verzamelingen, dus het bevat natuurlijk geen fysiek volume.

Opdracht 3

Bijvoorbeeld: $\{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$.

3.3 Russells oplossing: type theorie

Opdracht 1

Het getal 3 = Type 0

De verzameling $\{1,2,3\}$ = Type 1

Het predicaat "is een natuurlijk getal" = Type 1

Het predicaat "is een predicaat over natuurlijke getallen" = Type 2

Opdracht 2

a) Probeer je Ω in te vullen:

$(\lambda x.x x)(\lambda x.x x) \rightarrow (\lambda x.x x)(\lambda x.x x) \rightarrow \dots$

Het blijft zichzelf oneindig lang toepassen; er is geen eindpunt.

b) Net zoals Russell's paradox een verzameling definieert die zichzelf bevat of niet bevat, probeert Ω een functie op zichzelf toe te passen.

Opdracht 3

Het kan vaak als ad hoc worden gezien, want het voelt erg na-de-hand toegevoegd om bepaalde paradoxen te vermijden en de theorie werkbaar te maken. En het is daarnaast niet afgeleid uit meer fundamentele principes, maar ingevoerd puur om wiskundige problemen op te lossen.

3.4 Een taalkundige aanpak

Opdracht 1

Bijvoorbeeld: "Het schilderij dat alle gevoelens van verdriet uitbeeldt."

Het probleem is dat geen uniek, goed gedefinieerd object is dat aan deze omschrijving volledig voldoet. De zin is dus grammaticaal correct, maar verwijst niet naar iets concreets.

Opdracht 2

a) Impredicatief.

b) Impredicatief.

c) Impredicatief.

d) Impredicatief.

Opdracht 3

Eigen antwoord.

3.5 Verdieping CH

Opdracht 1

Er bestaat een verzameling van reële getallen waarvan de kardinaliteit tussen $\aleph_0$ en $\mathbb{R}$ ligt. Dit betekent dat het continuüm niet het eerstvolgende oneindige getal na $\aleph_0$ is.

Opdracht 2

Gödel toonde alleen dat CH consistent is met ZFC, alleen als ZFC zelf consistent is. Het bewijst niet dat CH waar is in het echte universum V . Het is slechts een mogelijk model.

Opdracht 3

Alleen *definieerbare* verzamelingen zijn in L . Definieerbaarheid beperkt het aantal verzamelingen. er ontbreken dus veel niet-definieerbare verzamelingen uit V . Daardoor is L kleiner dan V en overzichtelijker; elk object is namelijk "constructible".

Opdracht 4

Gödel	Cohen
<i>Universum wordt alleen definieerbare verzamelingen</i>	<i>Universum wordt een universeel model uitgebreid met extra verzamelingen</i>
<i>Strategie: beperk het universum</i>	<i>Strategie: forcing toevoegen van nieuwe verzamelingen</i>
<i>CH waar</i>	<i>CH mogelijk onwaar</i>

Opdracht 5

Eigen antwoord.

Logica in de knoop

Dit boek behandelt de grenzen van de wiskunde. Het gaat stapsgewijs door de fundamenteën van de verzamelingenleer en de logica, en laat zien hoe een eenvoudige paradox grote gevolgen kan hebben voor de wiskunde.

De theorie wordt steeds geplaatst in een historische en conceptuele context, om te laten zien waarom deze paradox zo'n grote invloed heeft gehad op de ontwikkeling van de moderne wiskunde. Daarnaast onderzoekt het boek hoe mensen omgaan met paradoxale redeneringen en waar het begrijpen van abstracte wiskundige ideeën vastloopt.

Logica in de knoop laat zien dat het begrijpen van wiskunde niet alleen draait om regels en formules, maar ook om de manier waarop we denken.

"PWS-interviews waren leuk, maar eten was leuker."

- Lakshmi Chirmoti

"Universele verzameling bestaat niet."

- Olivia Hira