Over de Bell Numbers

Wat zijn bijzondere eigenschappen van de Bell Numbers?

Nick Lucassen 6C, Rogier Lunshof 6C

Stedelijk Gymnasium Nijmegen

Wiskunde B & Wiskunde D

Begeleider: Tim Verheijen

12 februari 2026

Abstract. De Bell Numbers tellen het aantal partities van een set in niet-lege subsets. We bestuderen manieren van het genereren en de vele voorkomingen van de Bell Numbers. Hiervoor gebruiken we analyse, getaltheorie, set-theorie, groepentheorie, combinatoriek en verschillende scripts. Het n-de Bell Number B_n kan worden beschreven met de som $B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$, maar ook met de som $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$. Ook maken we gebruik van Padé-benaderingen en taylorreeksen.

1 Voorwoord

Vanaf de derde klas zitten we bij elkaar in de klas. We hebben altijd een liefde voor wiskunde gehad en zo ontstond er een band. We hebben samen vele wiskundige projecten gedaan en waren klaar voor een grotere uitdaging. Door onze zelfstudie liggen we vaak ver voor op de stof die in de les behandeld wordt en zo raken we verveeld tijdens de lessen. Om de verveling tegen te gaan bedenken we puzzels of vragen waar we op ingaan. Een van deze puzzels die we voor onszelf hadden bedacht, was de som $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$. Deze som wisten we uit te werken naar de waarde $2e$. Hierna hielden we onszelf bezig met de som $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$. Deze kwam uit op $5e$. Door steeds de macht k van $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$ te veranderen, kwamen we uit bij de rij: $e, e, 2e, 5e, 15e, 52e, \ldots$ voor $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ De resulterende rij van coëfficiënten vóór e hadden we toen opgezocht en dat bleek overeen te komen met de Bell Numbers. Toen we later een onderwerp zochten voor ons profielwerkstuk (PWS), kwamen we al gauw terug bij de Bell Numbers. Het feit dat we de connectie hierboven zelf hadden gevonden, gaf het een erg persoonlijke link. Zodanig deden we ons PWS over de Bell Numbers.

Om alle complexe wiskundige uitdrukkingen goed op papier te kunnen zetten, hebben we onszelf het opmaaksysteem LaTeX aangeleerd. Dit was een grotere taak dan we eerst dachten en nam veel tijd en oefening in beslag. Door de hoofdstukken heen is onze groeiende behendigheid in LaTeX vrij duidelijk zichtbaar. Verder hebben we een aantal dingen ook zelf moeten bewijzen en/of ontdekken. We hebben onszelf erg verdiept in wiskundige notaties en het schrijven van wiskundige bewijzen. Ook hebben we een aantal scripts in Python geschreven. We hebben door dit werkstuk geleerd hoe het is om veel literatuuronderzoek te doen en hoe lastig het is om complexe onderwerpen duidelijk uit te leggen.

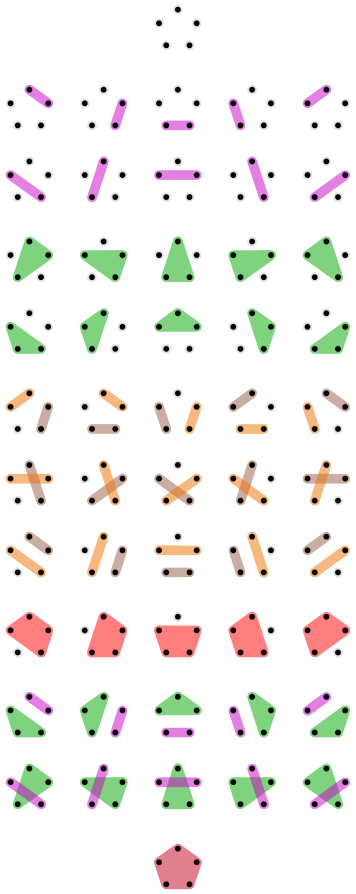
We willen graag onze begeleider Tim Verheijen bedanken voor de tijd die hij voor ons heeft vrijgemaakt. Zonder zijn precieze en constructieve feedback, zowel inhoudelijk als taalkundig, was dit werkstuk er minder goed uitgekomen. Tevens bedanken we Martijn Leisink en Freek van Megen voor hun constante steun door de jaren heen.

Nijmegen, 12 februari 2026
Nick Lucassen
Rogier Lunshof

Inhoudsopgave

2 Introductie

Wij doen ons PWS over de Bell Numbers, ook wel de *Getallen van Bell* genoemd. De Bell Numbers tellen het aantal partities om een set objecten te verdelen in niet-lege subsets. Dit houdt in dat de set $S := \{a, b, c\}$ als volgt wordt opgedeeld: $\overbrace{\{a, b, c\};\ \{\{a, b\}, \{c\}\};\ \{\{a, c\}, \{b\}\};\ \{\{a\}, \{b, c\}\};\ \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}}^{5}$. Hieruit volgt dat het derde Bell Number 5 is. De Bell Numbers zijn als volgt: 1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, ... (reeks A000110 in de OEIS, zie bron [1]). Deze reeks gaat oneindig door. Vanaf nu noteren we het n-de Bell Number als B_n. Dus $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$ en verder... Overigens maakt de volgorde van de objecten niet uit, i.e. $\{a, b\} = \{b, a\}$. Een manier om de Bell Numbers te visualiseren is dat ze tellen hoeveel manieren er zijn om een gedicht van n regels te laten rijmen. Hieronder staat ook een visualizatie van het vijfde Bell Number. Hier en daar zullen we voor geïnteresseerden een opdracht neerzetten. Deze zijn niet nodig om de onderwerpen te begrijpen, maar zijn wel een goede manier om jezelf bekend en comfortabel te maken met de stof.



Figuur 1: Een visualizatie van het vijfde Bell Number (zie bron [2])

3 Definities

Hier volgen enige benodigde definities die we gaan gebruiken in dit werkstuk. Sommige van deze definities ken je misschien al, maar het is nooit verkeerd om het allemaal op te frissen. Wees niet bang om af en toe terug te bladeren naar dit hoofdstuk.

3.1 Set-theorie en functies

- We noteren een definitie met het symbool := , dus bijvoorbeeld: $x^2 := x \cdot x$.
- Een *set* A is een verzameling objecten (of elementen) $a_1, a_2, \ldots, a_i$. Zo'n set noteer je als $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$. De grootte (het aantal objecten) van A is $|A| = i$.
- Een *index* - meervoud indices - (vaak aangegeven met de letters i, j) is een label dat naar een plaats of een object in een set duidt. Neem bijvoorbeeld $S := \{A, B, C, D\}$, dan is het object met index 3 gelijk aan C.
- Het symbool $\in$ geeft aan dat een element tot een set behoort. Dus als $S := \{A, B\}$, dan $A \in S$ (A is een element van S).
- Het symbool $\forall$ betekent "voor iedere". Dus $\forall x$ komt neer op "voor iedere x".
- We noteren $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ en $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. $\mathbb{R}$ zijn de reële getallen, daar vind je $\pi, e, \sqrt{2}, \ldots$
- We noteren $\mathbb{Z}_p$ als de set $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Dit noemen we ook wel de getallen modulo p.
- Een *veld* is een set getallen waarvoor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen goed gedefinieerd zijn. De getallen $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ maken bijvoorbeeld een veld. We noteren velden als $\mathbb{F}$ en dit specifieke veld als $\mathbb{F}_p$.
- Het symbool $\exists$ betekent "er bestaat". De stelling $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists\, y \in \mathbb{N} : y = x + 1$ betekent dus: voor elk natuurlijk getal x is er een natuurlijk getal y waarvoor geldt dat $y = x + 1$.
- De set zonder elementen $\{\}$ heet de *lege set*. Dit is een set en wordt ook wel als $\emptyset$ genoteerd.
- Een set bevat geen identieke elementen, i.e. $\{a, a\} = \{a\}$.
- Het *verenigen* van de objecten uit sets $A := \{a_1, \ldots, a_i\}$ en $B := \{b_1, \ldots, b_j\}$ wordt genoteerd als $A \cup B := \{a_1, b_1, \ldots, a_i, b_j\}$.
- De *doorsnede* $\cap$ van twee sets $A := \{1, 2\}$ en $B := \{2, 3, 4\}$ is de set van elementen die in A zitten en ook in B zitten. Dus $A \cap B := \{2\}$.
- Een set A is een *subset* van een set B als elk object in A ook in B zit. Dit noteren we $A \subseteq B$. Er is sprake van een *strikte subset* A als elk element in A ook in B zit, maar niet elk element van B in A zit. Dit noteer je als $A \subsetneq B$. Bijvoorbeeld $\{1, 3\} \subsetneq \{1, 2, 3, 4\}$.
- Het *in-exclusie principe* houdt in dat $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, oftewel: het aantal elementen van sets A en B samen is het aantal elementen van A en het aantal elementen van B, waarbij alle elementen die in A én B zitten worden samengevoegd naar één element. Als $A := \{1, 2, 3\}$ en $B := \{3, 4, 5\}$, dan $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = |\{1, 2, 3, 3, 4, 5\}| - |\{3\}| = 6 - 1 = 5$.
- Een functie $f\colon A \to B$ is *injectief* als voor $x_1, x_2 \in A$ geldt $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$; geen twee verschillende elementen uit A worden aan hetzelfde element in B gekoppeld. f is *surjectief* als voor elk element in B er minstens één object in A is aan wie het is gekoppeld. f is *bijectief* als f zowel injectief als surjectief is. Voor eindige sets geldt: bijectie $\Rightarrow |A| = |B|$, injectie $\Rightarrow |A| \leq |B|$, surjectie $\Rightarrow |A| \geq |B|$.

- Een *partitie* P van A is de verzameling van sets $D_1, D_2, \ldots$ van A waarbij elk object uit A ergens in P zit en $D_i \neq \emptyset$ (P is een set bestaande uit subsets $D_1, D_2, \ldots$ waar alle objecten uit A in worden verdeeld. Hierbij wordt geen enkele D_i leeggelaten). Ook geldt dat $D_i \cap D_j = \emptyset$ (geen twee opdelingen delen een element) en dus als D zo een opdeling is, dan geldt $\bigcup_{D \in P} = A$ (het verenigen van alle opdelingen in P geeft A).

3.2 Combinatoriek

- We noteren de faculteit $n!$ als het aantal manieren om n objecten in een volgorde te zetten. Voor de eerste plek zijn er n opties, voor de tweede plek zijn er $n-1$ opties, etc. $n! = n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1)$. Hieruit volgt $n! = n \cdot (n-1)!$. Als er geen object is ($n = 0$) dan is er maar één volgorde mogelijk: de lege volgorde. Hierdoor definieert men $0! := 1$ en dit is de startwaarde van de faculteit.
- We noteren $\binom{n}{k}$ voor het aantal manieren om k objecten uit een groep van n te kiezen. Er geldt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$. Dit laatste is in te zien doordat nadat je k objecten hebt gekozen uit n er $n-k$ niet gekozen zijn. Het aantal manieren om $n-k$ objecten niet te kiezen, is dus hetzelfde aantal als het aantal manieren om k objecten wél te kiezen.

3.3 Somrijen

- We noteren een *somrij* $a_0 + a_1 \ldots + a_n$ als $\sum_{i=0}^{n} a_i$. De hoofdletter sigma betekent de som die gaat van $i = 0$ naar $i = n$ voor alle waarden a_i.
- Oneindige somrijen zijn ook mogelijk: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Deze somrijen kunnen samenkomen tot één waarde $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = x$ met $x \in \mathbb{R}$. Dit samenkomen tot één waarde noemen we *convergentie*. Als de termen naar $\pm$ oneindig gaan, oftewel $\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \pm\infty$, dan *divergeert* de rij. Een rij waarbij $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ (de termen niet naar 0 gaan) divergeert altijd.
- De notatie lim staat voor *limiet* (grenswaarde). De uitdrukking $\lim_{x \to a} f(x) = L$ betekent dat de waarden van $f(x)$ steeds dichter bij het getal L komen wanneer x steeds dichter bij a komt, zonder dat x noodzakelijk gelijk is aan a. Hierbij mag a elk getal aannemen (ook $\pm\infty$!).
- We noteren $\lfloor x \rfloor$ als het afronden naar onder van x, bijvoorbeeld: $\lfloor 3,141 \rfloor = 3$ en $\lfloor -2,718 \rfloor = -3$. We noteren $\lceil x \rceil$ als het afronden naar boven van x: $\lceil 1,618 \rceil = 2$ en $\lceil -0,577 \rceil = 0$.
- De grote hoofdletter pi geeft een *productrij* aan. Deze vermenigvuldigt alle termen. Als voorbeeld: $\prod_{n=1}^{x} n = 1 \cdot 2 \ldots \cdot x = x!$

3.4 Functies en recursieve formules

- Een *functie* koppelt aan iedere invoer in haar domein (meestal het getal x) precies één uitvoer (meestal een getal y). Functies werken niet alleen met getallen: ze kunnen ook verzamelingen, punten of andere manieren van invoer en uitvoer gebruiken. Een functie f met invoer x wordt genoteerd als $f(x)$.
- Een functie meerdemaals toepassen, bijvoorbeeld $f(f(x))$, noteren we als $f^2(x)$. Dit is dus niet de waarde $f(x)$ gekwadrateerd. Het n aantal keer toepassen van f is zo ook $f^n(x)$.
- Een *inverse functie* is een functie, vaak genoteerd als $f^{-1}(x)$, die de invoer teruggeeft van een $f(x)$. Laat bijvoorbeeld $f(x) = 3x - 2$. Dan is de inverse functie van f: $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$. In andere woorden: als $f(x)$ de vraag beantwoordt "Hoe kom ik van een willekeurige x naar haar y?" dan beantwoordt $f^{-1}(x)$ de vraag "Hoe kom ik van een willekeurige y naar haar x?"

- Een *recursieve formule* geeft aan hoe je een waarde a_n kunt berekenen in termen van eerdere termen $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ Hiervoor definieer je een startwaarde a_0. Een voorbeeld van een recursieve formule is $a_n := a_{n-1} + 1$ met $a_0 = 0$. Deze geeft de rij: $0, 1, 2, 3, \ldots$ Zonder startwaarde weet je niet hoe je de eerste term moet berekenen en begint de formule nergens.

- Een *dubbele recursieve formule* is ook mogelijk: $f(n, k)$ in termen van bijvoorbeeld de vorige termen $f(n-1, k)$ of $f(n-1, k-1)$. Hiervoor heb je dus ook minimaal twee startwaarden nodig. Als je een dubbele functie f uitschrijft, krijg je dus ook geen getallenreeks, maar een tweedimensionale tabel.

- Een recursieve formule hoeft niet voor iedere waarde gedefinieerd te zijn. Een voorbeeld hiervan is bijvoorbeeld de recursieve formule $a_n := a_{n-2} + 1$ met $a_0 = 0$. De waarde a_1 wordt niet gedefinieerd in de formule. Als je deze waarde dan toch wil aanroepen, zal deze 0 of ongedefinieerd zijn. In dit PWS gaan we dit alleen zien bij een dubbele recursieve formule.

- Een directe (gesloten) formule is een uitdrukking waarin je a_n kunt berekenen zonder dat je alle tussenliggende termen nodig hebt, bijvoorbeeld de Dobiński-formule (zie 4.2.4). Een directe formule geeft je direct een antwoord.

- Een functie f met een subscript, bijvoorbeeld $f_p(x)$ geeft een familie functies $f(x)$ aan waarbij p een rol speelt in die functie. Bijvoorbeeld $f_p(x) = x^p$ geeft: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3, \ldots$

- De *EGF*, wat staat voor Exponential Generating Function, is een functie die wordt gebruikt om een reeks getallen te beschrijven. De algemene vorm is: $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ waarbij a_n die reeks getallen is. De EGF wordt ook gebruikt om recursieve relaties om te zetten in polynomen, oftewel differentieerbare functies. Een voorbeeld hiervan is de Fibonacci-rij. Deze is gedefinieerd als $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ met $F_0 = F_1 = 1$. De EGF die hierbij hoort is dus: $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{x^n}{n!}$. Het is relatief eenvoudig in te zien dat de afgeleiden de vorm $G''(x) = G'(x) + G(x)$ volgen.

  Opdracht 1. *Bewijs dat voor de functie* $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{x^n}{n!}$ *geldt dat* $G''(x) = G'(x) + G(x)$.

  (Hint: schrijf om te beginnen de eerste vijf termen van de somrij op.)

3.5 Bewijzen

- Een *bewijs uit het ongerijmde* houdt in dat een stelling kan worden bewezen door een tegenspraak te krijgen als we aannemen dat de stelling niet waar is. Dit volgt uit de *wet van de uitgesloten derde*, die zegt dat een stelling alleen waar of niet waar kan zijn. Er is dus geen derde 'half-waar'. Een simpel voorbeeld is het bewijs dat $\sqrt{2}$ geen breuk is. Als we aannemen dat het wél een (versimpelde) breuk is, dan krijgen we uiteindelijk een tegenspraak. De oorspronkelijke aanname dat $\sqrt{2}$ een breuk is, is dus niet waar en zo volgt dat $\sqrt{2}$ geen breuk is.

- Een andere manier van bewijzen is een *inductief* bewijs. Als we een stelling in k hebben die waar is voor een *base case* k, en als we kunnen aantonen dat die stelling ook waar is voor $k+1$, dan is de stelling waar voor elk getal na de base case.

- Er zijn nog andere methoden voor het geven van een bewijs, maar die komen niet in dit werkstuk aan bod.

- We gebruiken $\therefore$ als conclusie. Het staat symbool voor 'dus'.

4 Genereren van Bell Numbers

De Bell Numbers kun je vinden door handmatig alle partities te tekenen. Dit duurt echter steeds langer naarmate je hogere Bell Numbers wilt bepalen. We zijn op zoek naar een wiskundige manier om de Bell Numbers te genereren. Gelukkig zijn er een heleboel manieren om deze getallen te vinden.

4.1 Driehoek van Bell

De driehoek van Bell is misschien wel de simpelste manier om de Bell Numbers te genereren. We noteren een getal in rij i, kolom j als $x_{i,j}$. Nu laten we zien hoe je deze driehoek genereert:

1. Begin met het eerste Bell Number B_0. Deze staat in rij 0, kolom 1. Dus $x_{0,1} = 1$.
2. Start een nieuwe rij met het meest rechtse getal van de vorige rij als het meest linkse getal van de nieuwe rij, dus $x_{i,1} \leftarrow x_{i-1,r}$ waarbij r de laatste index is uit de $i-1$-de rij.
3. Bepaal de overige getallen (die niet in de linker kolom staan) door de som te nemen van het getal links ervan en het getal dat diagonaal linksboven daarvan staat, dus: $x_{i,j} \leftarrow x_{i,j-1} + x_{i-1,j-1}$.
4. Herhaal stap drie totdat de nieuwe rij één element meer bevat dan de vorige rij. (Herhaal totdat $j = r + 1$.)
5. Het meest linkse getal van iedere rij behoort tot de Bell Numbers, dus $B_n \leftarrow x_{n,1}$.

De eerste 7 rijen van de Bell-driehoek zijn hieronder weergegeven (zie bron [3]):

Rij 0	1							
Rij 1	1	2						
Rij 2	2	3	5					
Rij 3	5	7	10	15				
Rij 4	15	20	27	37	52			
Rij 5	52	67	87	114	151	203		
Rij 6	203	255	322	409	523	674	877	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Opdracht 2. *Schrijf rij 7 uit.*

4.2 Recursie

Bell Numbers kun je ook recursief genereren met de volgende formule:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Deze relatie zal in wat volgt als basis dienen voor verdere afleidingen.

Stelling 1. $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$

Het bewijs van deze formule is vrij eenvoudig (zie bron [4]): laat S een set zijn met grootte $n+1$ en laat $k \in \mathbb{N}$ waarbij $0 \leq k \leq n$. Nu willen we een partitie uitvoeren op S opdat elke subset een grootte $n+1-k$ heeft. Aangezien k altijd tussen de 0 en n ligt, is de uitdrukking $n+1-k$ altijd groter dan 0. De partitie bevat dus geen lege subsets.

We voeren de partitie zo uit: kies een element uit S en stop deze in zijn eigen subset. Kies nog k elementen uit S en stop de resterende $n-k$ elementen in dezelfde subset als het eerste element. Dit kan je op $\binom{n}{k}$ manieren doen. Voor de k gekozen items zijn er elke keer B_k mogelijke partities. De som van al deze subsets is gelijk aan B_{n+1}, oftewel: $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$. □

We bekijken een voorbeeld:

$$B_4 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} B_k$$

$$= 1 \cdot B_0 + 3 \cdot B_1 + 3 \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 = 1 + 3 + 6 + 5 = 15$$

Laat $S := \{a, b, c, d\}$.

- De 1 symboliseert alle objecten in een subset: $\{a, b, c, d\}$
- De 3 symboliseert alle subsets waarbij d deel is van een drietal: $\{\{a\}, \{b, c, d\}\}$, $\{\{b\}, \{a, c, d\}\}$, $\{\{c\}, \{a, b, d\}\}$
- De 6 symboliseert alle subsets waarbij d deel is van een tweetal: $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$, $\{\{a, d\}, \{b\}, \{c\}\}$, $\{\{b, d\}, \{a, c\}\}$, $\{\{b, d\}, \{a\}, \{c\}\}$, $\{\{c, d\}, \{a, b\}\}$, $\{\{c, d\}, \{a\}, \{b\}\}$
- De 5 symboliseert alle subsets waarbij d alleen staat: $\{\{d\}, \{a, b, c\}\}$, $\{\{d\}, \{a\}, \{b, c\}\}$, $\{\{d\}, \{b\}, \{a, c\}\}$,$\{\{d\}, \{c\}, \{a, b\}\}$, $\{\{d\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

Wat er dus gebeurt, is dat k op verschillende plekken in de set terecht komt en dat we dan alle partities met k op die plek opsommen.

4.2.1 Somrij

We kunnen de Bell Numbers ook beschrijven samen met de tweedimensionale recursieve formule $A_{n,k} = k \cdot A_{n-1,k} + A_{n-1,k-1}$, met $A_{1,1} = 1$ en $A_{0,k} = A_{n,0} = 0$. Als je alle waarden in een rij n sommeert, dan krijg je als antwoord B_n. Deze recursie hebben wij semi-toevallig ontdekt. Toen we een aantal recursieve formules probeerden, kwamen we redelijk snel op deze uit. We hebben ook andere formules gevonden. Hier zijn een aantal uitdrukkingen voor B_n die wij hebben gevonden:

1. $B_n = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k}$ waarbij $A_{n,k} = k \cdot A_{n-1,k} + A_{n-1,k-1}$, met $A_{1,1} = 1$ en $A_{0,k} = A_{n,0} = 0$. Deze somrij genereert ook de coëfficiënten van de afgeleiden van $f(x) = e^{e^x}$. (Dit zijn de Stirling Numbers. Deze worden behandeld in 4.2.4.)

2. $B_n = \sum_{k=1}^{2} A_{n-k+1,n-1}$ waarbij $A_{n,k} = (A_{n-1,k-1} + A_{n,k-1}) \cdot (1 - \lfloor \frac{1}{k} \rfloor) + A_{n-1,n-1} \cdot \lfloor \frac{1}{k} \rfloor$, met $A_{1,1} = 1$ en $0 \leq k \leq n + 1$. Als je deze tweedimensionale recursieve rij in een tabel uitschrijft, krijg je precies de Bell-driehoek!

3. $B_n = \sum_{k=1}^{n} A_{n-k+1,k}$ waarbij $A_{n,k} = k \cdot A_{n-1,k} + A_{n,k-1}$, met $A_{1,1} = 1$ en $A_{0,k} = A_{n,0} = 0$. Bij deze somrij hebben we een tabel gemaakt:

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
1	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$
2	1	3	6	10	15	21	28	$\cdots$
3	1	7	25	65	140	266	462	$\cdots$
4	1	15	90	350	1050	2646	5880	$\cdots$
5	1	31	301	1701	6951	22827	63987	$\cdots$
6	1	63	966	7770	42525	179487	627396	$\cdots$
7	1	127	3025	34105	246730	1323652	5715424	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

4.2.2 Taylorreeksen

Stel we bekijken de functie $f(x) = 2^x$. De grafiek van de afgeleide daarvan ligt lager dan f zelf. Bij de functie $g(x) = 3^x$ komt de grafiek van de afgeleide boven g uit. Ergens tussen 2 en 3 is dus een grondtal G zo, dat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G^x = G^x$$

Het getal G waarvoor dit waar is, noemen we e (vernoemd naar de wiskundige Euler). De functie $f(x) = e^x$ heeft als inverse functie de natuurlijke logaritme $\ln(x)$. Een belangrijke identiteit van de natuurlijke logaritme is als volgt: $\ln(a^x) = \ln(a) \cdot x$. Terugkomend op $f(x)$: we kunnen 2^x omschrijven naar $e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln(2)}$. Dan volgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x \cdot \ln(2)} = \ln(2) \cdot e^{x \cdot \ln(2)} = \ln(2) \cdot 2^x < 2^x$$

En bij $g(x)$ kunnen we 3^x omschrijven naar $e^{\ln(3^x)} = e^{x \cdot \ln(3)}$. Dan volgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x \cdot \ln(3)} = \ln(3) \cdot e^{x \cdot \ln(3)} = \ln(3) \cdot 3^x > 3^x$$

Deze resultaten volgen uit eigenschappen van logaritmen en de kettingregel.

Het getal e is een *transcendent* getal. Dat houdt in dat het getal geen oplossing is voor een algebraïsche vergelijking als $x^2 - 2 = 0$ (waarbij het antwoord $x = \pm\sqrt{2}$ is). In andere woorden: e past in geen enkel 'net' algebraïsch patroon. Je zou kunnen zeggen dat e zich niet netjes wil gedragen. Neem nu de exponentiële functie $f(x) = e^x$. Aangezien e zich dus niet netjes gedraagt, kunnen we $f(2) = e^2$ dus niet gemakkelijk vinden. We willen een functie vinden die zo dicht mogelijk bij $f(x)$ komt, maar nog steeds makkelijk berekenbaar is. We gaan dus een functie bedenken die zich gedraagt als e^x rondom een punt op $f(x)$, maar volledig bestaat uit x-machten. Een functie

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots a_nx^n$$

voor hele waarden n noemen we P_n een polynoom (Grieks voor "meerdere termen") van graad n. Deze polynomen kunnen we makkelijk berekenen, aangezien je maar een paar machten van x hoeft te berekenen om een polynoom $P(x)$ te maken die lijkt op $f(x)$, maken we de a_i zo, dat

$$\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}P(x) = \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}f(x)$$

We gaan deze functie bouwen rondom $x = 0$. De functie $P(x) = 1$ is gelijk aan $f(0) = e^0 = 1$. Om een polynoom van graad 1 te maken moet de eerste afgeleide van $P(x)$ gelijk zijn aan $f'(0)$. $P(x) = 1 + x$ voldoet hieraan. De manier om $P_3(x)$ te maken zullen we voordoen:

$$P_3(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

$$P_3(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 = f(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3\right) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2$$

$$P_3'(0) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot 0 + 3 \cdot a_3 \cdot 0^2 = f'(0) = 1 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3a_3 \cdot x^2\right) = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot x$$

$$P_3''(0) = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot 0 = f''(0) = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot x\right) = 6 \cdot a_3$$

$$P_3'''(0) = 6 \cdot a_3 = f'''(0) = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6}$$

Dus de functie $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ lijkt erg op $f(x)$ rondom $x = 0$. Wanneer we een functie $f(x) = a_k x^k$ een k aantal keer afleiden, krijgen we: $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} a_k x^k = a_k \cdot k(k-1)(k-2)(k-3)...(2)(1) = a_k \cdot k!$. En omdat $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} a_k x^k$ gelijk moet zijn aan $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(0) = 1$, volgt:

$$a_k \cdot k! = 1 \Rightarrow a_k = \frac{1}{k!}$$

Dus $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ en in het bijzonder geldt:

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Om de waarde voor e te vinden, vullen we $x = 1$ in in de polynoom:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Dit idee van een gegeven functie benaderen door een polynoom dezelfde afgeleiden te geven als een bepaald punt op die functie heet een *taylorreeks*. Een taylorreeks wordt formeel gedefinieerd als:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(a)}{n!} (x - a)^n$$

Opdracht 3. *Vind de taylorreeks voor* $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

(Hint: werk eerst de eerste paar afgeleiden van $f(x)$ uit.)

Voor het geval $a = 0$ heet het een *Maclaurin-reeks*, dus de Maclaurin-reeks van e^x is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Voor elke functie die oneindig afleidbaar is in $x = a$ kun je een taylorreeks gebruiken om de functie te benaderen. Deze uitbreidingen gedragen zich als een functie f rondom een punt $x = a$. Voor veel functies is de uitbreiding alleen toepasbaar in een interval rond $x = a$ en niet het hele domein. Dit komt omdat er soms waarden in de uitbreiding zijn waarvoor je een ongedefinieerde waarde vindt, zoals $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \ldots$ Het interval waarvoor de uitbreiding werkt rondom $x = a$ heet de *convergentiestraal*. Buiten die straal convergeert deze niet meer (zie bron [5]). Dit is een onderwerp uit de complexe analyse en daar hebben we in dit werkstuk geen ruimte voor.

4.2.3 Introductie thèta-functie

Macht-Faculteit-som Zoals we in het voorwoord al zeiden, kwamen we per ongeluk bij het onderwerp van dit PWS uit. We zaten namelijk een keer de volgende som te bestuderen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

Deze rekenden we als volgt exact uit. Herinner dat $n! = n \cdot (n-1)!$, dus de teller en noemer delen een factor n:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!}$$

Nu splitsen we de som in twee delen:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

Omdat $(-1)!$ niet goed is gedefinieerd, halen we de eerste term $n = 1$ uit de sommatie. Dit soort stappen zullen we later in dit PWS zonder uitleg uitvoeren.

$$= 0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= 0 + e + e = 2 \cdot e$$

Deze macht-faculteit-som komt dus uit op $2e$. Dit vonden wij een mooi antwoord en we waren gemotiveerd ook te kijken naar de volgende stap, namelijk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$$

Deze rekenden we op gelijke manier exact uit:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n + n}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!}$$

$$= 0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-2+2}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-2}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= 0 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-2)!} + 0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= e + 2 \cdot e + e + e$$

$$= 5 \cdot e$$

Ook deze som komt uit op een natuurlijk getal maal e.

Opdracht 4. *Reken op gelijke manier* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$ *exact uit.*

We hebben een script in Python geschreven om de som $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$ exact uit te rekenen voor verschillende waarden van k. Dit script staat in hoofdstuk 10. De eerste resultaten uit dit Pythonscript luiden als volgt:

k	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$
0	e
1	e
2	$2 \cdot e$
3	$5 \cdot e$
4	$15 \cdot e$
5	$52 \cdot e$
6	$203 \cdot e$
7	$877 \cdot e$
$\vdots$	$\vdots$

Tabel 1: Waarden van $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$ voor verschillende k

Vanaf nu definiëren we:

$$\theta(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^x}{n!}$$

We noemen dit de thèta-functie, aangezien het erg lijkt op de Riemann Zèta-functie $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. De thèta-functie heeft de volgende relatie (zie bron [6]):

$$\theta(n) = e \cdot B_n$$

Stelling 2. *$\theta(x)$ convergeert $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Om dit te bewijzen bekijken we hoe de som zich gedraagt als n naar ∞ nadert. We bekijken $n!$:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$$

$$\ln(n!) = \ln(n) + \ln(n-1) + \ldots + \ln(1) = \sum_{i=1}^{n} \ln(i)$$

Dit laatste volgt uit de rekenregels voor logaritmen. Nu kijken we niet meer naar alleen concrete, hele, waarden voor i, maar willen we een discrete som over alle mogelijke i. In andere woorden: de integraal.[1]

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(i) \approx \int_{1}^{n} \ln(i)\mathrm{d}i$$

De primitieve van $\ln(x)$ is gelijk aan $x\ln(x) - x$, want $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\ln(x) - x\right] = \ln(x) + \frac{x}{x} - 1 = \ln(x)$. Dit volgt uit de productregel.

$$\int_{1}^{n} \ln(i)\mathrm{d}i = i\ln(i) - i\Big|_1^n$$

$$\ln(n!) \approx i\ln(i) - i\Big|_1^n = n\ln(n) - n + 1$$

$$n! \approx e^{n\ln(n)-n+1} = e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

[1] De integraal onder een functie $f(x)$ tussen waarden a en b telt alle mogelijke waarden $f(x)$ tussen $x = a$ en $x = b$ bij elkaar op. Aangezien oneindig veel waarden (die niet gelijk zijn aan 0) bij elkaar optellen een oneindig groot getal geeft, vermenigvuldigen we elke waarde met een oneindig kleine $\mathrm{d}x$. De integraal noteren we zo: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. De waarde vind je door $F(b) - F(a)$ te berekenen, hierbij is $F(x)$ de *primitieve* van $f(x)$, oftewel de functie waarvoor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x)$. Zie o.a. "Fundamental theorem of calculus" op Wikipedia.

Als we de limiet nemen van n naar ∞, dan vervalt die factor e en zien we dat:

$$\lim_{n\to\infty} n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Als twee functies zich op dezelfde manier gedragen als $n \to \infty$, dan noteren we dat met $\sim$. Deze twee functies noemen we *asymptotisch gelijk* (zie bron [7]).

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Nu kunnen we onze originele $\frac{n^x}{n!}$ ook asymptotisch schrijven:

$$\frac{n^x}{n!} \sim \left(\frac{e}{n}\right)^n n^x$$

$$\left(\frac{e}{n}\right)^n n^x = e^{\ln((\frac{e}{n})^n)} \cdot n^x = e^{n(\ln(e)-\ln(n))} \cdot e^{x\ln(n)}$$

$$e^{n(1-\ln(n))} \cdot e^{x\ln(n)} = e^{n(1-\ln(n))+x\ln(n)}$$

$$\frac{n^x}{n!} \sim e^{n+(x-n)\ln(n)}$$

Zo dus ook:

$$n + (x-n)\ln(n) \sim n - n\ln(n) = n(1-\ln(n))$$

Als $n \to \infty$, dan zal de factor $(1-\ln(n))$ naar $-\infty$ gaan en de factor n naar $+\infty$ gaan. Een negatief getal vermenigvuldigen met een positief getal geeft een negatief getal en dus is $\lim_{n\to\infty} n(1-\ln(n)) = -\infty$. Zo dus ook:

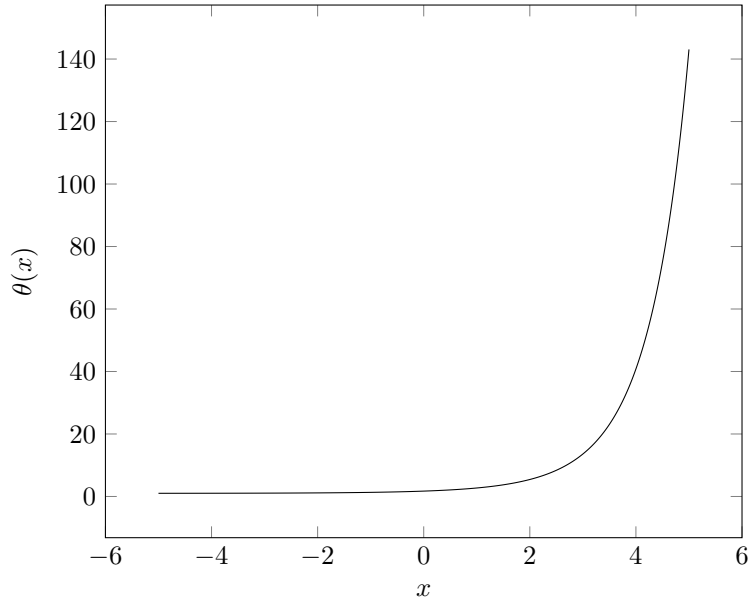
$$\lim_{n\to\infty} e^{n+(x-n)\ln(n)} = e^{-\infty} = 0$$

Aangezien $\frac{n^x}{n!} \sim e^{n+(x-n)\ln(n)}$, gedraagt $\frac{n^x}{n!}$ zich op dezelfde manier:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^x}{n!} = 0$$

En omdat we geen aannames hebben gedaan voor x, convergeert $\theta(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. □

Hieronder staat een grafiek van $\theta(x)$ voor $x \in [-5; 5]$:



Padé-benadering De thèta-functie heeft tot nu toe nog geen gesloten vorm. Dat houdt in dat er geen manier is om $\theta(x)$ uit te drukken in een eindig aantal eenvoudige functies, zoals: optellen, vermenigvuldigen en machten. Voor de grafiek hierboven hebben we een functie gebruikt die $\theta(x)$ benadert:

$$\theta(x) \approx \frac{0.884x^5 - 29.64x^4 + 345.97x^3 - 2001.4x^2 + 6082.8x - 15422.9}{x^5 - 28.55x^4 + 338.31x^3 - 2084.7x^2 + 6694.1x - 8975.8}$$

Hiervoor hebben we een methode genaamd *Padé-benadering* gebruikt. Een Padé-benadering is een functiebenadering door middel van twee polynomen te delen (zie bron [8]). Dit is vaak accurater dan een taylorreeks buiten het interval waar we naar kijken. Dit komt omdat een taylorreeks vaak explodeert na dat interval, aangezien de taylorreeks asymptotisch gelijk is aan haar hoogste macht en zich ook zo zal gedragen. Een Padé-benadering explodeert minder snel, aangezien de noemer van de breuk de teller "naar beneden trekt". Hier laten we zien hoe we de benadering vonden:

1. Laat $R(x) = \frac{T(x)}{N(x)}$, waarbij de teller $T(x) = a_0 + a_1x + \ldots a_5x^5$ en de noemer $N(x) = b_0 + b_1x \ldots b_5x^5$ is met onbekende waarden a_i, b_i.

2. Neem met een script (zie het script bij hoofdstuk 10) 500 even ver verspreide punten $(x_i, \theta(x_i))$ voor $x_i \in [-5, 5]$.

3. We zoeken $\frac{T(x)}{N(x)} \approx \theta(x) \Rightarrow T(x) - N(x) \cdot \theta(x) \approx 0$

4. Aangezien het onmogelijk is om de benadering helemaal gelijk te krijgen aan de functie, zoeken we a_i, b_i zo, dat: $\sum_{i=1}^{500}(T(x_i) - N(x_i) \cdot \theta(x_i))^2$ zo klein mogelijk is. De $\theta(x)$ is het *gewicht* dat de teller naar beneden trekt. Deze methode heet dan ook *Gewogen Kleinste Kwadraten* (Weighted Least Squares) en het minimaliseert het kwadraat van het verschil tussen de benadering en de datapunten. Het kwadrateren van deze waarde maakt van elk negatief verschil een positieve waarde. Zo werkt elk verschil mee aan de totale foutmarge. Dit is een lineaire-algebrakwestie waar we een script voor gebruiken (zie het script bij hoofdstuk 10).

5. Om een unieke benadering te vinden delen we elke a_i, b_i term door b_5. Dit zet $b_5 = 1$ en past elke andere coëfficiënt slechts aan.

6. Al met al geeft deze benadering $\max|\theta(x) - R(x)| \approx 0,007095$ binnen het interval $x \in [-5, 5]$ op $x = 5$ (dat is $0,005\%$ van de functiewaarde).

Het Pythonscript hiervoor staat achteraan het werkstuk (zie hoofdstuk 10).

4.2.4 Connectie tot de Bell Numbers

In de vorige sectie vertelden we tamelijk losjes dat de thèta-functie de volgende relatie heeft: $\theta(n) = e \cdot B_n$. Voor ons kwam dit een beetje uit de lucht vallen. Deze vergelijking heeft een zeer mooi bewijs, waar we wel wat nieuwe onderwerpen voor moeten behandelen.

Stirling Numbers van de tweede soort Om deze relatie duidelijk te maken, moeten we een ander soort getallenreeks bekijken: de *Stirling Numbers of the second kind*. In dit PWS hebben we het alleen over deze soort Stirling Numbers en dus noemen we ze vanaf nu gewoon de Stirling Numbers (reeks A008277 in de OEIS, bron [9]). $S(n, k)$, waarbij $n \geq 1$ en $n \geq k \geq 1$, telt het aantal manieren om een n aantal objecten in een k aantal niet-lege subsets te verdelen. Wederom maakt de volgorde van de objecten niet uit. $S(n, k)$ wordt ook als $\left\{ {n \atop k} \right\}$ genoteerd. We nemen als voorbeeld $\left\{ {4 \atop 3} \right\}$. We gaan de set $A := \{a, b, c, d\}$ in drie niet-lege subsets opdelen. Dat kan op de volgende manieren: $\{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$; $\{\{a\}, \{c\}, \{b, d\}\}$; $\{\{a\}, \{d\}, \{b, c\}\}$; $\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$; $\{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}$; $\{\{a, d\}, \{b\}, \{c\}\}$. Dit zijn 6 sets en daarom is $\left\{ {4 \atop 3} \right\} = 6$ (zie bron [10]). Stirling Numbers kun je op twee manieren berekenen: met een directe formule en, wederom, een recursieve formule. De recursieve formule is als volgt:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

Hierbij is $\left\{ {1 \atop 1} \right\} = 1$ en $\left\{ {0 \atop k} \right\} = \left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$. Je ziet dan dat $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$ (n objecten in één set) en $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ (n objecten in n sets). Net als we deden bij de Driehoek van Bell kunnen we deze recursieve formule in een driehoek uitschrijven, waarbij n de rij en k de kolom is:

$n\backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	...
1	1							
2	1	1						
3	1	3	1					
4	1	7	6	1				
5	1	15	25	10	1			
6	1	31	90	65	15	1		
7	1	63	301	350	140	21	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Enkele opvallende eigenschappen zijn:

1. Het een-na-laatste Stirling Number van elke rij is een driehoeksgetal, i.e.

$$\left\{ {n \atop n-1} \right\} = 1 + 2 + 3 \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

2. Het tweede Stirling Number van elke rij is één minder dan een macht van 2, i.e.

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$$

3. De som van alle Stirling Numbers in rij n is het n-de Bell Number, i.e.

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$$

   Dit komt omdat de Stirling Numbers alle partities tellen van n objecten in k subsets en de Bell Numbers alle partities tellen van n over elk mogelijke aantal sets.

4. De getallen buiten de driehoek zijn gedefinieerd als 0, omdat het bij de Stirling Numbers over een aantal manieren gaat. In het bijzonder: $\left\{ {n \atop 0} \right\} = \left\{ {n \atop n+1} \right\} = 0$. Je kan namelijk niet n objecten in 0 bakjes doen en dus kan je dit op 0 manieren doen. Je kan ook niet n objecten in $n+1$ bakjes en dus kan je dit weer op 0 manieren doen.

Ook heb je een directe formule voor Stirling Numbers, maar deze is een stukje lastiger (zie bron [11]):

Stelling 3. $\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq k \geq 1 : \left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$

Het bewijs hiervoor is als volgt: we gaan het aantal partities tellen waarbij we de objecten $\{1, 2, \ldots, n\}$ in k gelabelde bakjes stoppen. Om dit te doen kijken we eerst op hoeveel manieren we de objecten $\{1, 2, \ldots, n\}$ in k ongelabelde bakjes kunnen stoppen. Dit is (per definitie) $\left\{ {n \atop k} \right\}$. Nu bekijken we die k bakjes: op hoeveel manieren kunnen we die k bakjes labelen? Voor het eerste bakje hebben we k keuzes, voor het tweede bakje $k-1$ keuzes, etc. Er zijn dus $k!$ manieren om die ongelabelde bakjes te labelen. Er zijn dus in totaal $k!\left\{ {n \atop k} \right\}$ manieren om de objecten $\{1, 2, \ldots, n\}$ in k gelabelde bakjes te stoppen.

We kijken nu naar het aantal manieren om de objecten $\{1, 2, \ldots, n\}$ in k bakjes te stoppen waarbij enkele bakjes leeg kunnen zijn. Dit zijn k^n mogelijkheden. Er zijn dus k^n functies $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$. We pakken een set bakjes I uit $\{1, \ldots, k\}$, dus $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$. We definiëren i als de grootte van I, dus $|I| = i$. Er zijn $\binom{k}{i}$ manieren om de i elementen van I uit $\{1, 2, \ldots, k\}$ te kiezen. Voor elke I definiëren we J als de set van functies $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$ met géén $f(x) \in I$. Oftewel, J is de set functies die de objecten $\{1, 2, \ldots, n\}$ verdeelt over niet-lege bakjes $\{1, \ldots, k\}$ en de bakjes in I overslaat. De functies in J verdelen de objecten $\{1, 2, \ldots, n\}$ dus over de resterende

$k-i$ bakjes. Het aantal functies dat hieraan voldoet is $|J| = (k-i)^n$. Volgens inclusie-exclusie volgt dat voor alle mogelijke i:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \sum_{I\in\{1,\ldots,k\},|I|=i} |J| = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i}(k-i)^n$$

Aangezien $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n = k!\left\{{n \atop k}\right\}$, volgt:

$$\left\{{n \atop k}\right\} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i}(k-i)^n$$

□

Opdracht 5. *Bewijs de eerste eigenschap:* $\left\{{n \atop n-1}\right\} = \frac{n(n-1)}{2}$

(Hint: Gebruik de recursieve formule voor de Stirling Numbers en voer een inductief bewijs uit.)

Opdracht 6. *Bewijs de tweede eigenschap:* $\left\{{n \atop 2}\right\} = 2^{n-1} - 1$

(Hint: Gebruik de somrepresentatie van $\left\{{n \atop 2}\right\}$.)

Vallende en stijgende faculteiten We bekijken de *vallende en stijgende faculteiten* (zie bron [12]). Een vallende faculteit $x^{\underline{n}}$ wordt gedefinieerd als:

$$x^{\underline{n}} := x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1) = \frac{x!}{(x-n)!} = \prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$$

en $x^{\underline{1}} := x$. $x^{\underline{n}}$ wordt ook wel genoteerd als $(x)_n$. Voor $n > x$ zal een van de termen in de vallende faculteit gelijk zijn aan 0 en wordt het hele product gelijk aan 0. Dus ook $\sum_{x=0}^{n-1} x^{\underline{n}} = 0$, want iedere aparte term is gelijk aan 0. Belangrijk om te zien is $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ en dus

$$\binom{n}{k}\cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} = n^{\underline{k}}$$

Ook is er een stijgende faculteit:

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\ldots(x+n-1) = \prod_{k=0}^{n-1}(x+k)$$

De vallende en stijgende faculteit zijn direct verbonden met de normale faculteit:

$$n! = 1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}}$$

De vallende en stijgende faculteit zijn ook direct met elkaar verbonden:

$$x^{\underline{n}} = (x-n+1)^{\overline{n}} = (-1)^n(-x)^{\overline{n}}$$

en

$$x^{\overline{n}} = (x+n-1)^{\underline{n}} = (-1)^n(-x)^{\underline{n}}$$

Opdracht 7. *Bewijs waarom de vallende en stijgende faculteit direct met elkaar verbonden zijn.*

Een handige toepassing van vallende faculteiten is dat we x^n kunnen uiten in vallende faculteiten en Stirling Numbers. Dit komt omdat x^n en $x^{\underline{k}}$, waarbij $n, k \in \mathbb{N}$, beiden polynomen zijn. Er geldt:

Stelling 4. $\forall x, n \in \mathbb{N} : x^n = \sum_{k=0}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}\cdot x^{\underline{k}}$

Dit gaan we nu bewijzen.

1. Het aantal functies $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, x\}$ is x^n.
2. Voor een functie f om te surjecteren in k bakjes, zijn er $\binom{x}{k}$ manieren om de k labels te kiezen. Met een gekozen k zijn er $\left\{ {n \atop k} \right\}$ manieren om de n objecten in de k bakjes te stoppen. Uiteindelijk zijn er $k!$ manieren om de k labels aan hun bakjes te koppelen.
3. Dus voor elke k: $x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \cdot \left\{ {n \atop k} \right\} \cdot k!$
4. Herinner dat: $\binom{x}{k} \cdot k! = \frac{x!}{(x-k)!} = x^{\underline{k}}$
5. $\therefore x^n = \sum_{k=0}^{n} x^{\underline{k}} \cdot \left\{ {n \atop k} \right\}$ □

Je kan ook somformules en verdubbelingsformules vinden voor de vallende en stijgende faculteit:

1. $x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}} = x^{\underline{n}}(x-n)^{\underline{m}}$
2. $x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}} = x^{\overline{n}}(x+n)^{\overline{m}}$
3. $\Rightarrow x^{\overline{2m}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{m}}$

Opdracht 8. *Bewijs deze drie som- en verdubbelingsformules.*

Bewijs voor de connectie We willen een bewijs vinden voor $B_n = \frac{1}{e} \cdot \theta(n)$ $(n \neq 0)$, ook wel Dobiński's formule genoemd (zie bron [13]).

Stelling 5. $\forall n \in \mathbb{N} : B_n = \frac{1}{e} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!}, n \neq 0$

We herhalen nog wat identiteiten:

1. $x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \cdot x^{\underline{k}}$
2. $\sum_{x=0}^{n-1} x^{\underline{n}} = 0$
3. $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$
4. $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$

Bewijs:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Nu gebruiken we identiteit 1.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n} k^{\underline{j}} \cdot \left\{ {n \atop j} \right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{\underline{j}}}{k!}$$

Nu gebruiken we identiteit 2.

$$= \sum_{j=0}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{k^{\underline{j}}}{k!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{(k-j)!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\} \cdot e$$

$$= \left\{ {n \atop 0} \right\} \cdot e + \sum_{j=1}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\} \cdot e$$

Nu gebruiken we identiteit 3 en 4.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} = e \cdot B_n$$

$$\therefore B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \; \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0$$

□

(De voorwaarde $n \neq 0$ laten we vanaf nu weg in het PWS.)

4.3 Afgeleiden

De functie e^{e^x-1} heeft vele connecties tot de Bell Numbers. Een van deze connecties is dat de EGF van de Bell Numbers deze formule is (zie bron[14]). Dit gaan we nu bewijzen:

Dobiński's formule voor de Bell Numbers is: $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$. Als je deze formule herschrijft krijgen we: $e \cdot B_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$. Deze stap gebruiken we zometeen.

$$e^{e^x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot e^{xk} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xk)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Merk op dat we de somrijen omdraaien in volgorde. Dit is toegestaan, omdat geen van de twee somrijen de ander aanroept. Nu volgt uit onze herschrijving van Dobiński's formule:

$$e^{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot eB_n$$

en dus ook:

$$e^{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot B_n$$

Een andere connectie gaan we bewijzen door middel van de Maclaurin-reeks van e^{e^x} en onze formule $e^{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot eB_n$, die we net hebben bewezen. We definiëren: $f(x) = e^{e^x}$, dit is hetzelfde als e^{e^x-1} keer een factor e. De Maclaurin-reeks is per definitie van de vorm: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \cdot \frac{x^n}{n!}$ waarbij $f^{(n)}$ de n-de afgeleide is van $f(x)$. De eerste paar afgeleiden van e^{e^x} zijn:

1. $$f'(x) = e^{e^x} \cdot (e^x)$$

2. $$f''(x) = e^{e^x} \cdot (e^x + e^{2x})$$

3. $$f^{(3)}(x) = e^{e^x} \cdot (e^x + 3e^{2x} + e^{3x})$$

4.
$$f^{(4)}(x) = e^{e^x} \cdot (e^x + 7e^{2x} + 6e^{3x} + e^{4x})$$

5.
$$f^{(5)}(x) = e^{e^x} \cdot (e^x + 15e^{2x} + 25e^{3x} + 10e^{4x} + e^{5x})$$

Omdat we net ook hadden bewezen dat $e^{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot eB_n$, kunnen we dit vanwege de Maclaurin-reeks invullen als:
$$e^{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot eB_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot f^{(n)}(0)$$

Dus:
$$eB_n = f^{(n)}(0)$$

En omdat $e^{e^0} = e$, betekent dit dat de coëfficiënten voor de e-machten binnen de haakjes van de afgeleiden van $f(x)$ moeten sommeren tot de Bell Numbers. Als je beter kijkt naar de coëfficiënten voor de machten van e, kun je zien dat voor de eerste vijf afgeleiden de coëfficiënten overeenkomen met de Stirling Numbers. We kunnen ook bewijzen dat dit voor de n-de afgeleide geldt. Zoals we zagen in 4.2.1 voorbeeld 1, is een formule voor de Stirling Numbers: $A_{n,k} = k \cdot A_{n-1,k} + A_{n-1,k-1}$, waarbij $A_{1,1} = 1$ voor $n > 0$. Nu kunnen we voor alle individuele machten bekijken hoe zij volgden uit de vorige afgeleide. Neem bijvoorbeeld regel 2 naar 3. Vanwege de productregel krijgen we dat $f^{(4)}(x) = [e^{e^x}]' \cdot (e^x + 3e^{2x} + e^{3x}) + e^{e^x} \cdot [(e^x + 3e^{2x} + e^{3x})]'$. Vanwege de kettingregel krijgen we dat $[e^{e^x}]' = e^{e^x} \cdot e^x$. Er komt dus een factor van e^x binnen de haakjes, waardoor alle coëfficienten van regel 2 met één macht worden verhoogd. Hierbij opgeteld vanwege de kettingregel wordt de e-macht vermenigvuldigd met de coëfficient die er nog voor stond. Neem bijvoorbeeld $7e^{2x}$: e^x van regel 2 wordt e^{2x}. $[3e^{2x}]' = 6e^{2x}$ wordt hierbij opgeteld en uiteindelijk krijg je $7e^{2x}$. Deze manier van coëfficiënten optellen komt exact overeen met de formule voor de Stirling Numbers. En omdat $f'(0) = 1$, komt ook de startwaarde overeen en dus zijn de coëfficiënten voor de e-machten binnen de haakjes de Stirling Numbers.

5 Getaltheorie

Getaltheorie (Number theory) is een tak in de wiskunde die zich bezig houdt met alleen gehele getallen $n \in \mathbb{Z}$. De Bell Numbers komen goed van pas in de getaltheorie. Er is namelijk een mooie eigenschap te vinden dat voor iedere p priem een getal N_p bestaat waarvoor $B_{n+N_p} \equiv B_n \mod p$.

5.1 Modulo rekenen

Dat vorige statement gebruikt twee symbolen die we nog niet hebben behandeld, namelijk het *equivalent* ($\equiv$) en de *modulus* (mod). Het modulo rekenen is een manier om getallen te ordenen in *equivalentieklassen*. Stel we nemen mod m, bij modulo rekenen bestuderen we dan alle getallen $0, 1, 2, \ldots, m-1$. We tellen dus van 0 naar $m-1$ en beginnen daarna opnieuw. Dit is hetzelfde idee als delen met rest: $\frac{17}{5} = 3$ rest 2. We halen alle hele aantallen 5 af van 17 en houden 2 over. Dit noteren we als $17 \equiv 2 \mod 5$, of in andere woorden: $17 = 2 + 3 \cdot 5$. 17 is dus equivalent aan 2, modulo 5. Nu kunnen we een equivalentieklasse maken voor $2 \mod 5$, namelijk: $2 + n \cdot 5 \equiv 2 \mod 5$. In andere woorden: elk getal dat twee meer is dan een veelvoud van vijf is equivalent aan twee als je het veelvoud van vijf weghaalt. We kunnen nu elk getal $a \in \mathbb{Z}$ ordenen in hun equivalentieklassen:

$$\begin{aligned} 0 + n \cdot 5 &\equiv 0 \mod 5 \\ 1 + n \cdot 5 &\equiv 1 \mod 5 \\ 2 + n \cdot 5 &\equiv 2 \mod 5 \\ 3 + n \cdot 5 &\equiv 3 \mod 5 \\ 4 + n \cdot 5 &\equiv 4 \mod 5 \end{aligned}$$

Vaak noteert men de getallen $a \mod 5, a \in \mathbb{Z}$ als $a \in \mathbb{Z}_5$.

Negatieve getallen kun je ook indelen in een equivalentieklasse, door een aantal keer de modulus erbij op te tellen. Zo dus $-9 \equiv 1 \mod 5$ want $-9 + 2 \cdot 5 = 1$. Er is dus in definitie geen verschil tussen negatieve en positieve getallen in het modulo rekenen. Enkele handige dingen om te weten over modulo rekenen zijn: als $a_1 \equiv a_2 \mod m$ en $b_1 \equiv b_2 \mod m$, dan $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \mod m$ en $a_1 b_1 \equiv a_2 b_2 \mod m$.

Opdracht 9. *Bewijs deze twee stellingen.*

Het is ook mogelijk om te delen in $\mathbb{Z}_5$, maar het kost wat moeite. Stel we kijken naar $a := 3 \div 2 \mod 5$, dan kunnen we niet gewoon $a = \frac{3}{2}$ noteren en doorgaan, aangezien onze restrictie was dat elk getal in $\mathbb{Z}_5$ een geheel getal moet zijn en $a = \frac{3}{2}$ dat (duidelijk) niet is. We kijken iets beter naar de definitie van delen. Het getal $k := 1 \div 2$ is zo, dat $k \cdot 2 = 1$. We zoeken dus voor $k := 1 \div 2 \mod 5$ een getal zo, dat $k \cdot 2 \equiv 1 \mod 5$. In dit geval voldoet $k = 3$ want $3 \cdot 2 = 6 \equiv 1 \mod 5$. Vanaf nu noteren we een getal $1 \div b \mod m$ als $b^{-1} \mod m$. We noemen b^{-1} de *modulaire inverse* van b, modulo m. Nu we weten dat $2^{-1} \equiv 3 \mod 5$, volgt dat $a = 3 \cdot 2^{-1} \equiv 3 \cdot 3 = 9 \equiv 4 \mod 5$. Modulo rekenen gedraagt zich erg gelijk aan normaal rekenen: we kunnen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen; maar net als in normaal rekenen is er geen deling door 0 mogelijk. Tot nu toe bekeken we alleen maar equivalentieklassen modulo 5 en hier is een reden voor. Als we namelijk een modulus pakken die geen priemgetal is, bijvoorbeeld 8, dan kunnen we ook optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en machtsverheffen, maar niet delen, want niet elk getal in $\mathbb{Z}_8$ heeft een modulaire inverse, dus is er een soort deling door 0.

Opdracht 10. *Onderzoek welke getallen wel of niet een modulaire inverse hebben in $\mathbb{Z}_8$.*

(Hint: maak een lijst met getallen $a = 0$ tot en met 7 en kijk of je voor ieder getal een ander getal b kan vinden waarbij $a \cdot b = 1 \mod 8$.)

Door ons te beperken tot priem moduli hebben we dit probleem niet. Op de volgende pagina zie je de hele modulaire tabel voor modulo 5. De modulaire inverses kun je vinden met behulp van het uitgebreide algoritme van Euclides[2].

[2]Het algoritme van Euclides berust op de stelling dat de grootste gemene deler $\text{ggd}(a, b) = \text{ggd}(b, r)$ als $a = bq + r$. Zie o.a. "Euclidean algorithm" op Wikipedia.

a	$b \mod 5$
0^{-1}	ongedefinieerd
1^{-1}	$1 \mod 5$
2^{-1}	$3 \mod 5$
3^{-1}	$2 \mod 5$
4^{-1}	$4 \mod 5$

Een getal a modulo p symboliseert dus alle getallen $a + kp$ waarbij $k \in \mathbb{Z}$. Je rekent dus eigenlijk nooit met maar één getal a, maar met een hele groep getallen. Dit klinkt misschien onnodig ingewikkeld, maar het heeft nut. Als we bijvoorbeeld de volgende som bekijken: $3^3 \mod 4$, dan kunnen we de 3 omschrijven naar $3 + k \cdot 4$ (namelijk $k = 0$). Aangezien $3 \equiv -1 \mod p$ ($k = -1$) volgt dat $3^3 \equiv (-1)^3 \mod 4 \equiv -1 \mod 4 \equiv 3 \mod 4$. Machten worden dus een stuk simpeler in het modulo rekenen.

5.2 Bell Numbers modulo priem

De Bell Numbers, zoals al vaker is gezegd, groeien ongelofelijk snel. Een manier om naar grote Bell Numbers te kijken is om ze in hun equivalentieklassen in te delen. Hieronder volgt een tabel met de eerste tien Bell Numbers in de eerste vier priem moduli.

n	B_n	mod 2	mod 3	mod 5	mod 7
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
2	2	0	2	2	2
3	5	1	2	0	5
4	15	1	0	0	1
5	52	0	1	2	3
6	203	1	2	3	0
7	877	1	1	2	2
8	4.140	0	0	0	3
9	21.147	1	0	2	0
10	115.975	1	1	0	6
11	678.570	0	0	0	4
12	4.213.597	1	1	2	3
13	27.644.437	1	1	2	2
14	190.899.322	0	1	2	5
15	1.382.958.545	1	2	0	3

Tabel 2: waarden $B_n \mod p$ voor verschillende p priem

Bij de Bell Numbers modulo 2 zie je een simpel patroon: 1,1,0,1,1,0... Dit patroon herhaalt zich voor elk Bell Number. Een patroon dat zich oneindig vaak herhaalt noemen we *periodiek*. De periode van de Bell Numbers modulo 2 is 3, na 3 getallen herhaalt de periode zich weer. De Bell Numbers modulo 3 hebben ook een periodiek patroon en de periode is 13. Bij de Bell Numbers modulo 5 is de periode maar liefst 781. De reeks getallen die de periodes van de Bell Numbers modulo p beschrijven groeit dus ook erg snel. Stel we noemen de periode van de Bell Numbers modulo p: N_p, dan definiëren we dus dat $B_{n+N_p} \equiv B_n \mod p$.

Touchard's Congruentie Om te bewijzen dat de Bell Numbers periodiek zijn, bewijzen we eerst Touchard's Congruentie: $B_{n+p} \equiv B_n + B_{n+1} \mod p$. We zoeken eerst een manier om B_{n+p} te berekenen:

Stelling 6. *Voor $n, j \in \mathbb{N}$ geldt $B_{n+j} = \sum_{k=1}^{n} P_j(k)\left\{{n \atop k}\right\}$, waarbij $P_j(x) = \sum_{r=0}^{j} B_{j-r}\binom{j}{r}x^r$.*

Dit bewijs is erg pittig. We herhalen wat identiteiten die we hebben ontdekt tot nu toe:

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k = B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_k$
2. $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\}$
3. $\left\{{n+1 \atop k}\right\} = \left\{{n \atop k-1}\right\} + k\left\{{n \atop k}\right\}$
4. $\left\{{n \atop 0}\right\} = \left\{{n \atop n+1}\right\} = 0$

We bewijzen deze stelling met een inductiebewijs, waarbij $j = 0$ onze base case is:

$$B_{n+0} = \sum_{k=1}^{n} P_0(k)\left\{{n \atop k}\right\}$$

De binnenste som, $P_0(k)$, uitgeschreven, wordt: $P_0(k) = \sum_{r=0}^{0} B_{0-r}\binom{0}{r}k^r$. Deze variabele r gaat van 0 naar 0, in andere woorden: deze som bevat alleen de term $r = 0$. Dus $P_0(k) = \sum_{r=0}^{0} B_0\binom{0}{0}k^0 = 1$, want $B_0 = 1$, $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!} = 1$ en $k^0 = 1$. Alles bij elkaar geeft ons:

$$B_{n+0} = \sum_{k=1}^{n} P_0(k)\left\{{n \atop k}\right\} = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \left\{{n \atop k}\right\} = B_n \text{ (identiteit 2)}$$

De base case klopt. We maken de aanname dat $B_{n+j} = \sum_{k=1}^{n} P_j(k)\left\{{n \atop k}\right\}$ klopt voor een willekeurige j. Nu kijken we naar de volgende term $j+1$ en dus B_{n+j+1}. Merk op dat je de index van B_{n+j+1} kunt interpreteren als $n + (j+1)$ én als $(n+1) + j$. Die tweede vorm gaan we toepassen:

$$B_{n+j+1} = \sum_{k=1}^{n+1} P_j(k)\left\{{n+1 \atop k}\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} P_j(k)\left(\left\{{n \atop k-1}\right\} + k\left\{{n \atop k}\right\}\right) \text{ (identiteit 3)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} P_j(k)\left\{{n \atop k-1}\right\} + \sum_{k=1}^{n+1} P_j(k) \cdot k\left\{{n \atop k}\right\}$$

We bekijken de eerste som $\sum_{k=1}^{n+1} P_j(k)\left\{{n \atop k-1}\right\}$. Voor de eerste term, $k = 1$, is er een factor van $\left\{{n \atop 0}\right\}$ aanwezig. Identiteit 4 maakt deze factor 0. De eerste som wordt dus:

$$\sum_{k=1}^{n+1} P_j(k)\left\{{n \atop k-1}\right\}$$

$$= P_j(1)\left\{{n \atop 1-1}\right\} + \sum_{k=2}^{n+1} P_j(k)\left\{{n \atop k-1}\right\}$$

$$= 0 + \sum_{k=2}^{n+1} P_j(k)\left\{{n \atop k-1}\right\}$$

We bekijken de tweede som $\sum_{k=1}^{n+1} P_j(k) \cdot k\left\{{n \atop k}\right\}$. Neem de definitie van $P_j(k) = \sum_{r=0}^{j} B_{j-r}\binom{j}{r}k^r$. Deze som wordt dus:

$$\sum_{k=1}^{n+1} P_j(k) \cdot k\left\{{n \atop k}\right\} = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{r=0}^{j} B_{j-r}\binom{j}{r}k^r \cdot k\left\{{n \atop k}\right\}$$

De twee machten van k kun je samenvoegen tot

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{r=0}^{j} B_{j-r}\binom{j}{r}k^{r+1}\left\{{n \atop k}\right\}$$

We bekijken de laatste term $k = n + 1$:

$$\sum_{r=0}^{j} B_{j-r}\binom{j}{r}(n+1)^{r+1}\left\{{n \atop n+1}\right\}$$

Alle termen in deze som hebben een factor $\left\{{n \atop n+1}\right\}$ en zijn dus wegens identiteit 4 weer gelijk aan 0. De totale term $k = n + 1$ is dus gelijk aan 0 en zo wordt de totale tweede som:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{j} B_{j-r}\binom{j}{r}k^{r+1}\left\{{n \atop k}\right\}$$

Onze totale som wordt dus:

$$\sum_{k=1}^{n+1} P_j(k)\left\{{n \atop k-1}\right\} + \sum_{k=1}^{n+1} P_j(k) \cdot k\left\{{n \atop k}\right\}$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} P_j(k)\left\{{n \atop k-1}\right\} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{j} B_{j-r}\binom{j}{r}k^{r+1}\left\{{n \atop k}\right\}$$

We zullen vanaf nu in beide sommen $P_j(k)$ uitschrijven:

$$\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{r=0}^{j} B_{j-r}\binom{j}{r}k^{r}\left\{{n \atop k-1}\right\} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{j} B_{j-r}\binom{j}{r}k^{r+1}\left\{{n \atop k}\right\}$$

We schrijven nu bij de eerste som elke k om naar $k+1$. Om ervoor te zorgen dat k nog steeds dezelfde waarden aanneemt als daarvoor, passen we de grenzen van de som aan met -1. (Elke waarde van k verlagen met 1 en daarna verhogen met 1 verandert de waarde van k niet.)

$$\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{r=0}^{j} B_{j-r}\binom{j}{r}k^{r}\left\{{n \atop k-1}\right\} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{j} B_{j-r}\binom{j}{r}(k+1)^{r}\left\{{n \atop k}\right\}$$

De totale som wordt:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{j} B_{j-r}\binom{j}{r}(k+1)^{r}\left\{{n \atop k}\right\}}_{Som\ 1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{j} B_{j-r}\binom{j}{r}k^{r+1}\left\{{n \atop k}\right\}}_{Som\ 2}$$

Voor een willekeurige $r = l$ in Som 1 willen uit $(k+1)^l$ de coëfficiënt vinden die vóór $k^l\left\{{n \atop k}\right\}$ komt. We passen het binomium van Newton[3] toe:

$$(k+1)^r = \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}k^i = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}k + \binom{r}{2}k^2 + \ldots + \binom{r}{r-1}k^{r-1} + \binom{r}{r}k^r$$

[3]Het binomium van Newton geeft een somrij voor het uitschrijven van haakjes met machten. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$. De coëfficiënten $\binom{n}{k}$ zijn respectievelijk de waarden van het k-de getal in de n-de rij van de driehoek van Pascal. Zie o.a. "Binomial theorem" op Wikipedia.

Voor een willekeurige l kun je alle waarden tussen 0 en $l-1$ negeren. Als we $l=8$ nemen en onze r in de som op 3 staat, dan zie je dat bij de hoogste macht $k^r = k^3$ in de uitbreiding van het binomium van Newton er nooit een $k^l = k^8$ term voorkomt. De totale coëfficiënt vóór $k^l\left\{{n \atop k}\right\} = k^8\left\{{n \atop k}\right\}$ bevat dus alleen coëfficiënten van uitbreidingen vanaf $r=8$. Alle termen vanaf $r=8$ bevatten allemaal een coëfficiënt vóór $k^l\left\{{n \atop k}\right\}$. Als we bijvoorbeeld bij $r=11$ zijn, geeft het binomium van Newton vóór $k^l = k^8$ de coëfficiënt $\binom{r}{l} = \binom{11}{8}$. Dus deze coëfficiënten vóór k^8 gaan we sommeren tussen $r=8$ en $r=j$. Ook komt er voor iedere r nog $B_{j-r}\binom{j}{r}$ bij, omdat deze nog in Som 1 stonden. De totale coëfficiënt vóór $k^l\left\{{n \atop k}\right\}$ in Som 1 wordt dus:

$$\sum_{r=l}^{j} B_{j-r}\binom{j}{r}\binom{r}{l}$$

De binomiale termen kunnen we herschrijven naar $\binom{j}{l}\binom{j-l}{r-l}$:

$$\binom{j}{r}\binom{r}{l} \stackrel{?}{=} \binom{j}{l}\binom{j-l}{r-l}$$

Om dit te bewijzen gebruiken we de definitie van $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$:

$$\binom{j}{r}\binom{r}{l} \stackrel{?}{=} \binom{j}{l}\binom{j-l}{r-l}$$

$$\frac{j!}{r!(j-r)!}\cdot\frac{r!}{l!(r-l)!} \stackrel{?}{=} \frac{j!}{l!(j-l)!}\cdot\frac{(j-l)!}{(r-l)!((j-l)-(r-l))!}$$

$$\frac{j!}{r!(j-r)!}\cdot\frac{r!}{l!(r-l)!} \stackrel{?}{=} \frac{j!}{l!(j-l)!}\cdot\frac{(j-l)!}{(r-l)!(j-r)!}$$

$$\frac{j!}{\cancel{r!}(j-r)!}\cdot\frac{\cancel{r!}}{l!(r-l)!} \stackrel{?}{=} \frac{j!}{l!\cancel{(j-l)!}}\cdot\frac{\cancel{(j-l)!}}{(r-l)!(j-r)!}$$

$$\frac{j!}{l!(r-l)!(j-r)!} = \frac{j!}{l!(r-l)!(j-r)!}$$

En dus: $\binom{j}{r}\binom{r}{l} = \binom{j}{l}\binom{j-l}{r-l}$. En de totale coëfficiënt vóór $k^l\left\{{n \atop k}\right\}$ wordt dus:

$$\sum_{r=l}^{j} B_{j-r}\binom{j}{l}\binom{j-l}{r-l}$$

We bekijken nu de coëfficiënt vóór $k^l\left\{{n \atop k}\right\}$ in Som 2. We herhalen Som 2: $\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{j} B_{j-r}\binom{j}{r}k^{r+1}\left\{{n \atop k}\right\}$. Aangezien hier een k^{r+1} aanwezig is in plaats van $(k+1)^r$, is deze iets makkelijker. We kiezen l zó, dat $l = r+1$ en dus $r = l-1$. We substitueren nu r voor $l-1$:

$$B_{j-r}\binom{j}{r}k^{r+1}\left\{{n \atop k}\right\} \to B_{j-(l-1)}\binom{j}{l-1}k^l\left\{{n \atop k}\right\} = B_{j-l+1}\binom{j}{l-1}k^l\left\{{n \atop k}\right\}$$

Nu kunnen we in beide sommen de coëfficiënten vóór $k^l\left\{{n \atop k}\right\}$ samenvoegen:

$$\sum_{r=l}^{j} B_{j-r}\binom{j}{l}\binom{j-l}{r-l} + B_{j+1-l}\binom{j}{l-1}$$

We substitueren nu $j-r=d$, en zo ook $r = j-d$:

$$\sum_{d=0}^{j-l} B_d\binom{j}{l}\binom{j-l}{j-d-l} + B_{j-l+1}\binom{j}{l-1}$$

De reden dat $\sum_{r=l}^{j}$ verandert naar $\sum_{d=0}^{j-l}$ is goed in te zien. De som $\sum_{r=l}^{j}$ bevat $j-l+1$ termen:

$$\underbrace{(l, l+1, l+2, \ldots, j-1, j)}_{j-(l-1)=j-l+1 \text{ termen}}$$

We willen graag de som laten beginnen bij $d=0$ en om hetzelfde aantal termen $j-l+1$ te krijgen, moeten we doorgaan tot $d=j-l$:

$$\underbrace{(0, 1, 2, \ldots, j-l-1, j-l)}_{(j-l)+1=j-l+1 \text{ termen}}$$

Onthoud identiteit 1: $B_{u+1} = \sum_{v=0}^{u} \binom{u}{u-v} B_v$. Als we dit vergelijken met de som $\sum_{d=0}^{j-l} B_d \binom{j-l}{j-l-d} \binom{j}{l}$, dan zien we dat het een gelijke som is met $v=d$ en $u=j-l$. Hieruit volgt:

$$\underline{\sum_{d=0}^{j-l} B_d \binom{j-l}{j-l-d}} \binom{j}{l} + B_{j+1-l} \binom{j}{l-1} = \underline{B_{j-l+1}} \binom{j}{l} + B_{j-l+1} \binom{j}{l-1}$$

$$= B_{j-l+1} \left(\binom{j}{l} + \binom{j}{l-1} \right)$$

Deze $\binom{j}{l} + \binom{j}{l-1}$ term kunnen we vereenvoudigen naar $\binom{j+1}{l}$ door de volgende identiteit:

$$\binom{p-1}{q} + \binom{p-1}{q-1} = \binom{p}{q}$$

Het bewijs hiervan luidt als volgt:

$$\binom{p-1}{q} + \binom{p-1}{q-1} = \frac{(p-1)!}{q!(p-1-q)!} + \frac{(p-1)!}{(q-1)!(p-1-(q-1))!}$$

$$= \frac{(p-1)!}{q!(p-1-q)!} + \frac{(p-1)!}{(q-1)!(p-q)!}$$

$$= (p-1)! \left[\frac{1}{q!(p-1-q)!} + \frac{1}{(q-1)!(p-q)!} \right]$$

$$= (p-1)! \left[\frac{1}{q!(p-q-1)!} \cdot \frac{p-q}{p-q} + \frac{1}{(p-q)!(q-1)!} \cdot \frac{q}{q} \right]$$

$$= (p-1)! \left[\frac{p-q}{q!(p-q)!} + \frac{q}{q!(p-q)!} \right]$$

$$= (p-1)! \left[\frac{p-q+q}{q!(p-q)!} \right]$$

$$= (p-1)! \cdot \frac{p}{q!(p-q)!}$$

$$= \frac{p!}{q!(p-q)!}$$

$$\binom{p-1}{q} + \binom{p-1}{q-1} = \frac{p!}{q!(p-q)!} = \binom{p}{q}$$

Dus $\binom{j}{l} + \binom{j}{l-1} = \binom{j+1}{l}$ en zo wordt de totale coëfficiënt vóór $k^l \left\{ {n \atop k} \right\}$:

$$B_{j-l+1} \left(\binom{j}{l} + \binom{j}{l-1} \right) = B_{j-l+1} \binom{j+1}{l}$$

Merk op dat dit de coëfficiënt is voor een willekeurige l gedurende de grote som vanaf $r = 0$ naar $r = j$. We willen deze coëfficiënt dus voor elke waarde van r in de som verwerken. Als we de originele som herinneren:

$$B_{n+j+1} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{j} B_{j-r}\binom{j}{r}(k+1)^r \left\{ {n \atop k} \right\} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{j} B_{j-r}\binom{j}{r}k^{r+1}\left\{ {n \atop k} \right\}$$

Deze hebben we nu herschreven naar:

$$B_{n+j+1} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{j+1} B_{j+r+1}\binom{j+1}{r}k^r \left\{ {n \atop k} \right\}$$

De reden dat r gaat van $r = 0$ naar $r = j + 1$ is omdat we coëfficiënten nodig hebben voor alle k^0 tot en met k^{j+1}. Onthoud onze definitie van $P_{j+1}(x) = \sum_{r=0}^{j+1} B_{j+1-r}\binom{j+1}{r}x^r$. Dit is precies de coëfficiënt die voor $\left\{ {n \atop k} \right\}$ staat! Dus:

$$B_{n+j+1} = \sum_{k=1}^{n} P_{j+1}(k)\left\{ {n \atop k} \right\}$$

Een complete inductie (zie bron [15]). □

Terug naar het modulo rekenen. We bekijken een priem $p > 2$ en een heel getal m. Verder kiezen we een heel getal r zo dat: $0 < r < p^m$. Wat is nu $\binom{p^m}{r} \mod p$?

$$\binom{p^m}{r}$$

$$= \frac{(p^m)!}{r!(p^m - r)!}$$

$$= \frac{(p^m)(p^m-1)!}{r!(p^m-r)!} = \frac{(\overbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}^{m \text{ keer}})(p^m-1)!}{r!(p^m-r)!}$$

$$\equiv \frac{(0)(p^m-1)!}{r!(p^m-r)!} \mod p \equiv 0 \mod p$$

We bekijken nu $P_{p^m}(x)$ modulo p:

$$P_{p^m}(x) = \sum_{r=0}^{p^m} B_{p^m-r}\binom{p^m}{r}x^r$$

$$= B_{p^m-0}\binom{p^m}{0}x^0 + B_{p^m-1}\binom{p^m}{1}x^1 + \ldots + B_{p^m-(p^m-1)}\binom{p^m}{p^m-1}x^{p^m-1} + B_{p^m-p^m}\binom{p^m}{p^m}x^{p^m}$$

Aangezien we net hebben bewezen dat $\binom{p^m}{r} \equiv 0 \mod p$:

$$\equiv B_{p^m-0}\binom{p^m}{0}x^0 + \cancel{B_{p^m-1}\binom{p^m}{1}x^1} + \ldots + \cancel{B_1\binom{p^m}{p^m-1}x^{p^m-1}} + B_{p^m-p^m}\binom{p^m}{p^m}x^{p^m} \mod p$$

$$\equiv B_{p^m} + B_0 x^{p^m} \mod p$$

Dus in conclusie:

$$P_{p^m}(x) \equiv B_{p^m} + x^{p^m} \mod p$$

We bekijken nu het $n + p^m$-de Bell Number modulo p:

$$B_{n+p^m} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{p^m} B_{p^m-r}\binom{p^m}{r}k^r\left\{ {n \atop k} \right\} \mod p$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{n} \left(B_{p^m} + k^{p^m} \right) \left\{ {n \atop k} \right\} \mod p$$

Nu bekijken we de coëfficient k^{p^m} die vóór $\left\{ {n \atop k} \right\}$ staat: $k^{p^m} \equiv k \mod p$. Dit volgt uit de Kleine Stelling van Fermat[4]:

$$k^{p^m} = k^{p^{m-1} \cdot p}$$
$$= (k^p)^{p^{m-1}} \equiv k^{p^{m-1}} \mod p$$

Herhaal dit proces tot $k^{p^{m-m}} = k^{p^0} = k$, en zo:

$$k^{p^m} \equiv k \mod p$$

Zo volgt dus ook:

$$B_{n+p^m} = \sum_{k=1}^{n} \left(B_{p^m} + k^{p^m} \right) \left\{ {n \atop k} \right\} \equiv \sum_{k=1}^{n} \left(B_{p^m} + k \right) \left\{ {n \atop k} \right\} \mod p$$

We bekijken nu $P_1(x)$:

$$P_1(x) = \sum_{r=0}^{1} B_{1-r} \binom{1}{r} x^r$$

$$P_1(x) = B_1 \binom{1}{0} x^0 + B_0 \binom{1}{1} x^1$$

$$P_1(x) = B_1 + B_0 x = 1 + x$$

Zo kunnen we B_{n+1} uitschrijven naar:

$$B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} P_1(k) \left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{k=1}^{n} (1 + k) \left\{ {n \atop k} \right\}$$

Merk nu op dat je de som van B_{n+p^m} kunt opsplitsen naar:

$$B_{n+p^m} \equiv \sum_{k=1}^{n} \left(B_{p^m} + k \right) \left\{ {n \atop k} \right\} \equiv \sum_{k=1}^{n} \left(B_{p^m} - 1 + k + 1 \right) \left\{ {n \atop k} \right\} \mod p$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{n} \left((B_{p^m} - 1) \left\{ {n \atop k} \right\} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left((k+1) \left\{ {n \atop k} \right\} \right) \mod p$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{n} \left((B_{p^m} - 1) \left\{ {n \atop k} \right\} \right) + B_{n+1} \mod p$$

$$\equiv (B_{p^m} - 1) \sum_{k=1}^{n} \left(\left\{ {n \atop k} \right\} \right) + B_{n+1} \mod p$$

$$B_{n+p^m} \equiv (B_{p^m} - 1) \cdot B_n + B_{n+1} \mod p$$

Voor de laatste stap van het bewijs voor Touchard's Congruentie (zie 5.2) willen we bewijzen dat $B_{p^m} - 1 = m \mod p$, aangezien we dan met $m = 1$ klaar zijn (zie bron [15]).

[4]De Kleine Stelling van Fermat zegt dat $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$ en zo dus ook $a^p \equiv a \mod p$.

5.3 Groepentheorie

Om dit te bewijzen gaan we een uitstapje maken naar groepentheorie, waarin gewerkt wordt met *permutaties*. Een permutatie is een transformatie die je op een set objecten uitvoert door ze van volgorde te veranderen. Een voorbeeld hiervan is: $\{a, b, c, d\} \to \{b, a, d, c\}$. Deze permutatie verwisselt de eerste twee objecten van plek en ook de laatste twee. Als we deze permutatie nog eens uitvoeren, dan krijgen we: $\{b, a, d, c\} \to \{a, b, c, d\}$. Merk op dat deze permutatie na twee keer uitvoeren zichzelf teruggeeft. Een permutatie kan ook wat ingewikkelder zijn. We bekijken de volgende: $\{a, b, c, d, e\} \to \{b, e, a, c, d\}$. De permutatie pakt het object op plaats 1 en legt het op plaats 3. Het pakt het object op plaats 2 en legt het op plaats 1, enz. We schrijven de permutatie uit:

$$\{a, b, c, d, e\} \to \{b, e, a, c, d\}$$

$$\{b, e, a, c, d\} \to \{e, d, b, a, c\}$$

$$\{e, d, b, a, c\} \to \{d, c, e, b, a\}$$

$$\{d, c, e, b, a\} \to \{c, a, d, e, b\}$$

$$\{c, a, d, e, b\} \to \{a, b, c, d, e\}$$

Ook deze komt na een aantal keer op de originele volgorde uit. Omdat permutaties altijd een eindig aantal objecten van volgorde veranderen, moet er altijd een eindig aantal keer zijn dat we een permutatie moeten uitvoeren voordat we op de originele volgorde uitkomen. In andere woorden: een permutatie is altijd *periodiek*. Een andere belangrijke eigenschap van permutaties is dat ze *inverteerbaar* zijn. Dat houdt in dat gegeven de (gepermuteerde) volgorde en de permutatie waarmee dat is gebeurd, we de originele volgorde terug kunnen krijgen. Dit zorgt ervoor dat er nooit informatie ontsnapt in een set objecten. Een voorbeeld van een niet inverteerbare transformatie is bijvoorbeeld de transformatie $T(x) = x^2$. We voeren deze transformatie uit op de set $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$:

$$\{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{4, 1, 0, 1, 4\} = \{4, 1, 0\}$$

Aangezien T -2 en 2 allebei 4 maakt, is er geen manier voor ons om de originele set terug te krijgen, ook al weten we de getransformeerde waarden en de transformatie die daarvoor is gebruikt. Een transformatie op een eindig aantal objecten die inverteerbaar is, is dus altijd een permutatie en zo ook altijd periodiek. Een inverteerbare transformatie is een bijectie, het koppelt namelijk altijd maar één object naar één ander object. De transformatie $T(x) = x^2$ is dus niet inverteerbaar: de elementen -2 en 2 worden allebei aan het element 4 gekoppeld. (Elementen -1 en 1 worden overigens ook allebei aan element 1 gekoppeld.) Een transformatie die de elementen niet aanpast, i.e. $T(x) = x$, noemen we een vaste transformatie.

Een collectie van permutaties noemen we een *groep*. Groepen worden vaak genoteerd met G. Een groep toepassen op een set S geeft voor elk element altijd een (ander) element in S. Een voorbeeld van een groep G die op een set S *acteert* is het roteren van een Rubiks kubus[5]. Bijvoorbeeld de zet R (het rechtervlak met de klok mee roteren) draait alle punten een rotatie verder. Merk op hoe elke hoek die je roteert weer op een andere hoek in het rechtervlak van de kubus terecht komt. De hoeken springen, zolang je geen kapotte Rubiks kubus hebt, niet uit de kubus. In andere woorden: elk object in S blijft in S. Verder blijven alle ribben van de kubus (niet de hoeken), ribben van de kubus. Er is dus geen enkele permutatie die je op de kubus kan toepassen die een ribbe op de plek van een hoek plaatst. Er hoeft dus geen volgorde permutaties in G te bestaan die élk element van S aan élk ander element van S kan koppelen. Er zijn ook elementen in S die door geen enkele permutatie van G verandert. De middens van alle vlakken van een Rubiks kubus veranderen nooit van plek (rotatie niet meegenomen). We bekijken een voorbeeld. Laat $S = \{1, 2, 3\}$ en laat G bestaan uit de volgende permutaties: $x \to x$ en $(1, 2) \to (2, 1)$. Deze permutaties geven dus voor elk individueel element van S dat element terug en het verandert de elementen 1 en 2 van plaats. Als totale groep G acteert op het element 3, dan krijg je voor elke permutatie in G weer 3 terug. Een element x waarvoor elke permutatie $P \in G$ toegepast op x zichzelf teruggeeft, noemen we een *vast element onder* G.

[5] Zie "Rubiks kubus" op Wikipedia.

Stelling 7. $\forall m \in \mathbb{N}$ *met* p *priem* : $B_{p^m} \equiv m+1 \mod p$.

We definiëren S als de set van alle partities P van $\mathbb{Z}_{p^m}$. P heeft dus een p^m aantal objecten als je alle subsets in P verenigt. De grootte van S is dus $|S| = B_{p^m}$. We definiëren nu een transformatie die met de elementen x, y werkt: $f_y(x) := x + y$. Deze transformatie pakt de waarde van x en schuift het y plekken verderop. Het resultaat nemen we modulo p^m. We bekijken een voorbeeld: $y = 3$ geeft ons de transformatie:

$$f_3(x) : x \to x + 3 \mod p^m$$
$$f_3^2(x) : x \to x + 6 \mod p^m$$

We passen $f_3(x)$ een p^m aantal keer toe:

$$f_3^{p^m}(x) : x \to x + p^m \cdot 3 \mod p^m \equiv x \mod p^m$$

Dus is $f_3(x)$ periodiek met een periode van p^m. Voor waarden $y = p^k$ is de periode korter. Als voorbeeld bekijken we $y = p^{m-1}$:

$$f_{p^{m-1}}(x) : x \to x + p^{m-1} \mod p^m$$
$$f_{p^{m-1}}^2(x) : x \to x + 2 \cdot p^{m-1} \mod p^m$$

Na $f_{p^{m-1}}(x)$ een p aantal keer toepassen:

$$f_{p^{m-1}}^p(x) : x \to x + p \cdot p^{m-1} \mod p^m = x + p^m \mod p^m \equiv x \mod p^m$$

We zien dus dat $f_{p^{m-1}}(x)$ een periode van p heeft. In het algemeen geldt dus dat de periode van $f_y(x)$ een periode heeft van een macht van p. Het toepassen van f op een permutatie P werkt door f op elk individueel element uit de subsets van P toe te passen. We bekijken elke partitie uit S die niet vast is onder f. Aangezien die allemaal dus een periode van een p-macht hebben, geldt dat het totale aantal vaste partities onder f equivalent is aan $|S| = B_{p^m} \mod p$. Hierdoor hoeven we ons alleen bezig te houden met de partities P in S die al vast zijn onder f. Stel we hebben zo een vaste partitie P met subsets A en B. A en B bevatten respectievelijk de elementen a en b. Aangezien P vast is onder f, geldt dat $f(P) = P$. De transformatie $f_{b-a}(a)$ koppelt element a aan b (dit komt omdat $f_{b-a}(a) : a \to a + b - a = b$). Het toepassen van f op een set (i.p.v. individuele waarde) werkt door f op elk individueel element van de set toe te passen. Aangezien P vast is onder f, geldt dus dat $f_{b-a}(A) = B$ (want de set die de uitkomst is van $f(A)$ moet ook in P zitten voor P om vast te zijn). Deze transformatie koppelt dus elk element uit A aan één element van B. Zo moeten alle subsets van een vaste P dus ook dezelfde grootte hebben: $|A| = |B|$. En aangezien we in P de p^m elementen verdelen over even grote subsets, moeten de groottes van de subsets een p-macht zijn: $|A| = p^i$. Nu beweren we dat de enige vaste partitie wiens subsets een grootte van p^i hebben, subsets heeft die elementen bevatten die equivalent aan elkaar zijn modulo p^{m-i}. Voor $i = 0, 1, \ldots, m-1, m$ bevatten deze partities:

- $i = 0$: P heeft één subset van grootte p^m. (Dit zijn alle elementen in één subset.)
- $i = 1$: P heeft p subsets van grootte p^{m-1}. (Dit zijn de equivalentieklassen modulo p.)
- ...
- $i = m-1$: P heeft p^{m-1} subsets van grootte p. (Dit zijn de equivalentieklassen modulo p^{m-1}.)
- $i = m$: P heeft p^m subsets van grootte 1. (Alle elementen los.)

Als deze bewering waar is, dan klopt het dus dat het aantal vaste partities gelijk is aan $m+1$ ($i = 0, 1, \ldots, m-1, m$ neemt $m+1$ waarden aan). Dit gaan we aantonen door middel van een bewijs uit het ongerijmde. We nemen aan dat onze vaste partitie P de elementen a en b in dezelfde subset A bevat, waarbij $|A| = p^i$ en $a \not\equiv b \mod p^{m-i}$. De transformatie $f_{b-a}(a)$ koppelt a naar b en dus is f nog steeds een permutatie op A (want beide elementen zitten in A). Het een r aantal keer toepassen

van f op a geeft dus steeds een element in A. We kunnen $f^r_{b-a}(a)$ omschrijven naar de volgende transformatie:

$$f^r_{b-a}(a) = a + (\underbrace{b-a+b-a+\ldots b-a}_{r \text{ keer}}) = a + r(b-a) = f_{r(b-a)}(a)$$

Het is relatief eenvoudig in te zien dat voor twee getallen r en s de uitspraak $f_{r(b-a)}(a) \equiv f_{s(b-a)}(a) \mod p^m$ alleen waar is als: $a + r(b-a) \equiv a + s(b-a) \mod p^m$. Nu kunnen we deze uitspraak factoriseren:

$$a + r(b-a) \equiv a + s(b-a) \mod p^m$$

$$r(b-a) \equiv s(b-a) \mod p^m$$

$$(r-s)(b-a) \equiv 0 \mod p^m$$

Omdat we aannamen dat $a \not\equiv b \mod p^{m-i}$ voor elke i, is $b-a$ nooit een veelvoud van p^{m-i}. De hoogste p-macht die $b-a$ wél kan bevatten, is $m-i-1$. In andere woorden: er bestaat een $t \leq m-i-1$ waarvoor geldt dat $b-a = p^t u$, waarbij u geen veelvoud is van p. Nu kunnen we $b-a = p^t u$ substitueren in de vergelijking:

$$(r-s)(b-a) \equiv 0 \mod p^m$$

$$(r-s)p^t u \equiv 0 \mod p^m$$

Aangezien u geen machten van p bevat, moet om op een veelvoud van p^m uit te komen, het volgende gelden: $r-s = p^{m-t}v$, waarbij v geen veelvoud is van p. Verder weten we dat $t \leq m-i-1$ en zo ook:

$$t \leq m-i-1$$

$$t-m \leq -i-1$$

$$m-t \geq i+1$$

En zo heeft $r-s$ dus minimaal één factor van p^{i+1} en volgt dat: $r-s \equiv 0 \mod p^{i+1}$. We hebben nu bewezen dat het r aantal keer en het s aantal keer toepassen van f hetzelfde element van A geven, als en alleen als r en s van elkaar verschillen met een veelvoud van p^{i+1}. We bekijken de waarden $1 \leq r < s \leq p^{i+1}$. Het verschil tussen r en s: $|r-s| < p^{i+1}$ (het grootst mogelijke verschil ontstaat als $r = p^{i+1}$ en $s = 1$, waarna $|p^{i+1} - 1| < p^{i+1}$). We hebben echter net gezien dat de gelijkheid modulo p^m alleen kan wanneer $r-s = p^{i+1}v$. Dit kan niet, behalve wanneer $r-s = 0$ en $v = 0$. Aangezien we net bepaalden dat v geen veelvoud van p is (en $v = 0$ dat wel is, namelijk $v = 0 \cdot p$), krijgen we een tegenspraak bij de voorwaarde $r < s$. (Overigens levert de voorwaarde $r > s$ dezelfde tegenspraak.) Zo volgt dus dat $r = s$. Er zijn dus geen twee verschillende getallen r en s die hetzelfde element van A geven. Zo ook zijn voor alle $r = 1, 2, \ldots, p^{i+1}$ de elementen $f_{r(b-a)}(a)$ onderling verschillend en moet A dus minstens een p^{i+1} aantal elementen bevatten: $|A| \geq p^{i+1}$. We begonnen echter met $|A| = p^i$. De uitspraken $|A| = p^i$ en $|A| \geq p^{i+1} > p^i$ zijn tegensprekend. Zo is onze originele aanname dat $a \not\equiv b \mod p^{m-i}$ waar kan zijn onder de voorwaarde dat $|A| = p^i$, fout. De bewering dat de enige partitie wiens subsets een grootte van p^i heeft, subsets heeft die elementen bevatten die equivalent aan elkaar zijn modulo p^{m-i}, is dus waar. En dus zijn er maar een $m+1$ aantal vaste partities onder f. En omdat het aantal vaste partities equivalent is aan $B_{p^m} \mod p$ en het totale aantal vaste partities ook gelijk is aan $m+1$, volgt dat $B_{p^m} \equiv m+1 \mod p$. Terug naar het modulo rekenen. We hadden in 5.2 bewezen dat $B_{n+p^m} \equiv (B_{p^m} - 1) \cdot B_n + B_{n+1} \mod p$. Nu volgt dat:

$$B_{n+p^m} \equiv (B_{p^m} - 1) \cdot B_n + B_{n+1} \mod p$$

$$B_{n+p^m} \equiv (m+1-1) \cdot B_n + B_{n+1} \mod p \equiv m \cdot B_n + B_{n+1} \mod p$$

Nu kiezen we $m = 1$ en volgt: $B_{n+p} \equiv B_n + B_{n+1} \mod p$. (Zie bron [15].) □

Voor het speciale geval waar $n = 0$ krijg je de identiteit: $B_p \equiv 2 \mod p$.

Periodiek modulo priem (Deze paragraaf en de bewijzen erin hebben we zelf gevonden en hebben dus geen bron.) We willen aantonen dat de Bell Numbers altijd periodiek zijn modulo p. In andere woorden, we onderzoeken of er altijd een getal N_p bestaat waarvoor klopt dat $B_{n+N_p} \equiv B_n \mod p$.

Stelling 8. *$\forall n, p \in \mathbb{N}, p$ priem, $\exists N_p \in \mathbb{N} : B_{n+N_p} \equiv B_n \mod p$.*

We bekijken eerst een andere getallenreeks. We definiëren de p-ibonacci-reeks als de volgende recursieve reeks:

$$f_{n+p} := f_{n+1} + f_n \text{ met } p \text{ priem}$$

De startwaarden van f kiezen we zo: $f_0 = 0, f_1 = 0, \ldots, f_{p-2} = 0, f_{p-1} = 1$ (de startwaarden van f maken niet uit zolang niet alle startwaarden gelijk zijn aan 0). Merk op dat voor $p = 2$ dit de gewone Fibonacci-reeks $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ geeft. We gaan kijken of de p-ibonacci-reeks periodiek is modulo p. In andere woorden: we onderzoeken of er altijd een getal N_p is waarvoor geldt dat $f_{n+N_p} \equiv f_n \mod p$. We definiëren v_n als het volgende p-dimensionale punt in het veld $\mathbb{F}_p$:

$$v_n := (f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+p-1}) \in \mathbb{F}_p^p$$

We definiëren T als de volgende transformatie in $\mathbb{F}_p$:

$$T(v_n) := v_{n+1} = (f_{n+1}, f_n, \ldots, f_{n+p})$$

Nu vragen we ons af of T een inverteerbare transformatie is, oftewel: kunnen we met v_{n+1} en de definitie van $T(v_n)$ het originele punt v_n terugkrijgen? Het gegeven punt v_{n+1} bevat alle waarden van f_{n+1} tot en met f_{n+p}, dus weten we om v_n te restaureren die waarden alvast. De enige waarde die we nog niet weten, is de eerste waarde f_n. Aangezien de p-ibonacci-reeks werd gedefinieerd als $f_{n+p} = f_{n+1} + f_n$, volgt dat $f_n = f_{n+p} - f_{n+1}$. En aangezien we de waarden aan de rechterkant van die vergelijking weten, weten we ook de waarde van f_n. Er is dus een transformatie T^{-1} waarvoor geldt:

$$T^{-1}(v_{n+1}) = v_n$$

T is dus een inverteerbare transformatie in $\mathbb{F}_p$ en dus ook een permutatie. Aangezien $\mathbb{F}_p$ maar een eindig aantal objecten bevat (namelijk een p aantal), kun je T maar een eindig aantal keer toepassen op v_n voordat je weer terugkomt op v_n. Zo is er dus altijd een N_p waarvoor geldt:

$$\underbrace{T(T(T(\ldots v_n)))\ldots)}_{N_p \text{ keer}} = v_{n+N_p} = v_n.$$

En aangezien v_n waarden van f bevat, is er dus altijd een N_p waarvoor geldt:

$$f_{n+N_p} \equiv f_n \mod p$$

En zo is de p-ibonacci-reeks altijd periodiek modulo p. De voorwaarde dat niet alle startwaarden gelijk moeten zijn aan 0 hoeft overigens niet: het geval waar $f_0 = 0, f_1 = 0, \ldots, f_{p-1} = 0$ geeft als reeks alleen maar waarden van 0. Dit is (duidelijk) periodiek. Aangezien we Touchard's Congruentie: $B_{n+p} \equiv B_n + B_{n+1} \mod p$ al eerder hebben bewezen en we hebben bewezen dat de p-ibonacci-reeks altijd periodiek is modulo p, zijn de Bell Numbers ook altijd periodiek modulo p. De p-ibonacci-reeks en de Bell Numbers hebben namelijk dezelfde recursieve relatie modulo p, alleen zijn de startwaarden verschillend. Er is dus altijd een getal N_p waarvoor geldt: $B_{n+N_p} \equiv B_n \mod p$. □

Deze waarden voor N_p kun je zelf vinden met het script in hoofdstuk 10.

6 Toepassing van Bell Numbers

Een andere toepassing van de Bell Numbers ligt in computer programming. Voor sommige programma's (zoals gokwebsites) heb je een manier nodig om een lijst willekeurig te schudden. We bekijken een manier om dit te doen. We nemen een lijst $L := (1, 2, \ldots, n)$. Laat $S := (m_1, m_2, \ldots, m_i)$ een *shuffle* zijn. Een shuffle is een volgorde *zetten* die we doen op L. Voor elke $m_i \in S$ nemen we de waarde van m_i en plaatsen we het element met waarde m_i vooraan in L. We bekijken een voorbeeld. Laat $L := (1, 2, 3, 4)$ en $S := (3, 2, 3)$. De eerste zet uit S zegt dat we het getal 3 in L vooraan plaatsen. De lijst wordt dus $L = (3, 1, 2, 4)$. De tweede zet uit S zegt dat we het getal 2 uit L vooraan plaatsen. De lijst wordt dus $L = (2, 3, 1, 4)$. De derde zet uit S plaatst weer het getal 3 uit L vooraan. Deze shuffle geeft dus $L \xrightarrow{S} (3, 2, 1, 4)$. We noemen een shuffle *geordend* als het de originele lijst teruggeeft. In andere woorden: S is geordend als $L \xrightarrow{S} L$. Een voorbeeld hiervan is $S = (1, 3, 2, 2, 1)$. We schrijven de shuffle uit:

$$(1, 2, 3, \ldots, n) \xrightarrow{1} (1, 2, 3, \ldots, n)$$

$$(1, 2, 3, \ldots, n) \xrightarrow{3} (3, 1, 2, \ldots, n)$$

$$(3, 1, 2, \ldots, n) \xrightarrow{2} (2, 3, 1, \ldots, n)$$

$$(2, 3, 1, \ldots, n) \xrightarrow{2} (2, 3, 1, \ldots, n)$$

$$(2, 3, 1, \ldots, n) \xrightarrow{1} (1, 2, 3, \ldots, n)$$

De vraag is als volgt: voor een lijst met lengte n, hoeveel shuffles van n zetten zijn geordend?

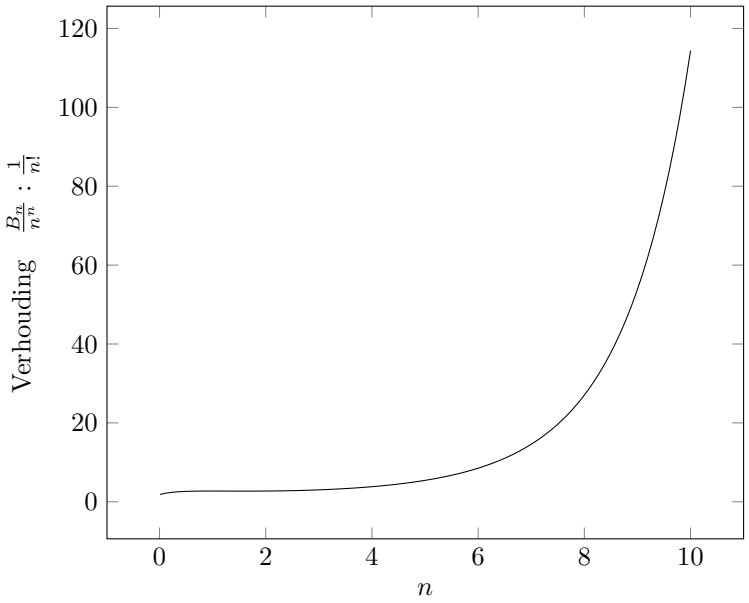
Stelling 9. *Voor een lijst met lengte n zijn er B_n geordende shuffles.*

We weten dat de Bell Numbers het totaal aantal partities van een set telt, dus zoeken we een manier om deze shuffles te koppelen aan partities. We bekijken de shuffle $S := (m_1, m_2, \ldots, m_n)$. We maken een set P die bestaat uit subsets van $\{1, 2, \ldots n\}$. De subsets in P bestaan uit de indices i, j die overeenkomen met dezelfde waarde $m_i = m_j$, i.e. alle i waarbij $m_i = 1$ worden een subset van P, alle i waarvoor $m_i = 2$ worden een subset van P, etc. P is dus voor elke shuffle een partitie van S. Laten we een voorbeeld nemen. Laat $S := (3, 1, 3, 2, 1)$. Aangezien $m_1 = m_3$, zit $\{1, 3\}$ in P. En aangezien $m_2 = m_5$, zit $\{2, 5\}$ in P. Het overige element m_4 is uniek en dus zit de set $\{4\}$ ook in P. De partitie is dus $P = \{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}$.

We bekijken een partitie P bestaande uit k subsets. Als $S = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ een geordende shuffle is, dan moet de laatste zet m_n gelijk zijn aan 1 (elke andere waarde voor m_n plaatst namelijk een ander getal vooraan en dan is S (duidelijk) geen geordende shuffle meer). Als subset $A_1 \in P$ het element n bevat, dan volgt dat $m_i = 1$ klopt als en alleen als $i \in A_1$. Voor $k = 1$, dus P bestaat uit één subset, dan is A_1 de enige subset en dus $A = \{1, 2, \ldots n\}$. En omdat $m_i = 1\ \forall i \in A_1$, moet S dus $\{1, 1, \ldots, 1\}$ zijn. Voor $k > 1$ moet de laatste zet in S die niet 1 is, 2 zijn. We bekijken nu de grootste index j_2 waarvoor geldt dat $j_2 \notin A_1$ (de laatste zet van S die geen 1 is). We plaatsen deze j_2 in subset A_2 en zo ook alle i waarvoor $m_i = 2$. Dit proces herhalen we: nadat we alle indices van de waarden $m_i = 1, 2, \ldots, p$ hebben opgedeeld, bekijken we de grootste index j_{p+1} waarvoor geldt dat $j_{p+1} \notin A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_p$. Nu plaatsen we j_{p+1} in A_{p+1} en zo ook alle i waarvoor geldt dat $m_i = p + 1$. Dus $m_i = p + 1$ als en alleen als $i \in A_{p+1}$. Wanneer $k = p$, zijn alle waarden $m_i = 1, 2, \ldots, p$ en hebben we de partitie $P = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{p\}\}$. Met dit proces hebben we elke geordende shuffle S gekoppelt aan één unieke partitie P. Aangezien B_n alle partities van n objecten telt en we alle geordende shuffles $S = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ aan één unieke partitie hebben gekoppeld, volgt dus dat het aantal geordende shuffles van lengte n gelijk is aan B_n. (Zie bron [16].) □

Terug naar het genereren van random lijsten voor een computerprogramma. Als je een lijst een willekeurige permutatie wil geven betekent dit dat elke mogelijke permutatie van de lijst een gelijke kans heeft om voor te komen. Een lijst heeft per definitie $n!$ mogelijke permutaties en dus willen we dat de kans op een willekeurige permutatie $\frac{1}{n!}$ is. Omdat er n^n verschillende shuffles zijn en B_n shuffles weer op de originele lijst uitkomen, is de kans dat de lijst op zichzelf uitkomt $\frac{B_n}{n^n}$. Hieronder hebben we deze kansen met elkaar vergeleken.

n	$\frac{1}{n!} \cdot 100\%$	$\frac{B_n}{n^n} \cdot 100\%$
1	100%	100%
2	50%	50%
3	16,667%	18,519%
4	4,167%	5,859%
5	0,833%	1,664%
6	0,139%	0,435%
7	0,020%	0,106%
8	0,002%	0,025%
9	0,000%	0,005%



Padé-benadering: $R(x) = \frac{-46.169688x^5+677.063107x^4-5849.283630x^3+20312.045525x^2-60711.683019x-16424.848136}{x^5-37.460859x^4+397.113892x^3+92.073856x^2-14269.414744x-9019.136493}$.
Het script waarmee we deze grafiek hebben gegenereerd staat wederom in hoofdstuk 10.

In de grafiek wordt duidelijk dat er een groot verschil zit tussen deze kansen voor een grote n. Dit betekent dus dat een lijst op een willekeurige manier schudden door middel van deze zetten geen goede manier is.

7 Conclusie

We hebben in dit profielwerkstuk onderzocht hoe de Bell Numbers zich gedragen en hoe je ze kan berekenen. We hebben bekeken hoe de Bell Numbers een set elementen partitioneren. We hebben een recursieve formule en een directe formule voor de Bell Numbers bestudeerd. Een recursieve formule is: $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$. Het bewijzen van een directe formule voor de Bell Numbers hebben we onder andere gedaan aan de hand van de formule van Dobiński: $B_n = \frac{1}{e} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!}$. We hebben deze somrij veel bestudeerd door middel van analyse. We hebben bijvoorbeeld gekeken naar hoe deze somrij convergeert voor alle n. Verder hebben we ook andere somrijen gevonden die de Bell Numbers berekenen. Een voorbeeld hiervan is de som van de Stirling Numbers: $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$, met $\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$.

We hebben gekeken naar hoe de Bell Numbers zich periodiek gedragen modulo p, waarbij p priem. Aan de hand van stellingen uit de getaltheorie hebben we zelf bewezen dat de Bell Numbers periodiek zijn modulo p. Dit houdt in dat er een getal N_p bestaat waarvoor $B_{n+N_p} \equiv B_n \mod p$. Hiervoor moesten we zelfs een uitstapje in de groepentheorie maken. Dat vorige resultaat volgde uit Touchard's Congruentie: $B_{n+p} \equiv B_n + B_{n+1} \mod p$.

Toepassingen van de Bell Numbers komen weinig voor. Behalve het feit dat de Bell Numbers overeenkomen met het aantal rijmschema's van een n regels lang gedicht en de geordende shuffles is het moeilijk echt toepassingen te vinden.

Tot slot hebben we geleerd om een wiskundig onderzoek uit te voeren. Hier kwam veel bij kijken: literatuuronderzoek, redeneneren en in LaTeX schrijven.

Voor diegenen die verdere interesse hebben in de Bell Numbers hebben we een aantal onderwerpen opgesomd om te onderzoeken:

1. Onderzoek de relatie tussen de Bell Numbers en de momenten van de Poissonverdeling.
2. Bestudeer de asymptotische groeisnelheid van de Bell Numbers.
3. Welke Bell Numbers zijn priem? (een open probleem)
4. Wat is de exacte periode van de Bell Numbers modulo p voor een p priem? (eveneens een open probleem)

8 Uitwerkingen

Uitwerking 1. *Te bewijzen: voor* $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{x^n}{n!}$ *geldt dat* $G''(x) = G'(x) + G(x)$.
We schrijven eerst de eerste 5 termen uit van $G(x)$*:* $G(x) = F_0\frac{x^0}{0!} + F_1\frac{x^1}{1!} + F_2\frac{x^2}{2!} + F_3\frac{x^3}{3!} + F_4\frac{x^4}{4!}\ldots$ $= 1\frac{1}{1} + 1\frac{x}{1} + 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^3}{6} + 5\frac{x^4}{24}\ldots = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{24}\ldots$
We nemen nu de eerste afgeleide $G'(x)$*:* $G'(x) = 1 + 2x + \frac{3x^2}{2} + \frac{5x^3}{6}\ldots$. *Nu de tweede afgeleide* $G''(x)$*:* $G''(x) = 2 + 3x + \frac{5x^2}{2}\ldots$. *Nu de stelling:*

$$G''(x) = G'(x) + G(x)$$

$$2 + 3x + \frac{5x^2}{2}\ldots = 1 + 2x + \frac{3x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + \ldots + 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{24}\ldots$$

$$2 + 3x + \frac{5x^2}{2}\ldots = 1 + 1 + 2x + x + \frac{3x^2}{2} + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{24}\ldots$$

Uitwerking 2. *Kopieer het laatste getal uit rij* 6, 877*, en zet het in de meest linkse kolom van rij* 7*. Voeg nu de waarde uit de eerste kolom van rij* 6, 203*, eraan toe om* 1080 *te maken. Noteer dit in rij* 7*, kolom* 2*. Herhaal dit proces van optellen, noteren; optellen, noteren tot je bij de laatste waarde van* $B_7 = 4140$ *aankomt. Rij 7 wordt dan:* 877|1080|1335|1657|2066|2589|3263|4140|

Uitwerking 3. $f(x) = \frac{1}{1-x}$*. Neem de waarde voor* $x = 0 : f(0) = \frac{1}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$*. De 0-de graads benadering* $P_0(x)$ *is dus* $P_0(x) = 1$*. De eerstegraads benadering* $P_1(x)$ *voldoet aan* $P_1(0) = f(0)$ *en* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_1(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(0)$*.* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$ *(volgt uit de machtsregel en de kettingregel).* $\Rightarrow$ $P_1(0) = f'(0) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1$*. Dus* $P_1(x) = 1+x$*. Zo ook* $P_2(0) = 2 \Rightarrow P_2(x) = 1+x+\frac{2}{2!}x^2 = 1+x+x^2$*. De uiteindelijke totale uitbreiding voor* $f(x)$ *is dan ook* $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Uitwerking 4.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4}{n!} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(n-1)+n^2}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(n-1)}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n-1)!}$$

$$= 0 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-2)+2n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)+n}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-2)}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}$$

$$= 0 + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n-3+3}{(n-3)!} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(n-2)+4}{(n-2)!} + 0 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-2+2}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n-3}{(n-3)!} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{3}{(n-3)!} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-4}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(n-2)!}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-2}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$

$$= 0 + e + 3e + 0 + 2e + 4e + 0 + e + 2e + 0 + e + e$$

$$= e + 3e + 2e + 4e + e + 2e + e + e$$

$$= e \cdot (1 + 3 + 2 + 4 + 1 + 2 + 1 + 1) = 15 \cdot e$$

Uitwerking 5. *Te bewijzen:* $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \frac{n(n-1)}{2}$. *De inductie hypothese is dus* $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \frac{n(n-1)}{2}$. *Voor een inductief bewijs vind je eerst de base case:* $n = 2$*:* $\left\{ {2 \atop 1} \right\} = \frac{2}{2} = 1$. *Dit zijn het aantal manieren om 2 objecten in een bakje te stoppen en is (duidelijk) 1. Nu kijken we naar* $n + 1$*:*

$$\left\{ {n+1 \atop n} \right\} = (n) \cdot \left\{ {n \atop n} \right\} + \left\{ {n \atop n-1} \right\}$$

$$= n + \frac{n(n-1)}{2} \text{ (inductiehypothese)}$$

$$= \frac{2n + n(n-1)}{2} = \frac{n(2+n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Uitwerking 6. *Te bewijzen:* $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$.
$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$ *en dus*

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} (-1)^j (2-j)^n$$

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = \frac{1}{2}[2^n - 2 + 0]$$

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = \frac{2^n}{2} - 1 = 2^{n-1} - 1$$

Uitwerking 7. *Te bewijzen:* $x^{\underline{n}} = (x-n+1)^{\overline{n}} = (-1)^n(-x)^{\overline{n}}$ *en* $x^{\overline{n}} = (x+n-1)^{\underline{n}} = (-1)^n(-x)^{\underline{n}}$.
We weten dat $x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1)$ *en* $x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-n+1)$.
We schrijven $(x-n+1)^{\overline{n}}$ *uit:*

$$(x-n+1)^{\overline{n}} = (x-n+1)(x-n+1+1)(x-n+1+2)\dots(x-n+1+(n-2))(x-n+1+(n-1))$$

$$= (x-n+1)(x-n+2)(x-n+3)\dots(x-1)(x) = x(x-1)\dots(x-n+1) = x^{\underline{n}}$$

We schrijven $(-1)^n(-x)^{\overline{n}}$ *uit:*

$$(-1)^n(-x)^{\overline{n}} = (-1)^n \underbrace{(-x)(-x+1)(-x+2)\dots(-x+n-1)}_{n \text{ aantal termen}}$$

$$= (x)(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) = x^{\underline{n}}$$

Nu schrijven we $(x+n-1)^{\underline{n}}$ *uit:*

$$(x+n-1)^{\underline{n}} = (x+n-1)(x+n-2)\dots(x+n-1-(n-2))(x+n-1-(n-1))$$

$$= (x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)(x) = (x)(x+1)\dots(x+n-1) = x^{\overline{n}}$$

We schrijven $(-1)^n(-x)^{\underline{n}}$ *uit:*

$$(-1)^n(-x)^{\underline{n}} = (-1)^n \underbrace{(-x)(-x-1)(-x-2)\dots(-x-n+1)}_{n \text{ aantal termen}}$$

$$= (x)(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) = x^{\overline{n}}$$

Uitwerking 8. *Te bewijzen:* $x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}} = x^{\underline{n}}(x-n)^{\underline{m}}$, $x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}} = x^{\overline{n}}(x+n)^{\overline{m}}$ *en* $x^{\overline{2m}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{m}}$.
We schrijven $x^{\underline{m+n}}$ *uit:*

$$x^{\underline{m+n}} = \underbrace{x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1)}_{x^{\underline{m}}} \cdot \underbrace{(x-m)(x-m-1)\dots(x-m-n+1)}_{(x-m)^{\underline{n}}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}$$

Een soortgelijk argument voor $x^{\overline{m+n}}$*:*

$$x^{\overline{m+n}} = \underbrace{x(x+1)(x+2)\dots(x+m-1)}_{x^{\overline{m}}} \cdot \underbrace{(x+m)(x+m+1)\dots(x+m+n-1)}_{(x+m)^{\overline{n}}} = x^{\overline{m}}(x-m)^{\overline{n}}$$

Vul nu $n = m$ *in voor:*

$$x^{\overline{m+m}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{m}}$$

Uitwerking 9. *Te bewijzen:* $a_1 \equiv a_2 \mod m$ *en* $b_1 \equiv b_2 \mod m$*, dan* $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \mod m$ *en* $a_1 b_1 \equiv a_2 b_2 \mod m$*.*
Als $a_1 \equiv a_2 \mod m$*, dan volgt dat* $a_1 - a_2 \equiv 0 \mod m$ *en dus is er een hele* $k \in \mathbb{Z}$ *zo, dat* $a_1 - a_2 = k \cdot m$*. Zo is er ook een* $l \in \mathbb{Z}$ *zodat* $b_1 - b_2 = l \cdot m$*. Dus het verschil tussen* $(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = k \cdot m + l \cdot m \equiv 0 \mod m$*. Dus* $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \mod m$*.*
Op gelijke wijze: $a_1 b_1 - a_2 b_2 = (a_1 - a_2)b_1 + a_2(b_1 - b_2) = (k \cdot m)b_1 + (l \cdot m)a_2 \equiv 0 \mod m$*. En aangezien* $a_1 b_1 - a_2 b_2 \equiv 0 \mod m$*, volgt* $a_1 b_1 \equiv a_2 b_2 \mod m$*.* □

Uitwerking 10. *We zoeken getallen* $a \in \mathbb{Z}_8$ *zodat er geen* $b \in \mathbb{Z}_8$ *is waarbij* $a \cdot b \equiv 1 \mod 8$*. Neem bijvoorbeeld* $a = 2$*. We bekijken alle mogelijke equivalentieklassen van* $a \cdot b$*:*

$a \cdot b \mod 8$
$2 \cdot 0 \equiv 0 \mod 8$
$2 \cdot 1 \equiv 2 \mod 8$
$2 \cdot 2 \equiv 4 \mod 8$
$2 \cdot 3 \equiv 6 \mod 8$
$2 \cdot 4 \equiv 0 \mod 8$
$2 \cdot 5 \equiv 2 \mod 8$
$2 \cdot 6 \equiv 4 \mod 8$
$2 \cdot 7 \equiv 6 \mod 8$

Merk op dat er dus geen enkele $b \in \mathbb{Z}_8$ *is waarbij* $2 \cdot b \equiv 1 \mod 8$*, dus is er geen* $2^{-1} \in \mathbb{Z}_8$*. Het getal* 3 *heeft dan weer wél een inverse modulo* 8*, namelijk* 3 *zelf. Herhaal dit proces om te vinden dat* $(2, 4, 6)$ *allemaal geen modulaire inverse hebben modulo* 8*.*

9 Bronnen

Referenties

[1] OEIS. “Bell or exponential numbers: number of ways to partition a set of n labeled elements.” In: *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* https://oeis.org/A000110 (2015). Sequence A000110.

[2] Wikipedia. “Bell number”. In: *Wikipedia* https://en.wikipedia.org/wiki/Bell_number (2025).

[3] Richard Grassl en Oscar Levin. “Bell Numbers”. In: *discrete.openmathbooks.org/more/* (2018). DOI: https://discrete.openmathbooks.org/more/mdm/sec_adv-bell.html.

[4] Miklós Bóna. “A walk through combinatorics: an introduction to enumeration and graph theory”. In: *https://zlib.pub/download/a-walk-through-combinatorics-an-introduction-to-enumeration-and-graph-theory-67vfp55heon0?hash=5c311f6b582d01869939289a2b4ee2da* (2017), p. 105–106.

[5] Paul Dawkins. “Power Series”. In: *Lamar University* (2025). DOI: https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calcii/powerseries.aspx.

[6] G. Dobiński. “Summirung der Reihe $\sum \frac{n^m}{n!}$ für $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$”. In: *Grunert’s Archiv (Archiv für Mathematik und Physik)* 61 (1877), p. 333–336.

[7] Eric Weisstein. “Asymptotic Notation.” In: *MathWorld–A Wolfram Resource.* (2025). DOI: https://mathworld.wolfram.com/AsymptoticNotation.html.

[8] Igor Andrianov en Anatoly Shatrov. “Padé Approximants, Their Properties, and Applications to Hydrodynamic Problems”. In: *MDPI* https://www.mdpi.com/2073-8994/13/10/1869 (2021).

[9] OEIS. “Triangle of Stirling numbers of the second kind, S2(n,k), n >= 1, 1 <= k <= n.” In: *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* https://oeis.org/A008277 (2015). Sequence A008277.

[10] David Guichard. “Bell Numbers”. In: *Whitman.edu* (2025). DOI: https://www.whitman.edu/mathematics/cgt_online/book/section01.04.html.

[11] Eric Weisstein. “Stirling Number of the Second Kind”. In: *MathWorld–A Wolfram Resource.* (2025). DOI: https://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheSecondKind.html.

[12] Eric Weisstein. “Falling Factorial.” In: *MathWorld–A Wolfram Resource.* (2025). DOI: https://mathworld.wolfram.com/FallingFactorial.html.

[13] Mike Spivey. “A Proof of Dobinski’s Formula for Bell Numbers”. In: *A Narrow Margin* (2016). DOI: https://mikespivey.wordpress.com/2016/04/18/a-proof-of-dobinskis-formula-for-bell-numbers/.

[14] M. Haiman. “Notes on exponential generating functions and structures”. In: *UC Berkeley* (2010). DOI: https://math.berkeley.edu/~mhaiman/math172-spring10/exponential.pdf.

[15] Greg Hurst en Andrew Schultz. “An elementary (number theory) proof of Touchard’s Congruence”. In: *University of Illinois* (2009). DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.0906.0696.

[16] David Guichard. “Bell Numbers”. In: *Whitman college* (2025). DOI: https://math.libretexts.org/Bookshelves/Combinatorics_and_Discrete_Mathematics/Combinatorics_and_Graph_Theory_(Guichard)/01%3A_Fundamentals/1.05%3A_Bell_Numbers.

10 Scripts

Sommen splitsen

```
from functools import lru_cache
@lru_cache(maxsize=None)
def splitsum(macht,maal=1,faculteit=0):
    if macht == 0:
        return maal
    return splitsum(macht-1,maal,faculteit+1) + splitsum(macht-1,maal*faculteit,faculteit)
for i in range(0,k):  #Pas deze waarde k aan voor de macht
    print(f'{splitsum(i)}e')
```

Thèta som

```
import numpy as np
import math

# Definieer theta(x) = sum_{n=1}^50 n^x / n! (50 is genoeg)
def theta(x):
    total = 0.0
    for n in range(1, 51):
        total += n**x / math.factorial(n)
    return total

# Genereert sample points
N = 500
xs = np.linspace(-5, 5, N)
ys = np.array([theta(x) for x in xs])

# Bouw het matrix systeem A * c = d for P(x) - y*Q(x) = 0
# Onbekende vector c = [a5,a4,a3,a2,a1,a0, b4,b3,b2,b1,b0]
A = np.zeros((N, 11))
d = np.zeros(N)
for i, (x, y) in enumerate(zip(xs, ys)):
    A[i, 0] = x**5
    A[i, 1] = x**4
    A[i, 2] = x**3
    A[i, 3] = x**2
    A[i, 4] = x
    A[i, 5] = 1.0
    A[i, 6] = -y * x**4
    A[i, 7] = -y * x**3
    A[i, 8] = -y * x**2
    A[i, 9] = -y * x
    A[i, 10] = -y
    d[i] = y * (x**5)

# Gewogen kleinste kwadraten
coeffs, residuals, rank, s = np.linalg.lstsq(A, d, rcond=None)
a5,a4,a3,a2,a1,a0 = coeffs[0:6]
b4,b3,b2,b1,b0 = coeffs[6:11]

# Print de coëfficiënten
print("Teller coëfficiënten (a5...a0):", coeffs[0:6])
print("Noemer coëfficiënten (leading 1, b4...b0):", [1.0] + list(coeffs[6:]))

# Vergelijkt de errors (MET DE GESAMPELDE POINTS)
R_vals = (a5*xs**5 + a4*xs**4 + a3*xs**3 + a2*xs**2 + a1*xs + a0) / (xs**5 + b4*xs**4 + b3*xs**3 + b2*xs**2 + b1*xs + b0)
errors = np.abs(R_vals - ys)
print("Max absolute error van waarden:", np.max(errors))
print("Gemiddeld absolute error van waarden:", np.mean(errors))

# (Optioneel) Print LaTeX bruikbare code
latex_num = f"{a5:.6f} x^5 {a4:+.6f} x^4 {a3:+.6f} x^3 {a2:+.6f} x^2 {a1:+.6f} x {a0:+.6f}"
latex_den = f"x^5 {b4:+.6f} x^4 {b3:+.6f} x^3 {b2:+.6f} x^2 {b1:+.6f} x {b0:+.6f}"
print("\nLaTeX representatie:")
print(f"\(R(x) = \\frac{{{latex_num}}}{{{latex_den}}}\)")
```

Np bepalen

```
import time
def find_period(initial, p):
    initial = initial
    p=p
    seen = {}
    idx = 0
    while True:
        initial.append(nextbell(initial))
```

```
        del initial[0]
        if idx > 1:
            state = tuple(initial)
            if state in seen:
                first_idx = seen[state]
                period = idx - first_idx
                return {
                    "period": (period),
                }
        if idx % 20000 == 0:
             print(f"index nu is:{idx} na {time.time()-start_time} seconden" )

        if idx == 0:
            state = tuple(initial)
            seen[state] = idx
        idx += 1
p =  #vul hier de priem in waarvoor je de periode bepaald
initial = [1] + [0]*(p-1)
def nextbell(bells):
    return (bells[0] + bells[1]) % p
start_time = time.time()
res = find_period(initial,p)
print("Resultaat:", res)
```

Shuffles

```
import numpy as np
from scipy import special
import math

def ratio(x):
    total = 0.0
    for k in range(1, 51):
        total += ( special.gamma(x + 1) * k**x) /(x**x * math.factorial(k))
    return total

# Genereert sample points
N = 500
xs = np.linspace(0.1, 12, N)
ys = np.array([ratio(x) for x in xs])

# Bouw het matrix systeem A * c = d for P(x) - y*Q(x) = 0
# Onbekende vector c = [a5,a4,a3,a2,a1,a0, b4,b3,b2,b1,b0]
A = np.zeros((N, 11))
d = np.zeros(N)
for i, (x, y) in enumerate(zip(xs, ys)):
    A[i, 0] = x**5
    A[i, 1] = x**4
    A[i, 2] = x**3
    A[i, 3] = x**2
    A[i, 4] = x
    A[i, 5] = 1.0
    A[i, 6] = -y * x**4
    A[i, 7] = -y * x**3
    A[i, 8] = -y * x**2
    A[i, 9] = -y * x
    A[i, 10] = -y
    d[i] = y * (x**5)

# Gewogen kleinste kwadraten
coeffs, residuals, rank, s = np.linalg.lstsq(A, d, rcond=None)
a5,a4,a3,a2,a1,a0 = coeffs[0:6]
b4,b3,b2,b1,b0 = coeffs[6:11]

# Print de coëfficiënten
print("Teller coëfficiënten (a5...a0):", coeffs[0:6])
print("Noemer coëfficiënten (leading 1, b4...b0):", [1.0] + list(coeffs[6:]))

# Vergelijkt de errors (MET DE GESAMPELDE POINTS)
R_vals = (a5*xs**5 + a4*xs**4 + a3*xs**3 + a2*xs**2 + a1*xs + a0) / (xs**5 + b4*xs**4 + b3*xs**3 + b2*xs**2 + b1*xs + b0)
errors = np.abs(R_vals - ys)
print("Max absolute error van waarden:", np.max(errors))
print("Gemiddeld absolute error van waarden:", np.mean(errors))

# (Optioneel) Print LaTeX bruikbare code
latex_num = f"{a5:.6f} x^5 {a4:+.6f} x^4 {a3:+.6f} x^3 {a2:+.6f} x^2 {a1:+.6f} x {a0:+.6f}"
latex_den = f"x^5 {b4:+.6f} x^4 {b3:+.6f} x^3 {b2:+.6f} x^2 {b1:+.6f} x {b0:+.6f}"
print("\nLaTeX representatie:")
print(f"\(R(x) = \\frac{{{latex_num}}}{{{latex_den}}}\)")
```