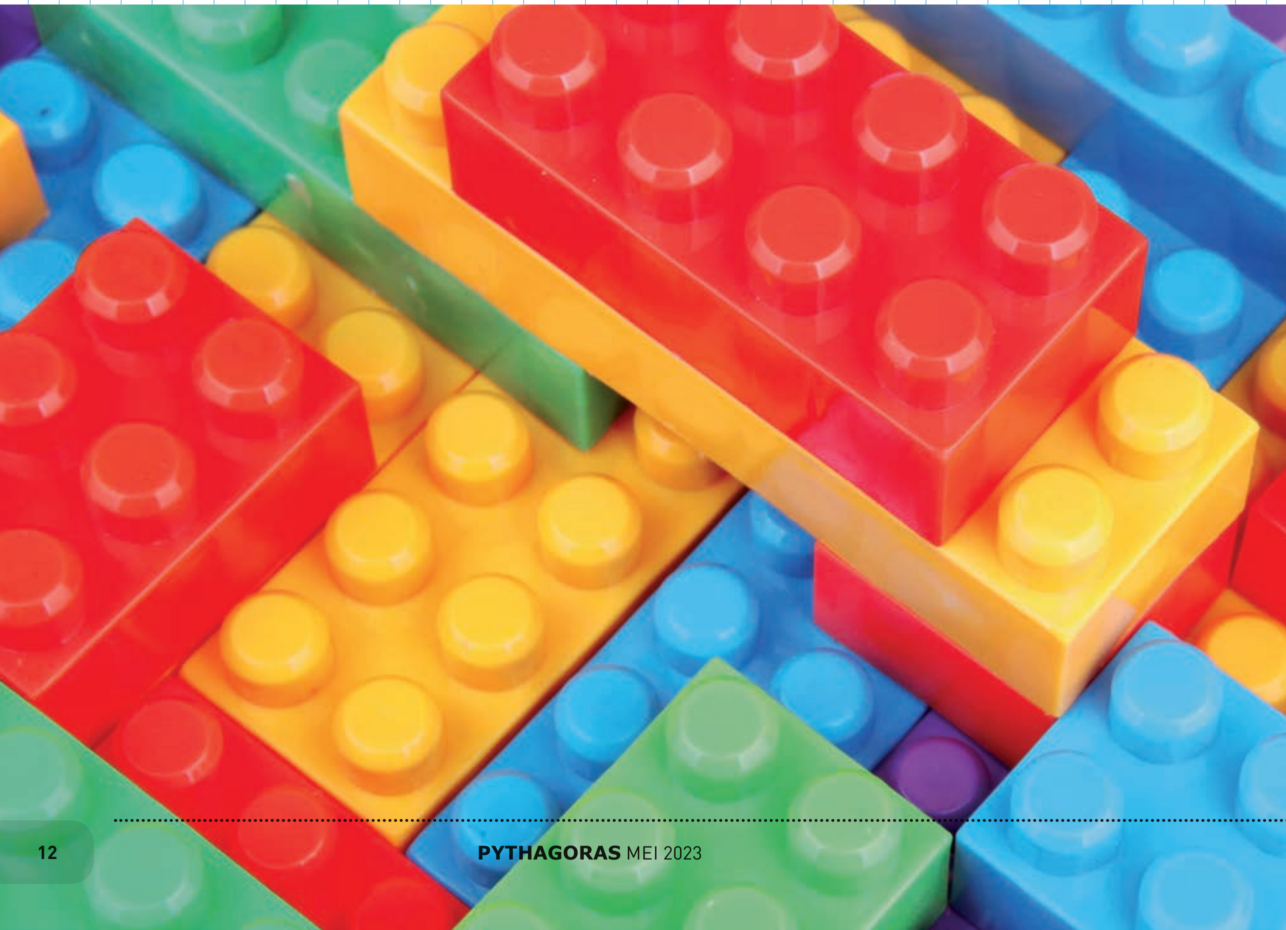
BOUWSTEENTJES EN HUN MATEN

door
Geertje Hek

Legoblokjes nodigen uit tot creativiteit. Alleen al met twee stenen van 2 bij 4 noppen heb je enorm veel mogelijkheden tot combineren. Je kunt ze precies op elkaar bouwen en de ene steen op alle acht noppen van de andere zetten, je kunt een trappetje maken, je kunt ze onderling een kwartslag draaien en dan op elkaar zetten met vier noppen, je kunt ze met maar met een, twee of drie noppen aan elkaar klikken. Ieder van deze verschillende manieren van op elkaar zetten is een combinatie van de twee stenen.



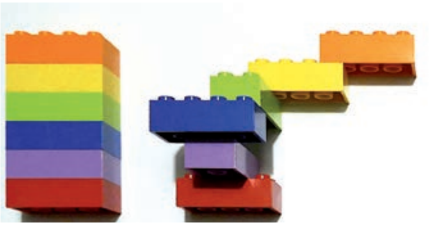
In 1974 kwam Lego met een getal op de proppen om te illustreren hoeveel verschillende combinaties er mogelijk zijn met zes blokjes van twee bij vier: er zijn $2^5 + (46^5 - 2^5)/2 = 102\,981\,504$ verschillende manieren om een toren van zes blokjes hoog te maken. Een 'toren' hoeft niet netjes te zijn; voor een toren moeten de stenen op elkaar gestapeld worden en mogen ze dus niet naast elkaar liggen; zie figuur 1.

In dit artikel leggen we andere verbanden met wiskunde: breuken en de stelling van Pythagoras.

De meesten van ons hebben weleens met Lego of andere bouwsteentjes gespeeld. Als je thuis bouwsteentjes van verschillende merken hebt, weet je dat ze niet altijd compatibel zijn. We beperken ons in dit artikel daarom tot Legosteentjes. Voor andere merken gelden er waarschijnlijk soortgelijke, maar andere resultaten. Het getal 102 981 504 ging overigens een eigen leven leiden en werd alom aangehaald als het aantal mogelijke combinaties met zes stenen van twee bij vier, zonder nog te refereren aan de te behalen hoogte. Sören Eilers rekende in 2004 uit dat het correcte totaal aantal mogelijke combinaties 915 103 765 is.

LEGOMATEN

Veel bouwers vinden, net als Lego zelf indertijd, dat een steentje van twee bij vier noppen een standaardsteen is. Om de maten van een steentje te bestuderen ligt het echter voor de hand om te zeggen dat het basis-legosteentje 1 nopje heeft, en 1 breed, 1 lang en 1 hoog is (zonder het nopje). Maar als we de maat zo aangeven gebruiken we niet dezelfde eenheid voor de lengte en de breedte als voor de hoogte. Zo'n blokje heeft namelijk wel een vierkante basis, maar is niet even hoog als breed. Als je legoblokjes hebt, probeer dan eens uit hoeveel basisblokjes je naast elkaar moet leggen om een breedte te verkrijgen die even groot is als een geheel aantal hoogte-eenheden. Waarschijnlijk kom je uit op de verhouding in figuur 2 : 5 hoogtes = 6 breedtes, ofwel $5h = 6b$.



Figuur 1 Twee torens van zes stenen hoog

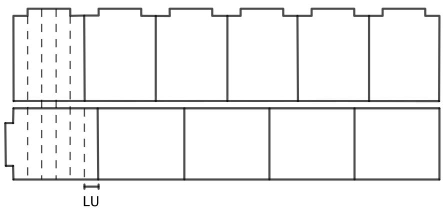
VRAAG

Als je wilt dat ieder blokje maten heeft die je kunt uitdrukken in een zo klein mogelijk geheel aantal eenheden, wat moet de basis lego-eenheid LU (Lego Unit) dan zijn?

Als je wilt dat h en b gehele getallen zijn, dan leveren de kleinst mogelijke $h, b > 0$ precies het kleinste gemene veelvoud van 5 en 6: kgv(5, 6) = 30 en leidt tot $h = 6$ en $b = 5$. Je kunt de vraag ook beantwoorden door breuken te gebruiken. Wat je wilt is een onderverdeling waarbij de hoogtes en breedtes opgedeeld worden, zodanig dat de kleinere delen in beide passen. Als we stellen dat $1 = 5h = 6b$, dan is h = 1/5 en b = 1/6. Gelijknamig maken levert dan de gezamenlijke noemer 30 op: $h = 6/30$ en $b = 5/30$. Legobouwers gebruiken de resulterende 1/30 (van 6 breedtes) als eenheid en zeggen dat h = 5 LU en b = 6 LU. Zie figuur 2.

ZIJWAARTS BOUWEN

Er zijn steentjes waartegen je ook aan de zijkant iets vast kunt maken, bijvoorbeeld lampjes, muurdecoraties of autobumpers. Zulke steentjes worden in het Engels aangeduid met SNOT (Stud Not On Top), wat in het Nederlands vertaald zou kunnen worden door NNB (Nopje Niet Bovenop). Als je probeert om iets aan de zijkant van een stapel van dergelijke blokjes vast te maken, zie je ook dat de hoogte en de breedte van een basissteen niet gelijk zijn: het past niet.



Figuur 2 5 hoogtes = 6 breedtes, verschil is 1 LU

Om een steentje van breedte $2b$ zijwaarts op twee nopjes vast te kunnen zetten, moeten die nopjes precies een breedte uit elkaar zitten. Ze zitten echter een hoogte uit elkaar. En $h = 5$ LU terwijl $b = 6$ LU. Dit kun je verhelpen met behulp van 'platen', de plattere stukjes die vaak als bodemplaat worden gebruikt, maar ook om hoogteverschillen te overbruggen. Kijkend naar de hoogte passen er 3 platen in 1 steen, waaruit we kunnen concluderen dat een plaat een hoogte p van 2 LU heeft.

VRAAG

Kun je m.b.v. platen de afstand tussen twee noppen aan de zijkant aanpassen, zodat die daarna gelijk is aan een geheel aantal keer de breedte?

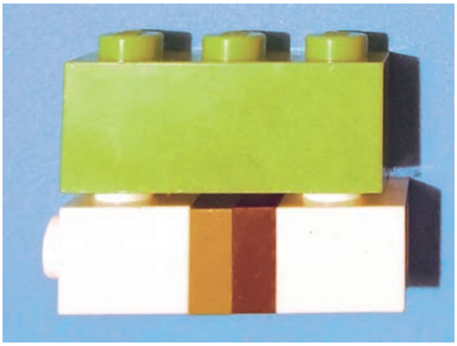
Als je naar de eenheden kijkt, zie je meteen dat je een even aantal breedtes nodig hebt, omdat de hoogte uitgedrukt in LU altijd even is, terwijl de eenheidsbreedte 5 LU is. Aangezien $2b = 10$ LU $= h + 4$ LU $= h + 2p$, zou het met twee platen tussen de stenen met de zijnoppen moeten lukken. In figuur 3 zie je dat je dan nog ergens tegenaan loopt: in plaats van een steentje van 2 breed, heb je nu een steentje van 3 breed nodig om hierop vast te zetten. Hoe komt dat?

NOPPENAFSTAND EN PYTHAGORAS

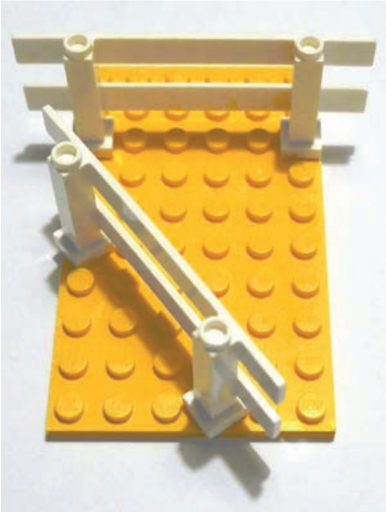
Even nadenken leert dat de afstand tussen de middens van twee noppen boven op een standaardsteen gelijk is aan 1 breedte, ofwel 5 LU. Hetzelfde geldt voor de gaten aan de onderkant. Met de constructie hierboven hadden we noppen met een onderlinge afstand van 10 LU gecreëerd, een afstand die gelijk is aan de afstand tussen de eerste en de derde nop. Met een steentje van 3 breed kunnen we die noppenafstand dus overbruggen.

Met dit inzicht kun je ook begrijpen waarom je een hekje van 6 breed schuin op een bouwplaat kunt zetten. Het lijkt in figuur 4 alsof een hek van breedte $6b$ past op een plaat met breedte $4b$ en lengte $5b$. Maar dat zou niet moeten kunnen volgens de stelling van Pythagoras. Immers, $4^2 + 5^2 \neq 6^2$. Nu we doorhebben dat het om de noppenafstand gaat, zien we dat de schuine afstand in feite $5b$ is en de rechthoekszijden lengtes van $3b$ en $4b$ hebben. En inderdaad: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Er valt nog veel meer te combineren met alle verschillende soorten steentjes en decoratiestukjes die er zijn. Er zijn hoekstukjes waar een dikte van 1 LU in voorkomt en stukjes met een randje van 1 LU. Met behulp van deze en andere stukjes zijn er allerlei combinaties mogelijk die tot bijzondere constructies kunnen leiden. Voor verdere inspiratie kun je bijvoorbeeld eens kijken op Bricknerd. Veel bouw- en rekenplezier!



Figuur 3 Een steen tegen zijnoppen plaatsen



Figuur 4 Pythagoras en Lego