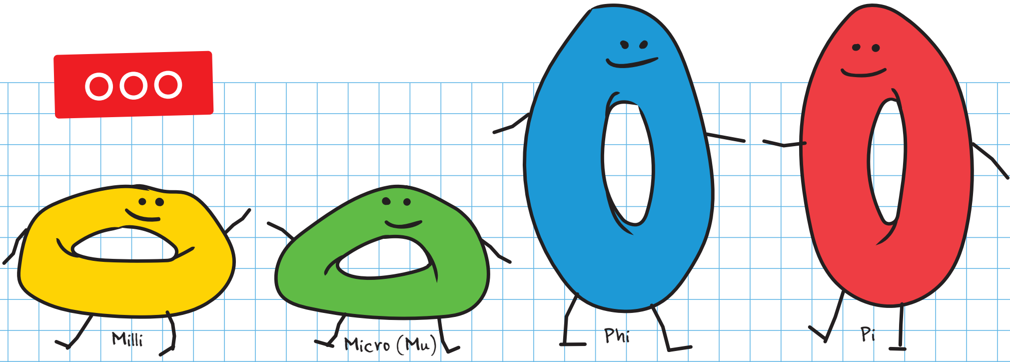
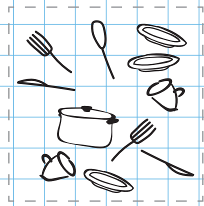




EEN WISKUNDIGE DOET DE AFWAS – 12

VAKANTIE-VAATWASSER-VIERKANT

De familie Van der Torus is een heel normale, gemiddelde familie. Voor zover een familie van wiskundigen normaal kan zijn. Ze komen allerlei alledaagse problemen tegen. Kom je zelf uit een wiskundig gezin of ben je een (mogelijk toekomstige) wiskundige, dan kun je je ervaringen, vragen en ideeën delen met de familie Van der Torus via email naar fam.v.d.torus@pyth.eu.

door **Iris** en **Tom Verhoeff**

Afgelopen meivakantie zijn Pi, Phi, Milli en Micro met zijn allen op vakantie geweest. Het was een leuke week zonder onderlinge strubbelingen. De koeien bleven gewoon koeien in plaats van punten, bollen of torussen. Toch was het niet helemaal rustig gebleven. Milli en Micro schelen een paar jaar. Nu Micro weet dat na de zomer de middelbare school er aankomt, begint het duidelijk te kriebelen. Er wachten nieuwe uitdagingen, misschien zelfs echte wiskunde. Maar die naam Micro zint niet meer. Dat was goed te merken, want af en toe werd er niet meer naar die naam geluisterd. Een soort opstand. Gelukkig had Micro zelf al een oplossing bedacht, want Milli had verteld dat micro staat voor één miljoenste. En toen Micro hoorde dat je dat ook kon afkorten met de Griekse letter μ was er weinig fantasie meer nodig. Micro wilde voortaan Mu genoemd worden. Dat klinkt niet meer zo nietszeggend klein, maar gewoon stoer. Of de anderen daar aan zouden kunnen wennen vond Mu hun probleem. Milli suggereerde meteen om dan Em genoemd te worden.

Maar Pi maakte daar telkens "kleine Em" van, zogenaamd om verwarring met die "grote Em" (voor mega) te voorkomen. Die naamsverandering was dus gauw van de baan.

Het vakantiehuisje had overigens ook een vaatwasser. Het goed gespreid inruimen zonder achteraf verplaatsen ging al beter, nu ze de oplossing voor de cirkel hadden gevonden (zie kader). Helaas, of eigenlijk gelukkig, bood de vaatwasser niet alleen plaats voor vaat in een kring. Stel elk vaatstuk is een punt en de vaatwasser een eenheidsvierkant. Hoe kun je dan achtereenvolgens punten in dat vierkant plaatsen zodat ze op elk moment redelijk goed verspreid staan? Uiteraard mogen punten achteraf niet meer verplaatst worden. Ze moeten meteen "goed" staan.

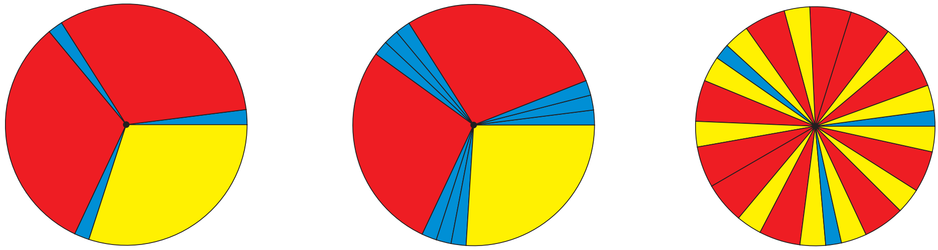
AANPAK VAATWASSER VERDER VULLEN

Om beter gevoel te krijgen voor het goed gespreid inruimen van de vaatwasser had Pi besloten eerst te onderzoeken hoe je punten één voor één handig op een cirkel kan plaatsen, zodanig dat de spreiding op elk moment zo goed mogelijk is. Het eerste punt plaatsen is makkelijk: vanwege de symmetrie van de nog lege cirkel zijn alle plaatsen even goed. Maar dan. Een recept zou kunnen zijn om elk volgende punt in het midden van een langste boog zonder punten te plaatsen. Laten we de plaats van een punt aanduiden met de hoek t.o.v. het eerste punt gemeten als fractie van 360º (tegen de klok is positief). Dan komen de punten met dat recept op oneven veelvouden van negatieve machten van twee: $(2k+1)2^{-n}$.

Er zijn dan altijd (lege) bogen van maximaal twee lengtes, waarbij de lange boog twee keer zo lang is als de korte. Telkens wordt een lange boog gehalveerd. Dat lijkt niet slecht, maar het kan beter, d.w.z. dat we een kleinere gemiddelde verhouding tussen de lange en korte boog kunnen realiseren.

Beschouw daartoe het volgende recept met parameter a.

Zet het k-de punt op de plaats met hoekfractie $(k - 1)a$ waarbij we een fractie groter dan 1 reduceren door het gehele deel weg te laten. We kunnen die a in dit recept nog kiezen. Als a echter een breuk is, zeg p/q, dan valt het q-de punt zeker samen met het eerste punt en dat willen we natuurlijk niet. We moeten voor a dus een irrationaal getal kiezen, zoals $\pi/10 \approx 0{,}314$. Verrassend genoeg blijkt het dat bij dit recept er maar hooguit drie booglengtes optreden (zoek maar eens naar *Three-Gap Theorem*). Elk volgend punt komt in een langste (lege) boog terecht en deelt dit in de twee kortere booglengtes. Voor $a \approx 3{,}4$ zien we in figuur 1 dat er bij plaatsing van 6 punten duidelijk een clustering optreedt: er zijn drie clubjes van twee punten die dicht bij elkaar liggen, terwijl de clubjes zelf behoorlijk ver uit elkaar liggen. Dat komt omdat 0,34 dicht bij ⅓ ligt. Bij 12 punten zijn er nog steeds drie clubjes, nu elk met vier punten (zie figuur 2). De vraag die nog rest is wat de beste keuze voor a is. Dat blijkt de inverse van de gulden snede te zijn: $1/\varphi \approx 0{,}618\ldots$, of het complement $1 - 1/\varphi \approx 0{,}382\ldots$ Figuur 3 toont hoe 24 punten dan verdeeld worden. De gulden snede is een irrationaal getal dat zich heel slecht laat benaderen door een breuk. De natuur heeft dat ook "ontdekt", bijvoorbeeld bij het plaatsen van bladeren aan stengels en van zaadjes op een zonnebloem.



Figuur 1 Figuur 2 Figuur 3