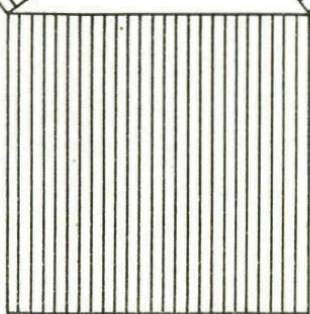


pythagoras

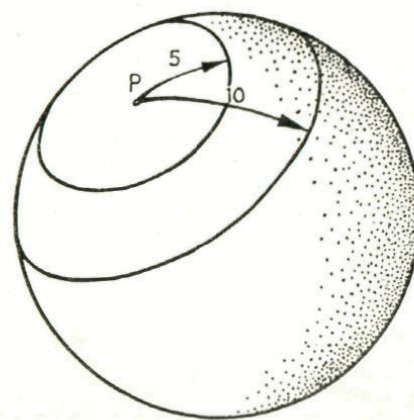


WISKUNDETIJDSCHRIFT
VOOR JONGEREN

jaargang 1

no 1

Platlanders op een biljartbal.
Zie pag. 7



Pythagoras
stelt zich voor !

De tijdgenoten van Pythagoras (hij leefde omstreeks 550 v. Chr.) zouden wel verbaasd geweest zijn, als ze hadden geweten, dat diens naam zou voortleven door de meetkundestelling, die in de kop van dit tijdschrift is afgebeeld.

Misschien zouden ze nog verbaasder zijn geweest, als ze hadden geweten, dat ongeveer 21 eeuwen na het bestaan van hun vereerde leermeester of, zoals anderen hem zagen, die wonderlijke filosoof, een wiskundetijdschrift voor jongeren zich naar hem zou noemen.

Maar hier ligt dan het eerste nummer van dat tijdschrift voor je. Genoemd naar iemand, voor wie de wiskunde behoorde tot het meest wezenlijke van zijn leven. Bijvoorbeeld, omdat de wiskunde voor hem tot uitdrukking bracht de harmonie van het heelal, waarin de Griekse mens zich het middelpunt voelde. Of omdat de ontroering van de muziek der snareninstrumenten een gevolg bleek te zijn van eenvoudige verhoudingen van gehele getallen. Ook omdat de wis-

kunde een uitdrukking was voor de hem omringende wetmatigheden. Zoals de wetmatigheid van de rechthoekige driehoek uitgedrukt in het simpele, maar veelzeggende $a^2 + b^2 = c^2$.

Voor ons heeft de wiskunde een andere betekenis. Wij worden niet meer ontroerd door de harmonie in het heelal. Wij dringen de zonnestelsels binnen. En de wiskunde is ons daarbij een hulpmiddel, een stuk gereedschap. Gereedschap, dat we nodig hebben op allerlei andere terreinen van ons leven. Dat echter ook slechts gehanteerd kan worden door hen, die het door en door hebben leren kennen. **De behoefte aan mannen en vrouwen, die de wiskunde hebben leren hanteren en kunnen gebruiken in allerlei takken van techniek, wetenschap en handel wordt steeds groter.** Ook voor ons is de wiskunde geworden tot het meest wezenlijke van ons leven. Echter op een andere manier dan voor Pythagoras. Wij kunnen en moeten de wiskunde hanteren, terwijl we er misschien innerlijk koud bij blijven. Voor Pythagoras en zijn volgelingen was de wiskunde in de eerste plaats een zaak van het gemoed en de geest.

We hopen, dat het tijdschrift Pythagoras voor zijn lezers twee doeleinden mag bereiken: belangstelling te wekken voor de wiskunde als gereedschap, dat in ons leven van vandaag onmisbaar is, maar daarnaast ook en vooral de innerlijke vreugde te verschaffen, die verbonden kan zijn aan het denken over wiskundige problemen.

G. KROOSHOF / BRUNO ERNST

WE BLADEREN DIT NUMMER EVEN DOOR

Even willen we vluchtig met elkaar kennis maken. Wat vinden we zoal in dit tijdschrift? Naast enkele grotere artikelen zien we in de eerste plaats een aantal kleine, gezellige probleempjes. Van sommige vind je de oplossing ergens vermeld. (Maar kijk er nu niet dadelijk naar.) Van andere kun je de oplossingen inzenden. Zie het adres op de achterpagina. Onder de goede oplosers wordt een boekenbon van f 2,50 verloot.

Sommige der artikelen zul je wel zonder moeite kunnen lezen, maar er zal er ook wel een enkele bij zijn, waar je niet dadelijk alles van begrijpt. Je zou ze kunnen gebruiken voor onderlinge discussie. Als bij de titel van een artikel het teken $\circ\circ\circ$ staat, dan hoef je je niet te schamen, als je dat heel moeilijk vindt, want het is bedoeld voor hen, die bijv. de vierde of de vijfde klas van een hbs of gymnasium bereikt hebben. En als je een eerste- of tweedeklasser bent en je begrijpt de artikelen met $\circ\circ$ bij de titel niet zo maar, wel dan is dat vanzelfsprekend, want die zijn ook wat moeilijker dan de artikelen met alleen maar $\circ$.

Verschillende der artikelen zullen in de volgende nummers voortgezet worden, zoals die over logica, wiskunde een spel, enkele interessante krommen en over de natuurlijke logaritmen.

We wensen je veel genoegen met de lectuur en met het puzzelen. Zend ook zelf eens wat in: problemen of artikelen. Je kunt er zelfs een klein honorarium mee verdienen, nl. f 1,— per gedrukte pagina.



°ENKELE INTERESSANTE KROMMEN - I

In een reeks artikeltjes zullen we enkele interessante krommen bespreken, die meestal in de schoolwiskunde niet aan de orde komen. In elk artikel wordt de constructiewijze van zo'n kromme beschreven. Deze constructies kunnen door leerlingen van elk leerjaar worden uitgevoerd. Voor de leerlingen der hogere leerjaren worden er dan nog enkele bijzonderheden van de kromme bij besproken. In het artikel in het volgend nummer wordt de geconstrueerde kromme afgebeeld, zodat ieder zijn eigen constructie kan controleren.

1. De strofoïde.

In de figuur hiernaast zijn gegeven een rechte lijn l en een punt A , dat een afstand van 3 cm tot l heeft. Dus $AO = 3$ cm.

Door A worden lijnen getrokken, die l snijden. In de figuur ziet men twee van die lijnen getekend. Ze snijden l resp. in de punten M_1 en M_2 . De punten van de strofoïde ontstaan nu op de volgende wijze:

Pas op AM_1 en zijn verlengde de stukken M_1P_1 en M_1P_2 af beide gelijk aan M_1O . P_1 en P_2 zijn dan punten van de strofoïde of anders gezegd: De strofoïde is de verzameling van alle punten P , die op de vermelde wijze geconstrueerd kunnen worden.

Nu dus maar eens aan de slag om te zien welke vorm en bijzonderheden deze kromme heeft. Er is een symmetrieas. Waar? Waarom? Er is een asymptoot. Er is een dubbelpunt. In een volgend nummer zullen deze bijzonderheden worden bekeken.

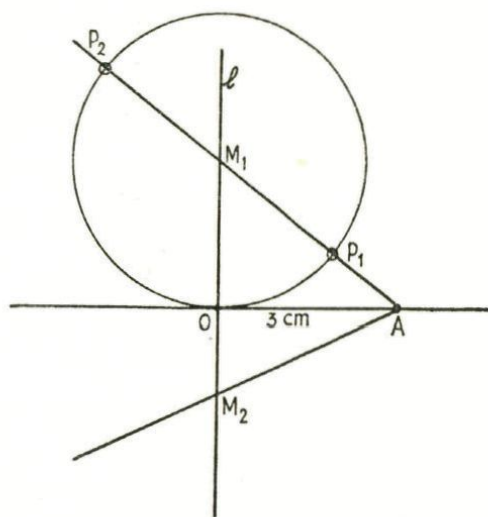


Fig. 1



°°°WISKUNDE EEN SPEL?

ALLEEN MET DE PASSER

Bij de 108ste gedenkdag van het bestaan van de Technische Hogeschool in Delft heeft Prof. Bottema een toespraak gehouden, waarin hij laat zien, dat het beoefenen der wiskunde alle elementen in zich bevat, die het bestempelen tot een spel. Hij gaat daarbij uit van een omschrijving van het spel, die Huizinga in zijn boek *Homo Ludens* (de spelende mens) gegeven heeft:

„Spel is een vrijwillige bezigheid, die binnen vastgestelde grenzen „van tijd en plaats wordt verricht, naar *vrijwillig aanvaarde*, doch „*volstrekt bindende* regels, met haar *doel in zichzelf*, begeleid door „een gevoel van spanning en vreugde en door een besef van „anders „zijn” dan het gewone leven.”

Als voorbeeld haalt Prof. Bottema dan aan, dat de wiskunde meer dan 2000 jaar getracht heeft het vraagstuk op te lossen, een gegeven hoek in 3 gelijke delen te verdelen.

De Griekse wiskundigen kenden al een eenvoudige constructie, maar: deze constructie is tegen de spelregel, die slechts liniaal en passer en dan nog op een bepaalde wijze gebruikt, toelaat.

Deze regel is *vrijwillig aanvaard* en *volstrekt bindend*.

De regel heeft een grote mate van willekeur, ze berust op traditie. En de regel heeft een *doel in zichzelf*.

Het is niet de bedoeling om bv. de instrumentmaker een hulpmiddel te geven bij het vervaardigen van nauwkeurige gradenbogen.

Daar had men sinds lang betere methoden voor.

Het zoeken van de trisectie van een hoek, zoals het probleem genoemd wordt, heeft geen ander doel dan deze trisectie.

Het spel was ook door een gelukkige keuze van spelregels niet te moeilijk en toch moeilijk genoeg om meer dan 2000 jaar de wiskundige en de leek te boeien en hem *het besef te geven van anders te zijn*, d.w.z. om hem te ver-maken.

Deze gedachte van Prof. Bottema wordt nog nadrukkelijker geïllustreerd door de zgn. „passerconstructies”.

In 1672 heeft G. Mohr een boekje gepubliceerd, waarin hij tracht verschillende constructies alleen met de passer uit te voeren.

Dit boekje werd volkomen vergeten en in 1797 schrijft de Italiaan Mascheroni een boek, waarin hij precies nagaat welke constructies alleen met de passer uitgevoerd kunnen worden.

Een spel! Dat is hier wel heel duidelijk: met passer en liniaal zijn deze constructies veel eenvoudiger uit te voeren.

Maar een interessant spel!

Hier zijn enige voorbeelden van passerconstructies.

1

Gegeven: lijnstuk AB. Dit lijnstuk is gegeven door zijn beide eindpunten A en B. Construeer een lijnstuk gelijk aan 2AB, d.w.z. construeer de eindpunten van zo'n lijnstuk.

Constructie: (fig. 2)

Maak een cirkelboog met BA als straal en B als middelpunt. Verander de passeropening niet en zet de passerpunt in A. Maak het boogje bij P. Zet de passerpunt in P en maak het boogje bij Q. Zet de passerpunt in Q en maak het boogje bij R.

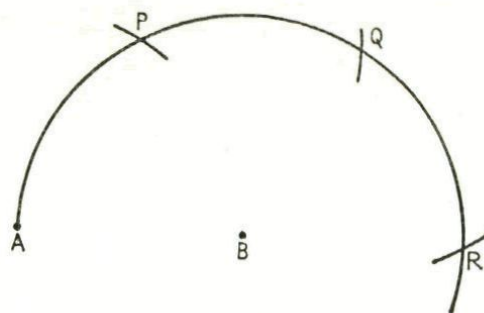


Fig. 2

Nu is $AR = 2AB$. Bewijs dit zelf; het is eenvoudig.

Omdat we met deze constructie de punten A, B, P, Q en R vastgelegd hebben, is dit tevens een constructie voor hoeken van 60° (BAP), 120° (QBA) en 90° (AQR).

En een constructie van een lijn evenwijdig aan AB. ($PQ \parallel AB$). De lijn PQ is dan bepaald door zijn punten P en Q.

2

Gegeven: lijnstuk AB.

Te construeren: een lijnstuk $\frac{1}{2}AB$.

Constructie: (fig. 3)

Construeer eerst weer C, zodat $AC = 2AB$. Maak een cirkelboog met C als middelpunt en CA als straal.

Zet de passerpunt in A en construeer de snijpunten P en Q van cirkel (A, AB) met de cirkelboog. Zet de passerpunt in P en trek een cirkelboog door A. Zet de passerpunt in Q en trek een cirkelboog door A; de beide bogen snijden elkaar in M. M is het midden van AB. Je kunt het zelf wel bewijzen.

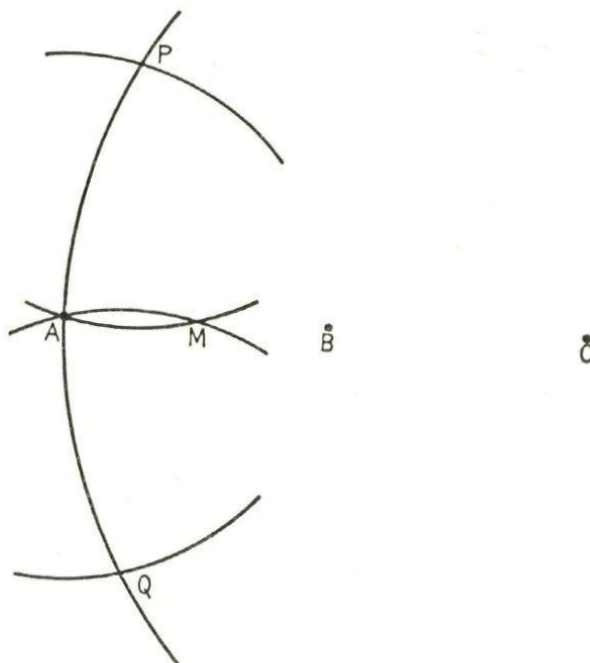


Fig. 3

Mascheroni heeft in zijn boek: *La geometria del compasso* bewezen, dat men alle constructies die men met passer én liniaal kan maken, ook alleen met de passer kan uitvoeren.

Hoe hij dat deed, zullen we in een volgend nummer zien.



OPLOSSINGEN
HIERVAN
KUNNEN WORDEN
INGEZONDEN

1. Iemand heeft een vierkant houten blad, dat 36 cm lang is. Hij moet hieruit rechthoeken zagen van 5 bij 8 cm. Deze rechthoeken mogen niet uit kleinere stukken samengesteld worden. Nu vraagt hij:

- Hoeveel rechthoeken kan ik op deze wijze maximaal verkrijgen?
- Op hoeveel manieren kan dit?

2. Geke Goosen, leerlinge van klas 5 B van de Gem. h.b.s. voor meisjes te Groningen, zond ons de volgende vraag in:

Hoe kan dit?

- $-45 + 25 = -36 + 16$
- Dus $\frac{81}{4} - 45 + 25 = \frac{81}{4} - 36 + 16$
- Of $(\frac{9}{2} - 5)^2 = (\frac{9}{2} - 4)^2$
- Dus $\frac{9}{2} - 5 = \frac{9}{2} - 4$
- Zodat $5 = 4$

3. Het is mogelijk op verschillende manieren tussen de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bewerkingstekens te plaatsen, zodat er een berekening ontstaat, waarvan het resultaat 100 is. Bv.

$$1 - (2.3) + (4.5) + 6 + 7 + (8.9) = 100$$

$$\text{Of: } 1^{2345} + 6(7 + 8) + 9 = 100.$$

Probeer eens dergelijke mogelijkheden te vinden. De getallen 1 tot en met 9 moeten daarbij hun natuurlijke volgorde houden.

4. °°°**BOL** en **CIRKEL**

Een globe heeft een middellijn van 10 cm.

Door de noordpool steekt een pin naar buiten.

We nemen nu een lang dun stuk koord, bevestigen het aan de pin en gaan het om de globe wikkelen. We trekken het koord steeds secuur strak aan en zorgen dat het ook steeds tegen de globe aankomt. We gaan met dit wikkelen door tot we bij de evenaar zijn.

Verder tekenen we een cirkel met een middellijn van 10 cm op een vlakke plank, slaan een pin op de plaats van het middelpunt en gaan ook hieromheen van hetzelfde koord wikkelen tot we bij de cirkelomtrek gekomen zijn.

De vraag is nu: Hoe verhoudt zich de lengte van het koord dat op de bol zit tot dat, wat op de plank zit?

°VOUWEN

Als we een blad papier vouwen ontstaat een lijn, die ook op het papier zichtbaar blijft, als we het blad weer terugvouwen. Op deze wijze kunnen we natuurlijk een driehoek in het papier vouwen.

Nu is het mogelijk op een blad vele figuren nauwkeurig te vouwen, zonder een enkele lijn te zetten en zonder gebruik te maken van een instrument. Bijvoorbeeld:

1. Vouw een driehoek met deellijnen.
2. Vouw een driehoek met middelloodlijnen.
3. Vouw een driehoek met hoogtelijnen.
4. Vouw een driehoek met zwaartelijnen.

Met vouwen kunnen we ook verschillende stellingen demonstreren. Een bekend voorbeeld is het volgende:

Knip driehoek ABC uit. Vouw $CC' \perp AB$ (zie fig.4).

Vouw de driehoek weer open. Vouw zo, dat C in C' komt. Hierdoor ontstaat $\triangle DEC$. Vouw daarna A op C' en ook B op C' , zodat de rechthoek $PQED$ ontstaat.

Hiermee is gedemonstreerd:

- 1e. $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ want deze hoeken liggen nu in C' en vormen daar een gestrekte hoek.
- 2e. De oppervl. van $\triangle ABC = 2 \times \text{opp. } PQED$ en omdat $PQ = \frac{1}{2}AB$ en $DP = \frac{1}{2}CC'$ (door het vouwen) is:
Oppervl. $\triangle ABC = 2 \times \text{Opp. } PQED = 2 \times \frac{1}{2}AB \times \frac{1}{2}CC' = \frac{1}{2}CC' \times AB$.

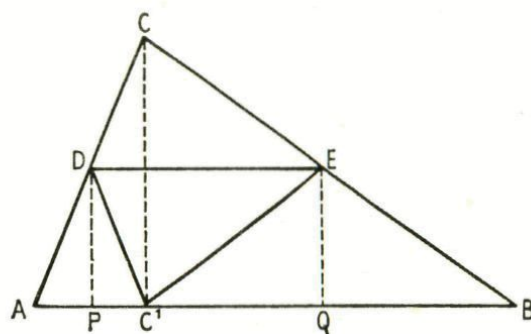


Fig. 4



°Platlanders - I

Platlanders zijn wezentjes die slechts twee afmetingen hebben, alleen lengte en breedte. Ze zijn dus platter dan een dubbeltje. Ze zijn niet eens dun, want ze hebben totaal geen dikte.

Ze zijn daar niet rouwig om; ze weten het niet eens, ja, ze kunnen zich niet eens dikte, of hoogte (zoals wij die kennen) voorstellen.

Zij leven altijd in een of ander Platland, een land, waarin ook slechts twee afmetingen voorkomen.

Platland is altijd een vlak, een plat vlak of een gebogen vlak. Het is voor Platlanders maar moeilijk uit te maken, of zij in een plat vlak,

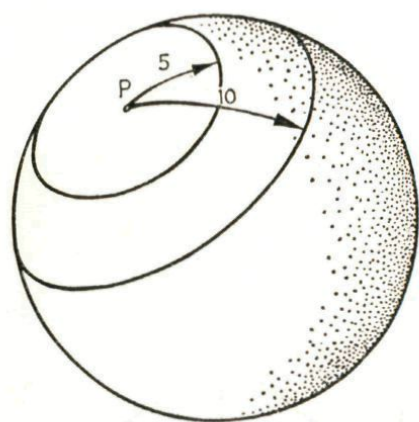


Fig. 5

dan wel in een gebogen vlak leven. Ze kunnen immers alleen maar zien en meten *in* hun vlak, langs de lijnen van hun vlak, niet daarbuiten, „naar boven” bijv. want daarvoor zouden ze een derde afmeting moeten kennen.

Stel dat we een Platlander, die altijd op een plat vlak heeft gewoond, op een biljartbal zetten. We nemen aan, dat deze Platlander zeer kleine afmetingen heeft ten opzichte van de biljartbal. Zo iets als onze afmetingen ten opzichte van de aarde.

Onze Platlander is toevallig landmeter. Hij wil in zijn nieuwe land een brede cirkelvormige „omheining” maken.

Met P als middelpunt trekt hij een cirkel met de straal 5 cm en ook een cirkel met de straal 10 cm (zie fig. 5).

Hij koopt wat lijnen (er zijn platlandwinkels genoeg op de biljartbal) om deze cirkels duidelijk aan te geven. Nu had hij van tevoren berekend, hoeveel centimeter lijn hij voor elke cirkel nodig had. Hij kende immers de formule $2\pi r$ voor de omtrek van een cirkel. Hij doet nu een eigenaardige ontdekking. Hij houdt bij de eerste cirkel al lijn over en bij de tweede nog meer. Toch had hij goed gerekend.

Hij meet de lengte van de lijnen die hij voor beide cirkels nodig had en doet nog een tweede ontdekking: hij verwachtte, dat toch zeker voor de tweede cirkel precies twee maal zoveel lijn gebruikt zou zijn als voor de eerste. Het is minder dan twee maal zoveel!

Wat is er toch met zijn nieuwe woonplaats aan de hand?

Er schijnen heel andere meetkundige wetten te heersen dan in zijn vroegere woonplaats.



°°OPGAVEN DIE DE NATUUR ONS STELT

In een wiskundeboek staan opgaven, die meestal bedoeld zijn om de theorie te oefenen.

Interessanter zijn de opgaven die de omgeving zelf stelt aan de mens, die nadenkt en begrijpen wil. Hier volgt zo'n opgave:

EEN „VERKEERDE” WERELD

Een van de meest algemene dingen, die we kunnen opmerken, als we ons afvragen: Hoe zien wij de dingen om ons heen?, is: hoe verder een voorwerp van ons verwijderd is, hoe kleiner wij het zien.

Wij zijn aan deze fundamentele wet van de perspectief zo gewoon, dat we ons niet kunnen voorstellen, dat het anders kan. De hier afgedrukte foto laat zien dat het omgekeerde inderdaad mogelijk is.

De verder van ons afliggende kant van het lucifersdoosje is groter dan de dichtstbijliggende.

De perspectief is als het ware omgekeerd.

Als je een grote bolle lens hebt met een kleine brandpuntsafstand (bv. een groot vergrootglas) kun je deze omgekeerde perspectief zelf zien.

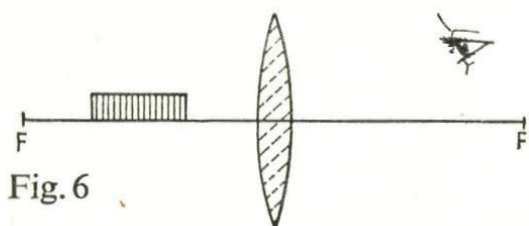
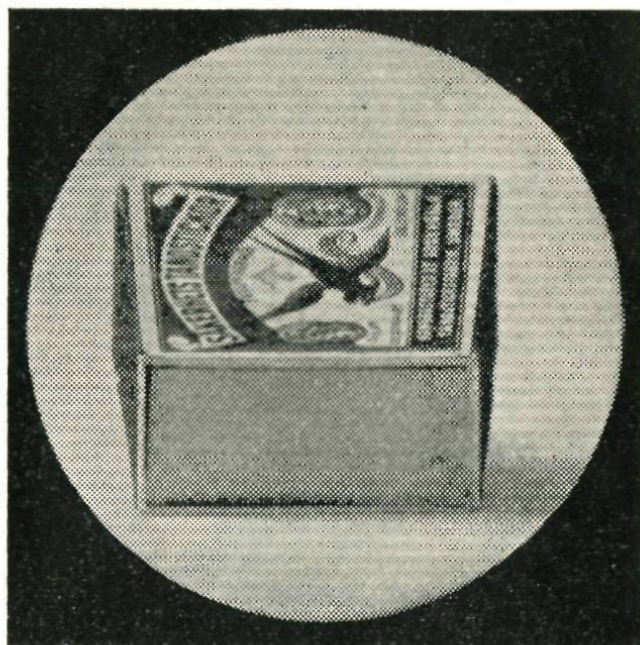


Fig. 6



Leg het lucifersdoosje tussen de lens en het brandpunt (zie fig. 6). Vanaf een bepaalde plaats voor de lens zie je het lucifersdoosje zoals op de foto.

Wie dit voor het eerst ziet, denkt aan een fout van de lens. Dit blijkt helemaal niet het geval te zijn. Het is geen fout, maar juist een eigenschap van een positieve lens, dat hij het beeld op deze wijze vormt. Nu is de opgave: Laat zien, dat het beeld zo moet zijn.

Je hoeft hiervoor alleen maar te kennen de constructie van het beeld bij een bolle lens met behulp van de merkwaardige stralen.

Zend je oplossing in.

De volgende keer publiceren we de oplossing met de namen van degenen die een juiste oplossing vonden. Bovendien zullen we nog iets meer van die „verkeerde” wereld vertellen.

Kan dat?

Drie variaties op hetzelfde thema

1. Zouden er op aarde 2 mensen zijn, die precies hetzelfde aantal haren op hun hoofd hebben?
2. Zouden er in een grote bibliotheek 2 boeken moeten zijn, waarin blz. 35 met dezelfde letter begint?
3. Een school heeft 400 leerlingen. Is het noodzakelijk zo, dat 2 leerlingen op dezelfde dag jarig zijn?

Beredeneerde oplossingen kunnen worden ingezonden.



Dat is nogal LOGISCH! - 1

Drie gesprekjes:

1

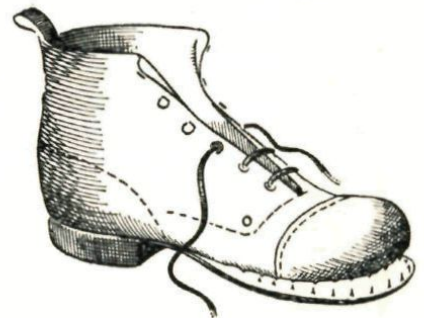
- Moeder, ik ben op school vanmorgen van de trap gevallen.
- Dat is nogal logisch, want de zool van je schoen hangt helemaal los.

2

- Als twee lijnen a en b beide evenwijdig zijn met een derde lijn c , dan zijn ze ook onderling evenwijdig.
- Dat is nogal logisch, want ...
- Want wat?
- Nou gewoon, dat is toch logisch! Je ziet het toch!

3

- Wat bedoel je eigenlijk met logisch?
- Wel, dat is nogal glad. Wat logisch is, dat *is* zo. Daar hoeft je niet meer over na te denken.



Wat is logica?

Het woord „logisch” is afgeleid van „logica”. Wat is logica? Het is al een oude wetenschap, want Aristoteles van Stagira, de grote Griekse wijsgeer, die leefde van 384 tot 322 v. Chr., wordt als een der grootmeesters van deze wetenschap beschouwd. Wat logica is,

kun je het beste ondervinden door logica te „bedrijven”. Dat wil zeggen door dat bewust te doen, want eigenlijk bedrijft iedereen in allerlei situaties van het dagelijks leven logica, of... meent dat te doen. Het: „dat is nogal logisch” is een geliefde uitdrukking. De meeste mensen geven daarmee blijk, dat ze begrijpen, dat logica iets te maken heeft met het maken van juiste gevolgtrekkingen. Dikwijls denken ze daarbij aan oorzaak en gevolg, zoals uit het eerste gesprekje blijkt. (Is er logica in het eerste gesprekje?)

Logica heeft inderdaad te maken met de juiste manier van redeneren. Het toepassen van de regels van de logica echter kan wel eens moeilijk zijn, bijvoorbeeld in de volgende paradox:

Een scheepskapitein vaardigt de volgende orders uit:

1. Elk lid van de bemanning moet gedurende de gehele reis keurig geschoren zijn.
2. Elk lid van de bemanning moet kiezen tussen twee mogelijkheden:
 - a. Gedurende de gehele reis zich zelf scheren. Het is hem dan dus verboden zich door de scheepskapper te laten scheren.
 - b. Gedurende de gehele reis zich door de scheepskapper laten scheren. Het is hem dan dus verboden zichzelf te scheren.

Voor geen enkel lid van de bemanning blijkt de keuze moeilijk te zijn, behalve voor... de scheepskapper zelf. Hij moet aan regel 1 voldoen. Dus moet hij ook kiezen uit de beide mogelijkheden van regel 2. Kiest hij echter 2a dan mag hij zich zelf niet scheren, kiest hij 2b dan is het hem eveneens verboden zich zelf te scheren. Een derde mogelijkheid bestaat niet. Deze man staat dus voor een onoplosbare tegenstrijdigheid¹ (een paradox).

Paradoxen, zoals deze, hebben de eeuwen door de mensen aan het denken en puzzelen gezet. Een beroemde is de volgende Griekse paradox: De bewoners van het eiland Kreta worden Kretensers genoemd. Nu zegt een Kretenser tegen mij: „Alle Kretensers liegen altijd”. Zie je de tegenstrijdigheid?

Nu zijn de paradoxen natuurlijk niet de belangrijkste en beste vertegenwoordigers van de logica. Wie de regels van de logica kent en weet te gebruiken, zal in veel gevallen de goede van de slechte redeneringen en de juiste van de foute conclusies weten te onderscheiden. Daarom gaan we in een volgend artikel deze regels eens wat nader beschouwen.

1. Een bespreking van deze paradox staat verderop in dit nummer, maar denk er eerst eens zelf over.

GOOCHELEN met cijfers - I

Laat iemand de cijfers van 1 t/m 9 opschrijven, uitgezonderd de 8. Zoek het cijfer op, dat het slordigst geschreven is. Laat dan het getal 12345679 vermenigvuldigen met $9 \times$ dit cijfer. Was het bv. de 4, dan laat je vermenigvuldigen met 36. De uitkomst bestaat dan uit niets dan viertjes. Kun je dit verklaren?



°°°EEN OPPERVLAKTEFUNCTIE MET BIJZONDERE EIGENSCHAPPEN - I

In de figuur hieronder is een deel getekend van de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$.

Deze grafiek is een hyperbool, waarvan ook nog een tak ligt in het derde kwadrant, maar in dit geval beschouwen we alleen de functiewaarden, die horen bij $x > 0$.

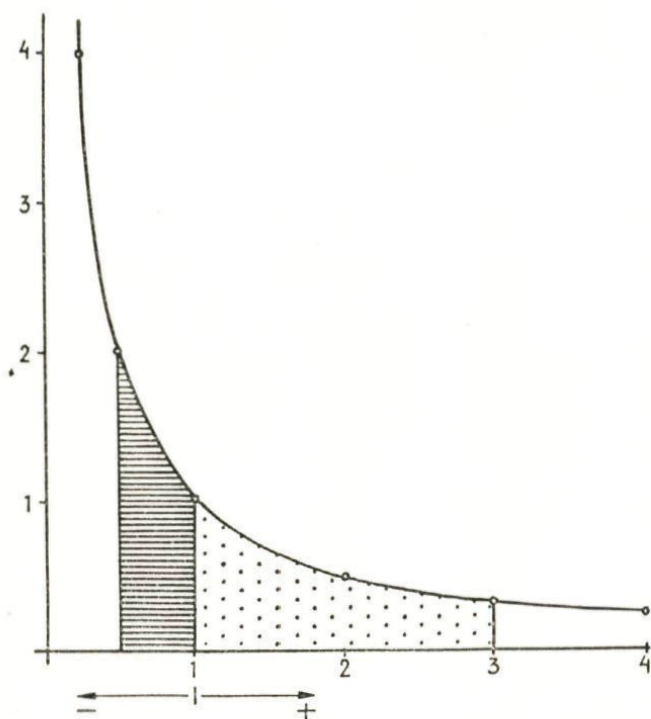


Fig. 7

Het is ons trouwens niet om de functie $\frac{1}{x}$ zelf te doen, maar

om de oppervlakten van vlakdelen, die begrensd worden door de tak van de hyperbool, de lijn $x = 1$, de lijn $x = p$ en de x -as.

In de figuur zijn twee van zulke vlakdelen aangeduid, één rechts van de lijn $x = 1$ en één links daarvan.

We maken nu de *afspraken*, dat we de oppervlakten van de vlakdelen rechts van $x = 1$

positief zullen rekenen en die, welke links van deze lijn liggen, negatief. Onder de figuur is dit met een paar pijltjes aangegeven.

In de getekende gevallen is $p = 3$ en $p = \frac{1}{2}$ gekozen.

De grootte van de oppervlakten, die we beschouwen hangt van p

af en is dus een functie van p . We zullen, om redenen, die later duidelijk zullen worden, deze functie voorstellen door $L(p)$.

Het oppervlak, dat links van $x = 1$ getekend is, is dus $L(\frac{1}{2})$, dat wat rechts van deze lijn is getekend, is $L(3)$. Gemakkelijk is te controleren, dat $L(1) = 0$.

We bestuderen nu de volgende figuur. De oppervlakte van het daarin gearceerde vlakdeel is gelijk aan

$$L(p + h) - L(p). \quad (h > 0).$$

Deze oppervlakte ligt tussen die van twee rechthoeken, beide met de lengte h .

Van de grootste dezer rechthoeken is de breedte $\frac{1}{p}$, van de kleinste $\frac{1}{p+h}$.

Dus geldt:

$$\frac{h}{p+h} < L(p+h) - L(p) < \frac{h}{p}$$

of

$$\frac{1}{p+h} < \frac{L(p+h) - L(p)}{h} < \frac{1}{p}.$$

De breuk, die in het midden staat, herkennen we als een differentiequotient, zodat deze breuk, als we h naar nul laten gaan, nadert tot $L'(p)$.

Als h naar nul gaat blijft de bovengrens $\frac{1}{p}$, terwijl de ondergrens nadert tot dit getal.

Dus is:

$$L'(p) = \frac{1}{p}.$$

We beschouwen nu eerst de functie $L(ap)$. Willen we daarvan de afgeleide vinden, dan moeten we de kettingregel toepassen, bijv. door te zeggen:

Stel $L(ap) = L(z)$, waarin $z = ap$.

De kettingregel zegt dan, dat de afgeleide van $L(ap)$ is:

$$L'(z) \cdot z' = \frac{1}{z} \cdot a = \frac{1}{ap} \cdot a = \frac{1}{p}.$$

We zien dus, dat de functies $L(ap)$ en $L(p)$ dezelfde afgeleide heb-

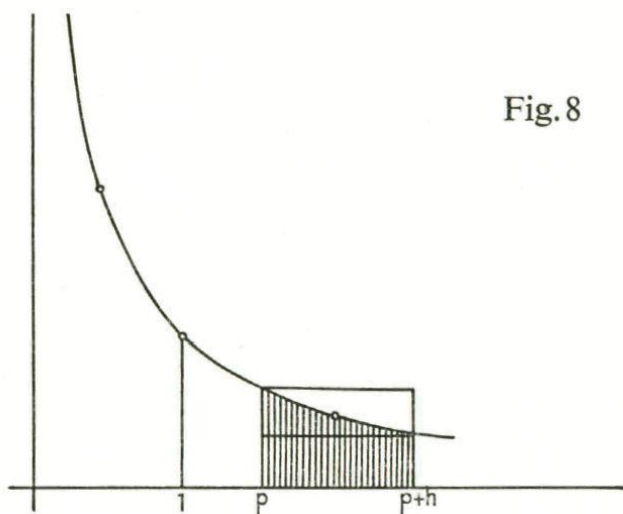


Fig. 8

ben. Dat betekent, dat deze functies gelijk zijn of hoogstens een constante verschillen. We kunnen daarom schrijven:

$$L(ap) = L(p) + C.$$

Het gaat er nu om te onderzoeken hoe groot deze constante is. Daarvoor stellen we $p = 1$ en bedenken, dat $L(1) = 0$ is.

Dus geldt: $L(a) = 0 + C$ of $C = L(a)$.

Vullen we dat in, dan vinden we:

$$L(ap) = L(a) + L(p).$$

Kiezen we hierin voor p het getal b , dan staat er

$$L(ab) = L(a) + L(b)$$

Gemakkelijk blijkt nu ook

$$L(a^2) = 2 \cdot L(a)$$

en voor gehele n :

$$L(a^n) = n \cdot L(a).$$

Deze bijzondere eigenschappen van de beschouwde functie herinneren ons aan een andere functie, die dergelijke eigenschappen heeft. Misschien is er nu al wel iemand, die begrijpt, waarom voor deze functie de letter L als symbool gekozen is.

We kennen nl. de logaritmische functie met de eigenschappen:

$$\log ab = \log a + \log b$$

$$\log a^n = n \cdot \log a.$$

$$\log 1 = 0.$$

We noemen nu de beschouwde L -functie de *natuurlijke logaritme*. Het grondtal daarvan is vanzelfsprekend niet 10. We vinden het door de vraag te beantwoorden:

Voor welke waarde van p is $L(p) = 1$? Immers als g het grondtal van een logaritme is, dan is $\log g = 1$.

In een volgend artikel zullen we de waarde van het grondtal zoeken.



BESPREKING VAN DE PARADOX van de scheepskapper

De scheepskapper kwam in moeilijkheden, doordat hij in de orders van de kapitein in twee functies voorkomt:

1e. als lid van de bemanning, waardoor order 1 voor hem geldt;

2e. als de persoon, die door de bemanning wel of niet gekozen kan worden. Wat dat betreft staat hij dus buiten de groep der leden van de bemanning. Elk lid van die groep nl. is in staat om te kiezen tussen zichzelf scheren of zich laten scheren. De scheepskapper echter kan die keuze niet maken. Voor hem bestaat nl. niet de mogelijkheid zich door zichzelf te *laten* scheren.

Order 2 van de kapitein is dan ook niet goed geformuleerd en had bv. kunnen luiden: Elk lid van de bemanning, met uitzondering van de scheepskapper, moet kiezen tussen . . . enz.

De logische moeilijkheid in deze paradox zit in het gebruik van het woord „elk”.



WOORDENBOEK

1. Asymptoot Uit het Grieks. Letterlijk: „Niet ontmoetend”. Een goede en toch beknopte definitie van een asymptoot is niet gemakkelijk te geven. Daarvoor verwijzen we naar een leerboek.
2. Functie Het Latijnse woord „functio” betekent o.a. „vervulling”. De grote wiskundige Leibniz (1646–1716) gebruikte het woord voor het eerst in de wiskunde. Hij bedoelde ermee een veranderlijke grootte, die in haar afhankelijkheid van een andere grootte wordt beschouwd.
3. Grafiek Hangt samen met het Griekse werkwoord schrijven of tekenen.
4. Logaritme Hangt samen met de Griekse woorden „Logos” = „reden” en „Arithmos” = „getal”.
5. Logica Het Griekse woord „Logos” = „reden” en ook = „woord” is ook de grondvorm van het woord „logica”.
6. Paradox Afgeleid van de Griekse woorden „Para” = „er bij langs” en „Doxa” = „verwachting”.
7. Perspectief Afkomstig van het Latijnse woord „Perspicere” = „er door heen zien”. Men geeft deze naam aan een tekenmethode, die de dingen tracht af te beelden, zoals ze gezien worden.
8. Strofoïde De uitgang „-oïde” betekent eigenlijk „met de vorm van”, maar wordt ook gebruikt om in andere opzichten overeenstemming uit te drukken.
„Strofos” betekent: „gedraaide band”.
9. Symmetrie Uit het Grieks. Betekent letterlijk: „evenmaat”. Symmetrie treft men aan in figuren, die regelmatigheden vertonen. Is de ene helft van de figuur het spiegelbeeld van de andere, dan heeft de figuur een symmetrieas.
10. Trisectie Het probleem van de trisectie van een hoek is de vraag, of het mogelijk is alleen door gebruik van passer en liniaal een gegeven hoek in drie gelijke delen te verdelen.

Verschillende omschrijvingen in dit woordenboek zijn met toestemming van de schrijver ontleend aan het boek: *Vreemde woorden in de wiskunde* door Prof. Dr. E. J. Dijksterhuis. Uitg. Noordhoff, Groningen.

RUIMTE-PUZZELS

1. Elk zijvlak van een kubus is in vier vierkanten verdeeld (fig.9).
Kan een tor zó over de kubus lopen, dat hij alle vierkanten maar éénmaal bezoekt?
 2. Wat is de kortste weg voor de tor om van A (hoekpunt links onderaan) naar B (middenpunt van het bovenvlak) te lopen?
- Oplossingen kunnen worden ingezonden.*

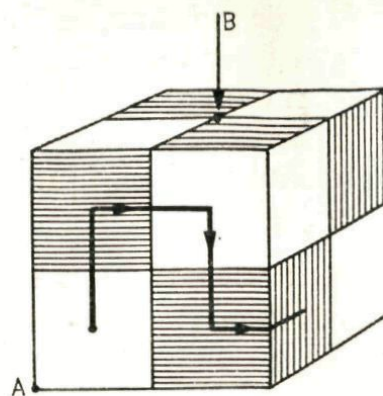


Fig. 9



OPLOSSING VAN „GOOCHELEN MET CIJFERS”:

$$\begin{aligned}
 &9 \times 12345679 = \\
 &= (10 - 1) \times 12345679 = \\
 &= 123456790 - 12345679 \\
 &\quad \begin{array}{r} 123456790 \\ - 12345679 \\ \hline 111111111 \end{array}
 \end{aligned}$$

Als je de aftrekking goed bekijkt, is ook duidelijk, waarom de 8 niet mag voorkomen.

Vermenigvuldigen we dit met 4, dan ontstaan er in de uitkomst alleen maar vieren.

ZAKELIJKE MEDEDELINGEN

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie:

Bruno Ernst, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

Aan dit adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen. G. Krooshof, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

Aan dit adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden. Vermeld duidelijk naam, adres en school.

Abonnementen:

Pythagoras zal 4 maal per schooljaar verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,— per jaargang. Voor anderen f 3,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J. B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B.Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.