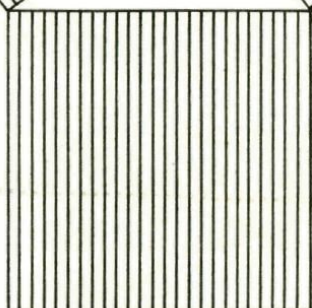


pythagoras



WISKUNDETIJDSCHRIFT
VOOR JONGEREN

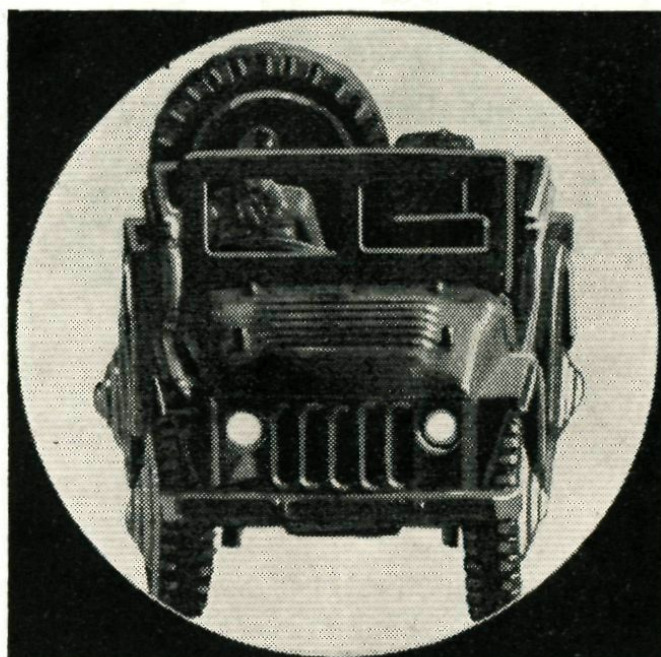
jaargang 1

no 2

Een blik in de „verkeerde wereld”.

Zie blz. 5.

De lijnen wijken naar ons toe
i.p.v. van ons af.



FORMULES

De formules zijn een bewonderenswaardig hulpmiddel voor het verstand ; zij ontheffen dit van elke moeilijke inspanning, men heeft ze maar te volgen: zij richten de geest niet alleen, maar zij dragen hem. Alleen moet de nodige oplettendheid voorhanden zijn om de formules en de regels juist toe te passen, en deze oplettendheid is bijna materieel: zij is meer een kwestie van zien dan van denken. Kortom de formules zijn een soort van instrumenten, waarmee men bijna werktuiglijk handelt.

CONDORCET (1743-1794).

°ENKELE INTERESSANTE KROMMEN - II

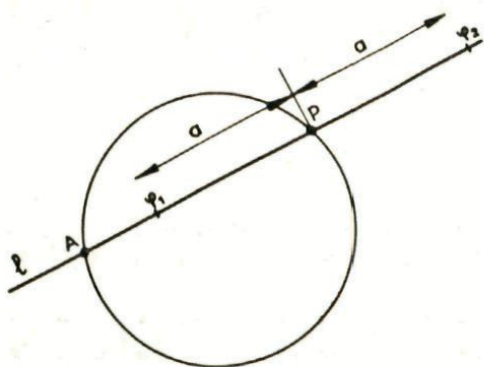


Fig. 1

°De limaçon van Pascal

Van deze kromme geven we weer de constructiewijze. Ieder kan deze dan gemakkelijk tekenen. Een bijzonderheid is deze keer, dat er drie verschillende vormen zijn.

Trek een cirkel met straal r (kies r bijv. 3 cm). Kies op de cirkel een punt A. Trek door A een rechte l , die de cirkel nog in P snijdt. Pas op l aan weerszijden van P een stuk a af. (Kies a bijv. ook 3 cm). Men vindt zo de punten Q_1 en Q_2 . De limaçon is de verzameling van deze punten Q, als l om a draait.

De drie gevallen hangen af van de keuze van a , nl.:

1. $a < 2r$.
2. $a = 2r$.
3. $a > 2r$.

In het geval $a = 2r$ heet de kromme ook wel *cardioïde* of *hartlijn*.

WE BLADEREN DIT NUMMER EVEN DOOR

Het eerste, wat ons bij het doorbladeren van dit nummer opvalt, is het grotere aantal bladzijden. Er zijn er nu twintig. Het volgende nummer (dat na de kerstvakantie zal verschijnen) zal er 24 hebben. Het verheugend grote aantal abonnees heeft deze uitbreiding mogelijk gemaakt.

Verschillende artikelen uit nummer 1 worden deze keer vervolgd. Alleen het vervolg van het artikel over de natuurlijke logaritme moet tot de volgende keer wachten. We zien nu echter ook de eerste bijdragen van lezers: De aardige legpuzzel van Ir. Mulder, het probleem van de snijdende lijnen van de Heer J. van Casteren, de puzzel van de Heer R. Kegel, het artikel van Dr. Schrek over de uitvinding van de passer en het artikel van de Heer De Vries over het beroep „Tekenaar van het Kadaster”. Dit artikel is het eerste van een serie, die we hopen te publiceren over beroepen, waarbij wiskunde een rol speelt. In het volgende nummer zal in deze serie geschreven worden over de opleiding in een wiskundige richting bij Philips Nederland. Misschien zoeken inzenders van oplossingen van puzzels al of hun naam ergens genoemd wordt. Zij moeten geduld hebben tot het volgende nummer, want de kopij voor nummer 2 moest al klaargemaakt worden voor nummer 1 officieel verschenen was.

°De strofoïde.

In nummer 1 van ons tijdschrift werd de constructiemethode van de strofoïde gegeven.

In figuur 2 is een deel van deze kromme afgebeeld. De mooie vorm van de lus vinden we terug in vazen van allerlei cultuurperioden.

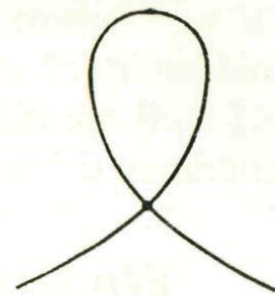


Fig. 2

De wiskundefilms van Nicolet geven daar goede voorbeelden van. Zie het artikel over deze films in het tijdschrift Euclides van september 1959 (uitg. P. Noordhoff).

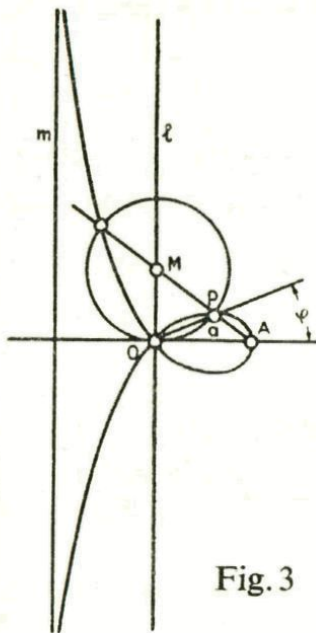


Fig. 3

°°°Enkele bijzonderheden van de strofoïde.

1. OA is symmetrieas (zie fig. 3).
2. De asymptoot m staat loodrecht op OA.
3. Het punt O is knooppunt (dubbelpunt).
4. De raaklijnen in O maken hoeken van 45° met OA.
5. Kiest men OA als x -as en de lijn l als y -as, dan luidt de vergelijking van de strofoïde:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

6. Stelt men OP voor door r en $\angle POA$ door φ , dan kan men als vergelijking van de strofoïde ook schrijven:

$$r = a \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi} \text{ (poolcoördinaten)}$$

Dat is nogal LOGISCH! - 2

Een gesprekje:

A: In een rechthoek delen de diagonalen elkaar middendoor.

B: Dat is nogal logisch! Een rechthoek is immers een parallellogram.

Elke, Alle, Sommige

In ons vorige artikel bekeken we een paradox en zagen dat de logische moeilijkheid daarin het gevolg was van het verkeerde gebruik van het woord *elke*.

In de logica en dus in de wiskunde spelen woorden als „elke”, „alle” en „sommige” enz. een belangrijke rol. We merken dat in de wiskunde meestal niet, omdat de stellingen dikwijls geformuleerd worden zonder deze woorden daarbij te gebruiken. We zeggen bijv.: „De som der hoeken van een driehoek is 180° ” en bedoelen: „Van *elke* driehoek is de som der hoeken 180° ”.

Of we zeggen: „In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor” en we bedoelen: „In *elk* parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor.” We kunnen ook zeggen: „In *alle* parallellogrammen delen de diagonalen elkaar middendoor.”

Een beroemd voorbeeld

Erg beroemd in de logica is het volgende voorbeeld van het gebruik van het woord *alle*:

Alle mensen zijn sterfelijk	(1e bewering)
Socrates is een mens	(2e bewering)
Socrates is sterfelijk	(conclusie)

Een dergelijk samenstel van twee beweringen en een conclusie noemt men in de logica een sluitrede of syllogisme. Aristoteles gaf reeds een groot aantal voorbeelden van dergelijke sluitredenen. Ook het hierboven vermelde gesprekje kan in de vorm van een sluitrede geschreven worden:

In alle parallellogrammen delen de diagonalen elkaar middendoor	(1e bew.)
Elke rechthoek is een parallellogram	(2e bew.)
In elke rechthoek delen de diagonalen elkaar middendoor	(concl.)

De sluitredenen van dit type kunnen we een algemene vorm geven; bijvoorbeeld:

Elke A heeft een zekere eigenschap E
X is een A
X heeft de eigenschap E

De A, E en X, die hierin genoemd zijn, zouden we veranderlijken kunnen noemen, waarvoor nog willekeurige termen ingevuld kunnen worden. Bijvoorbeeld:

Alle Strobogonen hebben Seretenen
Mesoon is een Strobogoon
Mesoon heeft Seretenen

De woorden Strobogoon, Sereteen of Mesoon zul je in geen woordenboek vinden. Zodoende kun je niet controleren of de beweringen waar zijn en dus niet of de conclusie juist is.

Maar – en dat is nu logica – je weet zeker, dat als de beide beweringen waar zijn, ook de conclusie waar is.

Wat denk je van de volgende sluitredenen?

Mocht je moeite hebben met de abstracte A, E en X, vul er dan bepaalde begrippen voor in, bijv. in de eerste sluitrede: A = mens.

E = tanden hebben

X = onze hond

of in de tweede sluitrede: A = zoogdier

E = in het water leven

X = onze hond

- | | |
|-------------------------------------|-----------|
| 1. Alle A hebben de eigenschap E | (1e bew.) |
| X heeft de eigenschap E | (2e bew.) |
| <hr/> X is een A | (concl.) |
| 2. Sommige A hebben de eigenschap E | (1e bew.) |
| X is een A | (2e bew.) |
| <hr/> X heeft de eigenschap E | (concl.) |
| 3. Alle A hebben de eigenschap E | (1e bew.) |
| X heeft de eigenschap E niet | (2e bew.) |
| <hr/> X is geen A | (concl.) |

Veronderstel, dat telkens de beide beweringen waar zijn, is dan de conclusie noodzakelijk waar?

°°DE VERKEERDE WERELD II

Hoe het mogelijk was, dat de perspectief van het lucifersdoosje door de lens omgekeerd werd (no. 1, blz. 9) is in fig. 4 te zien.

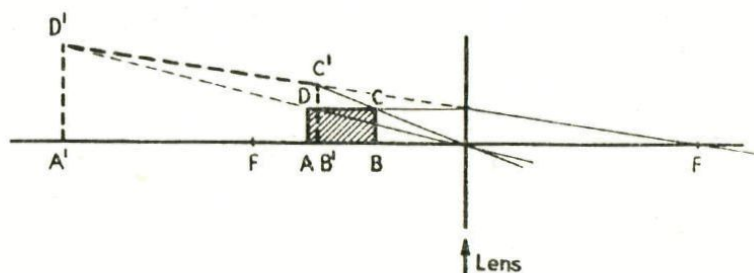


Fig. 4

Met behulp van de merkwaardige stralen is van lucifersdoosje ABCD het virtuele beeld A'B'C'D' geconstrueerd.

Misschien denk je dat daarmee het probleem opgelost is: A'D' is immers groter dan B'C'.

Zo eenvoudig is het *niet*, want als je oog in F is, zie je B'C' *even groot* als A'D' (wat – tussen twee haakjes – ook al merkwaardig is).

Ga je dichterbij, dan lijkt B'C' groter; ga je verderaf, dan lijkt A'D' groter. Dit alles is eenvoudig met behulp van fig. 4 aan te tonen.

De vraag is nu: waar moet het oog zich bevinden om de „verkeerde perspectief” te zien? M.a.w. waar zien we $A'D'$ groter dan $B'C'$?

Bekijken we daarvoor fig. 5.

Vanuit F zien we zowel $B'C'$ als $A'D'$ onder de hoek α .

Op de cirkelomtrek 1 zien we (volgens een bekende stelling over de omtrekshoek) $B'C'$ onder hoek α en op cirkelomtrek 2 zien we $A'D'$ onder dezelfde hoek α .

Beredeneer nu zelf dat in de dubbel gearceerde gebieden het lucifersdoosje in „verkeerde perspectief” te zien is en in het enkel gearceerde gebied de normale perspectief.

Maar hoe is het in de gestippelde gebieden? Zend je oplossing op deze vraag in.

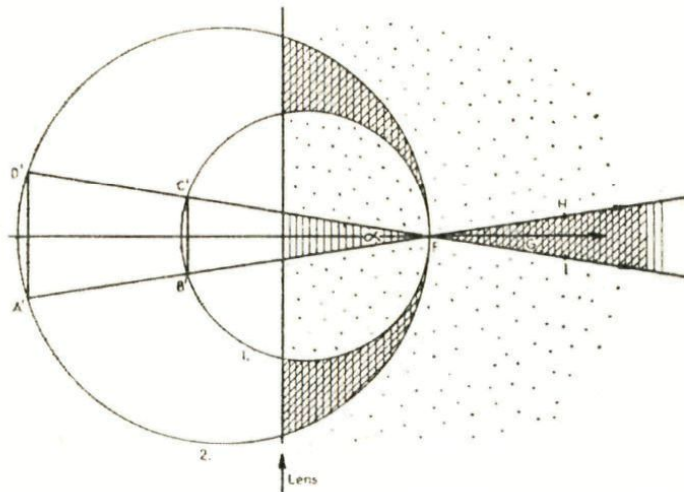


Fig. 5

Bij de bouw van optische instrumenten (b.v. het microscoop) krijgt men met dit probleem van de verkeerde perspectief te maken.

NOG IETS OVER DE VERKEERDE WERELD

De positieve lens maakt een eigenaardige afbeelding van de wereld. Als je een grote lens hebt, moet je een touw spannen vanaf het middelpunt van de lens langs de optische as. Je ziet het touw wegllopen en dikker worden tot het hele veld van de lens bedekt is en je ziet het weer terugkomen.

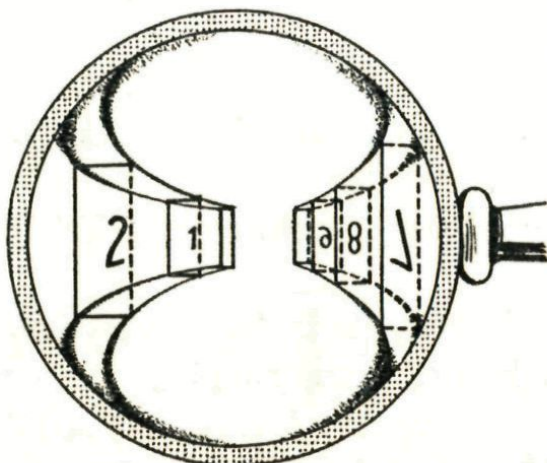


Fig. 6

Beeld van een doorzichtige plastic-liniaal van 10 cm door een positieve lens met een brandpuntsafstand van 4 cm.

De tekening (fig. 6) geeft weer, hoe je een liniaal ziet, die met de optische as samenvalt. Dit is moeilijk te fotograferen omdat het hele tafereel zo'n groot diepteverschil heeft.

Hoe dit uit de constructie van het beeld volgt, laat fig. 7 zien. De lens werkt hier als een werktuig dat een bepaalde ingewikkelde meetkundige transformatie van de ruimte voor ons uitvoert.

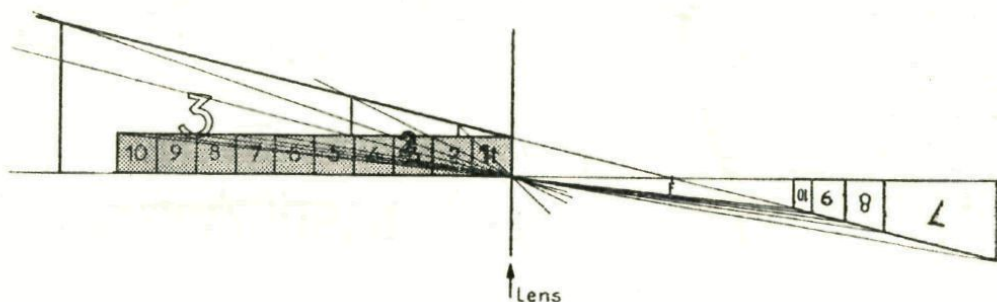


Fig. 7

De grijze liniaal met cijfers ligt achter de lens.

Als je het beeld construeert krijg je de witte liniaal. Het beeld van 4 loopt tot het oneindige!

De LOGICA van Jansen

Jansen: Zeg Pietersen, als $a > b$ en $b > c$, dan is $a > c$. Ben je het daarmee eens?

Pietersen: Natuurlijk.

Jansen: Dan heb ik nog zo iets. Ik zal je bewijzen, dat het licht van een kaars helderder is dan dat van de zon.

Pietersen:????

Jansen: Kijk, het licht van een kaars is helderder dan niets. Ben je het daarmee eens?

Pietersen: Natuurlijk.

Jansen: Wel, niets is helderder dan de zon, q.e.d.

Pietersen: Even zien! $k > n$ en $n > z$ dus $k > z$.

Je hebt gelijk, kerel!

TWEE CENTEN

Twee centen liggen tegen elkaar aan. Het cijfer 1 staat op de beide centen verticaal. Nu laten we de rechter cent om de linker *rollen*. Hoe staat het cijfer 1 als de rechter cent links gekomen is?

Probeer dit te vinden zonder de cent werkelijk te rollen.

Beredeneerde oplossingen kunnen worden ingezonden.





°Twee **LEGPUZZELS** in één

Teken de vier afgebeelde stukken zorgvuldig over. (Het nauwkeurigst gaat dit door de hoekpunten eerst door te prikken.) Knip ze dan uit.

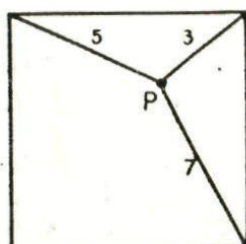
Het is mogelijk van de vier stukken een vierkant te leggen. Men kan er echter ook een gelijkzijdige driehoek van maken.

Wil je bewondering krijgen voor de maker van de puzzel, probeer dan eens een gelijkzijdige driehoek in vier stukken te verdelen, waarvan je een vierkant kunt leggen!

Ingezonden door Ir. H. M. Mulder,
Wilhelminapark 22, Breda.



°°**EVEN LEKKER REKENEN**



Hoe groot is de zijde van het vierkant?

Oplossingen kunnen worden ingezonden.

P mag ook buiten het vierkant liggen.

TEKENAAR VAN HET KADASTER

Voor de opleiding tot dit ambt, moet je in het bezit zijn van een diploma MULO-B of een diploma dat minstens hiermee gelijk te stellen is. Wie het bij zijn (of haar) beroepskeuze in deze richting wil proberen, moet zich eerst naar een kadasterbureau begeven, waar men op elk tijdstip kan worden aangenomen als aspirant-tekenaar. In deze functie kun je boven de normale beloning eventueel een tegemoetkoming ontvangen in pension- en reiskosten.

Je leert dan in de praktijk het kadaster kennen als een instelling, die met kaarten en registers een volledig beeld geeft van het onroerend goed van een bepaald gebied. Elk kadaster huisvest twee diensten: de administratie (boekhouding) en een technische afdeling (de landmeetkundige dienst). De aspirant-tekenaar is aan de laatste afdeling verbonden. Na minstens zes maanden krijg je gelegenheid deel te nemen aan de eerstvolgende cursus van het Centraal teken- en opleidingsbureau van het kadaster (C.T.O.) te 's-Gravenhage. De cursisten, die daar een opleiding van twaalf maanden volgen, komen uit alle delen van het land. Deze cursus is kosteloos – de verdiensten gaan door. De cursist krijgt twee weken zomervakantie, een week kerstvakantie en bovendien nog enkele snipperdagen.

Waaruit bestaat nu eigenlijk deze opleiding? Het antwoord op deze vraag is wel enigszins af te leiden uit de opsomming van de vakken die er worden onderwezen. Hier volgen enkele:

schrijven (verschillende soorten schrift);

kaarttekenen (rechtlijnig tekenen met zin voor nauwkeurigheid, ook het bijwerken van bestaande kaarten);

goniometrie en vlakke driehoeksmeting (in de landmeetkunde is de rechte hoek verdeeld in 100 graden, de onderverdeling is decimaal, er worden dus geen minuten en seconden gebruikt);

coördinatenmeetkunde (van punten en rechte lijnen, dus geen kegelsneden);

praktisch rekenen (hoofdrekenen, rekenliniaal, het werken met rekenmachines);

landmeetkundige berekeningen, (waarbij de vorige onderdelen hun toepassing vinden, bijv. voor de groottebepaling van percelen.)

De vlakke meetkunde (planimetrie) staat niet op het programma; wat daarvan op school geleerd is, wordt bekend verondersteld.

In de praktijk werk je nooit met „mooie” getallen, vandaar dat je berekeningen met s-formule en projectiestelling leert uitvoeren met de rekenmachine.

Is de cursus met succes doorlopen, dan kom je weer op een van de bureaus terecht van het kadaster (of van de ruilverkaveling). Na drie jaar in dienst te zijn geweest (gerekend van je 21e jaar af) als tekenaar van het kadaster, kun je benoemd worden tot landmeetkundig ambtenaar en in deze functie kun je worden aangewezen voor het verrichten van eenvoudige meetwerkzaamheden te velde. Wie daarvoor geschikt blijkt te zijn heeft de kans na vier jaar belast te worden met meer omvangrijke terreinwerkzaamheden of de leiding te krijgen van een tekenkamer. Ook is er nog een vakcursus voor technisch ambtenaar, waardoor de beste tekenaars en landmeetkundige ambtenaren de middelbare technische rangen kunnen behalen. Dit eindpunt is natuurlijk niet voor allen weggelegd. Maar het begin is voor allen gelijk: een gang naar een van de kadasterbureaus die ons land rijk is. Het hoofd van zo'n bureau zal je graag inlichten en kan je een betere indruk geven van het werk aan een landmeetkundige dienst dan in dit wel erg beknopte overzichtje kon gebeuren.

's-Gravenhage - Nieuwe Haven 6

D. DE VRIES.

°EEN SPEL

Dit is een spel voor twee spelers Wit en Zwart. Ieder heeft twee stukken. Om beurten doet elk een zet. Men mag zoveel vakken voor- of achteruit zetten als men verkiest. Er kan niet over een stuk van de tegenpartij gesprongen worden. Ook kan men geen stuk „slaan”, zoals bij het dammen.

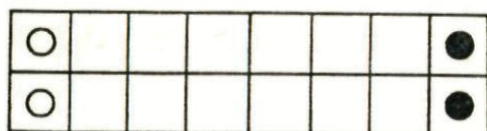


Fig. 12

Verloren heeft de speler, die vastgezet is. Nummeren we de vakken als volgt:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16

dan zou een spel bijvoorbeeld zo kunnen verlopen:

Wit		Zwart	
van	naar	van	naar
9	15	8	2
15	10	16	11
10	9	11	10

zodat zwart dus gewonnen heeft.

Wanneer de beide spelers steeds goede zetten doen, wie van beide wint dan? Degene, die begint of de andere? Is er een regel te geven voor de goede zetten van deze winnaar?

Beredeneerde oplossingen kunnen worden ingezonden.



OPLOSSINGEN
HIERVAN
KUNNEN WORDEN
INGEZONDEN

5. Welke cijfers stellen de letters A, B en C in de volgende optelling voor?

$$\begin{array}{r} \text{AAA} \\ \text{BBB} \\ \text{CCC} \\ \hline \text{BAAC} \end{array}$$

- 6a. Welke bijzonderheid geldt voor de drie *ongelijke* getallen a , b en c , als gegeven is $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$?

b. Zijn al die voorwaarden nodig?

7. Er was ergens een ruit gebroken. Vast stond, dat de schuldige gezocht moest worden onder één der vijf broers van het gezin van de burens. Dus werden deze ondervraagd.

Jan zei: „Henk of Tom deed het.”

Henk zei: „Piet en ik deden het geen van beide.”

Tom zei: „Jullie liegen allebei.”

Klaas zei: „Nee, één van hen spreekt de waarheid, maar de ander liegt.”

Piet zei: „Nee Klaas, dat is niet waar.”

Toen de vader van de jongens, een eerlijk man, zijn mening moest geven, zei hij: „Drie van de jongens spreken altijd de waarheid, maar de andere twee kun je niet altijd vertrouwen.”

Wie brak de ruit?

8. Piet moet naar school en kijkt thuis op de klok hoe laat het is. De klok staat op half negen en daar Piet weet dat deze achter is, gaat hij maar weg. Dat was maar goed ook, want toen hij op school kwam, stond de klok daar op 5 minuten voor negen.

Als de school uitgaat neemt Piet de juiste schooltijd op nl. 12.03 uur en gaat naar huis. Thuis gekomen ziet hij de klok op 12.16 staan. Hoeveel moet hij de klok thuis nu vooruitzetten om de schooltijd te hebben?

Ingezonden door R. Kegel, leerling klasse 5B, Oldenbarnevelt h.b.s., Rotterdam.



°°°WISKUNDE een spel? II

DE STELLING VAN MASCHERONI

Pascal heeft ergens geschreven:

„Rien ne vous plaît que le combat, mais non pas la victoire; ainsi dans le jeu, ainsi dans la recherche de la vérité; nous ne cherchons jamais les choses, mais la recherche des choses.”

Dit wordt wel bijzonder geïllustreerd door de passerconstructies van Mascheroni, waarvan we er in het vorige nummer twee hebben gezien. Mascheroni heeft bewezen, dat alle constructies, die met passer en liniaal te maken zijn, ook met de passer alleen zijn uit te voeren.

Als we zijn bewijs hieronder gaan bekijken, dan is het ons daarbij eigenlijk niet te doen om het feit zelf, maar om *de wijze, waarop* het bewezen is. Die is interessant.

Mascheroni ging uit van de volgende gedachten:

Als ik behalve een passer ook nog een liniaal gebruik, zijn mijn mogelijkheden toegenomen. Ik kan nl.:

- a. het snijpunt van twee willekeurige rechten bepalen.
- b. de snijpunten van een rechte met een cirkel bepalen.

Als ik deze twee dingen nu ook met de passer alleen kan uitvoeren, kan ik alle constructies voor passer en liniaal ook met de passer alleen maken.

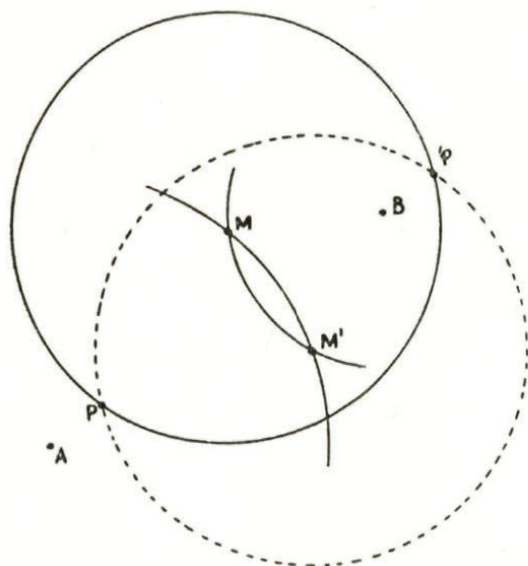


Fig. 8

Punt *b* is het gemakkelijkst te bewijzen:

Gegeven: de punten A en B (die de rechte AB bepalen): cirkel (M, *r*) en zijn middelpunt M.

Te construeren: De snijpunten van AB met de gegeven cirkel.

Constructie: (fig. 8) Construeer de cirkelbogen (A, AM) en (B, BM). Deze snijden elkaar voor de tweede maal in M'. Trek de cirkel (M', *r*). Deze snijdt de gegeven cirkel in P en Q. P en Q zijn de gevraagde snijpunten. Het bewijs daarvoor kun je zelf gemakkelijk vinden.

Opmerkingen:

1. De constructie doet eigenlijk niets anders dan de gegeven cirkel spiegelen in de lijn AB.
2. De constructie gaat niet door, als de punten A, B en M op één rechte lijn liggen. Er zijn dan enkele hulpconstructies nodig, die we wegens de beperkte plaatsruimte niet opnemen.

Het bewijs van punt a is niet erg lastig, maar wel wat omslachtig. Het is o.a. te vinden in: Prof. Dr. S.C. van Veen: Passermeetkunde, Gorinchem 1951. Ook in het boek van Prof. Dr. Hk. de Vries: Historische Studiën, deel I (P. Noordhoff, Groningen) vindt men een uitvoerige bespreking van de passerconstructies van Mascheroni.

°°Lijnen door één punt

punten op één lijn

J. van Casteren, Heegtse Veldweg 3, Overasselt, leerling van het St. Dominicuscollege te Nijmegen, schrijft ons:

„Bij het tekenen van rechten heb ik een merkwaardige ontdekking gedaan. Neem een willekeurig punt P en twee rechten p en q , die elkaar in S snijden. Trek door P rechten, die p en q snijden (zie fig. 9).

Verbindt men nu de snijpunten met elkaar, zoals dat in de figuur gedaan is (A met F en B met E, ook A met D en B met C), dan liggen de snijpunten van de verbindingslijnstukken (S_1 en S_2) samen met S op één rechte. Ik meen het bewijs gevonden te hebben door gebruik te maken van de stellingen van Menelaos en Ceva” (zie hieronder).

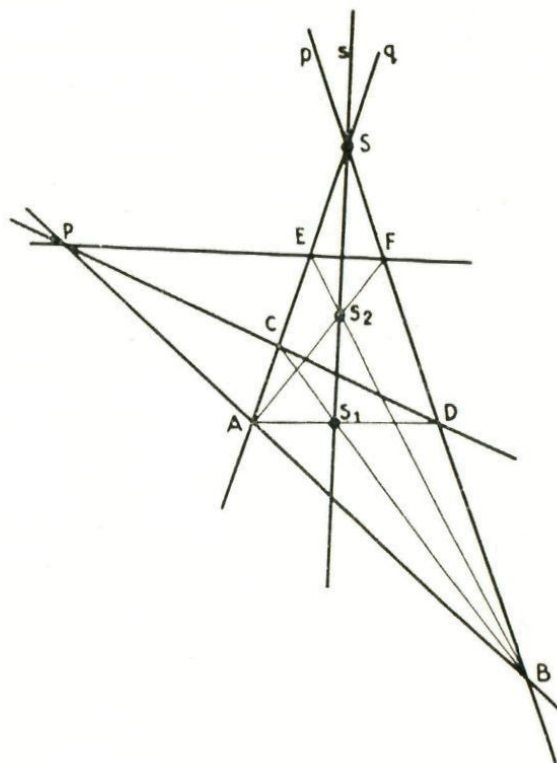


Fig. 9

Hij vraagt zich nu af of het omgekeerde ook geldt, nl. dat als de punten S, S_1 en S_2 op één rechte liggen, de lijnen BA, DC en FE door één punt P moeten gaan. Hoewel het natuurlijk steeds interessant is na te gaan of bij een stelling, die men heeft gevonden, ook de omgekeerde stelling geldt, menen we toch, dat het in dit geval interessanter is een geheel ander aspect van de zaak te bekijken. De door Van Casteren gevonden stelling handelt over lijnen en punten en hun onderlinge ligging. Nu is er een bekend principe in de meetkunde, dat men deze stellingen in andere kan „vertalen” op de volgende wijze:

1. Vervang overal „lijn” door „punt” en omgekeerd
2. Vervang „lijn gaat door punt” door „punt ligt op lijn” en omgekeerd
3. Vervang „snijpunt van twee lijnen” door „verbindingslijnstuk van twee punten” en omgekeerd.

We vertalen nu op deze wijze het door Van Casteren genoemde geval en krijgen dan het volgende:

Neem een willekeurige rechte p en twee punten P en Q , die het verbindingslijnstuk s hebben. Kies op p punten en verbind die met P en Q .

Snijdt men nu de verbindingslijnstukken met elkaar (op overeenkomstige wijze als in het eerste geval: a met f en b met e , ook a met d en b met c) dan gaan de verbindingslijnstukken van de snijpunten (s_1 en s_2) samen met s door één punt.

De lezer moet de bijbehorende figuur maar eens tekenen en daarin het beweerde controleren. Vanzelfsprekend moeten de gegeven lijnen en punten een beetje gunstig gekozen worden. Dat is een kwestie van experimenteren.

De hierboven genoemde stellingen van Menelaos (omstreeks 100 n. Chr.) en Ceva (omstreeks 1700 n. Chr.) zijn in zekere zin ook vertalingen van elkaar. We noemen ze hier zonder bewijs.

Menelaos: Trekken we een rechte l , die de zijlijnen a , b en c van $\triangle ABC$ snijdt in de punten P , Q en R , dan geldt $\frac{PC}{PB} \cdot \frac{RB}{RA} \cdot \frac{QA}{QC} = -1$.

(Het minteken komt hierbij omdat het lijnstuk RA een richting heeft, die tegengesteld is aan die van de andere vijf stukken, die de omloopszin CBA van de driehoek volgen).

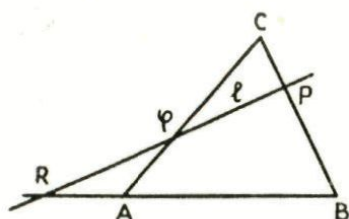


Fig. 10

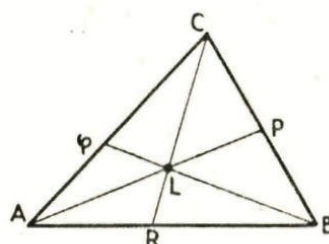


Fig. 11

Ceva: Kiezen we een punt L , verbinden we dat met de hoekpunten A , B en C van $\triangle ABC$ en bepalen we de snijpunten P , Q en R van deze verbindingslijnstukken met de zijlijnen a , b en c van driehoek, dan geldt: $\frac{PC}{PB} \cdot \frac{RB}{RA} \cdot \frac{QA}{QC} = +1$.



°PLATLANDERS - II

De vorige keer hebben we een vreemd experiment uitgehaald met een platlander door hem van de spiegelruit, die hij bewoonde, onverhoeds over te brengen naar een biljartbal. Daar zijn afmetingen maar klein waren ten opzichte van deze biljartbal kon hij het gekromd zijn daarvan net zo min bemerken, als wij, wanneer we menen, dat een lange rechte weg inderdaad recht is. Wel ontdekte hij echter, toen hij de omtrekken van de cirkels ging vergelijken, dat de formule $O = 2\pi r$ in zijn nieuwe wereld niet opging. Hij moest daaruit wel afleiden, dat deze afweek van de hem zo vertrouwde wereld van de spiegelruit. Dit bracht hem op het idee ook andere eenvoudige meetkundige eigenschappen te gaan onderzoeken.

Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde, zo had hij altijd geleerd en talloze malen waargenomen, zijn overeenkomstige hoeken gelijk. Om dit te onderzoeken wilde hij twee evenwijdige lijnen construeren. Hij deed dit als volgt:

Hij zette twee puntbakens A en B uit en spande daartussen de lijn AB. Daarna nam hij een lijnstuk BC en plaatste dit in B loodrecht op AB. Ook in A een even groot lijnstuk loodrecht op AB. Zo ontstonden de punten C en D. Daartussen werd nu weer de lijn CD gespannen.

Onze Platlander was er nu zeker van, dat hij twee evenwijdige lijnstukken AB en CD geconstrueerd had.

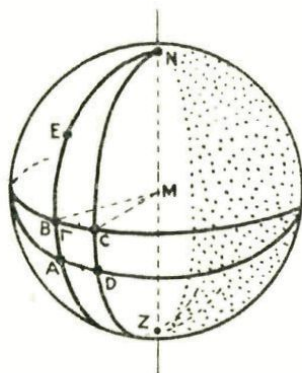


Fig. 13

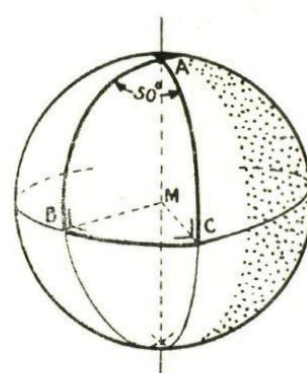


Fig. 14

Omdat hij de lijnstukken wat kort vond ging hij ze beide verlengen: kijkend langs de puntbakens A en B liet hij door een bevriende Platlander (die we voor deze gelegenheid ook naar de biljartbal-wereld overgeplaatst hebben) een derde puntbaken E zó plaatsen, dat het met A en B op een rechte lijn lag. Op deze wijze verlengde hij ook AB en ook CD. Maar . . . er scheen iets niet in de haak te zijn.

Hoe nauwkeurig hij ook alles deed, steeds kwamen de lijnen dichter bij elkaar tot ze elkaar sneden.

Naar de andere kant verlengen hielp ook niets, ook daar sneden de lijnen elkaar. Dit was een wonderlijke nieuwe wereld, waarin geen evenwijdige lijnen bestonden.

Onze Platlander herinnerde zich nog heel goed dat de stelling: „de hoeken van een driehoek zijn samen 180° ” bewezen werd door een of meer evenwijdige hulplijnen te trekken en de stelling van de evenwijdige lijnen toe te passen.

Als in zijn nieuwe wereld geen evenwijdige lijnen bestonden, dan zou het best mogelijk zijn, ja zelfs voor de hand liggen, dat de som der hoeken van een driehoek in zijn wereld niet gelijk was aan 180° .

Na enige metingen kon onze Platlander er zich van overtuigen, dat die som altijd groter was dan 180° .

Een voorbeeld van een van zulke metingen zie je in figuur 14.

Wat is „tussen”?

Hoe zou je aan een ander duidelijk maken, wat je bedoelt met: Op de rechte lijn l ligt het punt P *tussen* de punten A en B ?

Ligt in fig. 13 het punt E tussen A en B ? Waarom niet of waarom wel?

Kun je over de biljartbal van A naar B reizen via E ?

Soms krijgen bekende begrippen een geheel ander karakter, als we ze in een nieuwe „omgeving” toepassen.

HET KON ER NIET MEER OP

- °1. Lijn a en b snijden elkaar buiten het blad papier. Nu wordt gevraagd een lijn te trekken door Q en het snijpunt van a en b zonder de lijnen a en b op een aanliggend vel door te trekken.

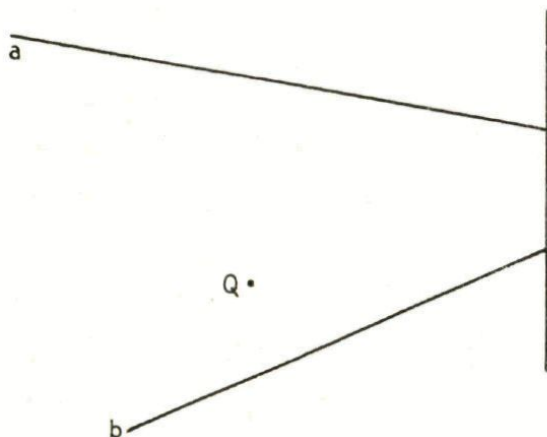


Fig. 15



Fig. 16

- °°2. Iemand vond een klein deeltje van een foto, waarop een stuk e spoorrails stond (zie fig. 16).

Hij wilde dit op een groot vel papier plakken en de hele spoorrails met overige biels erbij tekenen.

Hoe gaat dat?

Hiervoor moet je iets van perspectief weten.

De oplossing van 1 en 2 vind je in het volgende nummer.

DE UITVINDING VAN DE PASSER

volgens de Griekse mythologie

Het is een bekend feit en overigens ook wel begrijpelijk, dat van de meest eenvoudige werktuigen of bewerkingen de uitvinder onbekend is. Wanneer men in het Palais de la Découverte te Parijs de grote muurschilderingen beschouwt, waarop is voorgesteld hoe de primitieve mens het wiel uitvond of een hefboom gebruikte, zal wel niemand naar de naam van de afgebeelde vragen. Uitvindingen als deze verliezen zich in de nacht der tijden.

Maar wat de geschiedkundige wetenschap niet kan zeggen, beweert vaak de overlevering wel te weten. Zo leert de Griekse mythologie, dat PROMETHEUS de mensen het vuur bracht, dat hij van de goden had gestolen, een diefstal, waarvoor hij zwaar heeft moeten boeten. Het Oude Testament vermeldt (Gen. 4 : 20-22) de zonen van LAMECH als uitvinders; de meest bekende van hen was TUBAL-KAÏN, die het eerst koper en ijzer bewerkte en zo de eerste rondtrekkende smid werd.

Ten aanzien van de passer valt vooreerst op te merken, dat deze eigenlijk niet het meest eenvoudige middel is voor het beschrijven van een cirkel; een staaf met stiften aan de uiteinden of een gespannen koord, waarvan het ene uiteinde wordt vastgemaakt, doet dezelfde dienst. Inderdaad wordt voor grote cirkels wel een staafpasser gebruikt, terwijl een tuinman, die een cirkelvormig perk moet aanleggen, wel van het koord zal gebruik maken.

De Griekse mythologie nu noemt als uitvinder van de passer TALUS. Deze TALUS was een neef van DAEDALUS, de bouwmeester van het labyrint. TALUS was al zeer jong bij zijn oom in de leer gekomen en bleek hem reeds spoedig in vernuft te overtreffen. Drie belangrijke uitvindingen deed hij: de zaag, de passer en de pottenbakkersschijf. Daardoor wekte hij de afgunst op van DAEDALUS, die besloot zich van hem te ontdoen. Van het hoogste punt van de Acropolis wierp hij TALUS naar beneden; aan de zuidelijke helling van de berg werd de jonge man begraven.

OVIDIUS (43 v. Chr.-18 n. Chr.) echter schrijft in zijn *Metamorphoses* dat PALLAS ATHENE, door het lot van TALUS bewogen, de jongeling, terwijl hij viel, zou hebben veranderd in een patrijs, wat het opnemen verklaart van het verhaal in de *Metamorphoses*, het boek dat immers de gedaanteverwisselingen uit de mythologie tot onderwerp heeft.

Hier volgen de verzen uit de *Metamorphoses* (boek VIII, vs. 247-249), die op ons onderwerp betrekking hebben:

„Primus et ex uno duo ferrea brachia nodo vinxit, ut aequali spatio distantibus illis altera pars statet, pars altera duceret orbem” of, in vertaling:

„Hij was de eerste, die twee ijzeren armen door een gewricht verbond, opdat, wanneer die op gelijke afstand van elkaar stonden, het ene deel vast zou staan en het andere een kring zou beschrijven.”

Niemand kan eraan twijfelen welk instrument hier wordt beschreven en hoe het moet worden gebruikt!

Ingezonden door Dr. J.D.E. Schrek, Sweelinckstraat 1, Utrecht.



Antwoorden bij: KAN DAT?

(Zie no. 1 blz. 10).

De drie vragen zijn variaties op hetzelfde thema.

Vraag 3 is het meest doorzichtig.

Een jaar heeft 365 dagen. Er kunnen dus maar 365 leerlingen op verschillende dagen jarig zijn.

Er moeten dus minstens 35 leerlingen jarig zijn op een dag die al „bezet” is.

D.w.z. minstens 70 leerlingen kunnen zeggen, dat zij op dezelfde dag als een andere leerling van de school jarig zijn.

Vraag 2.

Blz. 35 van een boek kan, wat de eerste letter betreft, op 26 verschillende manieren beginnen. Wat de eerste 26 boeken betreft zijn er nu twee mogelijkheden:

1. De eerste letter van blz. 35 is in al deze boeken verschillend. Maar dan *moet* blz. 35 van het 27e boek beginnen met een letter, waarmee blz. 35 van een der eerste boeken begon. Dan luidt het antwoord op vraag 2 dus „ja”.
2. De eerste letter van blz. 35 is in al deze boeken niet verschillend, maar dan luidt het antwoord op vraag 2 ook „ja”.

Vraag 1.

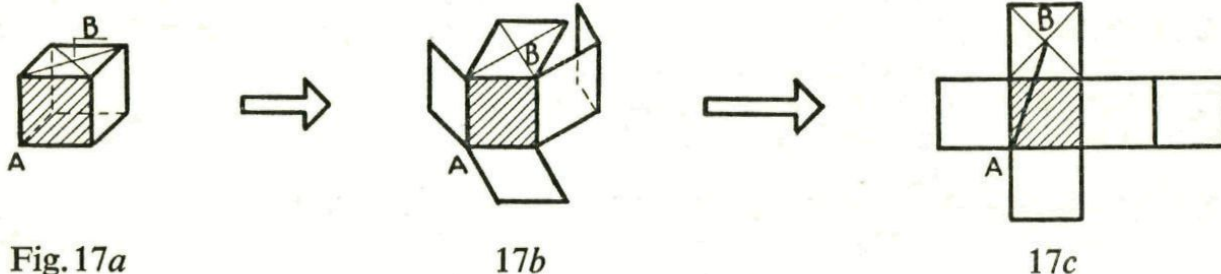
Het maximum aantal hoofdharen van de mens is ongeveer 175.000. Laten we voor de zekerheid aannemen, dat geen enkel mens meer dan 200.000 hoofdharen heeft. Dan zijn er ook maar 200.000 mensen die een verschillend aantal haren hebben. In elke stad met meer dan 200.000 inwoners lopen dus al mensen rond die hetzelfde aantal hoofdharen hebben.

Stel deze vragen eens aan anderen. Nadat alles uitgeknobbeld is, zou je tenslotte kunnen vragen: Is het noodzakelijk, dat in één gezin mensen zijn met hetzelfde aantal vingers? Als iemand helemaal in het spelletje opgegaan is, zal hij antwoorden: ja, als er meer dan 10 mensen in dat gezin zijn wel!

Oplossing: RUIMTE-PUZZELS

(Zie no. 1 blz. 16).

Het is mogelijk om alle vlakken in één plat vlak te brengen.



De figuur die dan ontstaat noemen we de „uitslag” van de kubus (fig. 17c). Het is nu duidelijk, dat de kortste weg van de tor de rechte lijn AB is. Dit is het antwoord op de tweede vraag.

De uitslag kan ons ook helpen bij de eerste vraag.

We kunnen in de uitslag een gebroken lijn tekenen (stippellijn) van P naar links gaande die bij Q uitkomt. Alle vierkanten zijn nu precies éénmaal bezocht.

Met behulp van de uitslag van een figuur kunnen we dikwijls een ingewikkelde ruimtepuzzel overzichtelijk behandelen.

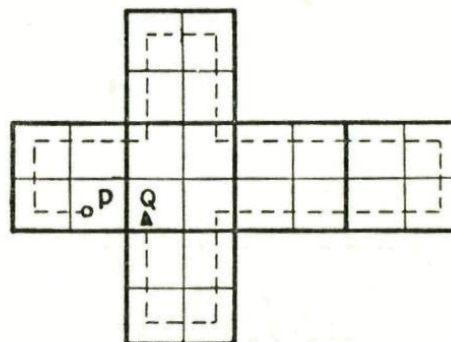


Fig. 18

Oplossing: **BOL** en **CIRKEL**

(Zie no. 1 blz. 6).

De oppervlakte van de halve bol is $\frac{1}{2} \cdot 4r^2 = 2\pi r^2$.

De oppervlakte van een cirkel met dezelfde straal is πr^2 .

De lengte van het koord dat op de bol zit is dus precies $2 \times$ zo groot.

WOORDENBOEK

Woorden, die reeds in het woordenboek van het vorige nummer voorkwamen, zijn niet opnieuw opgenomen.

1. Cardioïde hartvormige lijn (cordia = hart).
2. Coördinaten afkomstig van een uit het Grieks vertaalde Latijnse uitdrukking, die ongeveer betekent: in een bepaalde richting trekken. Door Leibniz (1646–1716) in de wiskunde ingevoerd. Door middel van coördinaten kan men de plaats van een punt in een plat vlak of in de ruimte bepalen.

- | | |
|--------------------|---|
| 3. Diagonaal | afkomstig van de Griekse woorden „dia” = doorheen en „gonia” = hoek. |
| 4. Kadaster | grondbeschrijving; van staatswege bijgehouden openbaar register van onroerende goederen. |
| 5. Limaçon | het Franse woord „limaçon” betekent slak. De naam is waarschijnlijk door Etienne Pascal (1588–1651), de vader van de beroemde Blaise Pascal aan door hem geconstrueerde krommen gegeven. |
| 6. Mythologie | Verhalen, waarin een volk vorm geeft aan zijn opvattingen over gebeurtenissen in de oertijd. |
| 7. Metamorfose | Gedaanteverwisseling. |
| 8. Parallel | afkomstig van het Griekse woord „parallelos” = langs elkaar gelegen. |
| 9. Poolcoördinaten | wanneer in een plat vlak gegeven zijn een lijn l met daarop een punt O (de pool), dan kan men de ligging van elk willekeurig punt A in het vlak bepalen door te geven:
1. de lengte van OA .
2. de hoek α , die OA met l maakt.
Deze beide getallen heten dan de poolcoördinaten van het punt A . |
| 10. q.e.d. | afkorting van het Latijnse „quod erat demonstrandum” = hetgeen te bewijzen was. |



ZAKELIJKE MEDEDELINGEN

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie:

Bruno Ernst, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

Aan dit adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen. G. Krooshof, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

Aan dit adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden. Vermeld duidelijk naam, adres, school en leerjaar. Inzenden vóór 1 januari 1962.

Abonnees in Suriname, op Curaçao en Nw.-Guinea kunnen inzenden tot 15 februari 1962.

Abonnementen:

Pythagoras zal 4 maal per schooljaar verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,— per jaargang. Voor anderen f 3,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J. B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B.Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.