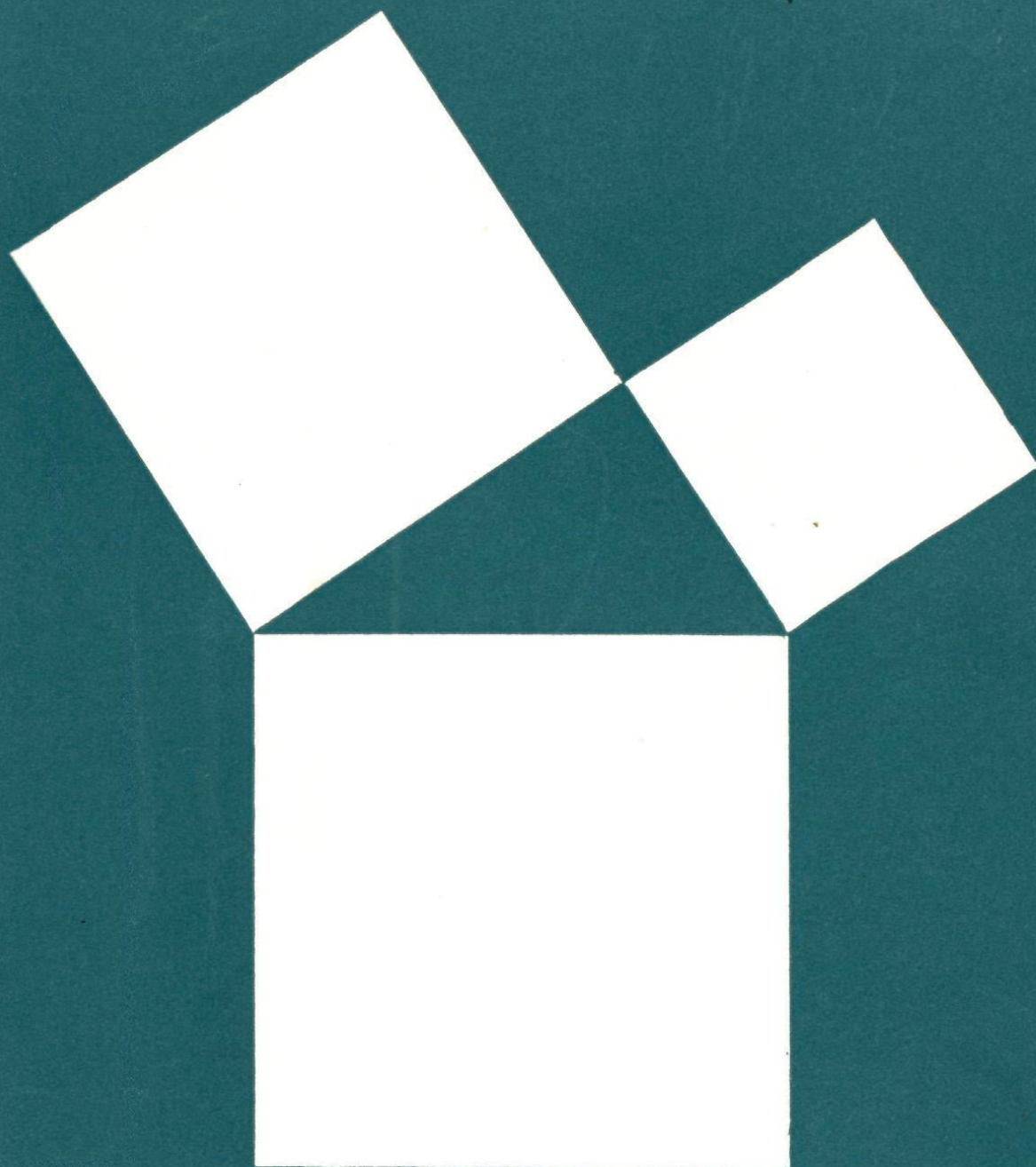
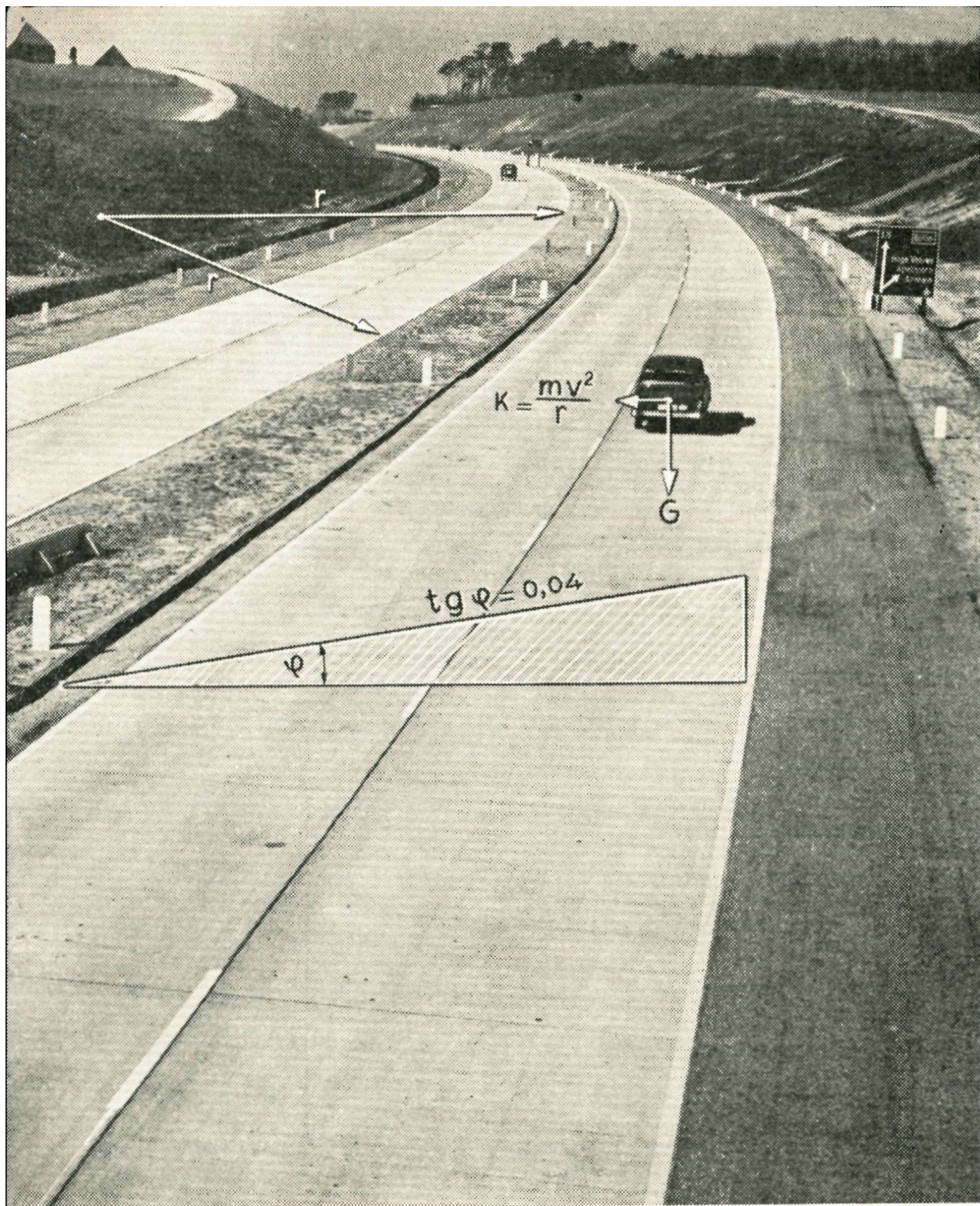


PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

3



Wiskunde in de bocht (blz. 9)

Het uitgebreide veld der wiskundige wetenschap omvat aan de ene kant de abstracte theorieën, aan de andere haar talrijke toepassingen. Bij deze laatste heeft de mensheid het hoogste belang. Onophoudelijk worden er nieuwe vraagpunten gesteld, geput uit het dagelijks leven.

Arago (19e eeuw)

pythagoras

WISKUNDETIJDSCHRIFT
VOOR JONGEREN

jaargang 1 no 3

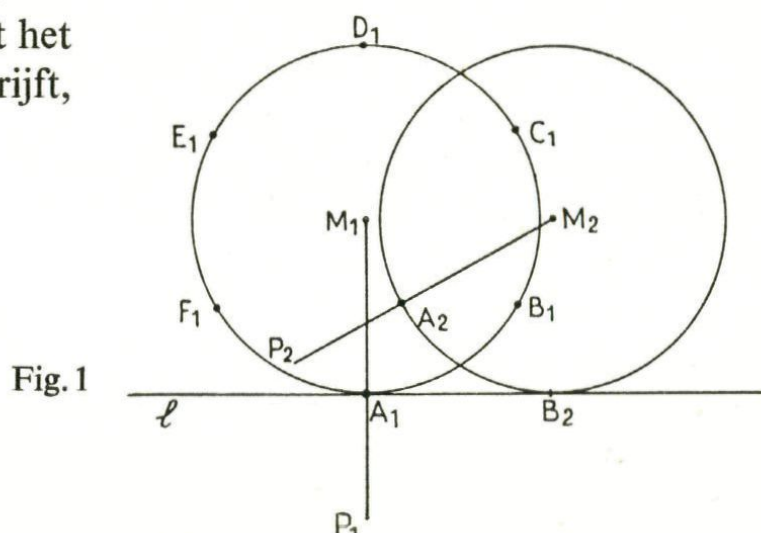
°ENKELE INTERESSANTE KROMMEN - III

In deze reeks artikelen worden enkele interessante krommen besproken, die meestal in de schoolmeetkunde niet aan de orde komen. In elk artikel wordt de constructiewijze van zo'n kromme beschreven zo, dat deze gemakkelijk door ieder getekend kan worden. In het volgend nummer vindt men de afbeelding van de kromme en enkele bijzonderheden.

De cycloïde.

Als een wiel over een weg rolt, ondergaat elk punt van de omtrek daarvan twee bewegingen, nl. een voortgaande, evenals elk punt van het voertuig en een draaiende.

Het gevolg daarvan is, dat het een fraai gebogen lijn beschrijft, die *cycloïde* heet.



° „Constructie” met een gulden.

Leg een gulden op een stuk papier tegen een liniaal en vat één punt van de rand in het oog, bijv. het punt, dat aan de muntzijde bij het topje van de kroon ligt. Leg dat punt tegen de liniaal aan. Laat de gulden nu langs de liniaal rollen.

Dat is niet zo erg gemakkelijk, hij mag beslist niet glijden. Teken op het papier daarbij telkens de plaats aan van het gemarkeerde punt. Het is dan niet moeilijk de cycloïde te tekenen.

°° „Constructie” met passer en liniaal.

Teken een rechte lijn, die in het punt A een cirkel raakt met een straal van 3 cm (fig. 1). Verdeel de cirkel in zes gelijke delen door de punten A, B, C, D, E en F. Als de cirkel langs de rechte rolt komen deze punten om beurten op de rechte te liggen op afstanden, die het zesde deel zijn van de cirkelomtrek. De omtrek van een cirkel is $2\pi r$, dus in dit geval 6π . In fig. 1 is de afstand van de punten A_1 en B_2 dus π cm, dat is ongeveer 3,14 cm. Zet dus langs de rechte stukken uit van 3,14 cm te beginnen bij A_1 (afronden op 1 decimaal : $2 \cdot 3,14 \approx 6,3$). Teken bij elk der punten de cirkel en construeer daarop de ligging van het punt A. Een nauwkeuriger tekening wordt natuurlijk verkregen door een verdeling in twaalfen, die niet moeilijk te construeren is.

WE BLADEREN DIT NUMMER EVEN DOOR

De vorige maal berichtten we, dat het grote aantal abonnees ons een groter aantal bladzijden mogelijk maakte.

Nu heeft het tijdschrift ook een omslag gekregen. Bovendien kunnen we mededelen, dat er dit jaar een extra nummer (als vijfde) zal verschijnen, dat geheel gewijd zal zijn aan de rekenliniaal.

In dit nummer vragen we wel de bijzondere aandacht voor een bericht van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde over een dit jaar te houden *wiskundige olympiade*. Verder voor onze *voorjaarsprijsvraag*, waaraan naar we hopen vele lezers zullen meewerken.

Enkele artikelen hebben al een vaste plaats in Pythagoras gekregen: De interessante krommen, de logica, de denkertjes (allemaal ingezonden), de platlanders. Bij de voorplaat op de omslag hoort het artikel over „Wiskunde in de bocht”. Tenslotte vindt men het vervolg van het artikel in nummer 1 over de natuurlijke logaritme. En dan is er natuurlijk nog wat „klein werk”.

°° *Een bijzonder geval.*

Een bijzondere kromme, die vroeger wel verlengde cycloïde werd genoemd en tegenwoordig meestal trochoïde, wordt gevonden door de baan te volgen van een punt P, dat op het verlengde van de straal MA ligt (zie fig.1). De kromme, die dit punt P doorloopt treft men in de praktijk aan bij een punt op de omtrek van een wiel van een spoorwagon. Je krijgt dan de enigszins paradoxale situatie te zien, dat bij een vooruitrijdende trein sommige punten zich in achterwaartse richting bewegen. Je ziet dat goed in de geconstrueerde figuur.

° *De limaçon of slaklijn van Pascal.*

In nummer 2 van ons tijdschrift werd de constructiemethode van de limaçon vermeld. (Er was helaas een drukfout ingeslopen. Er moest staan: ..., als l om A draait.)

In de figuren 2, 3 en 4 zien we de gevallen $a < 2r$, $a = 2r$, $a > 2r$. In het geval van figuur 3 heet de kromme ook cardioïde of hartlijn.

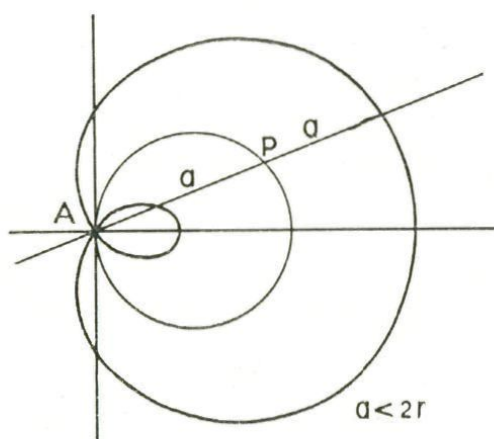


Fig. 2

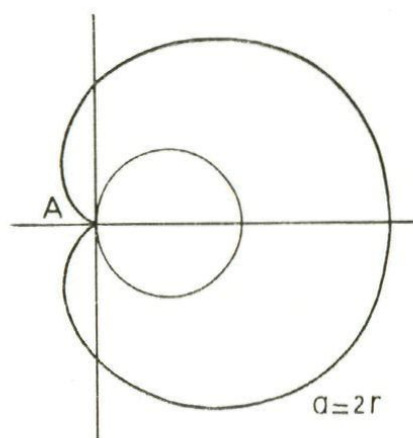


Fig. 3

°° *De cardioïde.*

Deze kromme is interessant, omdat we die in het huishouden herhaaldelijk kunnen waarnemen. We bekijken dus de cardioïde nog eens op een andere manier dan als limaçon.

Wanneer een cirkel met straal a rolt langs een andere cirkel, eveneens met straal a , dan doorloopt een punt P van de rollende cirkel een cardioïde.

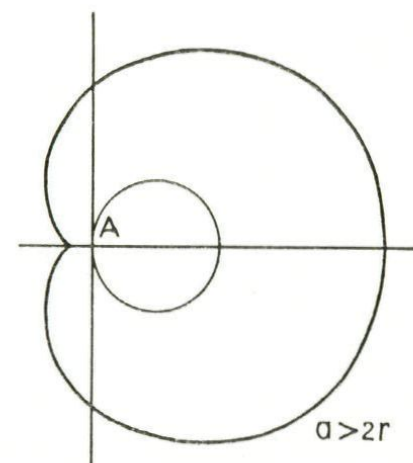


Fig. 4

Zie fig. 5. Cirkel (C_1, a) is daarin de „vaste” cirkel. Cirkel (C_2, a) de rollende.

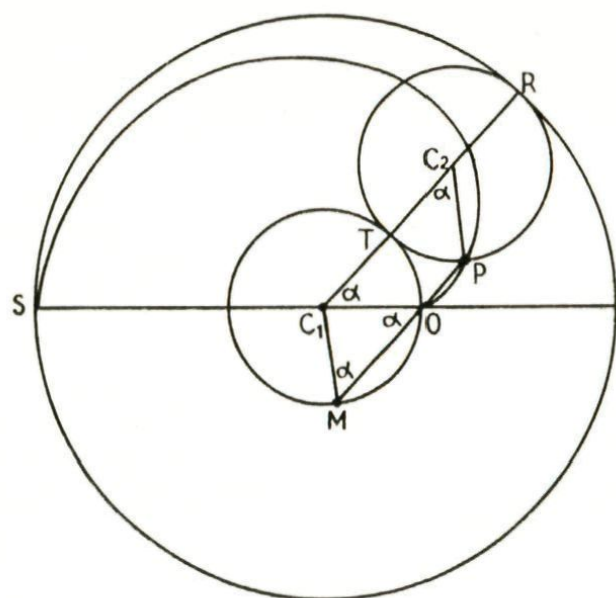


Fig. 5

In de beginstand valt P met O samen. Als cirkel C_2 in de in fig. 5 getekende stand gekomen is, is boog $TO =$ boog TP . Dus $\angle C_1 = \angle C_2 = \alpha$. Omdat $C_1O = C_2P = a$, is vierhoek C_1OPC_2 een gelijkbenig trapezium.

Gemakkelijk is nu in te zien, dat $C_1C_2 = C_1O \cdot \cos \alpha + OP + C_2P \cdot \cos \alpha$. Daaruit volgt: $OP = 2a(1 - \cos \alpha)$.

Dit is de vergelijking in poolcoördinaten van de cardioïde (zie het woordenboek in nummer 2). De vergelijking in rechthoekige coördinaten volgt hieruit door te bedenken, dat als O de oorsprong is: $OP^2 = x^2 + y^2$ en $\cos \alpha =$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Voor de knutselaars.

Verlengt men in fig. 5 PO tot deze de cirkel snijdt in M, dan is $C_1M = C_1O = C_2P$. Daaruit volgt, dat vierhoek C_1MPC_2 een parallellogram is, dus $MP = 2a$. We kunnen daarom het instrument vervaardigen, dat in fig. 6 is afgebeeld, om een cardioïde te construeren: MP moet daarin de vaste lengte $2a$ hebben en kunnen schuiven door een busje, dat om een as in O kan draaien. Wanneer M de cirkel (C_1, a) doorloopt, beschrijft het potloodpuntje in P de cardioïde.

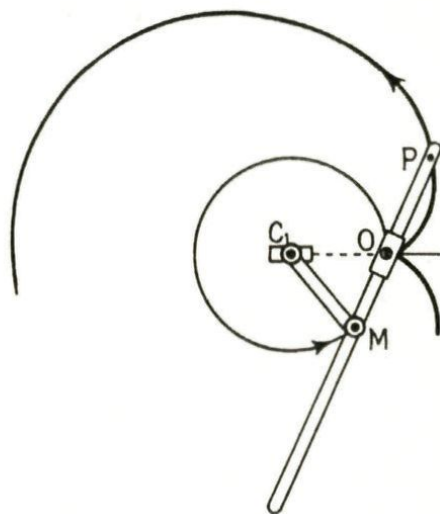


Fig. 6

° *De cardioïde als brandlijn.*

In de huishouding kan men een cardioïde waarnemen in een cilindervormige beker of kom, als deze op een geschikte plaats in de buurt van een lamp staat. Ook een gladde ring in de buurt van een lamp op een stuk papier gelegd, tovert een mooie cardioïde op dat papier. Een scherpe cardioïde ziet men als men een klein lampje (bijv. van een zaklantaarn) vlak bij de rand van de ring houdt. Dit geval is getekend in fig. 6. Bij S is het lampje. De lichtstralen daarvan weerkaatsen tegen de wand van de ring en de teruggekaatste stralen omhullen dan de cardioïde. De lichtstralen zijn in de figuur niet getekend. Alleen SP is zo'n

straal. Deze weerkaatst tegen de wand, alsof de raaklijn in P de spiegel was. De teruggekaatste straal is dan PQ. PS en PQ liggen symmetrisch ten opzichte van PC_1 . Daarom is $PQ = SP$. De teruggekaatste stralen kunnen dus geconstrueerd worden, zonder de invallende stralen te tekenen. Kiest men nl. het punt P ergens op de cirkel, dan kan men de passer in P zetten, PS in de passer nemen, omcirkelen en zo Q vinden. Dat de teruggekaatste stralen inderdaad de cardioïde omhullen blijkt gemakkelijk, als je in fig. 7 SR en PR trekt en bewijst dat deze symmetrisch liggen ten opzichte van C_1R . Als de cardioïde ontstaat op de hierboven beschreven manier als kromme, die omhuld wordt door lichtstralen, dan wordt deze wel caustica of brandlijn genoemd.

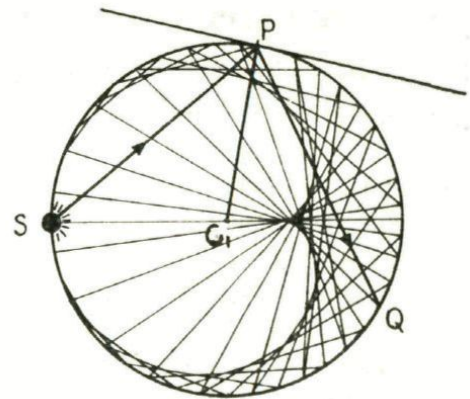


Fig. 7

Dat is nogal LOGISCH! - 3

Alle Strobogonen hebben Seretenen
Mesoon is een Strobogoon

Mesoon heeft Seretenen

EN, OF.

In nummer 2 zagen we, dat de juistheid van een conclusie niet afhangt van de begrippen, waarover de sluitrede handelt, maar van de vorm van de sluitrede zelf. De studie van deze juiste vormen heet logica.

In de logica zijn er een aantal woorden, waarvan men de betekenis terdege moet kennen om de juistheid van de conclusies te kunnen beoordelen. In het vorige nummer waren het de woorden „elke” en „alle”, die de hoofdrol speelden. In dit nummer nemen we twee andere termen onder de loupe, nl. „en” en „of”.

Het juiste gebruik van deze termen wordt pas duidelijk, als we een uitstapje hebben gemaakt naar een belangrijk onderdeel van de logica, nl. de verzamelingenleer. Als we dat doen, lijkt het wel, of we op een heel ander terrein bezig zijn, dan dat van het maken van de juiste conclusies, maar daar keren we vanzelf terug.

Verzamelingen.

In het dagelijks leven spreken we over verzamelingen van postzegels, lucifersmerken enz. In de logica (en in de wiskunde) spreken we ook over de verzameling van alle getallen, die groter zijn dan 4, de verza-

ling van alle punten, die gelijke afstanden hebben tot de benen van een hoek, de verzameling van alle rechten, die evenwijdig zijn met een gegeven rechte, enz. Andere voorbeelden van verzamelingen zijn: De verzameling van alle leerlingen, die in klasse 3B zitten, de verzameling van alle leerlingen, die lid zijn van de toneelclub.

Niet altijd hoeft een verzameling uit veel elementen te bestaan. Zo bestaat de verzameling der getallen x , waarvoor $x^2 = 4$, slechts uit twee elementen, nl. $x = -2$ en $x = 2$. Het kan zelfs gebeuren, dat een verzameling geen enkel element bevat, bijv. de verzameling der reële getallen x , waarvoor $x^2 = -4$. Deze verzameling heet dan *leeg*.

Het geval kan zich voordoen, dat een zeker element gelijktijdig tot twee verschillende verzamelingen behoort. Zo kan een leerling behoren tot

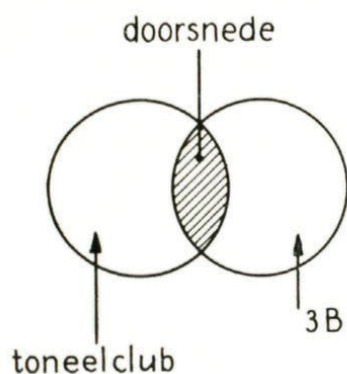


Fig. 8

de verzameling „leden van de toneelclub” en de verzameling „leerlingen van 3B”. Dit zal misschien wel met enkele leerlingen het geval zijn. We noemen de verzameling der leerlingen, die zowel tot de ene als tot de tweede verzameling behoren, de *doorsnede* van de beide verzamelingen (zie fig. 8). Er wordt in de logica een symbool gebruikt om de doorsnede van twee verzamelingen aan te duiden, nl. het symbool $\cap$.

$V_3 = V_1 \cap V_2$ wil dus zeggen: de elementen van verzameling V_3 behoren tot verzameling V_1 en tot verzameling V_2 . Het woord „en” heeft dus te maken met de doorsnede van twee verzamelingen.

Enkele voorbeelden:

1. De doorsnede van de verzameling der even getallen en de verzameling der drievouden is de verzameling der zesvouden, een getal, dat een even getal en een drievoud is, is een zesvoud.
2. De doorsnede van de verzameling der even getallen en die der ondeelbare getallen (priemgetallen) is het getal 2. Deze doorsnede bestaat dus uit slechts één element.
3. De doorsnede van de verzameling der even getallen en die der machten van 3 is leeg.
4. De doorsnede van de verzameling der ruiten en die der rechthoeken is die der vierkanten.
5. Is V_1 de verzameling der getallen x , waarvoor geldt $x < 2$ en V_2 de verzameling der getallen x , waarvoor geldt $x > -2$, dan is $V_1 \cap V_2$ de verzameling der getallen x , waarvoor geldt $-2 < x < 2$. Of zoals men het in de logica schrijft $x > 2 \wedge x < -2$, waarbij $\wedge$ een teken is voor het woord „en”.

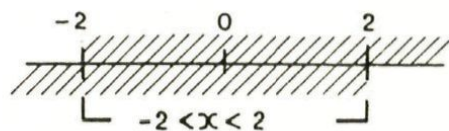


Fig. 9

Wanneer gebruiken we in de logica nu „of”? We gebruiken het in het dagelijks leven zo: We gaan vanmiddag naar de schouwburg of naar

de bioscoop. Hier betekent *of*: als je de ene mogelijkheid kiest, dan sluit je de andere uit. In de logica bekijken we het wat ruimer: Als we zeggen x behoort tot V_1 òf tot V_2 , dan bedoelen we: x is een element van de verzameling, die uit de elementen van V_1 en van V_2 samen bestaat. x is soldaat of leraar betekent dus in de logica: Hij behoort alleen tot de verzameling der soldaten, alleen tot die der leraren, of tot beide.

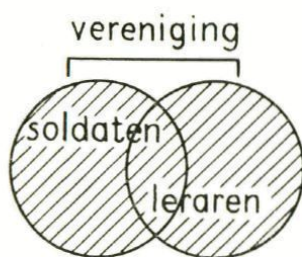


Fig. 10

De verzameling van de elementen, die behoren tot V_1 òf V_2 òf tot beide noemen we de *vereniging* der beide verzamelingen. Symbool: $V_1 \cup V_2$.

Voorbeelden:

1. De vereniging van de verzameling der even getallen en die der oneven getallen is die der gehele getallen.
2. De vereniging van de verzamelingen der cirkels, ellipsen, parabolen, hyperbolen behoort tot de verzameling der kegelsneden.
3. De elementen van de verzameling der getallen x , waarvoor $x^2 > 4$, zijn elementen van de vereniging van de verzameling $x < -2$ en de verzameling $x > 2$. Dit is dus de verzameling der x , waarvoor geldt $x < -2$ òf $x > 2$. Men schrijft er in de logica voor: $x < -2 \vee x > 2$. Hierin is $\vee$ het symbool voor „of”. (Het teken $\vee$ doet denken aan de „v” van „vereniging”).

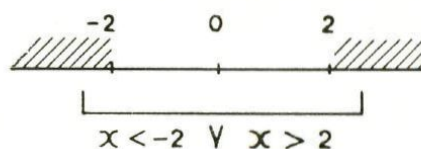


Fig. 11

Een vraag: Is de volgende uitspraak juist? $8 \leq 13$; hierin betekent $\leq$ „is kleiner dan of gelijk aan”.

°°DE SMID EN DE CIRKELOMTREK

Een smid moest een kijkerbuis voor me maken met een middellijn van 7 cm. Ik wilde hem (ten overvloede) uitleggen hoe groot de omtrek werd. „O, maar dat zie ik zo wel,” zei hij, en pakte zijn duimstok. De voorkant had een centimeterverdeling en de achterkant een verdeling in duimen (inches).

Hij zette zijn duim bij 7 cm, keek op de achterkant en zei: „22 cm”. Hij las namelijk af, *hoeveel achtste inches er op die 7 cm, gingen* (22) en dit was de omtrek in centimeters.

(De inchmaat is onderverdeeld in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ en $\frac{1}{16}$ inch.)

Kun je dit verklaren? (1 inch is 2,54 cm.)

Welke waarde voor π wordt hier gebruikt?

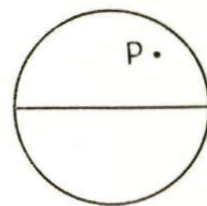
Hoe groot is de fout in procenten?

Hij gebruikte deze methode ook voor zijn karrewielen; de fout is dus in zijn praktijk te verwaarlozen.



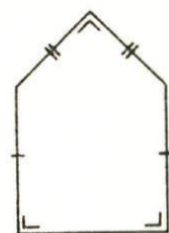
OPLOSSINGEN
 HIERVAN
 KUNNEN WORDEN
 INGEZONDEN

9. Gegeven is een cirkel met een middellijn (maar niet met het middelpunt) en een punt P. Hoe construeer je, alleen met een liniaal, een loodlijn vanuit P op deze middellijn? Mag het punt ook buiten de cirkel liggen?



Ingezonden door Hans Brouwers.
 Derde klas h.b.s. van het Hendric van Veldeke college te Maastricht.

10. Een meubelmaker heeft een stuk mahoniehout van de hier getekende vorm. Hoe kan hij, met zo weinig mogelijk zaagsneden, hiervan een vierkant tafelblad maken? (Er mag niets overblijven!)



Ingezonden door J. M. Pekelharing, Gemeentelijke h.b.s., klas 3B, Delft.

11. De rand van deze figuur bestaat uit drie halve cirkels, terwijl $AB = BC$. Verdeel de figuur in twee delen van gelijke oppervlakte.

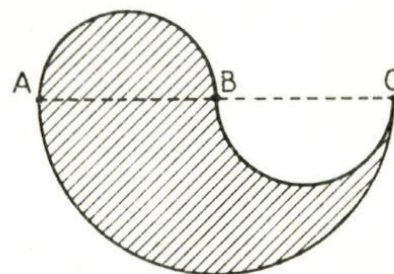


Fig. 12

12. Er liggen 4 even grote voetballen tegen elkaar aan, op de grond. Hun middelpunten vormen het vierkant $M_1M_2M_3M_4$. Boven op deze voetballen ligt er nog een van dezelfde grootte. Hoeveel ligt het hoogste punt van de laatste voetbal boven het grondvlak, als de straal der voetballen gelijk is aan r ? De figuur geeft het bovenaanzicht.

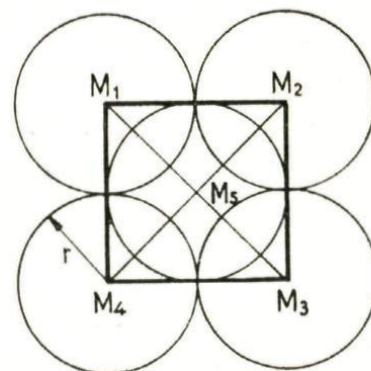


Fig. 13

Ingezonden door W. J. de Ridder, Den Haag, klas 4B, Chr. Lyc. „Zandvliet”.

13. Is er een stel op elkaar volgende natuurlijke getallen a , b , c en d , dat voldoet aan: $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$?

Ingezonden door J. H. Schurink, Scheveningen.

14. Een schipbreukeling, die op een eenzaam eiland beland is, probeert met een zelfgebouwde roeiboot het vasteland te bereiken, dat op 45 km afstand van het eiland ligt. 's Morgens vertrekt hij en het lukt hem een afstand van 12 km af te leggen. 's Nachts slaapt hij in de boot. De volgende ochtend constateert hij met ontsteltenis, dat een sterke stroming hem 9 km in de richting van het eiland teruggedreven heeft. De volgende dagen en nachten gebeurt precies hetzelfde. Eindelijk bereikt hij het vasteland. Wanneer is dat? (Na hoeveel dagen en hoeveel nachten?)

Ingezonden door Roger Bekaert, leerling 5 med. c., St. Lievenscoll, Antwerpen.



°WISKUNDE IN DE BOCHT

Het moderne verkeer stelt hoge eisen aan de wegenbouwers. Zo'n prachtige weg, als de foto laat zien, vraagt veel reken- en denkwerk nog vóór er één schop in de grond gestoken is.

In dit artikel bekijken we enkele facetten van de wiskunde van de autoweg.

Kromming.

Alle cirkels zijn gelijkvormig. Mee eens? Ondanks die gelijkvormigheid zijn kleine cirkels anders gekromd dan grote, hetgeen in fig. 14 goed te zien is. Hoe kleiner de straal, des te groter de kromming. Als maat voor de kromming heeft men gekozen het omgekeerde van de straal. Voor de grote cirkel is dus de krom-

ming $k = \frac{1}{R}$, voor de kleine is $k = \frac{1}{r}$.

Als een auto een bocht neemt, doorloopt het wiel aan de binnenzijde een cirkel met een grotere kromming dan het wiel aan de buitenzijde. De stuurinstallatie moet het dan ook een andere stand geven. Bij treinen en trams is dat niet mogelijk. Weet je hoe ze daar het probleem hebben opgelost? Let eens op de vorm van een wiel!

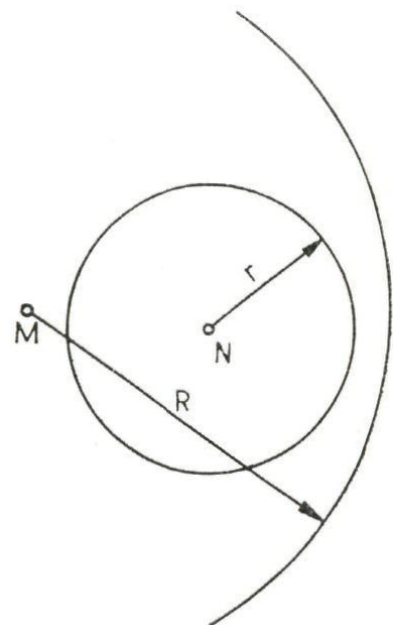
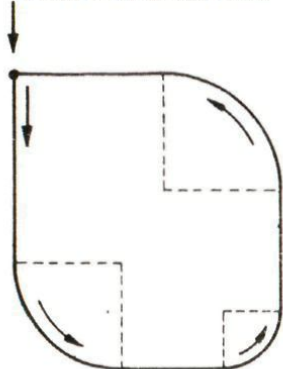


Fig. 14

vertrek en aankomst



Behalve, dat het wiel aan de binnenkant een cirkel met sterkere kromming doorloopt, legt het ook een kleinere afstand af. Als een auto een weg doorloopt, zoals in fig. 15, met een lengte van 500 km, hoeveel legt het rechterwiel dan meer af dan het overeenkomstige linkerwiel, als de afstand tussen deze wielen 1,20 m is? (De gebogen delen zijn kwartcirkels.)

Fig. 15

Een sterke kracht.

Alle dingen, die bewegen, willen rechtuit blijven gaan. Ze moeten gedwongen worden de bocht te nemen. Daar is een kracht voor nodig.

Een formule voor deze kracht is: $K = \frac{m \cdot v^2}{r}$. Hierin is v de snelheid

van het voertuig, r de kromtestraal van de weg en m een getal, dat samenhangt met de zwaarte van het voertuig en dat de massa van het voertuig wordt genoemd. We lezen uit de formule af, dat voor een 2-maal zo grote snelheid een 4-maal zo grote kracht nodig is.

Als de snelheid niet te groot en de weg niet te glad is, wordt deze kracht door de wrijving bij de wielen geleverd. Bij grote snelheden en op een gladde weg zal de wrijving geen toereikende krachtbron zijn en zal de wagen de bocht niet halen. maar naar buiten worden geslingerd. Maar dank zij het vernuft van de wegebouwer kan de automobilist van een andere kracht profiteren, de zwaartekracht. *Hoe komt de wegebouwer de automobilist te hulp?*

Op een horizontale weg drukt de zwaartekracht de wagen verticaal tegen het wegdek met een kracht G , het gewicht van de wagen (zie fig. 16). Op een wegdek met een zijdelingse helling kunnen we de kracht

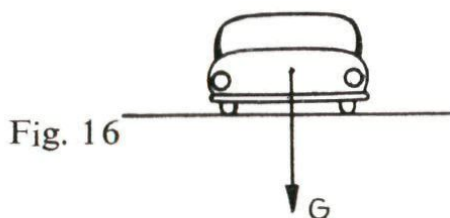


Fig. 16

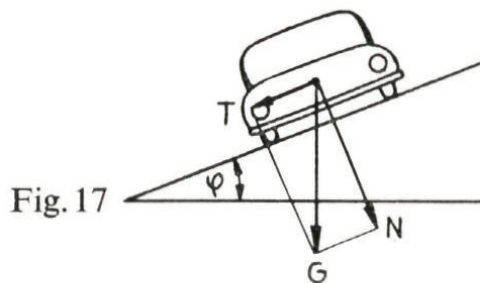


Fig. 17

G ontbinden in een kracht N loodrecht op het wegdek en een kracht T evenwijdig aan het wegdek (zie fig. 17). Het is de bedoeling, dat de component T juist de vereiste kracht oplevert, zodat de wagen rustig door de bocht glijdt.

°°° *Even een beetje rekenwerk.*

We willen benaderen hoe groot de zijdelingse helling van de weg moet zijn, als een wagen met een snelheid van 72 km/uur gemakkelijk door de bocht moet glijden. Omdat het om een benadering gaat brengen we enkele vereenvoudigingen aan. De eerste is, dat we de wrijving buiten beschouwing laten. De tweede, dat we aannemen, dat de hierboven genoemde component T juist de kracht K oplevert, zodat

$$\text{dus } T = \frac{mv^2}{r}.$$

In de figuur zien we $T = G \sin \varphi$. Verder weten we dat $G = mg$, waarin m de massa van de wagen en g de versnelling van de zwaartekracht is. Natuurlijk moeten we erop letten, dat we alles in de juiste eenheden uitdrukken. Die zullen we straks kiezen. Eerst zien we:

$$T = \frac{mv^2}{r} = mg \sin \varphi. \text{ Hieruit volgt } \sin \varphi = \frac{v^2}{gr}.$$

We kiezen nu als eenhedenstelsel het technische stelsel, waarin $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$ v uitgedrukt is in m/sec en r in m.

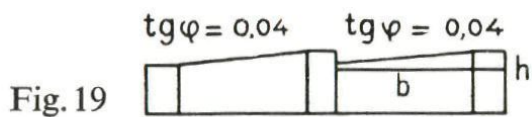
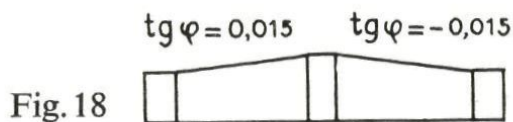
Als $v = 72 \text{ km/uur}$, dan is $v = 20 \text{ m/sec}$. We stellen de kromtestraal van de bocht 1000 m.

Dan is $\sin \varphi = \frac{20^2}{9810} \approx 0,04$. De wegenbouwer gebruikt inplaats van de sinus liever

de tangens van de hellingshoek, maar bij zeer kleine hoeken verschillen deze weinig van elkaar. Dus kunnen we ook zeggen: $\text{tg } \varphi \approx 0,04$.

Als dus in fig. 19 de basis b van elk der rijbanen 10 m is, dan betekent dat, dat de buitenrand van de baan 4 dm hoger moet liggen dan de binnenrand.

Nu ligt, om het regenwater te laten afvloeien, elke rijbaan in de rechte weggedeelten meestal bij de middenberm iets hoger dan aan de zijkan- ten (zie fig. 18). Bij de overgang naar de bocht moet dus de helling van de linkerrijbaan sterker worden. Die van de rechterrijbaan moet echter



veranderen van een hoek met een negatieve tangens in een hoek met positieve tangens. D.w.z. de rijbaan komt er ongeveer uit te zien als een strook papier, waarvan het ene uiteinde gedraaid is ten opzichte van het andere.

Het zal nu wel duidelijk zijn, hoeveel meet- en rekenwerk het leggen van een bocht voor de wegenbouwer betekent.

Op de foto merken we nog een bijzonderheid op bij de middenberm. Doordat de zon nogal laag stond, toen de foto werd gemaakt, zijn de schaduwen lang. Let nu eens op de typische schaduwen bij de middenberm. Je kunt erin zien, dat deze iets hoger ligt dan de rechterrijbaan. In fig. 20 is deze situatie sterk overdreven getekend. Bij een fikse regenbui stroomt het water op de beide rijbanen naar links. Het moet tenslotte terecht komen in de sloot geheel links op de foto. Om het de gelegenheid te geven op de juiste manier via de middenberm op de linkerweghelft te komen, zijn er hier en daar in de rand van de middenberm verlagingen aangebracht. Aan de schaduwen is duidelijk te zien waar deze verlagingen liggen. Het regenwater krijgt nu niet de kans de hele middenberm weg te spoelen, waar vooral op de Veluwe, met zijn zachte bodem, wel kans toe zou zijn.



Oplossing van: 2 legpuzzels in één

1. Construeer de middens D en E van AC en BC.
 2. Verleng AE met $EF = EB$ en construeer het midden G van AF.
 3. Construeer een halve cirkel met G als middelpunt en AG als straal.
 4. Verleng BC, snijpunt met de cirkel is H.
 5. Construeer een cirkel met E als middelpunt en EH als straal; deze cirkel snijdt AB in J.
 6. Maak $JK = BE$.
- Nu kunnen we de lijnen trekken waardoor de gelijkzijdige driehoek verdeeld moet worden:
- 7 Trek EJ en laat vanuit D en K hierop loodlijnen neer.

Op welke wijze de 4 figuren, die ontstaan tot een vierkant gerangschikt kunnen worden laat ons de tweede (verkleinde) figuur zien.

Een interessante bijzonderheid is, dat we van de figuren een ketting kunnen maken zo, dat ze door het sluiten naar de ene kant de gelijkzijdige driehoek en naar de andere kant het vierkant vormen.

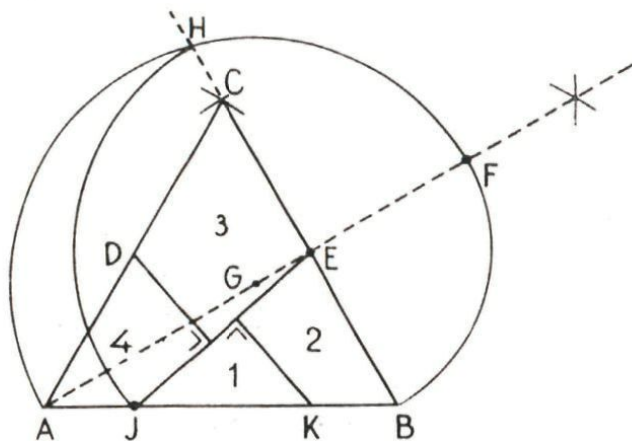


Fig. 20

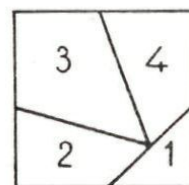


Fig. 21



Fig. 22

Deze constructie is van H.E.Dudeney, de bekendste Engelse samensteller van puzzels. Ze verscheen in zijn eerste boek: *The Canterbury Puzzles* (1907) onder de naam: „The haberdasher's problem”.

Dat de door Ir. Mulder voorgestelde puzzel een exacte oplossing heeft, was reeds door David Hilbert bewezen: iedere veelhoek kan in een andere veelhoek veranderd worden door de eerste veelhoek in een *eindig aantal* figuren te verdelen.

Oplossingen van: Het kon er niet meer op

1. Construeer door Q een loodlijn op a , die b snijdt in B. Ook een loodlijn op b , die a snijdt in A. Trek AB.

Construeer vanuit Q een loodlijn op AB.

Dit is de gevraagde lijn.

Waarom?

2. Trek de railstaven a en b door; snijpunt P.

Trek de biels c en d door; snijpunt Q.

PQ is nu de horizon.

Trek BD, snijpunt met PQ is R.

Trek RC, snijpunt met a is E.

Trek QE, snijpunt met a is F; EF is nu de volgende biels, etc.

Dit berust op het volgende: De perspectivische afbeeldingen van alle evenwijdige lijnen snijden elkaar in hetzelfde punt op de horizon.

Omdat $BD \parallel CE$ snijden de afbeeldingen van deze lijnen elkaar op de horizon (in R).

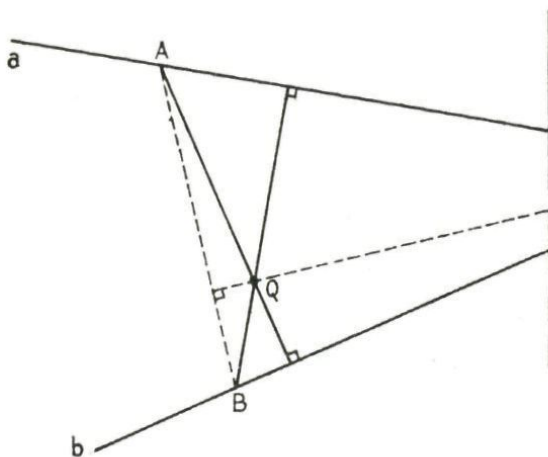


Fig. 23

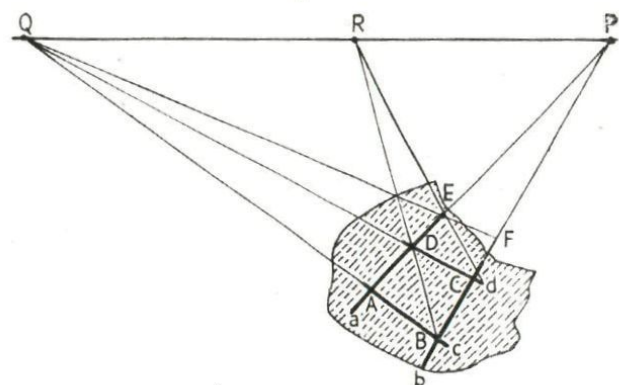


Fig. 24

°PLATLANDERS - III

GEHEIMZINNIGE LICHTEN

Toen we een slapende Platlander van een vlak stuk naar een biljartbaloppervlak overplaatsten, heeft hij daarvan niets gemerkt. Eerst het verrichten van opmetingen, bracht hem tot het besef dat zijn wereld niet meer was als vroeger.

Ondertussen zijn er weer nieuwe bijzonderheden aan het licht gekomen. In het begin was het nogal geheimzinnig, zelfs griezelig.

Onze Platlander stond voor zijn raam en zag een aantal Platlanders zijn tuin binnenkomen. Ze hadden bouw materiaal, zoals lijnen, punten en voorgespannen driehoeken, bij zich en begonnen een huis te bouwen in zijn tuin.

Hij ging naar buiten en riep: „Hé, wat moet dat?” Het hielp niet, niemand luisterde. Hij ging toen naar de mensen toe en . . . deed een heel vreemde ontdekking. Deze mensen waren geen mensen, maar schimmen, waar je doorheen kon lopen.

En het huis was al even etherisch: je zag het, maar kon het niet betasten. Zijn ogen vertelden hem: er wordt een huis in mijn tuin gebouwd, maar alle andere zintuigen ontkenden het bestaan van dat huis.

Na wat tussen de volkomen ongevaarlijke schimmen gelopen te hebben, ging onze Platlander weer naar binnen en bekeek rustig de werkzaamheden. Toen het huis klaar was, werd er een naam op geschilderd: — . . . — . . . — . . . —¹⁾).

Onze Platlander leefde nu voortaan in een heel interessante omgeving: er liepen mensen door zijn huis, belden bij het schimmenhuis aan en werden binnengelaten. Daarna waren ze verder onzichtbaar, en dat bleven ze ook als je naar het huis ging en door de niet-tastbare muren heenwandelde.

Daarachter was niets bijzonders meer te zien.

Maar alles went, ook de aanwezigheid van een andere wereld door je eigen wereld heen.

Ongeveer een half jaar later werd het raadsel zo goed als opgelost. Onze Platlander maakte een verre reis, kwam in een hem totaal onbekende streek en . . . daar stond een huis dat als twee druppels water leek op het fantoom-huis in zijn tuin. De overeenkomst was frappant:

¹⁾ Je begrijpt, dat Platlanders geen gewoon schrift kunnen lezen. Ze lezen en schrijven morse-tekens en zijn daar zeer vaardig in.

zelfs de naam die erop stond was hetzelfde. Onze Platlander ging naar het huis. Dit was een echt huis, geen huis waar je doorheen kon lopen. Hij besloot aan te bellen en om inlichtingen te vragen.

Een dame deed open en riep verrast naar binnen: „Jan, onze tegenvoeter, de landmeter, komt op bezoek,” en tot onze Platlander: „Welkom, hoe lang heeft U erover gedaan?”

Het werd voor onze Platlander een allergezelligste en een leerzame dag. In het begin viel hij van de ene verbazing in de andere:

Hoe kenden deze mensen hem? Hoe kwam het, dat een tweede exemplaar van hun huis in zijn tuin te zien was?

De vriendelijke Platland-fysicus Dr. Nix was ietwat verwonderd over deze vragen: „Maar dat is toch nogal logisch, U bent toch onze tegenvoeter! Kom eens mee.”

Ze gingen naar het raam.

Dr. Nix schoof het gordijn opzij en . . . daar zag onze Platlander zijn eigen huis!

„Wist U niet dat wij het beeld van onze tegenvoeters (dat zijn de mensen die zich op maximale afstand van ons bevinden) altijd vlak bij ons zien, als het uitzicht niet belemmerd wordt? Wij hebben juist deze plaats voor ons huis gekozen om het ruime uitzicht.

Het is zelfs zo, dat wij onszelf van achteren kunnen zien op heel heldere dagen. Het is maar een zwak beeld, maar op een dag als vandaag is het zeker te zien; komt U maar mee naar de tuin.”

In de tuin naast het huis heeft onze Platlander toen zichzelf van achteren gezien. Vlakbij, een heel zwak beeld maar toch duidelijk en scherp.

„Ja, dat komt door het uitermate ruime uitzicht op deze plaats. Over deze verschijnselen, die wij dagelijks zonder verbazing zien, heeft Professor Stein een interessante theorie, die hij vanavond voor een groot publiek voordraagt. Mogen wij U meenemen als onze gast?”



Wiskundige Olympiades

in Nederland



Olympiades.

- We denken aan de grote vierjaarlijkse sportevenementen in wereldsteden als Helsinki (1952), Melbourne (1956) of Rome (1960).
- We denken aan de voorbereidingen voor Tokio (1964), de inspannende en uitgebreide training, waarmee nu al atleten, zwemmers, bokkers bezig zijn, omdat ze zich voorgenomen hebben een hoge plaats te bereiken en daarmee een zeer eervolle positie in de sportwereld.

En nu dus: Wiskundige Olympiades in Nederland.

Dit jaar voor 't eerst en, naar we hopen, elk jaar opnieuw. Het is niet een nieuwe gedachte, die de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde hiermee tot uitvoering brengt. Al sinds omstreeks het jaar 1900 werden deze competities in Hongarije gehouden. Later ook in andere Oost-Europese landen en in de Verenigde Staten. In Polen namen in 1956 ruim 1600 scholieren deel. We zijn benieuwd hoeveel het er in 1962 in Nederland zullen zijn.

Wie mogen er deelnemen, hoe is de organisatie, worden er prijzen uitgelooft?

Deelnemers kunnen zijn de leerlingen van de één na hoogste klassen van de scholen voor v.h.m.o. Hoewel ook leerlingen van andere afdelingen kunnen inschrijven, heeft de commissie in het bijzonder gedacht aan leerlingen van de B- en β -afdelingen.

De wedstrijd wordt gespeeld in twee ronden. De eerste ronde zal plaats vinden op de scholen op 2 mei 1962. Aan de rectoren, directeuren en docenten zal hiervoor medewerking gevraagd worden. De winnaars van de eerste ronde komen op 24 oktober in Utrecht samen voor de beslissende wedstrijd. Ze zullen daarbij de gasten zijn van de Nederlandse Onderwijscommissie voor wiskunde, die ook hun reiskosten zal vergoeden.

Er zullen voor de winnaars van de tweede ronde prijzen beschikbaar worden gesteld. Maar om deze prijzen gaat het niet in de eerste plaats. Ook bij de Olympische Spelen gaat het niet om de „gouden plak” alleen, maar om de eer, die men zich verwerft. Zelfs al het feit, uitge-

nodig te zijn voor de tweede ronde, is zo eervol, dat dit een aanbeveling kan zijn bijv. bij latere sollicitaties naar betrekkingen of studiebeurzen.

Hoe wordt de strijd gestreden?

Het is begrijpelijk, dat er wiskundige problemen opgelost moeten worden. Ze zullen ten dele bestaan uit denkvraagstukken, die niet uitsluitend tot de schoolwiskunde behoren. Er zal meer een beroep gedaan worden op het gezonde verstand, dan op de beheersing van wiskundige technieken. Het schriftelijk oplossen van de opgaven zal gebeuren in omstandigheden, die doen denken aan het maken van proefwerk- of eindexamenopgaven, maar . . . er dreigen geen onvoldoendes, er behoeven geen vrijstellingen veroverd te worden. In alle rust en met inzet van alle krachten kan ieder de poging wagen om een eervolle plaats te verwerven in de wereld van de wiskundig geïnteresseerde jongeren.

We vermoeden, dat verscheiden Pythagoraslezers zullen behoren tot de deelnemers.

Wie stellen de opgaven samen?

Er is een commissie ingesteld, die de zorg heeft voor het samenstellen van de opgaven, het beoordelen van het werk, het toekennen van de prijzen, enz. In deze commissie hebben zitting:

PROF. DR. O. BOTTEMA, hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Delft;
PROF. DR. N. G. DE BRUIJN, hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Eindhoven;

DR. J. T. GROENMAN, directeur van de Rijkshogereburgerschool te Groningen;

DR. C. P. S. VAN OOSTEN, wiskundeleraar aan het Katholiek Gelders Lyceum en docent aan de Gelderse Leergangen voor de opleiding voor middelbare akten te Arnhem.

Plaatsvervangend lid van de commissie is PROF. DR. J. H. VAN LINT, hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Eindhoven.

Hoe kan men zich aanmelden?

Heel eenvoudig. Bij zijn wiskundeleraar. Deze krijgt alle gegevens of kan daarnaar informeren bij de secretaris van de Onderwijscommissie voor Wiskunde: DR. J. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem.

Tenslotte.

Als je het erop waagt: Veel succes gewenst!

SPAAR ONS NIET

Van enkele zijden ontvingen we kritiek op onze oplossing van Kan dat? op blz. 18 van nummer 2. Dat verheugde ons. We vermelden deze juiste kritiek elders in dit nummer. *We willen echter niet nalaten onze lezers op te roepen ons niet te sparen.* Zend ons alle opmerkingen en kritiek, die bij het lezen rijzen. In de trant van: Dat artikel was te flauw, dat te pittig, dat was interessant en geef ons daar nog eens meer van. Of: hier maakte u een fout. Kortom: Het is jullie blad en niet het onze. Daarom willen we en moeten we contact met jullie hebben. Spaar ons niet. Maar geef ons ook zo nu en dan eens een pluimpje. Dan weten we dat we op de juiste weg zijn.

SPAAR ONS

Zoals men in dit nummer ziet, bereiken ons van alle kanten nieuwe puzzels. Willen de inzenders er echter rekening mee houden, dat de tijd van de redacteurs zeer beperkt is en dat ze niet zelf al deze puzzels eerst kunnen gaan oplossen? *Dus geldt in dit geval: spaar ons!* D.w.z. bij puzzels (van ganser harte welkom) ook steeds de eigen oplossing insturen.



Onze *puzzels*

Een prijswinnaar, oplossingen, opmerkingen

De kwaliteit van de oplossingen van de puzzels van nummer 1 was in het algemeen goed. Hier of daar kwam wel eens een slordig gevalletje voor (een velletje papier kennelijk uit een schrift gescheurd), maar de verzorging was meestal prima. Ook de oplossingen waren wel goed, hoewel echt origineel werk nog schaars was. Een voorbeeld van zulk origineel werk gaf P. van Oostrum, Rijkstraatsweg 31, Geldermalsen, bij de oplossing van „Denkertjes nummer 1”, : Iemand heeft een vierkant houten blad, dat 36 cm lang is. Hij moet hieruit rechthoeken zagen van 5 bij 8 cm. Hoeveel rechthoeken kan hij verkrijgen en op hoeveel manieren?

De meeste inzenders komen op het juiste antwoord, nl. 32. Er zijn er echter maar enkele, die inzien, dat dit op meer dan 1 manier kan en alleen Van Oostrum geeft blijk hier systematisch gezocht te hebben. Hij heeft daarbij ook nog niet alle mogelijkheden gezien, maar toch willen we hem voor zijn echt wiskundige werkwijze graag de prijs toekennen, te meer omdat hij ook de andere puzzels juist had opgelost. Aan zijn oplossing ontleen we het volgende:

We kunnen het gegeven vierkant verdelen in vier vierkanten met zijden van 18 cm. We kunnen uit zo'n vierkantje 8 rechthoeken halen en wel zoals in fig.25. Het kan nog in twee standen nl. A en B.

We gaan nu uitvoerig alle mogelijke combinaties van A's en B's bekijken en komen dan tenslotte tot de volgende zes mogelijkheden:

AA	AB	BA	AA	AB	BA
AA	AA	AA	BB	BA	AB

We rekenen daarbij gelijk de gevallen, die door spiegeling uit elkaar kunnen ontstaan, bijv. $\begin{matrix} AA & BB \\ AA & BB \end{matrix}$

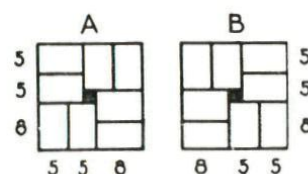


Fig. 25

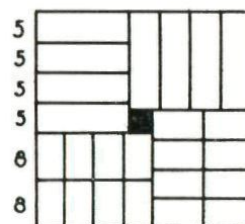


Fig. 26

Men moet hem nu maar eens controleren. In ieder geval blijkt hieruit, dat al degenen, die antwoordden, dat er maar één mogelijkheid is, ongelijk hadden.

De oplossing, die deze inzenders als enige mogelijkheid noemden, noemt Van Oostrum juist niet. Deze is in fig.26 getekend.

Denkertje nummer 3 heeft enkele enthousiaste puzzelaars tot grote aantallen mogelijkheden gebracht. De kroon spande wel D.v.d.Steen uit Arnhem met 260 mogelijkheden. Op hem volgde J.H.J. Tijhaar uit Schalkhaar met 42 mogelijkheden.

Onze eigen oplossing van „Kan Dat? nummer 3” heeft terecht kritiek ontlokt aan Godelief Meddens te Venray en de Heren P.G.M. van de Ven te Breda en W.J.de Ridder te Den Haag. Zij zeggen: „Inderdaad moeten er 35 leerlingen jarig zijn op een reeds bezette dag. Maar het is theoretisch mogelijk, dat deze alle op dezelfde dag jarig zijn, zodat het antwoord dan moet luiden, dat 36 leerlingen kunnen zeggen, dat ze jarig zijn op dezelfde dag als een andere leerling.” En ze hebben gelijk.

Overigens waren er wel grappige antwoorden op de vraag Kan dat? Zoals deze: „Het lijkt me wel zeer onwaarschijnlijk, dat er op aarde twee mensen met het zelfde aantal haren op hun hoofd zouden rondlopen. Als er misschien eens twee mensen met hetzelfde aantal zouden zijn, dan zou dit al spoedig weer veranderen, doordat de een bij het kammen van zijn haar zeven haren uit zijn hoofd zou trekken en de ander acht!” Ja, de situatie verandert elk moment. En toch... elk moment *moeten* er weer twee mensen zijn met een gelijk aantal haren op hun hoofd.

De oplossing van „Denkertje nummer 7”.

We hebben houvast aan de mededeling van de (eerlijke) vader: Drie van de jongens spreken altijd de waarheid, maar de andere twee kun je niet altijd vertrouwen.

We maken nu naast elkaar twee tabellen. In de eerste tabel vermelden we met behulp van de tekens $+$ en $-$, wie de eventuele dader zou kunnen zijn. In elke regel staat dan één $+$. In de tweede tabel vermelden we, wie er de waarheid sprak en wie niet. Waarheid spreken geven we aan met het cijfer 1, onwaarheid spreken met het cijfer 0. Elke regel van de linker tabel behoort bij de overeenkomstige regel van de rechtertabel. We lezen nu zonder meer af, dat alleen als Tom de dader is, er drie broers zijn, die de waarheid spreken.

J	H	T	K	P
$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
$-$	$-$	$-$	$+$	$-$
$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

J	H	T	K	P
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1

De voorjaarsprijsvraag

Wiskunde studeren betekent voor het grootste gedeelte: nieuwe stof opnemen en verwerken. Het is niet produktief, er worden geen nieuwe methoden gezocht en geen nieuwe problemen aangesneden. De opgaven in de boeken geven je het gevoel van meelopen in een lange stoet: dezelfde vraagstukken zijn reeds door miljoenen vóór jou opgelost en er zullen nog miljoenen na je komen om dezelfde opgaven te maken. Deze toestand is volkomen normaal.

Vergeet echter niet, dat je met de wiskunde-kennis die je nu hebt, óók oorspronkelijk werk kunt doen. Op elk niveau is dat mogelijk, je hoeft er niet mee te wachten tot je een uitgebreide wiskunde-kennis vergaard hebt. Om dit soort werk te stimuleren willen we eenmaal in het jaar een prijsvraag uitschrijven: er wordt een probleem opgegeven, dat op velerlei wijze wiskundig uit te werken is.

Je gaat erop studeren, je tekent, denkt, slaat vele zijwegen in die blijken dood te lopen, tot je eindelijk een of meer vruchtbare aanknopingspunten vindt. Dat is niet het werk van één avond, maar het resultaat van een lange tijd met het probleem rondlopen. Dat is de eerste fase. Dan ga je het gevondene ordenen tot een logisch geheel en schrijft dit op in de vorm van een verhandeling. Deze hoeft zich niet te beperken tot het behandelen van de resultaten, ze kan ook de vruchteloze pogingen beschrijven die aangewend zijn vóór een redelijke oplossing gevonden werd.

Het is duidelijk dat twee verhandelingen over hetzelfde probleem, die vrijwel tot dezelfde oplossing(en) komen, toch nog veel in kwaliteit kunnen verschillen.

Hier is het probleem:

Een hotelhouder heeft een klein dakterras met uitzicht naar alle windstreken. De mensen komen daar 's zomers graag om van het fraaie uitzicht te genieten. Vanzelf gaan de bezoekers zich interesseren voor de markante punten in het landschap: in welke plaats staat die kerk-toren? Wat is dat voor een gebouw? Waar loopt die weg naartoe? enz. Ten gerieven van de bezoekers wil de hotelhouder midden op het dakterras een panoramakaart opstellen van de omgeving, zodat ze zelf op kunnen zoeken wat ze in de verte zien.

We zouden de hotelhouder kunnen adviseren een kaart van zijn omgeving te kopen bij de Topografische Dienst, maar die kaart heeft een groot nadeel: ze lijkt helemaal niet op wat de bezoeker van het dakterras ziet. Deze ziet nl. alles wat dichtbij is veel groter en gedetailleerder dan wat veraf is. De afstanden krimpen a.h.w. in, hoe dichterbij de horizon nadert. Hij zou een kaart willen laten maken die ook enigszins deze eigenschap vertoont.

De opgave is nu, een of meer manieren aan te geven, waarop zo'n kaart getekend kan worden uitgaande van een gegeven topografische kaart. Bovendien moet je één van deze manieren practisch uitwerken, dus zo'n kaart maken voor een bepaalde plaats en voor een zelf gekozen hoogte boven de grond.

Je moet de opdracht zo ruim mogelijk nemen: heb je 4 kaarten nodig op 4 punten van het dakterras, doe dat dan. Wil je een ringvormige kaart, ook goed. Vind je een aardige manier om bijzondere punten op de horizon aan te geven ... verwerk dat er dan in.

Voor de 3 beste verhandelingen worden prijzen van f 25,—, f 10,— en f 5,— uitgelooft.

Zorg er voor dat je verhandeling in goed leesbare vorm tot ons komt: schrijf duidelijk en let ook op de stijl.

De verhandelingen moeten vóór 1 mei 1962 ingezonden worden. (Die uit Nw. Guinea, Suriname en de Nederlandse Antillen vóór 1 juni 1962.)

°°°EEN OPPERVLAKTEFUNCTIE MET BIJZONDERE EIGENSCHAPPEN

Samenvatting van het vorige artikel (nummer 1, blz. 12 e.v.).

De oppervlakte van de figuur, begrensd door: een deel van de grafiek van $y = \frac{1}{x}$, de x -as en de verticale lijnen $x = 1$ en $x = p$, is een functie van p , die we voorstelden door $L(p)$.

We spraken af, dat $L(p) > 0$ gerekend zou worden voor $p > 1$ en < 0 voor $0 < p < 1$.

Verder vonden we: $L(1) = 0$

$$L(ab) = L(a) + L(b)$$

$$L(a : b) = L(a) - L(b)$$

$$L(a^n) = n \cdot L(a)$$

We zagen dus, dat deze oppervlaktefunctie de eigenschappen heeft van een logaritme. We noemen deze de *natuurlijke* logaritme. Ter onderscheiding van de andere logaritmen schrijven we niet $\log x$, maar $\lg x$ of $\ln x$.

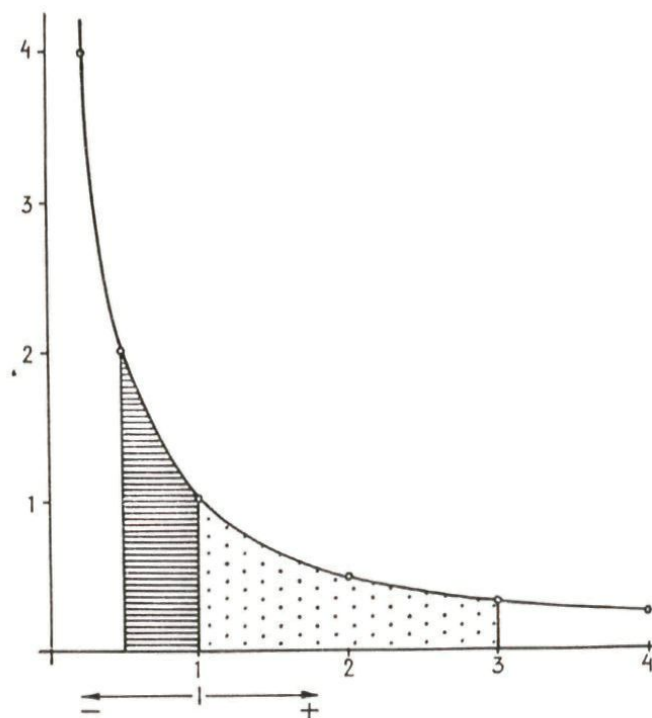


Fig. 27

We hadden dus in het vorige artikel gevonden: $L(p) = \ln p$.

Voor welke waarde van p is $\ln p = 1$?

Wanneer we deze vraag kunnen beantwoorden, hebben we het grondtal van het natuurlijke logaritmenstelsel gevonden. De Zwitserse wiskundige Euler (1707–1783) stelde dit grondtal voor door de letter e . We kunnen dus ook vragen: *Hoe groot is e ?*

In fig. 27 zien we, dat $L(2) < 1$. Trekken we door het punt P van de grafiek, dat behoort bij $p = 2$ een lijn, bijv. de raaklijn in P, dan ontstaat het trapezium ABCD, dat de oppervlakte 1 heeft (de middenparallel is $\frac{1}{2}$, de hoogte $AB = 2$) en dat kleiner is dan $L(3)$. Zo zien we, dat $L(p) = 1$ is, als $2 < p < 3$. Dus $2 < e < 3$.

We zullen nu nagaan hoe we een betere benadering van e kunnen vinden.

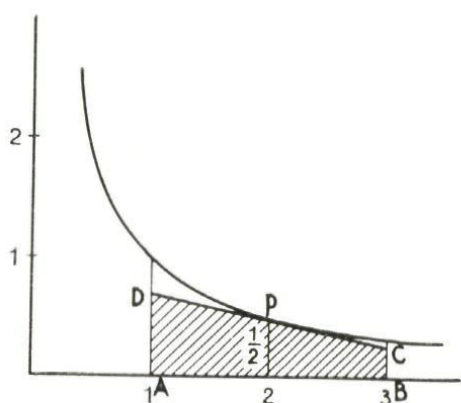


Fig. 28

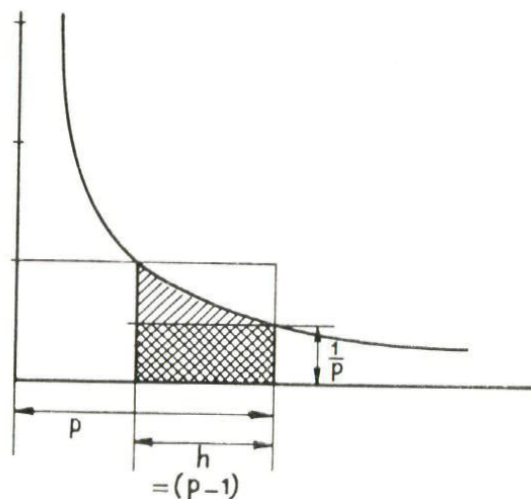


Fig. 29

Zie fig. 29. De oppervlakte $L(p)$ is daar ingesloten tussen twee rechthoeken. De grootste daarvan heeft als oppervlakte $(p - 1)$, de kleinste $(p - 1) \cdot \frac{1}{p}$.

Dit is wel een beetje een grove benadering, maar voor ons doel (laten zien, hoe het getal e bepaald kan worden) voldoende. We zien dus:

$$\frac{p-1}{p} < L(p) < p-1.$$

Omdat we de waarde van $L(1)$ willen benaderen stellen we $p = 1 + \frac{1}{n}$ en kijken wat er gebeurt, als n heel groot gekozen wordt (dus $\frac{1}{n}$ heel klein). De ongelijkheid wordt nu:

$$\frac{1}{n+1} < L\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

of, als we alle leden met n ($n > 0$) vermenigvuldigen,

$$\frac{n}{n+1} < nL\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$$

Als we n zeer groot laten worden nadert het linkerlid tot 1, terwijl het derde lid 1 is. Hieruit volgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nL\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Nu hebben we gezien, dat de functie $L(x)$ de eigenschap heeft, dat $nL(a) = L(a^n)$ (zie het artikel in nummer 1).

Dus
$$\lim_{n \rightarrow \infty} L\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1.$$

Hieruit volgt, omdat $L(e) = 1$ is, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Om een indruk te krijgen van de grootte van e , kiezen we $n = 1000$, dan is dus $e \approx 1,001^{1000}$ of $\log e \approx 1000 \log 1,001$.

In een tafel met 7 decimalen vinden we $\log 1,001 = 0,0004341$. Dus $\log e \approx 0,4341$.

We vinden dan $e \approx 2,72$.

Nauwkeuriger berekeningen hebben geleerd, dat $e \approx 2,7182818$; naar beneden afgerond.

In het volgend nummer begint een artikelenserie van de Heer J.C. van Rhijn uit Vollenhove, waarin enkele andere methoden om e te bepalen, worden besproken.



HET VERDWIJNPUNT

Als we een lange, rechte, weg voor ons zien, met palen aan weerskanten, lijkt het of in de verte de kanten van de weg en de verbindingslijnen van de toppen in één punt samenkomen.

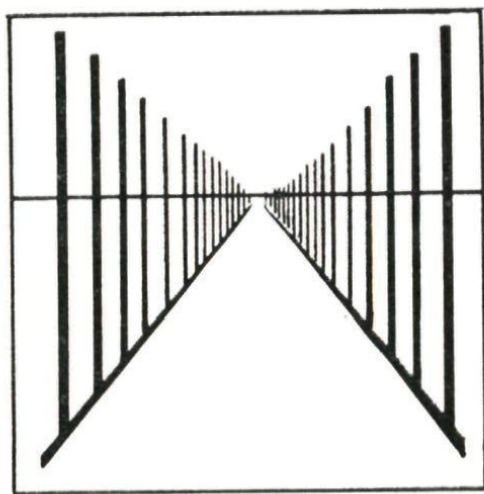


Fig. 30

Iedereen weet uit ondervinding, dat ons oog geen details kan onderscheiden aan voorwerpen, als ze zich op grote afstand van het oog bevinden.

Nu is de vraag: wat zouden we in de verte zien, als ons oog wel hiertoe in staat zou zijn...? Trouwens we zouden een sterk vergrotende kijker kunnen gebruiken!

Stuur ons eens je antwoord op deze vraag.

Ingezonden door de Heer H.J.Struik, Deventer.

WOORDENBOEK

Cycloïde

afkomstig van het Griekse woord *kyklos* = cirkel.
Voor de uitgang -oïde zie men het eerste nummer.

Limaçon

van het Franse woord *limaçon* = slak.

Cardioïde

hartvormige lijn (*cordia* = hart).

Tangens

van het Latijnse werkwoord *tangere* = raken.

Trochoïde

naam door Roberval (1602–1675) aan de cycloïde
gehecht. Afkomstig van het Griekse woord *tro-
chos* = rad.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

Bruno Ernst, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

Aan dit adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

G. Krooshof, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

Aan dit adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden.

Vermeld duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal 4 maal per schooljaar verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,— per jaargang. Voor anderen f 3,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J. B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J. B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.