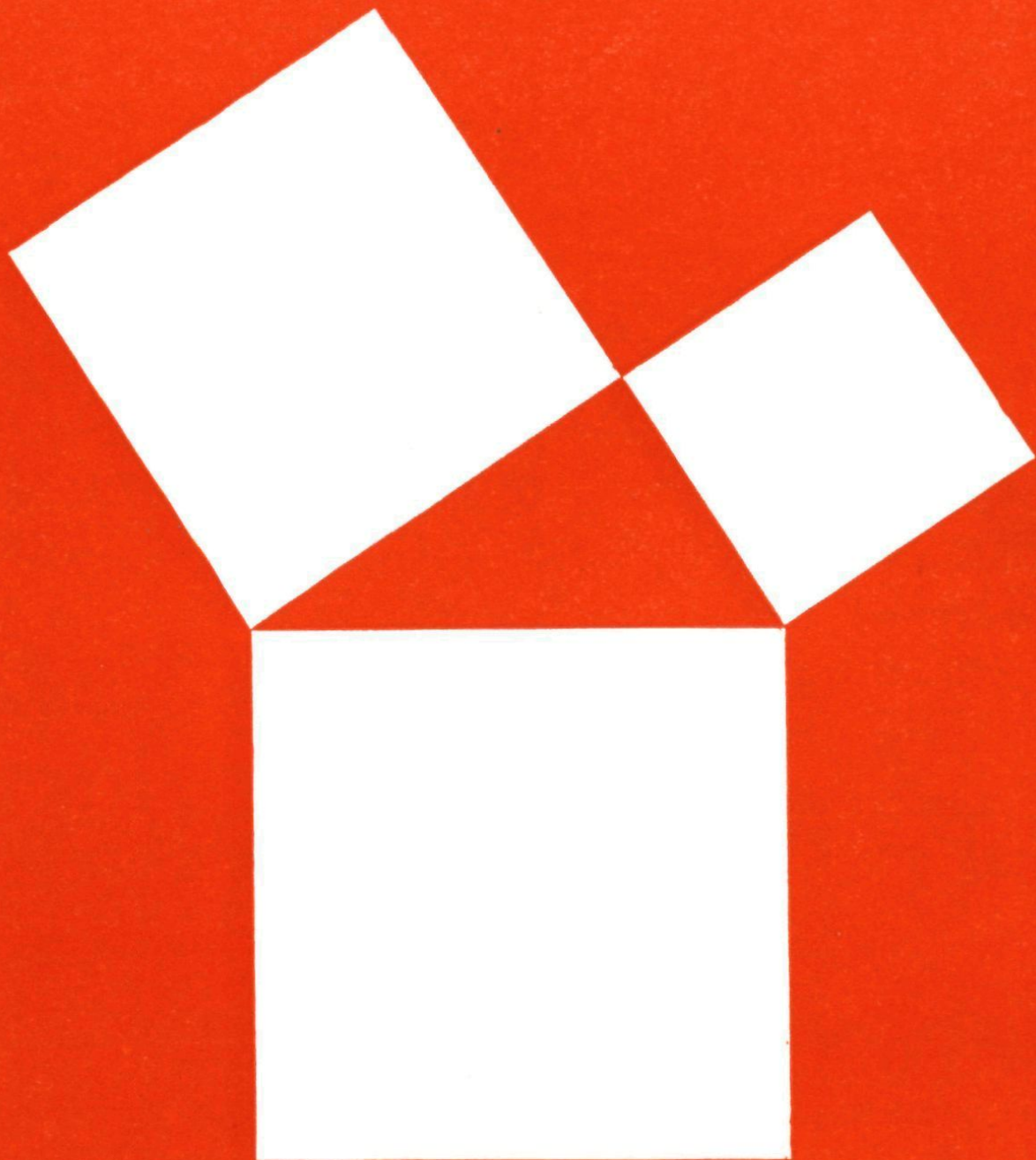
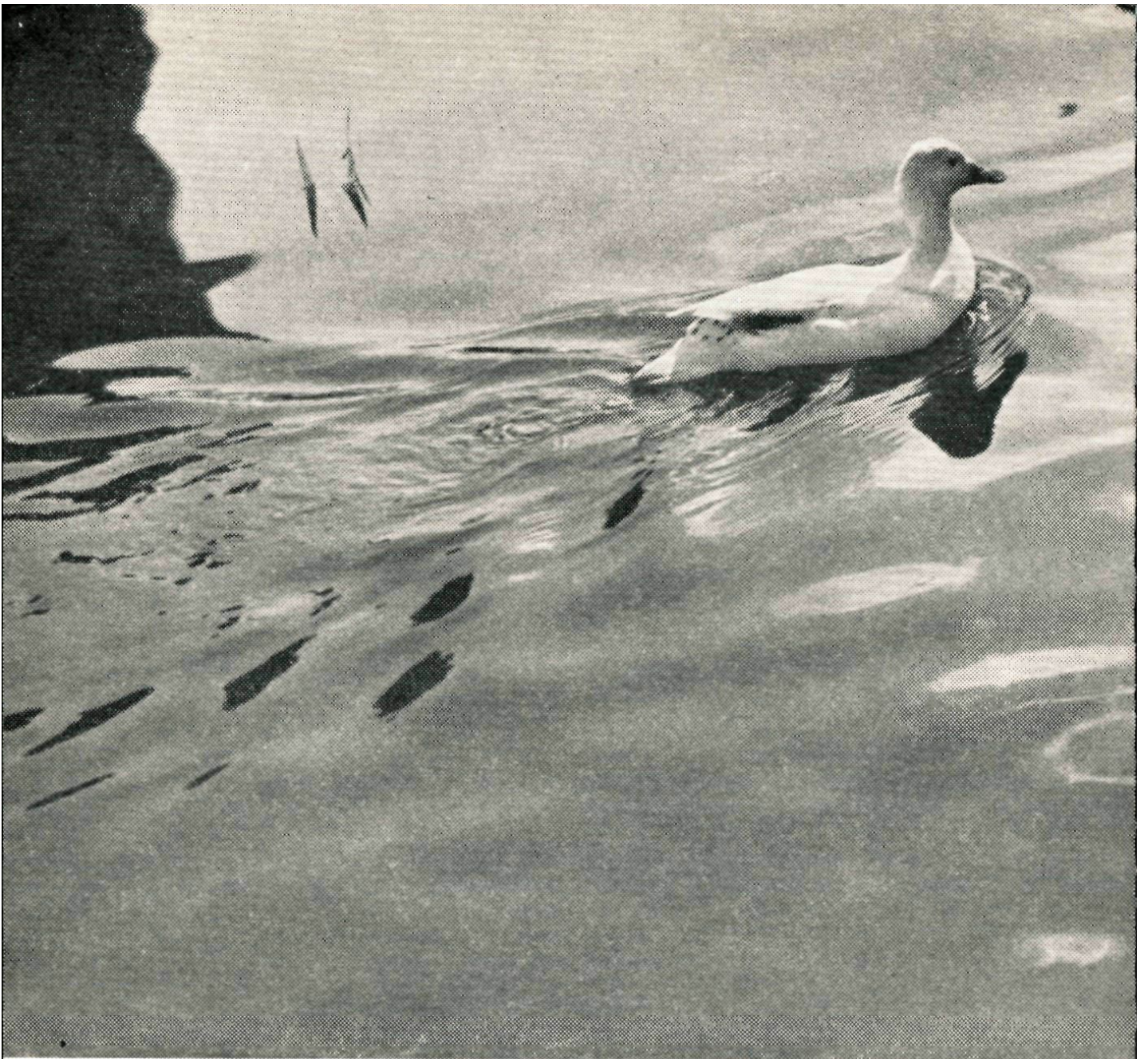


PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

4



Alle eendjes zwemmen in het water (zie blz. 11)

„Als ik, na dit wellicht vrij droge wetenschappelijke betoog, U nog een enkel woord kan zeggen, dat ieder van U ertoe brengt zijn ogen te gebruiken bij het kijken naar schepen, boten, eenden en eendjes, met verschillende snelheden over het water bewegend, en deze mooie golfverschijnselen waar te nemen, dan denk ik dat U iets voor de rest van Uw leven gewonnen zult hebben, ook al mocht U zich niets meer herinneren van mijn lezing.”

W. Thomson

(aangehaald in de Natuurkunde van het vrije veld deel III, Prof. M. Minnaert)

pythagoras

WISKUNDETIJDSCHRIFT
VOOR JONGEREN

jaargang 1

no 4

°ENKELE INTERESSANTE KROMMEN - IV

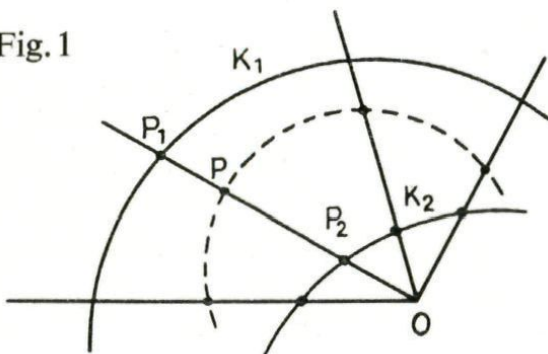
In deze reeks artikelen worden enkele interessante krommen besproken, die meestal in de schoolmeetkunde niet aan de orde komen. In elk artikel wordt de constructiewijze van zo'n kromme beschreven zo, dat deze gemakkelijk door ieder getekend kan worden. In het volgend nummer vindt men de afbeelding van de kromme en enkele bijzonderheden.

De cissoïde van Diocles (2e eeuw v. Chr.).

Gegeven zijn twee krommen K_1 en K_2 en een punt O . Door O trekt men een rechte, die K_1 snijdt in P_1 en K_2 in P_2 . Op de rechte bepaalt men het punt P zo, dat $OP = OP_1 - OP_2$. Wanneer men de rechte nu om O laat draaien, is de verzameling der punten P een cissoïde.

De cissoïde van Diocles verkrijgt men door voor K_1 te kiezen een rechte l , voor K_2 een cirkel C , die l

Fig. 1



in A raakt en voor O het punt, dat op de cirkel diametraal met A ligt. (zie fig. 2).

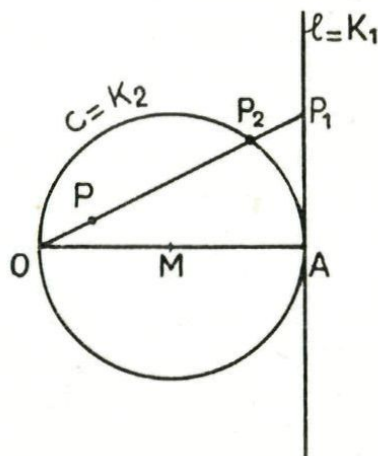


Fig. 2

Cycloïde en trochoïde.

In nummer 3 van ons tijdschrift werd de constructiemethode voor deze krommen besproken, hier volgen enkele bijzonderheden.

Een afbeelding van een cycloïde en trochoïde vindt men in fig. 3. Men kan zich voorstellen, dat de afgebeelde cycloïde beschreven wordt door een punt op de omtrek van een wiel, dat over de weg AA' rijdt. De trochoïde wordt beschreven door een punt op de omtrek van een wiel van een spoorwagon, die over de rails AA' rijdt. Wanneer de trein in de richting AA' rijdt, zal het punt, dat de trochoïde doorloopt, zich op regelmatig terugkerende tijden in tegengestelde richting bewegen.

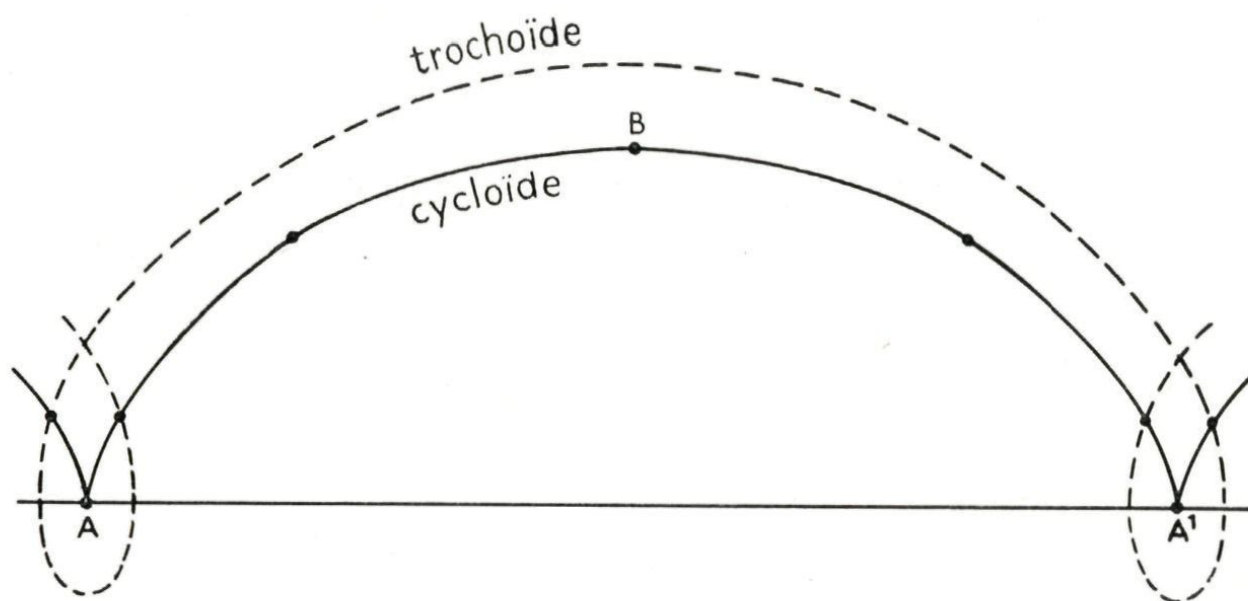


Fig. 3

WE BLADEREN DIT NUMMER EVEN DOOR

De bijdragen, die we voor ons tijdschrift ontvangen, hebben ons ruimschoots in staat gesteld de eerste jaargang te vullen en waren er zelfs de oorzaak van, dat we enkele artikelen voor de volgende jaargang moeten bewaren, o.a. het in het vorige nummer aangekondigde artikel over het getal e . Op blz. 6 van dit nummer vindt men een cartoon, dat we met toestemming van het Nieuwsblad van het Noorden uit deze krant mochten overnemen. Dit bracht ons op de gedachte de tekenaars onder de abonnees aan te sporen hun krachten ook eens te beproeven op een cartoonje, dat natuurlijk betrekking moet hebben op iets wat met de wiskunde samenhangt. In buitenlandse bladen zagen we bijzonder aardige, maar laten we het eens proberen met Nederlands Fabrikaat. De 'flexagonen' (blz. 18) zetten even de knutselaars aan het werk, de eend op de omslag nodigt ons uit het artikel van Ir. Mulder te lezen. Leo Godschalk leverde critiek op het bekende $- \times - = +$. Verder laten we 5832 poppetjes dansen en rekenen dat aantal even na. Kortom: Er is weer voor elk wat wils.

°°° *Parametervergelijkingen van de cycloïde*

Stel, dat in fig. 4 de cirkel zo rolt, dat na enige tijd B_1 in B_2 terecht is gekomen. Als nu de boog $A_1B_1 \propto \alpha$ radialen is en de straal van de cirkel de lengte R heeft, dan is de lengte van boog $A_1B_1 \propto R$. Dit is dan ook de lengte van het lijnstuk A_1B_2 . Leggen we de x -as van een coördinatenstelsel langs de rechte ℓ , de oorsprong in het punt A_1 en de y -as langs de rechte A_1M_1 , dan vinden we voor de coördinaten van A_2 :

$$\begin{aligned}x &= R\alpha - R \cdot \sin \alpha \\y &= R - R \cdot \cos \alpha\end{aligned}$$

Dit zijn de parametervergelijkingen van de cycloïde. Hierin is α de parameter.

Nog een bijzonderheid van de cycloïde: Dat de cycloïde een zeer bijzondere kromme is, blijkt uit het volgende (waarvan we het bewijs achterwege moeten laten):

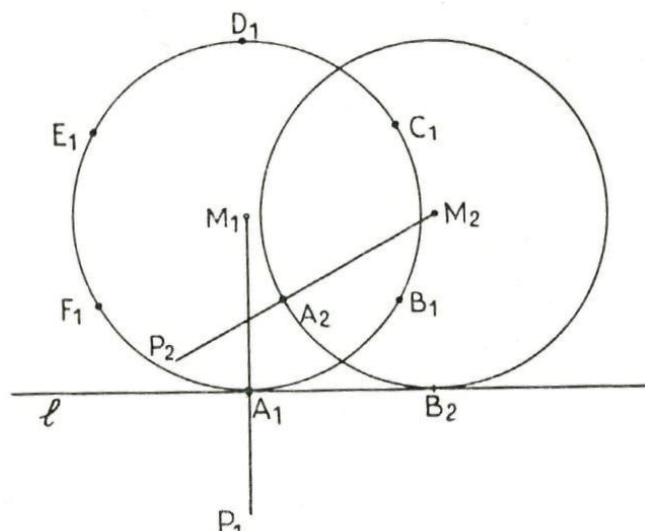


Fig. 4

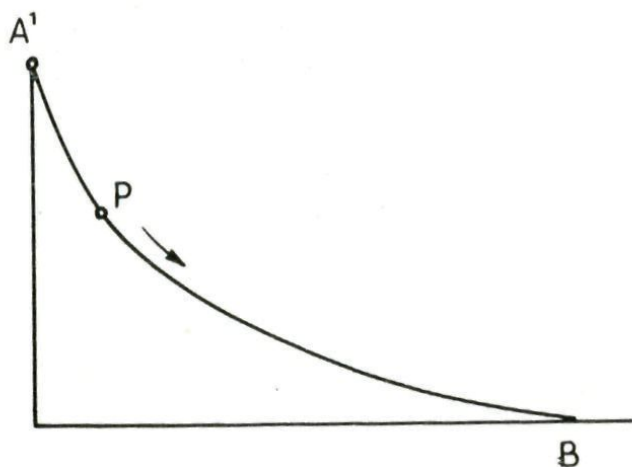


Fig. 5

In fig. 5 is een deel van de in fig. 3 afgebeelde cycloïde getekend, nl. het deel tussen de punten A' en B . Daarbij is B niet het hoogste, maar het laagste punt. Laten we nu een „stoffelijk punt” zonder wrijving langs de cycloïde glijden van een willekeurig punt P tot B , dan is de tijd, die het punt nodig heeft om B te bereiken onafhankelijk van de plaats van het beginpunt P op de kromme. Bovendien blijkt de cycloïde de eigenschap te hebben, dat de „glijtijd” van het stoffelijk punt, vergeleken bij alle andere mogelijke krommen tussen A' en B een minimum is. Deze tijd is zelfs kleiner dan die, welke geldt voor het rechte verbindingslijnstuk $A'B$.

Te WEINIG gegevens?

Cilinder en Bol.

In een massieve koperen bol moet een cilindrisch gat geboord worden, waarvan de as door het middelpunt van de bol gaat en dat precies 6 cm lang is. Hoe groot is het volume van het lichaam, dat overblijft? (Zie fig. 6).

Enkele formules:

Inhoud van een bol met straal R : $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Inhoud van een cilinder: grondvlak maal hoogte.

Inhoud van een 'bolkapje' $\frac{1}{6}\pi h(3r^2 + h^2)$, waarin r de straal van het grondvlak en h de hoogte is.

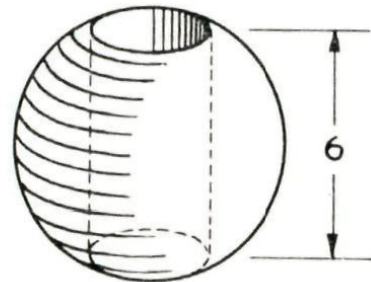
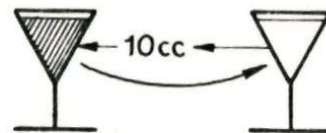


Fig. 6

Te VEEL gegevens?

Een glas water en een glas wijn.



In een glas zit 50 cc water en in een ander glas 50 cc wijn. Uit het eerste glas halen we 10 cc water en doen dat in het tweede. We roeren alles in dat tweede glas goed om en halen er dan 10 cc van het mengsel uit, die we weer in het eerste glas doen. De vraag is nu: Zit er nu meer water bij de wijn of meer wijn bij het water?



Dat is nogal LOGISCH! - 4

In het vorige artikel leerden we de tekens $\vee$ en $\wedge$ kennen. In een der voorbeelden, die daarbij werden gegeven, sloop een drukfout. Kees Renckens te Hoorn en E. Mischgofsky te Roermond waren de aandachtige lezers, die ons daarop wezen. In voorbeeld 5 moet nl. niet staan $x > 2 \wedge x < -2$, maar $x > -2 \wedge x < 2$.

We berekenen de waarheid

In Pyth.2 zagen we, dat in de logica het waar- of niet-waar-zijn van beweringen wordt bestudeerd. Zulke beweringen (men noemt ze in de logica „proposities”) zijn bijvoorbeeld:

π ligt tussen 3 en 4.

Slakken zijn gewervelde dieren.

In elke gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk.

Maastricht is de hoofdstad van Nederland.

Sommige proposities zijn waar, andere zijn vals (niet waar), hetgeen in de voorbeelden duidelijk blijkt. Nu kunnen enkelvoudige proposities samengesteld worden met behulp van *en* en *of*. Bijvoorbeeld:

π ligt tussen 1 en 2 *of* het ligt tussen 3 en 4. (A)

Slakken zijn weekdieren *en* katten zijn gewervelde dieren. (B)

In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken recht *of* ze zijn stomp. (C)

Elk vierkant is een ruit *en* het heeft twee scherpe hoeken. (D)

Maastricht is de hoofdstad van Limburg *of* de hoofdstad van Nederland. (E)

De Rijn is een berg *en* de Rijn ontspringt in Zwitserland. (F)

8 is een derdemacht *of* 8 is een even getal. (G)

Een driehoek heeft twee diagonalen *en* vier zwaartelijnen. (H)

Hoe staat het nu met de waarheid van deze samengestelde proposities? Het is wel aardig, vóór het verder lezen, even voor zich zelf vast te stellen, welke van de proposities A tot en met H waar of vals zijn en dat straks te controleren. Wanneer we in deze samengestelde proposities het ene deel voorstellen door p en het andere door q , dan zijn er vier, die voor te stellen zijn door $p \vee q$, terwijl men voor de andere vier kan schrijven $p \wedge q$.

Zo is bijvoorbeeld $p = \text{„}\pi \text{ ligt tussen 1 en 2”}$; $q = \text{„}\pi \text{ ligt tussen 3 en 4”}$, zodat propositie (A) voor te stellen is door $p \vee q$.

Voor de „disjunctie” $p \vee q$ geldt nu de regel: *De disjunctie is dan en alleen dan waar, als minstens één der samenstellende delen waar is.*

Geven we aan een propositie, die waar is, de „waarde” 1 en aan een propositie, die vals is de „waarde” 0, dan kan men voor het waar zijn van de disjunctie het volgende schema opstellen:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

De „uitkomsten” achter de streep zouden te berekenen zijn door op te tellen, als we $1 + 1 = 1$ stellen. De andere drie optellingen stemmen overeen met die van de rekenkunde.

We controleren nu even onze notities betreffende disjuncties, die in de acht voorbeelden voorkomen:

(A) $0 + 1 = 1$ (waar)

(C) $0 + 0 = 0$ (vals)

(E) $1 + 0 = 1$ (waar)

(G) $1 + 1 = 1$ (waar)

Voor de „conjunctie” $p \wedge q$ geldt de regel: *De conjunctie is dan en alleen dan waar, als de twee samenstellende delen beide waar zijn.* We krijgen dus het schema:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

De „uitkomsten” achter de streep zijn nu te berekenen door te vermenigvuldigen. Elk der vier produkten stemt overeen met die van de rekenkunde.

Ook de conjuncties controleren we even:

(B) $1.1 = 1$ (waar)

(D) $1.0 = 0$ (vals)

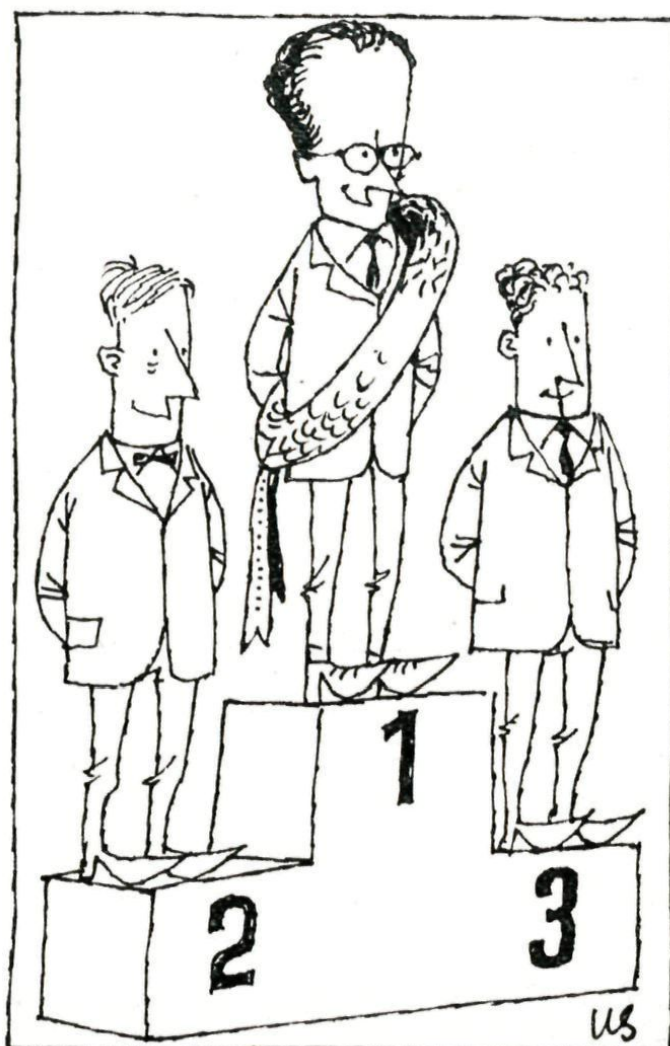
(F) $0.1 = 0$ (vals)

(H) $0.0 = 0$ (vals)

Een cartoon

Het uitschrijven van de wiskunde olympiade inspireerde de tekenaar van het Nieuwsblad van het Noorden tot nevenstaand cartoon.

Wie laat zich hierdoor weer inspireren tot het tekenen van cartoons op wiskundig terrein?



°PLATLANDERS - IV

DE LEZING VAN PROF. STEIN

De lezing van Prof. Stein was druk bezocht.

Hij stond bekend als een der diepste denkers over het wezen van Platland. Hoewel hij een theoreticus was, verraste hij de Platlandse geleerden dikwijls door onvermoede praktische gevolgtrekkingen uit zijn zuiver abstracte bespiegelingen.

„Geachte aanwezigen,” zo begon de professor zijn lezing, „het is een bekend verschijnsel, dat men op plaatsen met een vrij uitzicht soms vlak bij zich bewoners van onze wereld ziet, waarvan we weten, dat ze zich zéér ver van ons af bevinden. Een verschijnsel dat niet zo dikwijls voorkomt, maar dat de meesten van U toch wel eens hebben ervaren, is het zwakke beeld dat men van zichzelf vlak bij kan zien. Deze verschijnselen zijn tot nu toe zonder verklaring gebleven. Wij hebben dit altijd waargenomen en aanvaard als een elementaire eigenschap van ons heelal”.

Onze Platlander luisterde intens. Dit was geheel nieuw voor hem. Hij had het verschijnsel nog geen half jaar geleden voor het eerst ontdekt en in geen enkel college had hij er vroeger iets over gehoord en in geen enkel boek er wat van gelezen.

„Een door mij onlangs gepubliceerde theorie is in staat beide verschijnselen te begrijpen. Kort gezegd komt het hierop neer: ons platland is gekromd. Dit kunt U zich niet voorstellen. We moeten daarom naar een vergelijking zoeken.

Stelt U zich eens wezentjes voor die slechts lengte bezitten, die dus niet lang en breed zijn, zoals wij. En denkt U zich eens in, dat deze wezentjes een lijn-wereld bewonen. (fig. 7)

Het wezentje AB kan zich slechts voor- en achteruit verplaatsen.

Fig. 7 ℓ A B

A horizontal line segment is shown. Above the left end of the segment is the symbol ℓ . On the segment, there are two points labeled A and B, with A to the left of B. The segment extends to the right beyond point B.

Het kan niet van de lijn af en weet zelfs niet dat er buiten zijn lijn ook nog iets is. Die lijn is zijn heelal.

Nu kan deze lijn ofwel recht ofwel gekromd zijn.

Wij kunnen dat zien. Maar onze lijnlander, zoals wij het wezentje zullen noemen, weet daar niets van.

Stel nu eens, dat dit lijnland een cirkel is. (zie fig. 8)

Dan zou lijnlander AB zich van achteren kunnen zien.

Immers een lichtstraal volgt in zijn *heelal* de cirkel.

Een lichtstraal, die van B uitgaat, wordt dus in A ook gezien.

Als er nog een tweede wezen in lijnland is, bv. CD, dan zal AB altijd CD kunnen zien.

Iets dergelijks zou in ons Platland waar kunnen zijn. Als ons heelal gekromd is en zoals de cirkel „in zichzelf terugkeert”, dan zou dit de eenvoudigste verklaring zijn van de ons allen zo bekende optische verschijnselen”.

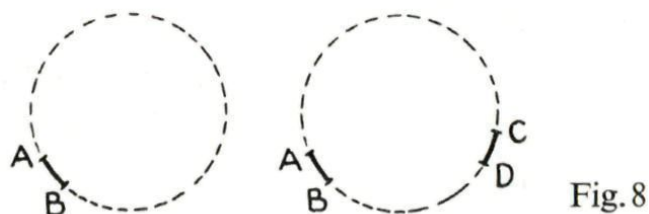


Fig. 8

Dit alles werd onze Platlander te machtig. „Nu begrijp ik het”, schreeuwde hij door de zaal. „U hebt gelijk Professor, ik kan het U verzekeren, want ikzelf kom uit een ander soort Platland dan de aanwezigen hier.

Beslist, Uw wereld is gekromd en de mijne was het niet. En ik heb er bewijzen voor!”

Er ging een gemurmel op uit de zaal en de familie Nix zat beschaamd voor zich te kijken. Achter hen fluisterde iemand: „Dadelijk gebeurt er iets ergs, ik voel het, die man is volslagen krankzinnig”.

Er was even een opschudding in de zaal. Er kwam een verpleegster met een glaasje water en een arts, die de raad gaf: „wat rust nemen”. Had onze Platlander echter gelijk?

Laten we de eigenaardige optische verschijnselen, die Prof. Stein trachtte te verklaren, eens vanuit ons ruimtestandpunt bezien:

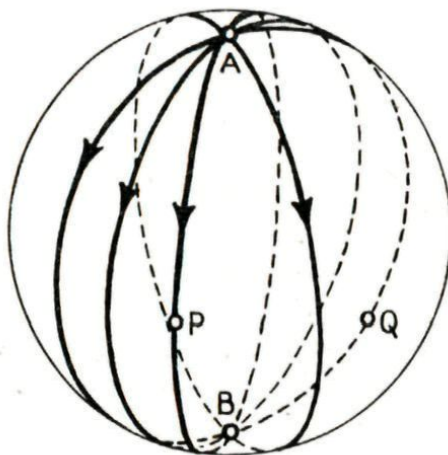


Fig. 9

Als lichtstralen van A op de bol uitgaan, en als deze lichtstralen geheel in het boloppervlak moeten verlopen (voor deze „platte” wereld moeten wij deze veronderstelling wel maken), volgen ze groot-cirkels op de bol, zoals de meridianen op de globe die van de noordpool uitgaan.

Maar al deze lichtstralen komen dan in het tegenpunt van A (B) weer samen en vormen daar dus een beeldpunt van A.

Een Platlander in P zal heel ver weg A zien, maar een Platlander in Q zal heel dichtbij stralen van B zien uitgaan.

Hij ziet dus een beeld van A vlak bij zich.

Waarom een Platlander in A een beeld van zichzelf vlakbij ziet, is ook duidelijk.

Dit wordt gevormd als de lichtstralen elkaar voor de 2e maal weer in A snijden.

Natuurlijk moet dit beeld theoretisch precies met A samenvallen, zodat een Platlander zichzelf juist *niet* zou kunnen zien.

Dat hij het wel kan, moet wel aan een of andere onregelmatigheid van het biljartbaloppervlak liggen.

We kunnen er nog een, voor de Platlander interessante, opmerking aan toevoegen. Stellen we eens dat de lichtsnelheid in dit Platland 3 cm per jaar is, en dat de bol een omtrek van 9 cm heeft. Dan zal hij zichzelf kunnen zien op de plaats waar en zoals hij drie jaar geleden was.

Voor ons „ruimtelanders” is er ook een interessante conclusie. Het zou kunnen zijn, dat onze ruimte gekromd is; iets wat wij ons onmogelijk kunnen voorstellen evenmin als de Platlanders zich de bolvorm van hun heelal kunnen voorstellen.

Toch hebben zij in hun heelal aanwijzingen te over dat hun ruimte gekromd moet zijn: Er bestaan in hun land geen evenwijdige lijnen; de som van de hoeken van de driehoek is geen 180° ; de π die in cirkelberekeningen voorkomt is variabel; lichtstralen, die steeds „recht-door” gaan komen toch na enige tijd weer terug; hun heelal moet een eindige oppervlakte hebben.

Wanneer onze ruimte gekromd zou zijn, dan moeten er ook voor ons dergelijker verschijnselen zijn, die daarop wijzen.

In de volgende jaargang zullen we de avonturen van onze Platlander verder volgen.





OPLOSSINGEN
HIERVAN
KUNNEN WORDEN
INGEZONDEN

15. Iemand heeft 8 knikkers, waarvan er 7 hetzelfde gewicht hebben, één weegt iets minder. We hebben alleen een balans tot onze beschikking, zonder gewichten. Hoe kunnen we in *twee* wegingen vinden, welke die lichte knikker is?

Ingezonden door Harry W. Wierda, Haarlem.

16. Hoeveel maal passeren de grote en de kleine wijzer van een klok elkaar in een etmaal?

17. Is het mogelijk, dat bij een ideaal horloge (d.i. een horloge, dat precies gelijk loopt en waarbij om 12 uur en om 24 uur de grote-, kleine- en secondewijzer precies op elkaar liggen) deze wijzers ook nog op andere tijdstippen dan 12 uur of 24 uur op elkaar liggen? (Bedoeld is een horloge, waarbij de drie wijzers om hetzelfde middelpunt draaien.)

Ingezonden door D. Knottnerus te Groningen.

18. Een boer heeft 10 bomen. Hoe moet hij ze plaatsen, opdat er 5 rijen van 4 bomen ontstaan?

Ingezonden door R. Kegel, Rotterdam.

19. $\triangle ABC$ is rechthoekig in B. Teken de halve cirkels, die AB, BC en CA als middellijn hebben en die buiten $\triangle ABC$ liggen. Construeer de raaklijnen aan deze halve cirkels, die evenwijdig zijn met AB en BC. Bewijs, dat deze raaklijnen een vierkant insluiten.

Onze voorjaarsprijsvraag

We herinneren er nog even aan, dat oplossingen van onze voorjaarsprijsvraag (zie Pyth. 3, blz. 20 en 21) vóór 1 mei a.s. nog kunnen worden ingezonden. Ook beschrijvingen van pogingen, die aangewend zijn om het gestelde probleem op te lossen, en die niet voerden tot een bevredigend resultaat, zijn welkom.

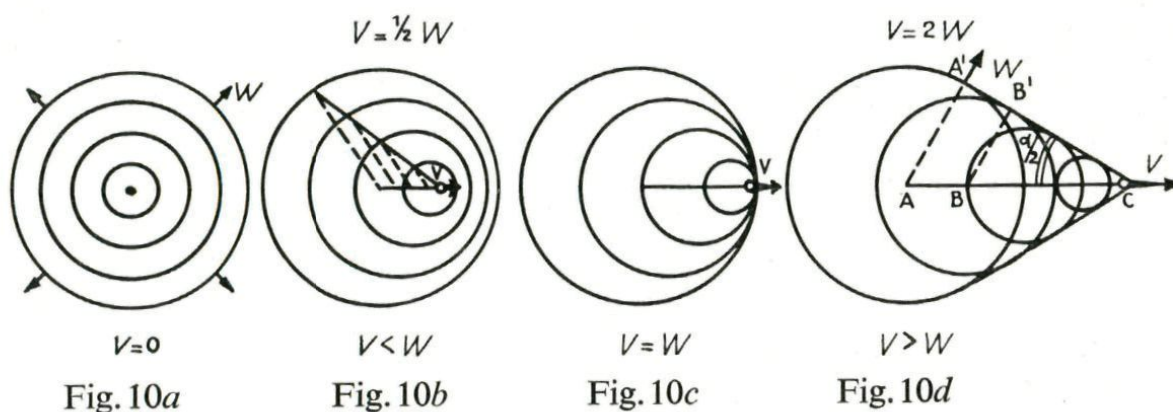
◦◦◦ **ALLE EENDJES ZWEMMEN IN HET WATER**

door Ir. H. M. Mulder e.i.. Wilhelminapark 22, Breda.

Wist je dat je de straal van de aarde kunt meten met een horloge en een stuk touw en wat kennis van de eigenschappen van de cirkel? De kennis van de gelijkvormigheid stelt je in staat de hoogte van een toren of de breedte van een rivier te bepalen. Is de wiskunde een ver storing van je rust op maandagmorgen of zie je er de natuur van vi breren en prikkelt dit je zin tot onderzoek?

Het Bredase Lyceum ligt aan het Wilhelminapark, waar wij de eenden dag aan dag hun fascinerend V-spoor over het water van de vijver zien trekken. (Zie de foto op de omslag.)

Hier volgt een onderzoek naar de aard van de ontstane golffronten, in het bijzonder de grootte van de gevormde hoek (α). We gaan hierbij uit van het beginsel van Huygens.



Stel de voortplantingssnelheid van de oppervlaktegolven: w m/sec. en de zwemsnelheid van de eend v m/sec. Indien $v = 0$ ontstaat een patroon van concentrische cirkels. Indien $v < w$, kan de eend het eenmaal opgewekte golffront niet inhalen; bij $v = w$ bevindt zij zich voortdurend op dit front.

Interessant wordt het eigenlijk pas als $v > w$. We tonen nu eerst aan, dat het front gedeeltelijk bestaat uit 2 halve rechten, die zich evenwijdig verplaatsen en elkaar ontmoeten ter plaatse, waar de eend zich bevindt.

Stel: de eend zwemt in t sec. van A naar C en in xt sec. ($0 < x < 1$) van B naar C. AA' en BB' zijn golfstralen.

Nu geldt: $AC = vt$, $BC = xvt$, $AA' = wt$, $BB' = xwt$. Dus $AC : BC = AA' : BB'$ en dus liggen A', B' en C op één rechte. De eend bevindt zich

steeds in het uitwendig gelijkvormigheidspunt van de momentele cirkelvormige fronten.

Bezien we verder het geval: $v > w$.

Er volgt: $\sin \alpha/2 = \frac{AA'}{AC} = \frac{wt}{vt} = \frac{w}{v}$ dus $v = \frac{w}{\sin \alpha/2}$.

De hoek (α) in het V-spoor is dus een maat voor de snelheid (v) van de eend.

Bij $\alpha = 180^\circ$ behoort $v = w$; bij $\alpha = 60^\circ$ geldt $v = 2w$ en bij $\alpha = 0^\circ$ behoort $v = \infty$ (voor zeer hoge snelheden nadert de hoek tot nul).

De grafiek geeft v/w als functie van α , waarbij als voorbeeld $w = 2 \text{ km/u}$ gesteld is (gemeten in een ondiepe vijver).

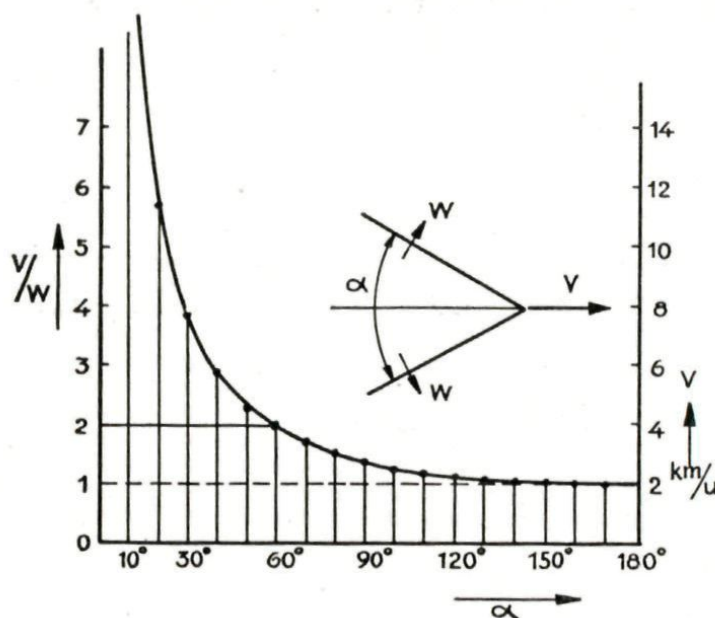


Fig. 11

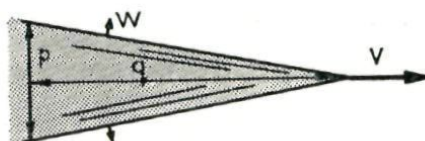
Ook achter schepen en vliegtuigen ontstaan dergelijke sporen.

Men hoort een vliegtuig passeren als het „geluidsspoor” ($w = 340 \text{ m/sec.}$) ons oor snijdt. Dit geluidsspoor zal kegelvormig zijn, als $v > w$, dus als het vliegtuig de geluidsbarrière doorbroken heeft. Zie fig. 10d. Wanneer een vliegtuig een schip uit de lucht fotografeert, zou uit opmeting van de hoek (bij het kielzog achter het schip) de snelheid bepaald kunnen worden. Alleen zal bij hogere snelheden een kleine fout in de hoekmeting een aanzienlijke fout in de snelheidsmeting veroorzaken.

Bij grote snelheden ($v \gg w$) kan men inplaats van $v = \frac{w}{\sin \alpha/2}$

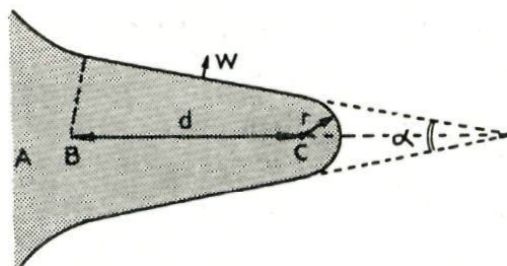
schrijven: $v = \frac{w}{\operatorname{tg} \alpha/2} = w \cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{p} \frac{wq}{p}$ waarbij p de „breedte” van het spoor is op afstand q van de schroef.

Fig. 12



Deze meetmethode zal in dit geval nauwkeuriger resultaten leveren. Tenslotte nog een golfpuzzle.

Fig. 13



Beschrijf de bewegingsgeschiedenis van een eend uit de gegeven golfstructuur (bepaald door α , d , w en r). Merkwaardig hierbij is hoe uit een schets van een momentele situatie een stuk verleden nog is af te lezen.



°°**HOKUSPOKUS** – × – = + **HOKUSPOKUS**

Leo Godschalk uit Naarden (lyceum Hilversum) schrijft:

„Er werden ons in de eerste klas van de middelbare school dingen geleerd, die we als vanzelfsprekend aannamen. We gebruikten ze en gebruiken ze nog. Bv. – × – = + ; dit werd ons duidelijk gemaakt door te vertellen dat het vertaald kan worden als: die man is *niet niet* rijk, dus is hij *wel* rijk. En + × – = – werd verduidelijkt door erop te wijzen, dat iemand die zijn schulden vermenigvuldigde, helaas niet van zijn schulden afkwam”.

Het getuigt al van pienterheid, dat iemand niet met een kluitje in het riet gestuurd wil worden; maar Leo Godschalk heeft ook een „bewijs” gezocht en gevonden, dat eenvoudig en juist is. Dus een prima bewijs! Waarom weten soms mensen, die toch heel wat wiskunde gestudeerd hebben, geen goede verklaring voor $- \times - = +$?

In een Amerikaanse filmstrook over algebra werd het verklaard met een plaatje waarop twee niet Amerikaanse soldaten met elkaar aan het vechten waren. Eronder stond: Ennemy against ennemy is good.

$$- \quad \times \quad - \quad = \quad +$$

Dit is wel zo grof, dat niemand die maar even zijn verstand gebruikt, dit als verklaring kan accepteren.

Maar is het: *niet niet* rijk is *wel* rijk, zoveel beter?

We zijn op negatieve getallen gestoten bij aftrekkingen „die niet lukten” b.v. $3 - 5 = -2$. Daarmee werd het negatieve getal ingevoerd.

Nu hebben we voor deze negatieve getallen de regel $- \times - = +$ geleerd. Weet je nog hoe in jullie klas deze regel werd verklaard? Voor we de manier van Leo Godschalk bespreken maken we nog enkele opmerkingen:

1. De schrijfwijze $- \times - = +$ is eigenlijk heel lelijk. Veel beter zou het zijn de regel te onthouden in de vorm $-1 \times -1 = +1$.
2. Willen we rekenregels voor negatieve getallen bewijzen, dan moeten we deze getallen eerst zorgvuldig definiëren. We zullen dat nu op de volgende wijze doen: Is a een positief getal, dan is $-a$ het getal, dat voldoet aan
 $-a + a = 0$ of $a + (-a) = 0$.
 $-a$ en a zijn dan elkaars tegengestelden.
3. We stellen de eis, dat voor de negatieve getallen dezelfde rekenregels gelden als voor de positieve. Vijf belangrijke regels, waaraan de positieve getallen voldoen, zijn:
de 1e commutatieve eigenschap: $a + b = b + a$
de 2e commutatieve eigenschap: $a \times b = b \times a$
de distributieve eigenschap: $a(b+c) = ab + ac$
de 1e associatieve eigenschap: $(a + b) + c = a + (b + c)$
de 2e associatieve eigenschap: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
Het bewijs van Leo Godschalk verloopt nu als volgt:

1. $-1 + 1 = 0$ definitie

Vermenigvuldig beide leden met het positieve getal a :

2. $a(-1 + 1) = 0$. Pas de distributieve eigenschap toe:

3. $a \times (-1) + a \times 1 = 0$ of

4. $a \times (-1) + a = 0$

Hieruit blijkt, dat $a \times (-1)$ het tegengestelde is van a , dus $a \times (-1) = -a$.

Volgens de tweede commutatieve eigenschap is dan ook $(-1) \times a = -a$.

5. Kiezen we $a = 1$, dan zien we $(-1) \times 1 = -1$ en $1 \times (-1) = -1$.

Dit resultaat gaan we nu gebruiken:

$-1 + 1 = 0$ definitie

Vermenigvuldig beide leden met -1 .

6. $-1(-1 + 1) = 0$ of volgens de distributieve eigenschap:

7. $(-1) \times (-1) + (-1) \times 1 = 0$ of met toepassing van (5):
 $(-1) \times (-1) + (-1) = 0$.

Hieruit blijkt, dat $(-1) \times (-1)$ het tegengestelde is van (-1) dus volgens de definitie is $(-1) \times (-1) = +1$.

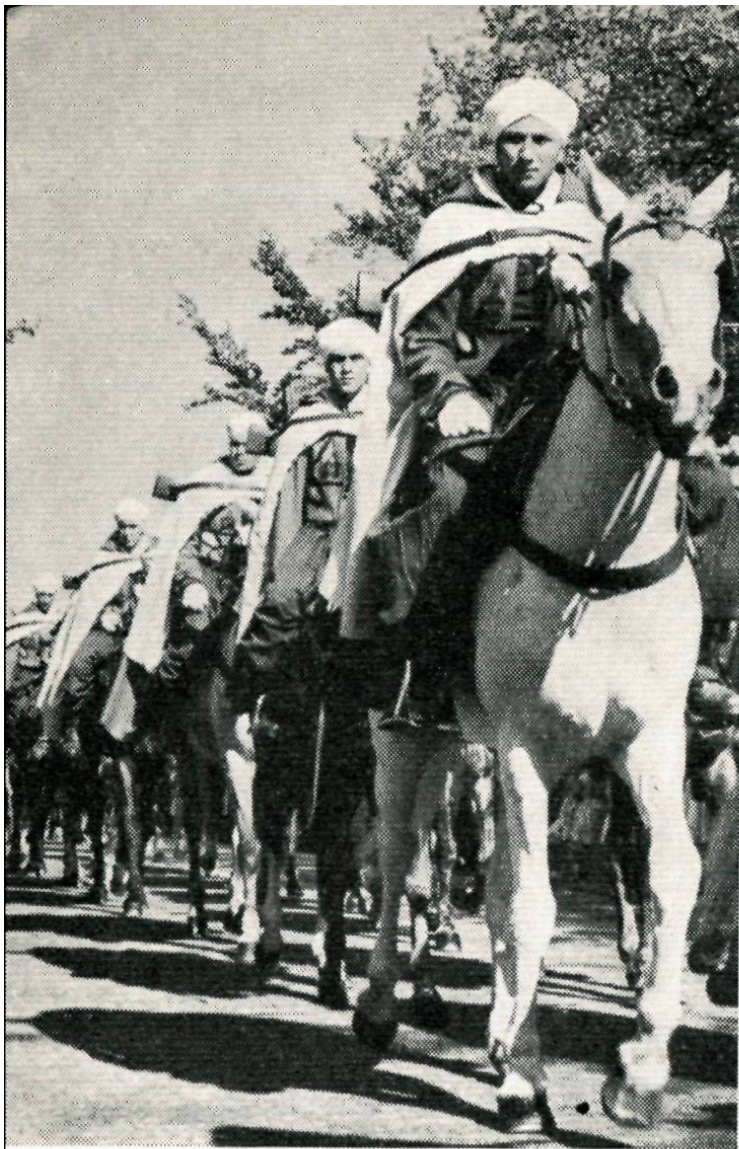
Zijn a en b twee positieve getallen, dan kunnen we nu vaststellen, dat $(-a) \times (-b) = +ab$. Immers:

$$\begin{aligned} (-a) \times (-b) &= (-1) \times a \times (-1) \times b = \\ &= (-1) \times (-1) \times a \times b = (+1) \times a \times b = +ab. \end{aligned}$$

We gebruiken hier de associatieve eigenschap.

Zou je denken, dat dit voor eersteklassers te moeilijk is? Schrijf ons dat eens.





Spahi's in het Stadspark te Groningen.

Het verdwijnpunt is verdwenen

Wie naar aanleiding van *Het Verdwijnpunt* (Pyth.3, blz.24) heeft gekeken, wat er aan het eind van een lange weg of bij de rails van een spoorlijn aan de horizon te zien is, heeft gemerkt, dat er geen sprake is van een verdwijnpunt. Wie een verrekijker gebruikt, krijgt iets te zien, dat (enigszins overdreven) in fig. 14 is afgebeeld. Er zou een verdwijnpunt zijn, als de aarde een oneindig uitgebreid plat vlak was en de spoorlijn oneindig lang. In de theorie van de perspectief gaat men ook van deze veronderstelling uit. Voor schilders en tekenaars is deze vereenvoudiging van de werkelijkheid in het geheel geen bezwaar.

Hoe komt men in de perspectief aan het verdwijnpunt?

Vóór het oog O denkt men zich een vlak T loodrecht op de grond en loodrecht op de kijkrichting. Dit vlak T noemt men het tafereel. Op dit tafereel ontstaat de perspectivische afbeelding van elk punt A als het snijpunt van OA met T. Men kan bewijzen, dat de perspectivische afbeelding van een rechte lijn l weer een rechte lijn is. Om deze afbeelding te krijgen hebben we dus maar de beeldpunten van twee punten van de lijn nodig. (In fig. 15 bijv. van A en van P). Laten we A langs l van P naar het oneindige lopen, dan loopt het beeldpunt A^1 van P naar Q, waarbij Q het snijpunt is van T met de lijn door O, die evenwijdig is met l . Het beeld van elke andere rechte m , die evenwijdig is met l , gaat eveneens door Q. Q is dus het verdwijnpunt.



Fig. 14

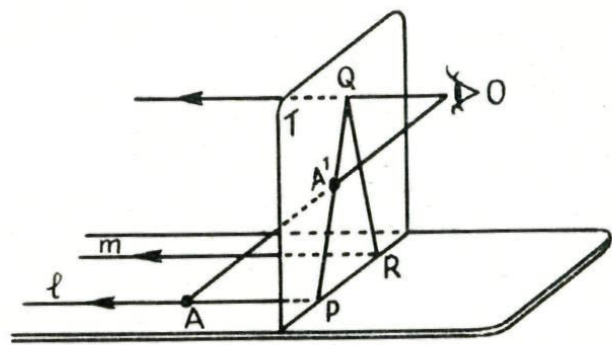


Fig. 15

In ons geval hebben we niet te maken met de perspectivische afbeelding van rechte lijnen, maar (door de bolvorm van de aarde) met de afbeelding van cirkels. (zie fig. 16). De blikstralen van het oog naar de punten van zo'n cirkel vormen een kegelmantel en de doorsnede daarvan met T is een kegelsnede (bijv. een ellips). Daardoor krijgen we een figuur ongeveer zoals fig. 17.

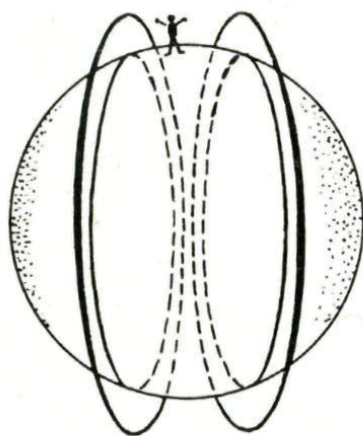


Fig. 16

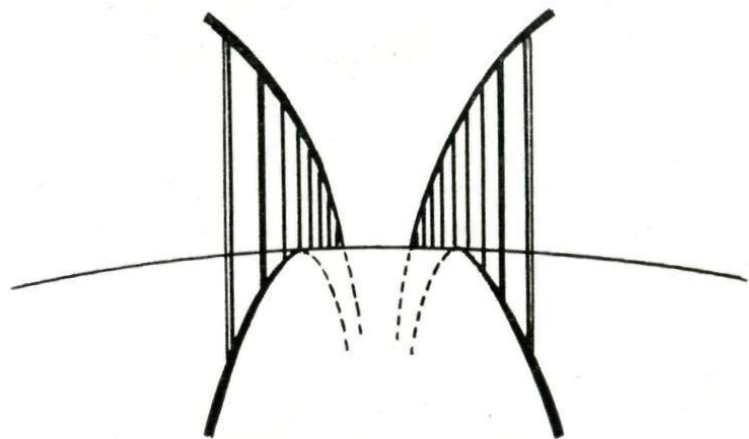
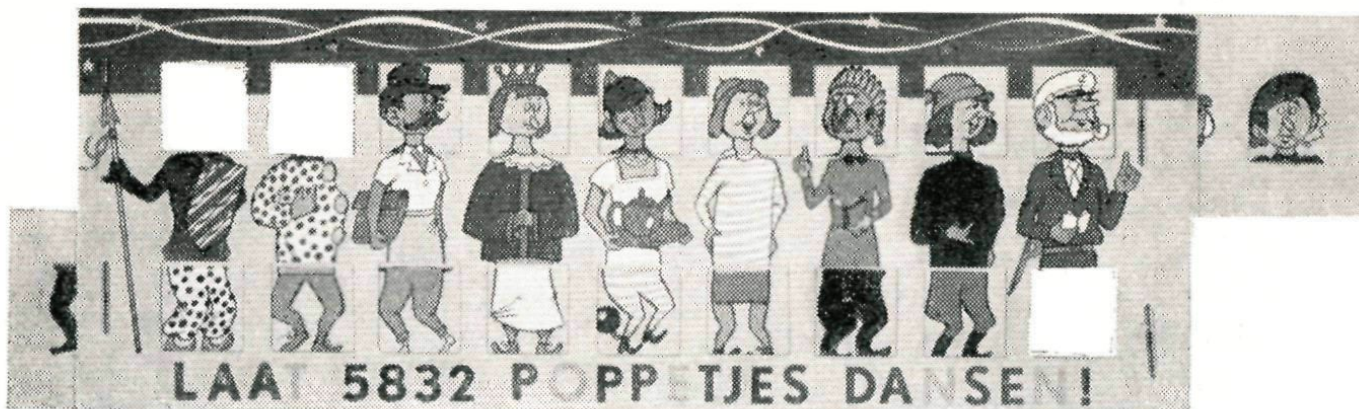


Fig. 17





Zo ontmoeten we wiskunde in de reclame: Een doosje met twee „schuifladen” (gevuld met chocolade). Boven- en benedenla kunnen los van elkaar in- of uitgeschoven worden. Er ontstaan dan op de voorkant *en* op de achterkant poppetjes, zoals op de afbeelding hierboven. Op de doos staat, dat er op deze wijze 5832 poppetjes gevormd kunnen worden. Is dat getal juist?

Aan elke kant staan in dit geval 9 poppetjes. Hoeveel mogelijkheden zouden er zijn, als er aan elke kant n poppetjes waren?

° FLEXAGONEN

Flexagonen zijn veelhoeken die van een strook papier gevouwen kunnen worden en die de eigenaardigheid hebben dat door doorbuigen en omvouwen andere vlakken zichtbaar worden.

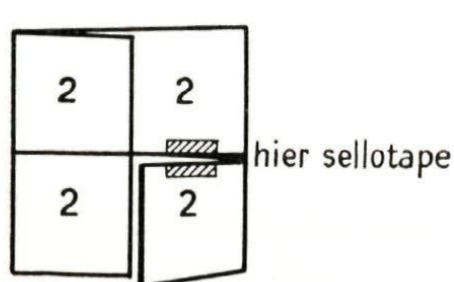
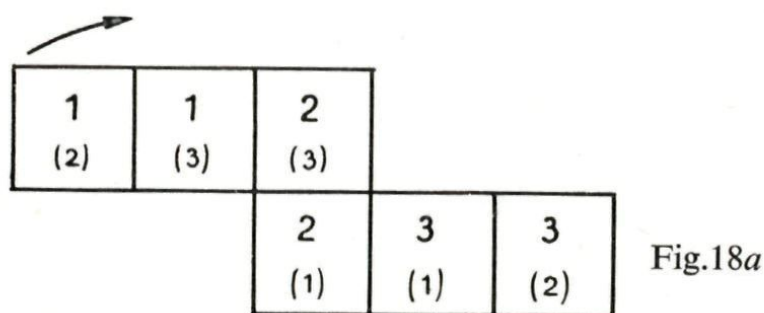


Fig. 18b

Teken op een stuk dik tekenpapier figuur 18a. Nummer de voor- en achterkant zoals aangegeven is. (De nummering aan de achterkant is tussen haakjes aangegeven) Vouw nu de strook die aan de voorkant met 1,1 genummerd is naar achteren. Vouw het rechtse vierkantje, genummerd met 3 naar voren. Plak een stukje sellotape op de rechtse vierkantjes (zie figuur 18b).

Op de voorkant staat nu overal een 2 en op de achterkant een 3.

Vouwen we nu onze flexagoon over de verticale middenvouw naar achteren, dan kan hij van voren weer opgevouwen worden: we zien dan aan de voorkant overal een 1 staan.

Als we op de vakjes 1 vier stukken van een foto of een prent plakken, op de vakjes 2 een prent met een andere voorstelling en op de vakjes 3 ook, dan komen de frappante eigenschappen van deze flexagoon nog duidelijker naar voren.

Omdat deze flexagoon de vorm van een vierhoek heeft, zullen we hem een tetra-flexagoon noemen, ter onderscheiding van flexagonen, die er als zes-hoeken uitzien (hexa-flexagoon).

Willen we nog aangeven hoeveel verschillende vlakken gevormd worden (in het bovenste geval dus 3) dan zetten we nog een telwoord ervoor.

Onze flexagoon was een tri-tetra-flexagoon. (Zie het woordenboek op de binnenzijde van het omslag.)

De hexa-flexagonen zijn in 1939 ontdekt en bestudeerd door A.H. Stone.

Er bestaat op het ogenblik een uitgewerkte wiskundige theorie over de hexa-flexagonen.

Van de tetra-flexagoon is veel minder bekend; een theorie erover is er nog niet.

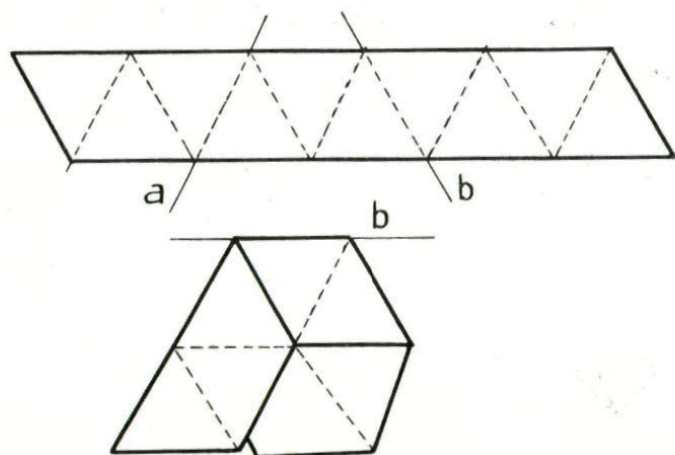


Fig. 19

De eenvoudigste hexa-flexagoon is een tri-hexa-flexagoon. Neem het in fig. 19 afgebeelde parallellogram over op een stuk tekenpapier. Vouw langs a naar voren. Vouw dan langs b naar achteren. Het links overblijvende driehoekje wordt weer naar achteren gevouwen en vastgeplakt op de achterkant. Nummer de 6 driehoeken aan de voorkant met 1 en die aan de achterkant met 2.

Om de zijde 3 aan de voorkant te krijgen, vouwen we de zeshoek bij een van de hoekpunten samen en openen hem in het midden. (even zoeken!)

Wie vindt nog andere flexagonen?



Critiek op „Wiskunde in de bocht”

Van enkele zijden ontvingen we brieven over „Wiskunde in de bocht”. Blijkbaar was men het niet eens met de nogal sterke vereenvoudiging, die we hadden aangebracht in fig. 17. (Pyth. 3, blz. 10). We hadden daarin de kracht G ontbonden in een kracht N loodrecht op het wegdek en een kracht T evenwijdig aan het wegdek. Daarbij hadden we opgemerkt, dat de kracht T juist de kracht K moest opleveren, die de auto in de bocht moest houden. Natuurlijk is dit een zo sterke vereenvoudiging van de situatie geweest, dat men daar terecht bezwaren tegen kan maken. De kracht K nl. werkt in een horizontaal vlak. T niet. Voor iemand in de praktijk is dat echter niet erg. Er zijn nl. steeds vereenvoudigingen nodig, als een theoretisch probleem in een praktische situatie toegepast moet worden. Ook het verwaarlozen van de wrijving is zo'n vereenvoudiging.

Dat de wegenbouwer liever de tg gebruikt dan de $\sin$ heeft te maken met het feit, dat hij op zijn plattegronden steeds de in fig. 19 vermelde b kan aflezen en niet de werkelijke breedte van het wegdek.



Onze puzzels

Bij de oplossingen van de puzzels in Pyth.2 was het werk van Hans Buhrman, C.Krusemanstr.34II, Amsterdam-Z wel het beste. Hij krijgt dus deze maal de boekenbon. Het meest waarderen we nog, dat hij bij de oplossing van „Even lekker rekenen” alleen maar de stelling van Pythagoras nodig had en niet het grovere geschut van de cosinusregel of *s*-formule. Ook zijn rekenwerk hierbij was helder en overzichtelijk. Er waren weinig inzenders, die deze opgave goed beantwoord hadden ($\sqrt{58}$ als *P* binnen het vierkant ligt en 4 als het er buiten ligt).

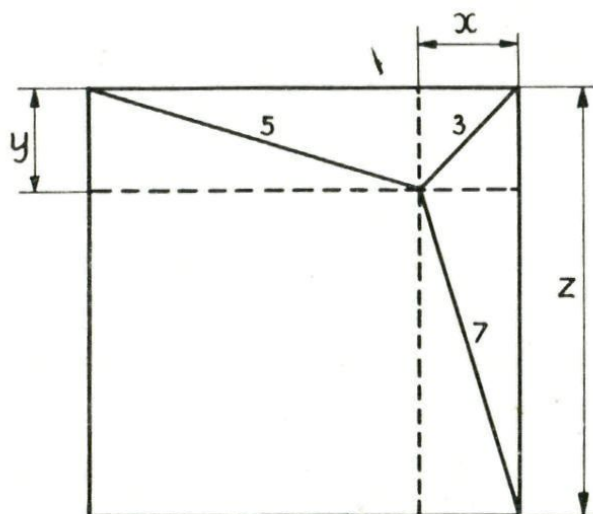


Fig. 20

Hier volgt een deel van de oplossing van Hans:

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad x^2 + y^2 = 9 \qquad (1)$$

$$x^2 + (z - y)^2 = 49 \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2yz = 49 \qquad (2)$$

$$y^2 + (z - x)^2 = 25 \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 25 \qquad (3)$$

$$\text{Uit (1) en (2): } z^2 - 2yz = 40 \qquad (4)$$

$$\text{Uit (1) en (3): } z^2 - 2xz = 16 \qquad (5)$$

Los uit (4) *y* op en uit (5) *x* en substitueer in (1). Er ontstaat dan een vergelijking in *z*², die tenslotte te herleiden is tot $(z^2 - 58)(z^2 - 16) = 0$.

Een spel (Pyth. 2 blz. 10) Oplossing van R. A. M. Hartmann Rotterdam:

Degene, die niet begint, wint bij goed spel altijd: Hij moet bij iedere zet de afstand tussen zijn stukken en die van zijn tegenstander in beide rijen hetzelfde maken en hij moet daarbij steeds vooruit zetten. Dit kan hij blijven doen tot zijn tegenstander niet meer achteruit kan zetten en dus vast staat.

Twee centen (Pyth. 2 blz. 7)

De rollende cent komt zo te liggen, dat de 1 weer rechtop staat. Bij dat rollen vallen steeds punten van de beide gearceerde randen samen. Punt P komt dan tegen Q te liggen. Punt R beschrijft daarbij een baan, die doet denken aan een cycloïde.

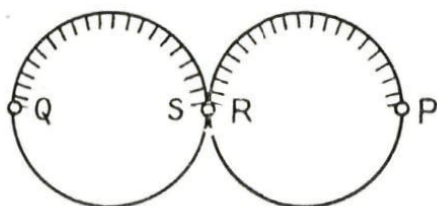


Fig. 21

Het kon er niet meer op

We ontvingen van een vader en een zoon, die hun brief ondertekenen met X en Y, zeven constructies voor „Het kon er niet meer op I” (Pyth. 2, blz. 16). In de volgende jaargang hopen we daarop nog eens terug te komen, door deze constructies te vergelijken met een bekende stelling nl. de stelling van Desargues.

OPLOSSING VAN: TE WEINIG GEGEVENS?

Op het eerste gezicht hebben we te weinig gegevens, maar bij het doorrekenen blijkt wonderlijk genoeg, dat het overblijvende volume onafhankelijk is van de straal van de bol.

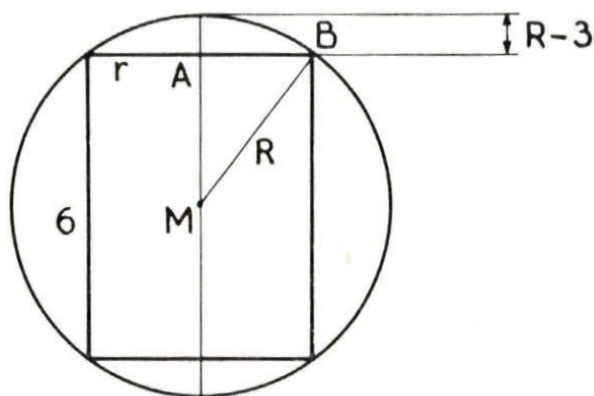
Het volume van de bol is $\frac{4}{3}\pi R^3$.

De straal van de cilinder berekenen we in $\triangle AMB$: $r = \sqrt{R^2 - 9}$. Het volume van de cilinder is dus $6\pi(R^2 - 9)$.

Van elk der beide kapjes is de hoogte $(R - 3)$ en de straal $r = \sqrt{R^2 - 9}$. De inhoud van de beide kapjes samen is dan: $\frac{1}{3}\pi(R - 3)[3(R^2 - 9) + (R - 3)^2]$. Het van de bol resterende volume blijkt nu te zijn 36π .

Opmerking: Wie van te voren al zou weten, dat het gevraagde volume onafhankelijk is van de straal van de bol, zou de berekening heel eenvoudig kunnen maken door voor deze straal 3 te nemen. De cilinder is dan nl. juist een lijnstuk geworden en heeft dan de inhoud 0. De inhoud van de bol is $\frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$!

Het overbodige gegeven $R = 3$ vergemakkelijkt het rekenwerk nu dus sterk.



OPLOSSING VAN: TE VEEL GEGEVENS?

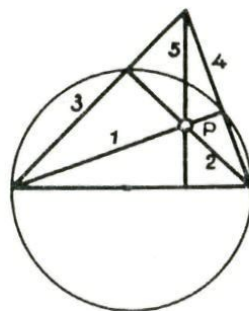
Vóór het scheppen en roeren bevindt zich in beide glazen evenveel vloeistof als daarna. De hoeveelheid water, die dus uit het eerste glas verwijderd is, moet vervangen zijn door evenveel wijn. Alleen het gegeven, dat er tenslotte in beide glazen een gelijke hoeveelheid vloeistof is gebleven, was nodig. De andere gegevens (50 cc en 10 cc) waren dus overbodig.

OPLOSSINGEN

van de DENKERTJES in Pythagoras 3

9. De constructie, die ook uitvoerbaar is, als P buiten de cirkel ligt, is een toepassing van de stelling, dat de hoogtelijnen van een driehoek door één punt gaan en van de stelling, dat een omtrekshoek, die op een halve cirkel staat, 90° is. Door nummers is in de bijgaande figuur aangegeven in welke volgorde de constructie uitgevoerd kan worden.

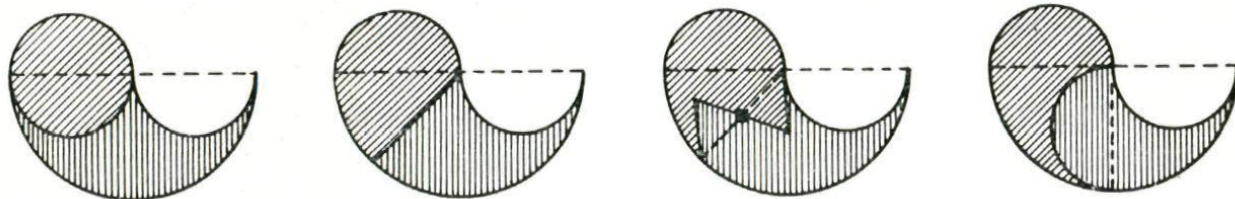
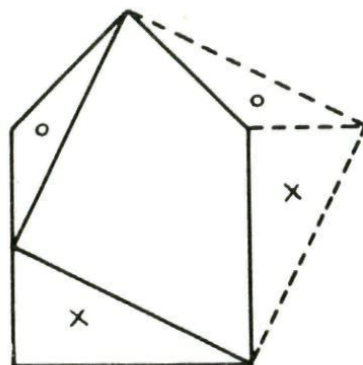
Wanneer P mocht liggen op één der raaklijnen, die men in de uiteinden van de gegeven middellijn aan de cirkel kan trekken, dan kan de constructie niet op deze wijze uitgevoerd worden. Dat is dan echter ook niet nodig, omdat deze raaklijn dan de gevraagde lijn is. Als P op de middellijn of één der verlengden daarvan ligt, is de constructie met de liniaal alleen niet mogelijk.



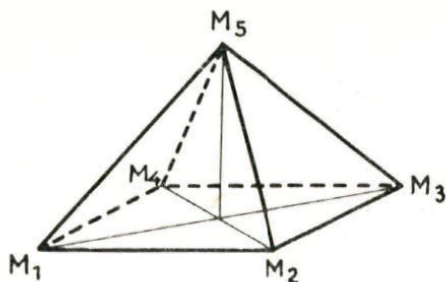
10. De meeste inzenders hebben begrepen, dat in de bij de opgave afgedrukte figuur ook de horizontale zijde gelijk moest zijn aan de beide verticale zijden. In de figuur was het streepje, dat dit moest aangeven, uitgevallen.

In de hiernaast getekende figuur, is het gevraagde probleem opgelost met behulp van slechts twee zaagsneden.

Oplossing van A.v.Oostveen te Amstelveen, Bart van der Eyk te Amsterdam, Pim Kool te Amsterdam en van E. Mischgofsky te Roermond.



11. Hierboven zijn een viertal manieren afgebeeld voor de verdeling van de gegeven oppervlakte in twee gelijke delen. Er zijn er nog veel meer mogelijk. Wanneer men het lijnstuk dat in de tweede figuur is getrokken, vervangt door een gebroken of gebogen lijn, die in het midden van dat lijnstuk een middelpunt van symmetrie heeft, dan voldoet zo'n lijn steeds. Een voorbeeld daarvan is gegeven in de derde figuur.



12. De middelpunten van de vijf voetballen zijn de hoekpunten van een regelmatige vierzijdige piramide, waarvan alle ribben $2r$ zijn. De hoogte van deze piramide is $r\sqrt{2}$. Het hoogste punt van de vijfde voetbal ligt dus $r + r\sqrt{2} + r = r(2 + \sqrt{2})$ boven de grond.

13. Stel $a = d - 1$; $b = d - 2$; $c = d - 3$.

Dan moet gelden: $(d - 1)^3 + (d - 2)^3 + (d - 3)^3 = d^3$

of $d^3 - 9d^2 + 21d - 18 = 0$. Is d_1 een der wortels van de vergelijking, dan is het eerste lid deelbaar door $(d - d_1)$ (factorstelling). Wanneer d_1 een natuurlijk getal moet zijn, dan gaat deze deling alleen op, als d_1 een deler is van 18. Men kan nu gemakkelijk, door alle delers van 18 te proberen, vinden, dat $d_1 = 6$ moet zijn.

We kunnen nu voor de gevonden vergelijking schrijven: $(d - 6)(d^2 - 3d + 3) = 0$. Gemakkelijk blijkt dan, dat de vergelijking $d^2 - 3d + 3$ geen reële wortels heeft, zodat $d = 6$ de enige mogelijkheid is. We vinden dus $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$ en $5^3 + 4^3 + 3^3 = 6^3$.

Oplossing van P. Vermaseren te Breda.

14. Deze bekende puzzel heeft tot „doel” de oplosser er op de volgende wijze te laten inlopen:

In elk etmaal vordert de schipbreukeling $12 \text{ km} - 9 \text{ km} = 3 \text{ km}$. De afstand is 45 km, dus zijn er 15 etmalen nodig. Er zijn inderdaad inzenders bij, die deze oplossing geven. Deze vergeten echter, dat, als de schipbreukeling na de 12e dag juist $(33 + 12) \text{ km} = 45 \text{ km}$ heeft afgelegd, hij zijn boot dan zeker niet meer zal laten terugdrijven, maar aan land zal stappen. Hij is dan 12 dagen en 11 nachten onderweg geweest.

Bij de oplossing van J. ten Hoonte te Nijmegen was een pakkende illustratie gevoegd van de op een klein vlot zwoegende schipbreukeling. Onze complimenten.

Voor zijn zeer goed verzorgde oplossingen van de denkertjes uit Pyth. 3 hebben we E. Mischgofsky, Chr. Ruysstraat 2, Roermond de boekenbon toegekend.



Cissoïde

afkomstig van het Griekse woord kissos = klimop. De cissoïde (klimopvormige lijn) droeg bij de Grieken deze schijnbaar slecht passende naam, omdat ze alleen het deel van de kromme beschouwden, dat binnen de bij de voortbrenging gebruikte cirkel ligt en daarbij letten op de vorm van het oppervlak, begrensd door dat deel van de kromme en de cirkelboog tussen de snijpunten met de kromme.

Commutatief

van het Latijnse werkwoord commutare = verwisselen.

Conjunctie

van het Latijnse werkwoord coniungere = samenvoegen.

Diametraal

van het Griekse woord diametros = middellijn.

Disjunctie

van het Latijnse werkwoord disiungere = scheiden.

Distributief

van het Latijnse werkwoord distribuere = verdelen.

Flexagonen

van het Latijnse woord flectio = buiging en het Griekse woord gonia = hoek.

Hexa-

Grieks, in samenstellingen gebruikt, betekent zes.

Propositie

van het Latijnse werkwoord proponere = vóórleggen.

Tetra-

Grieks, in samenstellingen gebruikt, betekent vier.

Tri-

Grieks, in samenstellingen gebruikt, betekent drie.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

Bruno Ernst, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

Aan dit adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

G. Krooshof, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

Aan dit adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden. Inzenden uiterlijk 15 mei 1962.

Vermeld duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal 4 maal per schooljaar verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,— per jaargang. Voor anderen f 3,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J. B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J. B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.