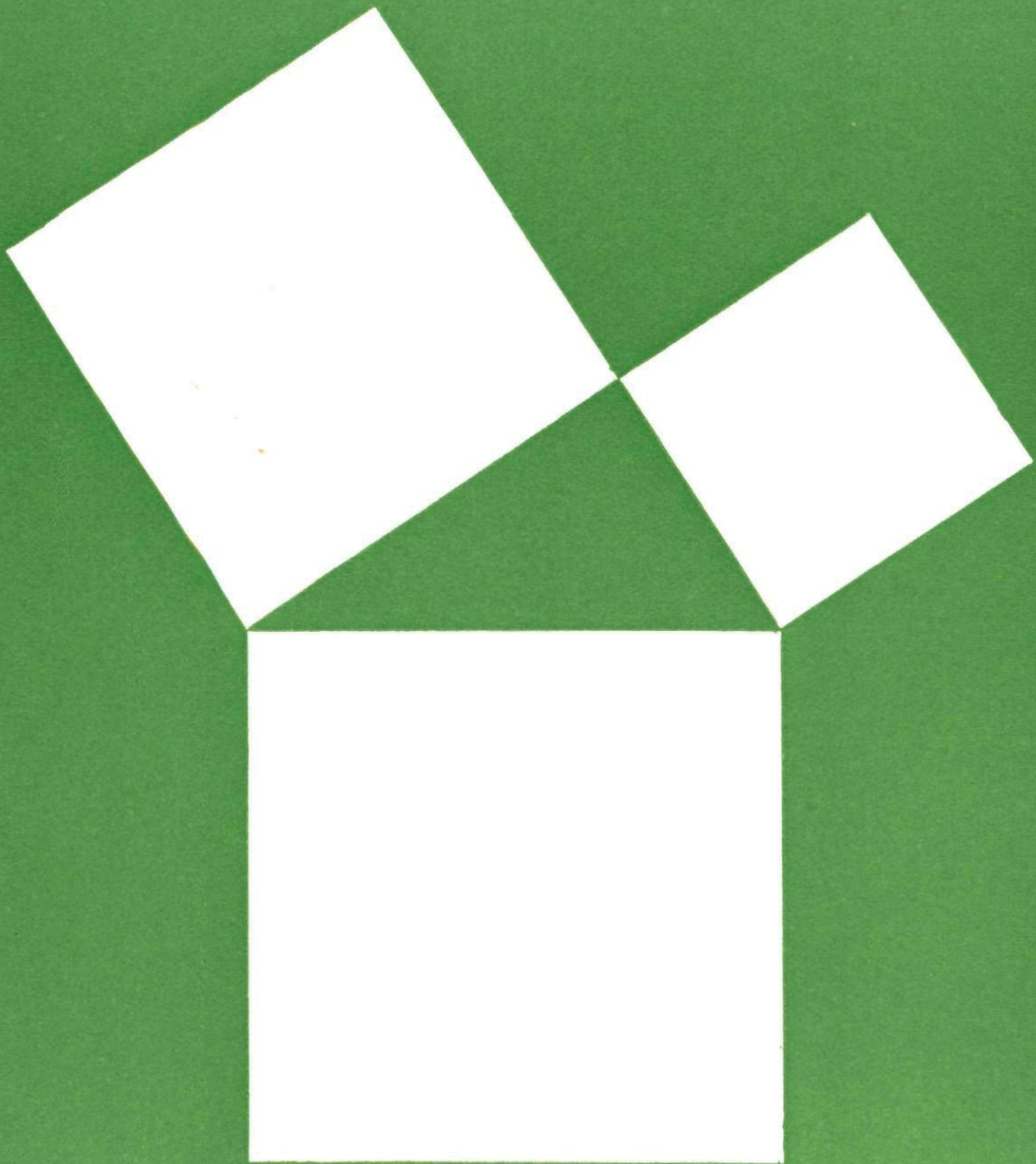


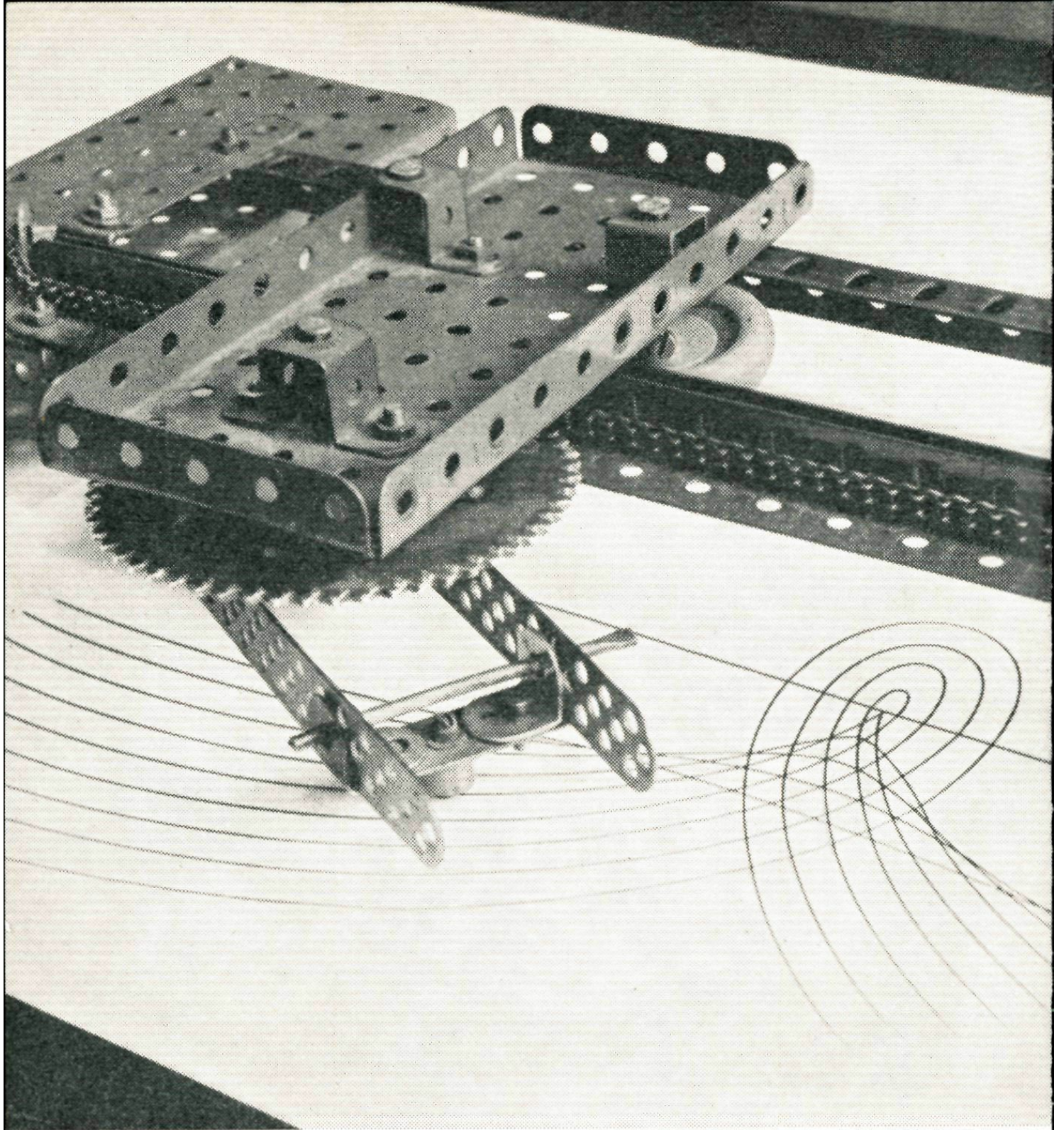
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

1

TWEEDE JAARGANG



Wie van ons heeft niet het genoeg gesmaakt een feit te begrijpen, een begrip te snappen, omdat we in de mogelijkheid werden gesteld zelf te handelen, zelf iets in beweging te zetten, zelf deel te nemen eerder dan te ondergaan?

G. Bosteels (Math. & Paed. No 14)

42. Nijmegen, Canisiuscollege
43. Purmerend, Rijks HBS
44. Roosendaal, St. Norbertuslyceum
45. Rotterdam, Gymn. van het
St. Franciscuscollege
46. Rotterdam, Marnix Gymnasium
47. Rotterdam, Het Charloise Lyceum
48. Rotterdam, St. Montfort College
49. Rotterdam, Chr. HBS „Charlois”
50. Tilburg, St. Odolphuscollege
51. Utrecht, Stedelijk Gymnasium
52. Utrecht, Christelijke HBS
53. Veendam, Winkler Prins Lyceum
54. Velsen-Driehuis, Paulinum Gym.
55. Vlaardingen, Gem. Lyceum
56. Wassenaar, Rijnlands Lyceum
57. Winschoten, Gem. Gymnasium
58. IJmuiden, Chr. HBS
59. Zeist, Openb. Lyc. „Schoonoord”
60. Hoogeveen, Menso Alting Lyceum

Peters, Gerard M. J., 27-12-'43.

Groot, Dirk, 4-5-'46.

Migchielsen, Peter, 17-12-'45.

de Vreede, J. P. M., 16-7-'45.

van Houwelingen, Joh. Corn., 25-3-'45.

Soeters, Cornelis, 23-3-'46.

Petterson, Jacobus A. J., 16-8-'46.

Ouwens, Maarten, 16-3-'46.

Verhoeven, Corn. Hendr., 28-3-'46.

van der Neut, Reinier N., 11-3-'46.

de Graaf, Teunis, 19-12-'45.

Hoetjer, Gineke, 4-8-'44.

Rosmuller, Joh. D. A., 18-1-'45.

van Tuyll, J. G. H. C., 23-5-'45.

Sandee, Daan, 2-6-'46.

van der Molen, Popko P., 20-7-'44.

Bohlken, Johan R., 1-7-'46.

van der Vlist, Michiel, 2-7-'46.

Weide, Lucas, 2-8-'42.

Het aantal deelnemers van de eerste ronde bedroeg 3346. Het gemiddelde van de maxima der 284 deelnemende scholen bedroeg 39. Het hoogste aantal punten dat door een der deelnemers werd bereikt, was 107.

Wiskunde-Olympiade - Nederland 1962

De volgende leerlingen, waaronder zeer vele lezers van Pythagoras, mogen deelnemen aan de tweede ronde op 24 oktober in Utrecht.

- | | |
|--|--|
| 1. Amersfoort, Amersfoorts Lyceum | Talsma, J., 6-4-'44. |
| 2. Amsterdam, St. Ignatius College, | Huikeshoven, Fr. J. M., 10-10-'45. |
| 3. Amsterdam, Spinoza-Lyceum | Worm, Rudi, 28-12-'44. |
| 4. Amsterdam, Cartesius Lyceum | Keune, Frans Johan, 16-2-'45. |
| 5. Amsterdam, Chr. Lyceum | de Vries, Timon Gerrit, 3-1-'46. |
| 6. Amsterdam, Chr. Lyceum-West | Stoub, Ger, 28-7-'46. |
| 7. Amsterdam, Montessori-Lyceum | van der Valk, Joke, 11-1-'44. |
| 8. Apeldoorn, Koninklijke HBS | Kuypers, J. C., 6-2-'45. |
| 9. Arnhem, Stedelijk Gymnasium | Brants, Frits Elbert, 14-7-'46. |
| 10. Arnhem, Lorentz HBS | Jurriëns, Gerrit W. J., 30-3-'46. |
| 11. De Bilt, Utrechts Lyceum | Vossenstijn, Nico, 29-10-'45. |
| 12. Culemborg, Christelijke HBS | van Oostrum, Pieter, 25-12-'45. |
| 13. Drachten, Christelijke HBS | Douma, Jan C., 10-5-'46. |
| 14. Eindhoven, Lorentz-Lyceum | van Gelder, Maarten Jan, 11-12-'44. |
| 15. Eindhoven, St. Joris-College | Prüst, Wim H. L. M., 24-6-'46. |
| 16. Eindhoven, Gem. Lyceum | Bollen, Robert, 22-11-'45. |
| 17. Enschede, Gemeentelijk Lyceum | Keizer, Klaas, 17-11-'45. |
| 18. Den Haag, St. Aloysius-College | van der Meys, André, 6-10-'43. |
| 19. Den Haag, Chr. Gymnasium | Toorman, Jan, 21-5-'45. |
| 20. Den Haag, Joh. de Witt-Lyceum | Reys, Peter Ludwig, 26-7-'44. |
| 21. Den Haag, Christelijk Lyceum | Dekker, Jan Michiel, 2-5-'46. |
| 22. Den Haag, Chr. Lyceum „Zandvliet” | Furnée, Willem G., 5-4-'44. |
| 23. Den Haag, St. Janscollege | Hafkenscheid, Leonardus M., 14-4-'46. |
| 24. Den Haag, Thomas More College | Rammeloo, Frans, 27-3-'46. |
| 25. Groenlo, R.K. HBS „Marianum” | van den Bersselaar, Wim J. J., 13-3-'46. |
| 26. Groningen, Gem. Dalton HBS | Drenth, Jelto Jan, 7-5-'46. |
| 27. Haarlem, Coornhert-Lyceum | Steenbrink, P. A., 21-9-'45. |
| 28. Haarlem, Chr. Lyceum
„Marnix van St. Aldegonde” | Flameling, Ferdinand Eduard, 26-9-'44. |
| 29. Heerlen, Bernardinuscollege | Goelen, W. J. J., 17-8-'45. |
| 30. Heerlen, Grotius Lyceum | Slaaf, Dirk Willem, 15-9-'45. |
| 31. Den Helder, Gemeentelijk Lyceum | Jonker, H. J. A., 15-7-'44. |
| 32. Hengelo (O), Gemeentelijke HBS | Louët Feisser, Arnold A. A., 13-5-'45. |
| 33. Hengelo (O), Gemeentelijke HBS | Robers, Jochem C. B., 16-9-'46. |
| 34. Hengelo (O), Gemeentelijke HBS | Wevers, Hendrik, 4-4-'46. |
| 35. 's-Hertogenbosch, St. Janslyceum | Stehmann, L. J., 30-4-'43. |
| 36. Hoogeveen, Menso Alting Lyceum | Kikkers, Roelof, 26-4-'44. |
| 37. Hoorn, St. Werenfridus-lyceum | Sneek, Jacobus J., 28-3-'45. |
| 38. Leeuwarden, Chr. HBS | Bos, Jan Engbert, 9-2-'44. |
| 39. Leeuwarden, Chr. HBS | de Boer, Frans, 5-4-'45. |
| 40. Leiden, Chr. Lyceum | Nieuwenhuis, Gerard Joh., 10-6-'46. |
| 41. Nijmegen, St. Dominicuscollege | Terra, Alfred H., 15-5-'45. |

°ENKELE INTERESSANTE KROMMEN - V

In de eerste jaargang werd in elk der nummers een interessante kromme besproken. Daarbij werd beschreven, hoe deze met passer en liniaal geconstrueerd konden worden. De ware liefhebbers bleken daarmee echter niet tevreden te zijn, zodat we bijv. op zekere dag van Leendert Klein Haneveld, leerling van het Chr. Lyceum te Stadskanaal, een briefje kregen, waarin hij meldde, dat hij een instrument had vervaardigd om cycloïden en trochoïden mechanisch te tekenen. Deze krommen werden besproken in de nummers 3 en 4 van de eerste jaargang.

Op de binnenzijde van de omslag hebben we een foto van het apparaat laten plaatsen, terwijl we hieronder nog een korte beschrijving zullen geven. Eerst echter voor de nieuwe abonnees nog iets over de cycloïden en trochoïden.

In Pythagoras I-3 lezen we:

Als een wiel over een weg rolt, ondergaat elk punt daarvan twee bewegingen, nl. een voortgaande, evenals elk punt van het voertuig en een draaiende. Het gevolg daarvan is, dat het een fraai gebogen lijn beschrijft, die cycloïde heet. Als in fig. 1 het punt B_1 op de plaats van B_2 gekomen is, is A_1 op de plaats gekomen, aangegeven met A_2 . A_1 en A_2 zijn dus punten van de door het punt A van het wiel beschreven cycloïde. Het punt P, in fig. 1 op het verlengde van de „spaaak”

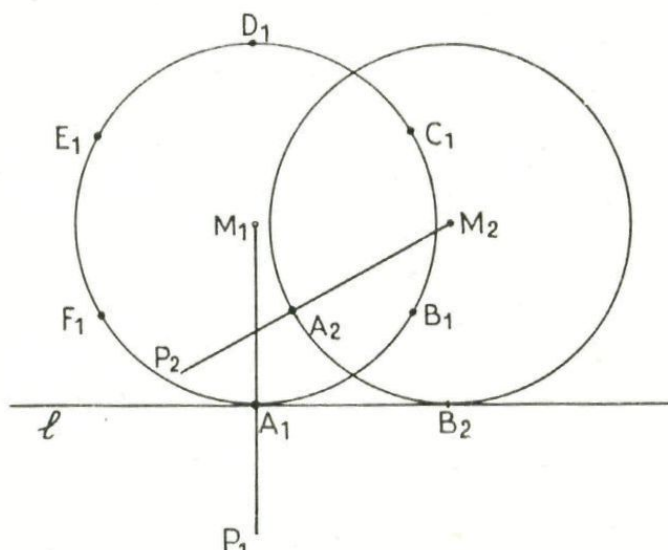


Fig. 1

MA van het wiel getekend, beschrijft bij het draaien van het wiel ook een interessante kromme, die trochoïde wordt genoemd. Trochoïden worden beschreven door punten op de omtrek van een wiel van een spoorwagon. Deze punten bewegen zich bij een vooruitrijdende trein telkens een tijdje in achterwaartse richting.

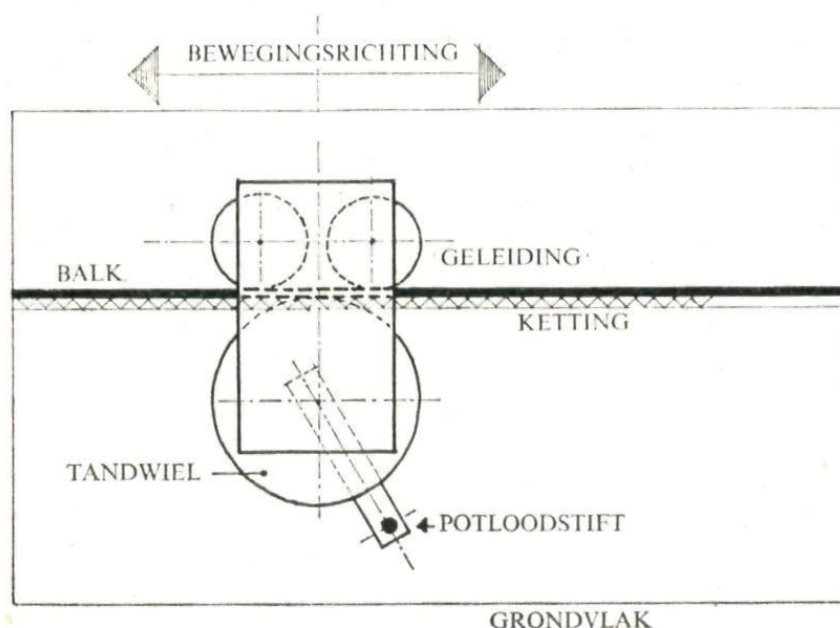
Leendert heeft met zijn instrument enkele cycloïden en trochoïden getekend. Deze zijn op de foto mee afgebeeld. Hier volgt nu de beschrijving van het uit meccano-onderdelen gebouwde apparaat.

Er moest een draaiend wiel zijn en de baan van een punt van dat wiel moest opgetekend worden. Voor het draaiende wiel werd een tandwiel gekozen, dat langs een ketting kan bewegen. Om deze beweging regel-

matig te doen zijn, werd het tandwiel bevestigd aan een „wagentje”, dat met twee rubberwielmpjes langs een steunbalk kan rijden.

Aan het tandwiel zijn twee strips bevestigd, die met het wiel kunnen draaien. Aan deze strips kan op verschillende plaatsen een dwarsstrip bevestigd worden, waarin zich het potlood bevindt, dat de krommen tekent.

In fig. 2 is dit, ietwat vereenvoudigd, afgebeeld. De potloodstift is in deze figuur zo geplaatst, dat er een trochoïde mee getekend kan worden. Willen we een cycloïde tekenen, dan moeten we de potloodstift precies onder een tand van het tandwiel plaatsen.



Hoe dichter we de potloodstift naar het middelpunt van het tandwiel schuiven, des te „vlakker” wordt de beschreven kromme. We zien dat duidelijk op de foto. De kromme nadert tot de rechte

Fig. 2

WE BLADEREN DIT NUMMER EVEN DOOR

Om te beginnen willen we met de nieuwe abonnees even bekijken, wat de tekens bij de titels van de artikelen betekenen. Ze hebben betrekking op de moeilijkheid van de bijdragen. De moeilijkste artikelen hebben het teken ^{ooo} bij de titel. Ze zijn bedoeld voor hen, die de vierde of vijfde klas van een hbs of gymnasium bereikt hebben. De artikelen met ^o bij de titel zijn begrijpelijk voor eerste- of tweedeklassers, terwijl die met ^{oo} weer wat moeilijker zijn.

De bespreking van de interessante krommen in elk nummer van de vorige jaar onder- vond nogal veel waardering. In dit nummer komen we nog eens op een der besproken krommen terug. De herdenking van de sterfdag van Blaise Pascal mocht in ons tijdschrift niet ontbreken. Deze is tevens een inleiding tot een artikelenreeks over Projectieve Meetkunde. Verder begint een serie over het getal „e” en over kansrekening (de „Monte-Carlo-methode”). De bespreking van een mooie plaat van de graficus Escher vormt het middendeel van dit nummer, dat verder nog wat kleine bijdragen telt en natuurlijk de „Denkertjes”, waarmee weer een boekenbon van f 2,50 te verdienen is. De prijs voor de oplossingen van de opgaven in jaargang I No. 4 is toegewezen aan Jan Geert Hamelberg te Haren (Gr.).

lijn, die beschreven zou worden, als de potloodstift zich juist onder het middelpunt van het wiel zou bevinden.

We hopen, dat veel lezers door het voorbeeld van Leendert Klein Haneveld gestimuleerd zullen worden. Als ze iets dergelijks gepresteerd hebben, moeten ze het ons maar eens melden.

In de vorige afleveringen van „Interessante krommen” gaven we altijd de constructie van de kromme, die de volgende maal besproken zou worden. Deze keer willen we daarvan afwijken. Wel willen we alvast verklappen hoe het volgende artikel zal beginnen. Misschien wordt iemand nieuwsgierig en gaat hij eens kijken in de vensterbank, waar dus ook al wiskunde te vinden is. Hier is het begin van het volgende artikel:

„Archimedes maakte zijn meetkundige figuren met een stok in het zand van de vloer. Misschien maak jij ze met een ballpoint op een blocnote. Vandaag wil ik je vertellen over krommen, die door een ijzeren staaf worden gekrast in de verf van een vensterbank”.



°Blaise Pascal

Op 19 augustus van dit jaar heeft men allerwegen herdacht, dat 300 jaar geleden in Parijs Blaise Pascal overleed. Artikelen in kranten en tijdschriften gaven beschrijvingen van zijn korte leven (hij werd slechts 39 jaar) en kenschetsten zijn invloed op wetenschap en cultuur, niet alleen van zijn tijd, maar ook van de onze.

Er zijn drie gebieden, waarop Pascal zijn invloed heeft doen gelden: de wiskunde, de natuurkunde en de theologie. Hij heeft zeer diep nagedacht over de godsdienst en was van plan daarover een groot boek te schrijven. Hij begon met het maken van aantekeningen op losse blaadjes papier. Deze aantekeningen, waaraan hij jaren lang verder werkte en die hij telkens weer veranderde en „bijsleep”, zijn na zijn dood door zijn vrienden verzameld en onder de titel „Pensées” uitgegeven. Deze „Gedachten” hebben telkens weer de lezers tot nadenken gebracht en alleen daarom al is de betekenis van Pascal groot.

Wij willen ons vanzelfsprekend bezighouden met zijn betekenis voor de wiskunde. Pascal was, evenals zijn vader, een groot liefhebber van deze wetenschap. Zelfs toen zijn vader het beter achtte, dat hij er een poos lang geen aandacht aan gaf, om zich eerst aan de studie van andere vakken te kunnen wijden, kon hij het niet laten om „stiekem” toch allerlei meetkundige stellingen af te leiden. Pascals vader, die

ambtenaar bij de belastingen was, verkocht in 1631 dat ambt en vestigde zich met zijn gezin in Parijs, zodat zijn zoon aan het wetenschappelijke leven daar kon deelnemen. De jonge Blaise maakte nu kennis met de beroemde geleerden van zijn tijd, zoals pater Mersenne en de wiskundige Desargues. Het gevolg was, dat zijn geniale aanleg voor wiskunde kans kreeg zich volledig te ontplooien. Al op 16-jarige leeftijd publiceerde hij een verhandeling over een stelling, die de bewondering van zijn tijdgenoten wekte. Deze stelling, die later „Stelling van Pascal” werd genoemd, is van grote invloed geweest op de ontwikkeling van een tak van wiskunde, die tegenwoordig *projectieve meetkunde* heet.

Over de projectieve meetkunde zullen enkele artikelen volgen. De stelling van Pascal zal daarin besproken worden. Echter zullen de lezers het wel interessant vinden nu al met deze stelling kennis te maken.

Stelling van Pascal:

Kies op een cirkel 6 willekeurige punten. Nummer ze op willekeurige wijze van 1 tot en met 6. Zie fig. 3, waarin deze punten zo zijn gekozen, dat alles goed op het papier komt. Trek nu de lijnen 1-2 en 4-5, zet P bij hun snijpunt. Ook de lijnen 2-3 en 5-6, zet Q bij hun snijpunt. Tenslotte de lijnen 3-4 en 6-1, zet R bij hun snijpunt. Nu liggen P, Q en R op één rechte.

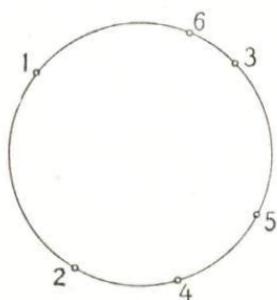


Fig. 3

Het mooie is nu, Pascal zag dat ook in, dat deze stelling eveneens geldt, als men inplaats van de cirkel een ellips, parabool of hyperbool kiest. Zelfs een paar snijdende of evenwijdige lijnen kan men inplaats van de cirkel kiezen. De projectieve meetkunde maakt dit duidelijk. De genoemde krommen of lijnenparen zijn nl. allen kegelsneden. Daarover echter later meer, evenals over bijzondere gevallen, die zich bij deze stelling kunnen voordoen, bijvoorbeeld, dat twee verbindingslijnen elkaar niet snijden, maar evenwijdig lopen of dat twee hoekpunten samenvallen.

Pascal op een postzegel

Ter herdenking van Blaise Pascal hebben de Franse posterijen een postzegel uitgegeven. In het linker-deel daarvan zijn symbolen afgebeeld, die wijzen op zijn wiskundige werkzaamheden, o.a. de ontdekking van eigenschappen der kegelsneden en het uitvinden van een rekenmachine. In het rechter deel wordt herinnerd aan Pascals worsteling met godsdienstige problemen.



°°Projectieve Meetkunde I

Wat projecteren is, zien we het gemakkelijkst bij een projectielantaarn. Van de prent op de dia wordt een beeld geworpen op het projectiescherm. Dat beeld is een vergroting en gelijkvormig met de prent. Wanneer we in de meetkunde over projecteren praten, dan hoeft dat gelijkvormig zijn van beeld en origineel er niet bij te zijn. Het is er in de meeste gevallen zelfs niet bij.

We onderscheiden in de meetkunde twee belangrijke manieren van projecteren, nl. centrale projectie en evenwijdige projectie (parallelprojectie). Dat deze eigenlijk één manier van projecteren zijn, zullen we later zien.

Centrale projectie is projecteren van een centrum uit. Een aardig voorbeeld daarvan geeft de fietslamp, als je even aanneemt, dat het licht daarvan precies uit één punt komt. De lamp projecteert van de cirkelvormige rand een beeld op de weg. Dat beeld is in het algemeen geen cirkel. Ga maar even na, hoe je lamp op de fiets gemonteerd moest zijn, wil je een cirkelvormig beeld van deze rand op de weg zien. In fig. 4 is de lamp zo gemonteerd, dat het beeld van de rand een ellips wordt. Je ziet daaraan, dat bij dit projecteren origineel en beeld niet gelijkvormig zijn. Je zou kunnen zeggen, dat het beeld in dit geval een eenzijdig uitgerekte afbeelding van het origineel is.

Wanneer we met zwarte inkt een driehoek op het glas van de lamp maken, dan zal het beeld van deze driehoek dus ook een andere vorm hebben dan het origineel. Is de originele driehoek gelijkzijdig, dan zal het beeld misschien nog gelijkbenig zijn, maar zelfs dat hoeft niet.

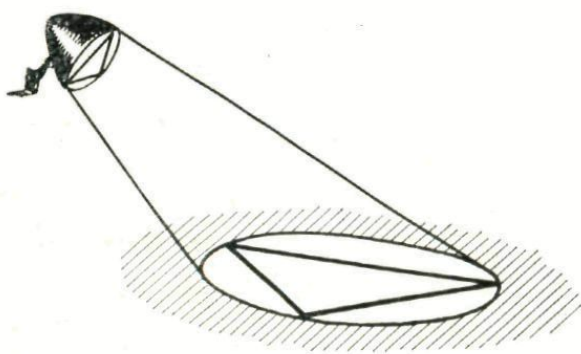


Fig. 4

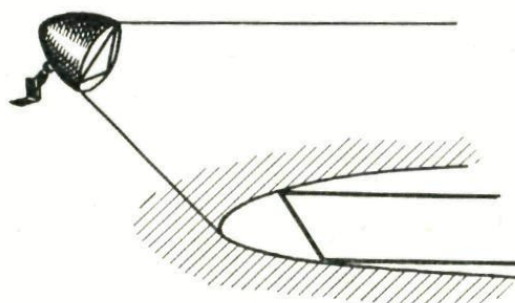


Fig. 5

In fig. 5 is de lamp zo geplaatst, dat de „bovenste” lichtstraal evenwijdig is met het wegdek. Het beeld van de cirkelvormige rand van de lamp is niet meer een gesloten kromme, maar een parabool. De driehoek kan als beeld hebben een lijnstuk met twee evenwijdige halve rechten. (Waar moet de top van de driehoek dan op de lamp liggen?)

Wanneer door zonlicht een schaduw van een voorwerp op een muur wordt geworpen, dan is dit te vergelijken met evenwijdige projectie. Weliswaar zijn de zonnestralen niet echt evenwijdig, maar voor ons benaderen ze de evenwijdigheid zeer dicht. Zonnestralen kunnen loodrecht invallen (op de evenaar) of scheef. Zo kan ook parallelprojectie loodrecht of scheef zijn. Is bij elke parallelprojectie het beeld gelijkvormig met het origineel?

Parallelprojectie heeft een bijzondere eigenschap, die centrale projectie niet heeft: Wanneer een lijnstuk AB met zijn midden M wordt geprojecteerd, dan is bij parallelprojectie het beeld M' van M weer het midden van het beeld $A'B'$ van AB . (Zie fig. 6.) Daarom is bij parallelprojectie het beeld van een parallellogram weer een parallellogram (de diagonalen blijven elkaar middendoordelen), dus ook het beeld van twee evenwijdige lijnen weer twee evenwijdige lijnen. Maar niet altijd is het beeld van een ruit weer een ruit. (De rechte hoek van de diagonalen hoeft niet recht te blijven.)

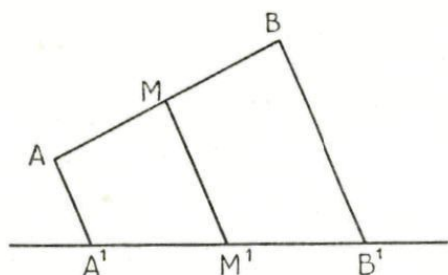


Fig. 6

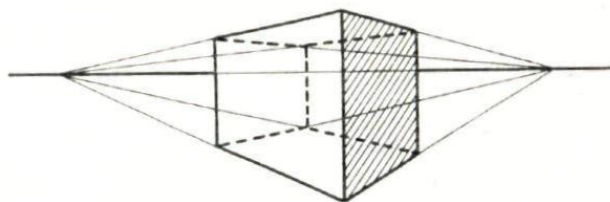


Fig. 7

De eigenschappen „evenwijdig lopen” en „het midden van een lijnstuk zijn”, zijn bij parallelprojectie *invariant*. D.w.z. dat ze blijven bestaan. De eigenschap „loodrecht op elkaar staan” daarentegen niet.

De twee eigenschappen, waarvan we hierboven zagen, dat ze bij parallelprojectie invariant zijn, zijn dat bij centrale projectie niet.

Je ziet dan het beste bij een perspectivische afbeelding van een kubus. Perspectivisch afbeelden is ook een soort van centraal projecteren: het oog is dan het centrum. De vierkante zijvlakken van de kubus hebben als beeld zelfs niet meer parallellogrammen (zie fig. 7). De oorspronkelijk evenwijdige ribben hebben als beelden lijnstukken, die niet meer evenwijdig zijn. Wel hebben deze lijnstukken een bijzonderheid: de rechten, waartoe ze behoren (die in het origineel dus evenwijdige rechten zijn) gaan alle in het beeld naar één punt (op de horizon).

In de projectieve meetkunde nu worden eigenschappen van figuren bestudeerd, die bij projecteren invariant zijn. Op het eerste gezicht zijn er dat niet veel. In het volgende artikel zal zo'n invariante eigenschap besproken worden.

°°HET DELISCHE PROBLEEM I

DE VERDUBBELING VAN DE KUBUS

Drie wiskunde-problemen uit de Griekse oudheid hebben een zekere vermaardheid verkregen, omdat de oplossing ervan niet gelukte.

Eerst in onze tijd zijn de nevels die rond deze problemen hingen, opgeklaard.

Deze problemen zijn: de kwadratuur van de cirkel,
de trisectie van de hoek en
de verdubbeling van de kubus.

Over het laatste wordt hier iets verteld.

I. HET PROBLEEM.

Er bestaan verschillende legenden over het ontstaan van het probleem. Een ervan verhaalt, dat een orakel aan de Deliërs opdracht gaf om een kubusvormig altaar te vergroten, zodat de inhoud verdubbeld werd en de kubusvorm behouden bleef.

Eigenlijk was dit helemaal niet zo moeilijk en we zullen twee van de vele oplossingen die er voor bestaan geven.

Deze oplossingen zijn echter niet „volgens de spelregels”.

Deze vroegen:

1. een absoluut nauwkeurige (een exacte) oplossing;
2. een constructie die alleen met passer en liniaal uitgevoerd kan worden.

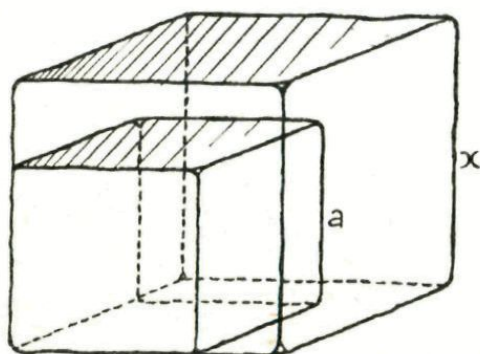
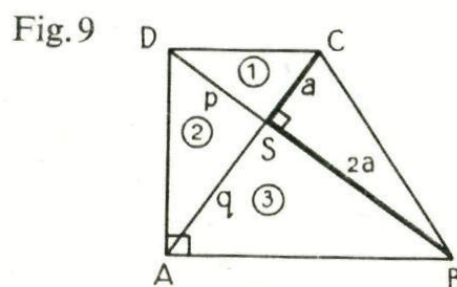


Fig. 8



2. EEN EXACTE OPLOSSING VAN PLATO. (Deze wordt ook wel aan Hippocrates toegeschreven).

Stel dat de gegeven kubus een ribbe heeft met lengte a en de gevraagde kubus een ribbe met de lengte x .

Dan kunnen we het probleem als volgt omschrijven:

Gegeven: a ;

Construeer: een x die voldoet aan $x^3 = 2a^3$;

Plato gaf hiervoor de volgende eenvoudige oplossing:

Denk je een rechthoekig trapezium ABCD waarin de diagonalen loodrecht op elkaar staan (fig. 9).

Als we SC de lengte a geven en SB de lengte $2a$, dan zal DS gelijk zijn aan de gevraagde x .

Dit zullen we eerst bewijzen.

De driehoeken [1], [2], [3] zijn gelijkvormig (toon dat aan).

$$\text{Daaruit volgt: } \frac{a}{p} = \frac{p}{q}, \text{ dus } p^2 = qa \quad (1)$$

$$\text{en: } \frac{a}{p} = \frac{q}{2a}, \text{ dus } q = \frac{2a^2}{p} \quad (2)$$

Vullen we (2) in (1) in, dan zien we $p^2 = \frac{2a^3}{p}$ of $p^3 = 2a^3$.

Daaruit volgt, dat p het gevraagde lijnstuk is.

De vraag is nu, of het mogelijk is een dergelijk trapezium te construeren, als a gegeven is.

Dit kan niet met passer en liniaal gebeuren. Daardoor voldoet deze constructie niet aan de tweede der genoemde „spelregels”.

De volgende constructie is echter wel mogelijk (zie fig. 10):

Teken twee rechten m en n , die elkaar in S loodrecht snijden. Pas op m af SC = a en op n SB = $2a$. We moeten nu op m het punt A en op n het punt D zo vinden, dat vierhoek ABCD het in fig. 9 afgebeelde rechthoekige trapezium wordt. Leg daarvoor een tekendriehoek T met een der rechthoekszijden langs de binnenkant van een tekenhaak H. Het is nu mogelijk door T langs H te verschuiven en bovendien T en H samen te draaien, ze zo te leggen, dat T door C gaat, H door B en bovendien het hoekpunt D van T op n en het hoekpunt A van H op m komt te liggen. Dan is CD het gevraagde lijnstuk x .

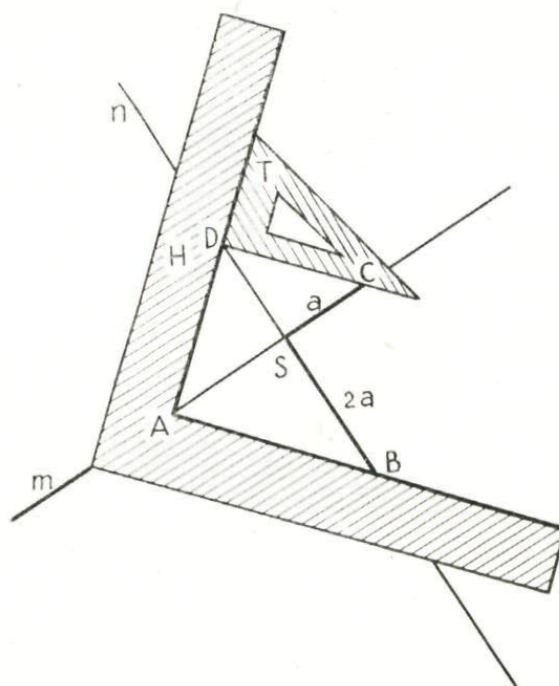


Fig. 10

Als we deze constructie ideaal zouden kunnen uitvoeren, d.w.z. zonder de onnauwkeurigheden, die we bij elke constructie maken (ook bij de constructies, die alleen met passer en liniaal uitgevoerd worden), dan zou daardoor x volkomen nauwkeurig bekend zijn.

In het volgende nummer wordt een oplossing gegeven, die wel met passer en liniaal uitvoerbaar is, maar die het lijnstuk x slechts bij benadering geeft, ook wanneer de constructie ideaal uitgevoerd zou worden.



OPLOSSINGEN
 HIERVAN
 KUNNEN WORDEN
 INGEZONDEN

20. Men kan tussen de getallen 2, 3, 4 en 5 zo de tekens $-$, $+$, $\times$ of $:$ plaatsen, dat de uitkomst van de berekening 28 wordt. Bijvoorbeeld:

$$(2 \times 5 - 3) \times 4 = 28.$$

Probeer dit eveneens met de getallen:

3, 4, 5 en 6 en met 4, 5, 6 en 7 en met 5, 6, 7 en 8.

Ingezonden door Ludo Roemendaal, St. Lievenscollege, Antwerpen.

21. Het is mogelijk het getal 11 te schrijven als een combinatie van machten van 4,

bijv.: $11 = \frac{4^2 + 4 + 4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}}$ (Inplaats van $4^{\frac{1}{2}}$ kan men ook schrijven $\sqrt{4}$).

Probeer dit zo te doen met alle getallen van 1 tot en met 15.

Ingezonden door Guus Vermeire, 4e hbs, St. Franciscuscoll., Rotterdam.

22. Gegeven een cirkel met een middellijn, maar niet met het middelpunt. Verder is een punt P binnen de cirkel gegeven.

Construeer het spiegelpunt van P ten opzichte van de middellijn, alleen met de liniaal.

Ingezonden door J. H. Schurink, Gymn. 4B, 1e V.C.L., Scheveningen.

23. Drie heren A, B en C bevinden zich in een donkere kamer, waar twee witte en drie zwarte hoeden liggen. Zij nemen elk een hoed, zonder de kleur daarvan te kunnen zien en zetten die op. Dan gaan zij buiten op een rijtje in het licht staan en wel zo, dat C de hoed van A en B kan zien, B de hoed van A en A geen van de drie.

Dan zegt C: Ik ken de kleur van mijn hoed niet.

Daarop zegt B: Ik weet evenmin welke kleur mijn hoed heeft.

En A zegt dan triomfantelijk: Dan weet ik welke kleur mijn hoed heeft.

Nu is de vraag: Welke kleur heeft de hoed van A en hoe kon hij dat weten?

Ingezonden door Paul Van Autrive, Ite Wetensch. St. Norbertusinst., Antwerpen, en (met iets andere woorden) door Loes ten Brink, 5 Gym B Hengelo.



°Hol en Bol

naar aanleiding van een wonderlijke prent van M.C. Escher

Als wij fig. 11 bekijken valt het ons moeilijk om slechts datgene te zien, wat er getekend staat nl. drie congruente ruiten, of als je wilt een regelmatige zeshoek met drie halve diagonalen. We interpretern de hele afbeelding onmiddellijk als een ruimtelijke figuur.

Het wonderlijke is nu, dat figuur 11 twee heel verschillende ruimtelijke figuren in ons kan oproepen en dat, bij aandachtig bekijken, nu eens de ene, dan weer de andere ruimtefiguur gezien wordt.

Let eens op het middelpunt van de zeshoek. Als je dit opvat als het dichtstbijzijnde punt van de ruimtefiguur is het een kubus, waarvan een hoekpunt naar ons toegericht is. Vat je dit punt op als het punt, dat het verste van ons af ligt, dan kijk je *in* een kubus. In het eerste geval komen de drie vlakken naar je toe en in het tweede gaan ze van je af. Je zou het ook zo kunnen uitdrukken: in het eerste geval zien we de figuur bol en in het tweede geval hol.

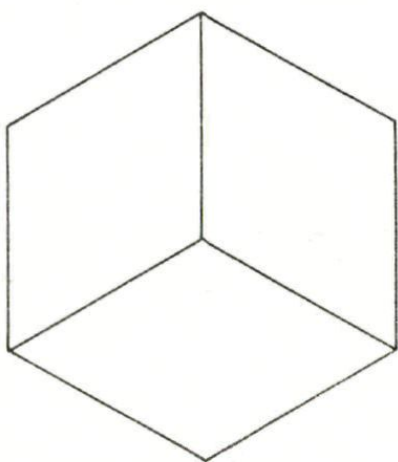


Fig. 11

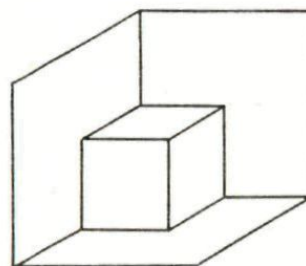


Fig. 12

In figuur 12 zijn twee van dergelijke figuren in elkaar getekend. Elke figuur laat twee ruimtelijke interpretaties toe, zodat de hele afbeelding vier verschillende ruimtelijke figuren kan voorstellen. Probeer deze eens te zien. Drie ervan springen gemakkelijk in het oog, maar de vierde is erg ongewoon.

Figuur 13 laat theoretisch heel wat interpretaties toe. Het verband tussen de verschillende onderdelen is echter zo sterk, dat er maar twee gezien kunnen worden. Stel je eerst maar eens voor dat het een stuc-versiering is aan het plafond en denk daarna, dat het hele geval op de grond staat. Ook de trap van figuur 14 kun je hangend of staand zien.

De graficus M.C. Escher heeft op dit thema een prachtige prent gemaakt met de titel: hol en bol. De prent is symmetrisch opgebouwd. Aan de linkerkant is door schaduwwerking en door de kleine figuurtjes: de vrouw met een mand, de slapende jongen, de arbeider, de takel, de bloempot, de hagedis enz. de suggestie gewekt dat het geval „bol staat”. Als je de rechterkant van de figuur afdekt met een stuk papier is het ook onmogelijk het anders te interpreteren. Op een geraffineerde manier is de rechterhelft van de prent zo getekend, dat je het alleen maar als „hol” kunt interpreteren.

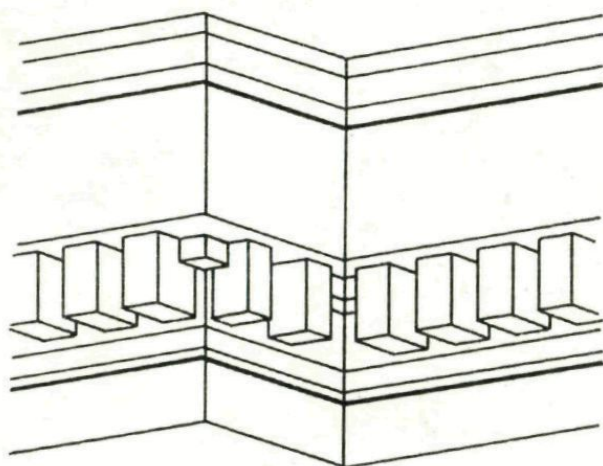


Fig. 13

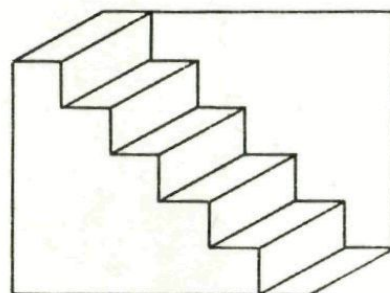


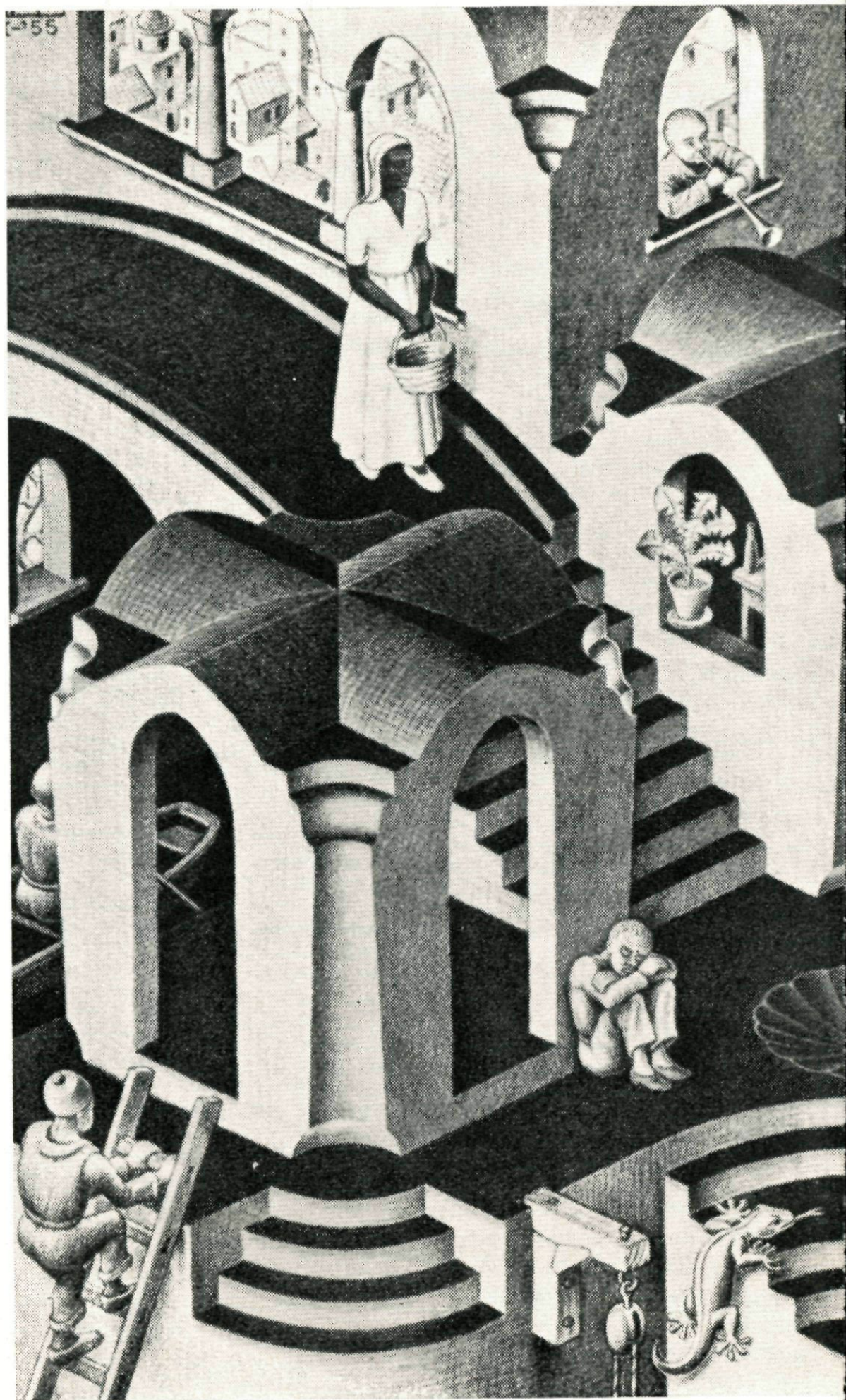
Fig. 14

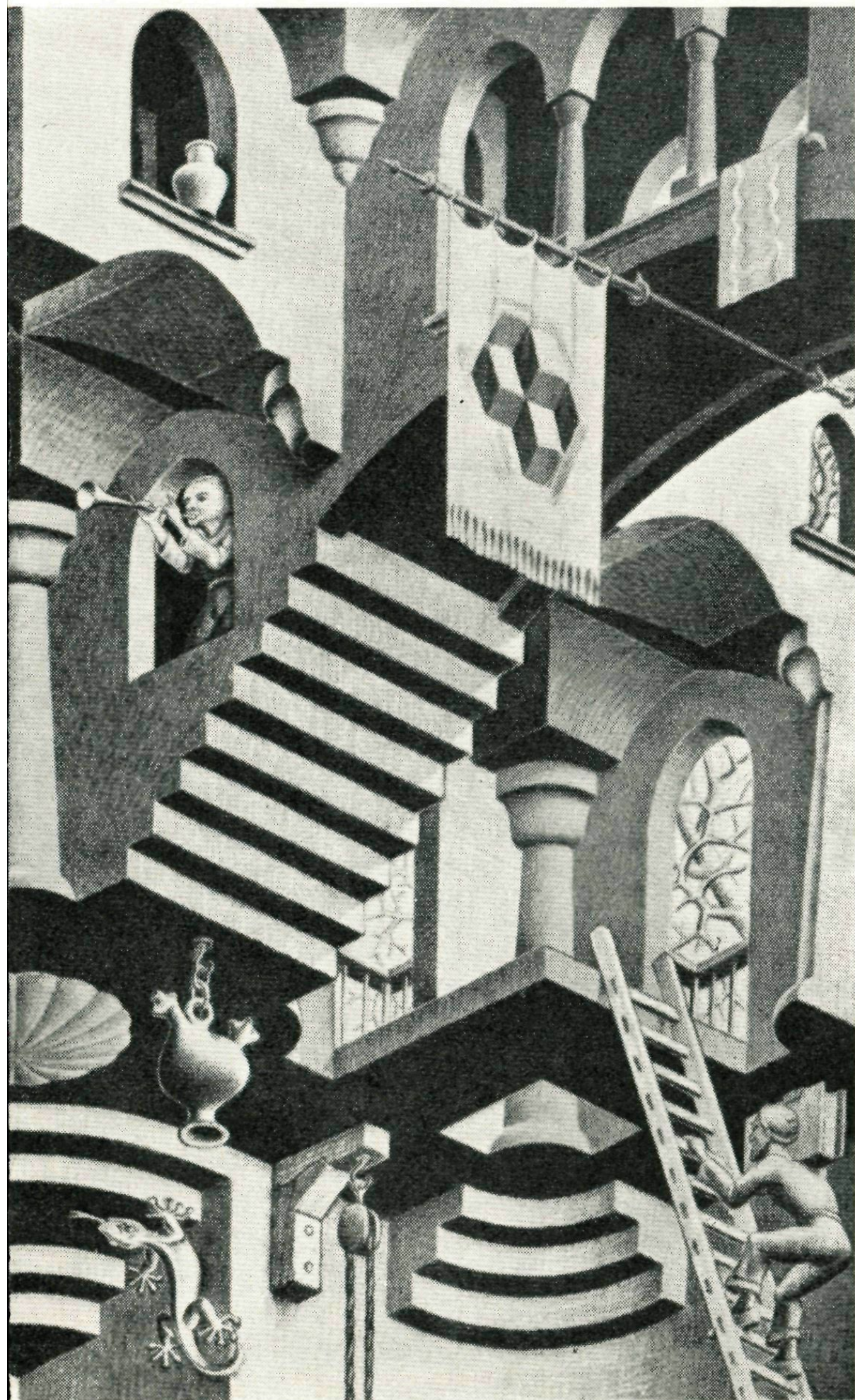
Het wonderlijke is nu, dat je bij het kijken van links naar rechts, de interpretatie: „bol” een tijd lang kunt volhouden in het „holle” gebied. Zo kun je bijvoorbeeld met de vrouw de trap aflopen, op het platform met het schelpvormige bekken blijven staan en dan een trap aan de rechterkant oplopen, tot je ontdekt dat dit helemaal geen trap is maar een brug. Maar dan is het te laat en je hangt op een rare manier tegen de onderkant van de brug aan.

Begin je echter met aan de rechterkant onder tegen de brug aan te kijken, dan beleef je weer een andere vreemde gebeurtenis als je bij de slapende jongen gekomen bent.

Dit is slechts een voorbeeld van de vele wonderlijke belevenissen die je, al dwalende door deze vreemde ruimte-suggestie van Escher kunt beleven. Onder aan de brug, rechts, is op een vlag het thema aangebracht waarop de prent berust.

Maar probeer nu niet de hele prent in aaneensluitende kubussen op te delen, dat lukt je niet want.... het onderliggende lijnenschema is veel ingewikkelder dan op de vlag staat aangegeven. Alleen de drie „kappelletjes” zijn zonder meer als holle of bolle kubussen getekend.





°PLATLANDERS - V

Een vondst, een landmeter waardig;
grenzeloos, maar toch niet oneindig groot.

In de eerste jaargang stond een „vervolgverhaal” over Plattelanders, dat in deze jaargang wordt voortgezet. Ten behoeve van ons nieuwe lezers geven we in het kort de geschiedenis uit de vorige artikelen weer:

Platlanders zijn wezentjes, die in een wereld leven, die alleen lengte en breedte kent, maar geen hoogte. In deze wereld kunnen ze zich naar alle kanten bewegen, maar niet „naar boven of beneden”. Een Platlander, die zijn gehele leven gewoond had in een *plat* vlak, werd door ons tot zijn grote verbazing overgebracht naar een gebogen vlak, nl. een biljartbal. Dat hij daar allerlei vreemde verschijnselen opmerkte is te begrijpen. In de laatste aflevering van het verhaal vonden we onze vriend bij een lezing van een geleerde die ook de biljartbal bewoonde en die enkele van deze verschijnselen trachtte te verklaren door de veronderstelling, dat de biljartbal „gekromd” was. (Men moet weten, dat de afmetingen van onze Platlanders vergeleken bij de biljartbal zo klein zijn, dat ze deze net zo min kunnen overzien, als wij de aarde).

Tijdens deze lezing begon onze vriend iets te begrijpen van het verschil tussen zijn vorige wereld en de nieuwe, waarin hij zich zo vreemd voelde. Hij kon niet laten uit te roepen in de vergadering: „Beslist, Uw wereld is gekromd en de mijne was het niet. Ik heb er de bewijzen voor!” Hij verwekte daarmee nogal opschudding. Een aanwezige arts constateerde een lichte overspanning en schreef hem daarom rust voor.

Onze Platlander legde zich niet neer bij de conclusie van de arts. Hij was helemaal niet overspannen. Integendeel.

Dat hij wat vreemd had staan schreeuwen in die zaal was misschien ondoordacht geweest; hij had beter na afloop eens rustig kunnen gaan praten met Prof. Stein.

Die zou zijn argumenten begrepen hebben.

Er bleef dan alleen nog dat vreemde dat hij oorspronkelijk uit een andere wereld kwam.

Onze Platlander zou nu bewijzen dat het platland-heelal waarin hij nu verbleef gekromd was.

Als dit heelal gekromd was, zoals het lijnland van de cirkelbewoner, waarover Prof. Stein gesproken had, zou het ook niet oneindig groot zijn. Het zou wel grenzeloos kunnen zijn: het hield nergens op.

Als hij nu eens, te beginnen bij zijn huis, puntbakens zou uitzetten. Telkens weer nieuwe op zulke afstanden van elkaar, dat vanuit elk baken alle omringende bakens duidelijk te zien waren.

Was het heelal eindig, dan zou hij ook maar een eindig aantal bakens nodig hebben om het heelal daarvan te voorzien. Na enige tijd bakens uitgezet te hebben in alle richtingen, zou hij tenslotte stuiten op gebied waar al bakens gezet waren (zie fig. 15).

Hoe het met dit plan afgelopen is, kunnen we helaas niet vertellen, want onze Platlander is nu al 10 jaar bakens aan het uitzetten. We kunnen ons wel aan een voorspelling wagen wat betreft het aantal bakens, dat hij nodig heeft, als we de straal van de bol kennen en de onderlinge afstand tussen de puntbakens.

Maar laten we het eens vertalen in onze eigen wereld.

Dat de aarde bolvormig en dus het aardoppervlak onbegrensd, maar niet oneindig groot is, weet de mensheid al eeuwen lang. Maar stel nu eens, dat wij dit wilden uitmaken door het uitzetten van bakens. Daarvoor denken wij ons een aardoppervlak zonder water en zonder bergen of heuvels. Nemen we ook aan, dat de bakens vanaf een afstand van 10 km nog duidelijk te zien zijn. Verder heeft die aarde een straal van 6000 km.

Hoeveel bakens, denk je, dat er voor een bakennet, dat onze gehele aarde zou bedekken, nodig zouden zijn? Dit is nog niet eens zo'n gemakkelijke opgave.

Je moogt gerust afronden en het probleem op een of andere wijze eenvoudiger maken. Het gaat maar om een ruwe benadering.

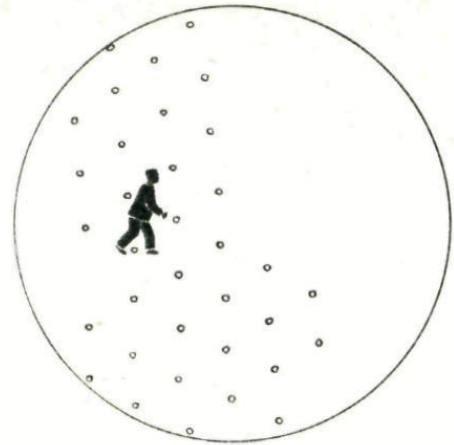


Fig. 15



°°DE MONTE CARLO-METHODE

1. De kans om het witte vlak te raken

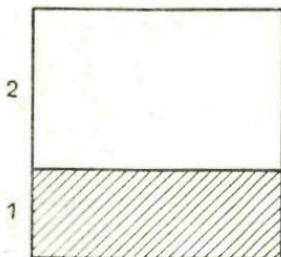


Fig. 16

Als een vierkante „schietschijf” opgesteld staat, waarvan $\frac{1}{3}$ deel zwart geverfd is (fig. 16) is de kans, dat een pijl het witte gedeelte treft twee maal zo groot als de kans, dat de pijl het zwarte deel treft. We gaan hier van de veronderstelling uit, dat *elke* pijl raak is en dat alle punten van de schietschijf een gelijke trefkans hebben.

Als er 600 pijlen afgeschoten worden zullen er dus ongeveer 400 het witte vlak treffen.

We nemen als „schietschijf” een driehoek waarin de zwaartelijnen getekend zijn, die de driehoek in 6 driehoeken verdelen.

Een der driehoeken maken we zwart.

Hoeveel ongeveer van de 600 pijlen zullen de zwarte driehoek treffen?

Als tweede schietschijf nemen we een driehoek met zijden van 3, 4 en 5 dm. De bissectrice uit de rechte hoek verdeelt de driehoek in 2 driehoeken. Hoeveel van de 600 pijlen zullen ongeveer in elke driehoek komen?

2. Pijlen schieten om een oppervlakte te berekenen

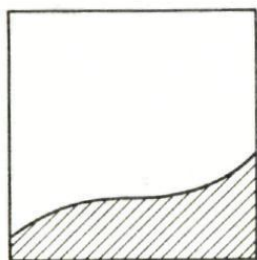


Fig. 17

Nu keren we de zaak om.

Op het vierkant is een kromme getekend (fig. 17).

Onder de kromme is het vierkant zwart geschilderd.

We schieten 1000 pijlen af op het vierkant.

372 treffen het zwarte deel. De rest het witte.

Hoe verhouden zich beide oppervlakken, waarin de kromme het vierkant verdeelt?

3. „Wiskundig pijlen schieten”

Een wiskundige schiet geen pijlen af, tenminste niet als wiskundige.

Hij heeft andere pijlen op zijn boog.

Hij bootst dit pijlen-afschieten op de volgende wijze na (fig. 18).

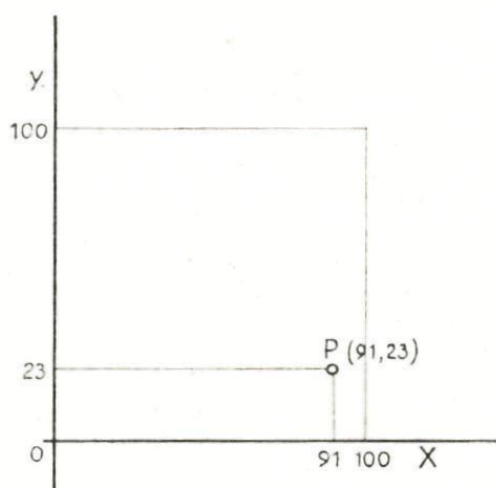


Fig. 18

In de linker-onderhoek van het vierkant leggen we de oorsprong van een assenkruis.

Elk punt van het vierkant wordt bepaald door 2 getallen.

We maken nu een dubbel stel kaartjes, genummerd van 1 t/m 99.

We noemen de ene serie van 99 kaartjes serie A, de andere serie B.

We schudden serie A en serie B, zodat de getallen binnen elke serie een willekeurige volgorde hebben.

Nu nemen we telkens één kaartje van serie A en één van serie B. De beide getallen, die daarop staan, vormen samen de coördinaten van een punt op onze schietschijf.

Trekken we b.v. uit serie A een 91 en uit serie B een 23, dan is hierdoor het punt P (91, 23) bepaald.

4. Willekeurige getallen

Deze wijze van nabootsen van een willekeurige treffer gaat nog wat moeizaam. We kunnen ons het maken en trekken van de kaartjes besparen. Het gaat er immers alleen maar om, telkens 2 willekeurige getallen onder de 100 met elkaar te combineren.

We kunnen daarvoor ook gebruik maken van tabellen, waarin getallen van 2 cijfers in willekeurige volgorde staan.

Het samenstellen van zulke getallentabellen is niet zo eenvoudig als je misschien denkt.

Er mag geen enkel systeem in de volgorde zitten. Dan alleen kun je deze tabellen „systematisch plunderen”, d.w.z. je kunt eerst telkens 2 opeenvolgende getallen op het rijtje af kiezen, dan combinaties van twee getallen *naast* elkaar, verder combinaties van de eerste met de derde, tweede met de vierde etc.

Zo biedt de beknopte tabel een onuitputtelijke voorraad willekeurige getallen. Men maakt zulke tabellen wel met behulp van elektronische rekenmachines.

TABEL.

14	90	56	86	07	22	10	94	05	58	60	97	09	34	33
39	80	82	77	32	50	72	56	82	48	29	40	52	42	01
06	28	89	80	83	13	74	67	00	78	18	47	54	06	10
86	50	75	84	01	36	76	66	79	51	90	36	47	64	93
87	51	76	49	69	91	82	60	89	28	93	78	56	13	68
17	46	85	09	50	58	04	77	69	74	73	03	95	71	86
17	72	70	80	15	45	31	82	23	74	21	11	57	82	53
77	40	27	72	14	43	23	60	02	10	45	42	16	42	37
66	25	22	91	48	36	93	68	72	03	76	62	11	39	90
14	22	56	85	14	46	42	75	67	88	96	29	77	88	22

5. Oppervlakteberekeningen

Nu heb je alle gegevens bijeen om de oppervlakten van figuren te benaderen. Het zijn niet meer dan de gegevens en de methode moet je zelf uitwerken.

Beproef je krachten op de volgende opgaven:

Bepaal op deze wijze de oppervlakte van de kwartcirkel van fig. 19.

Bereken daaruit een benaderde waarde voor π .

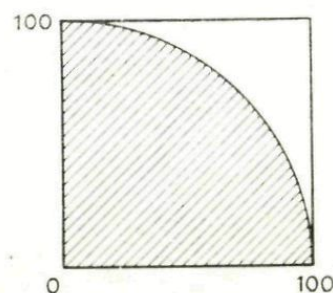


Fig. 19

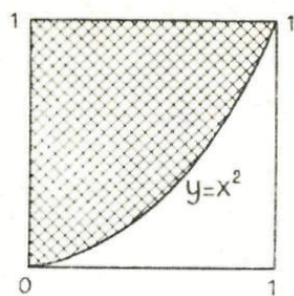


Fig. 20

Bereken de oppervlakte van het gearceerde deel van het paraboolsegment van fig. 20; denk de beide assen hier onderverdeeld in honderdsten.

Wie een nauwkeurigheid van 1 % wil bereiken zal echter ongeveer 10.000 keer moeten „schieten”!

Stuur je oplossingen in.

De bespreking komt in de volgende aflevering.



°Een schitterende kaart-truc

Er zijn ongeloofelijk veel trucs met speelkaarten bedacht; weinig interessante en veel saaie.

Trucs waarbij een stel speciaal behandelde kaarten wordt gebruikt of waarbij de handigheid van de goochelaar een grote rol speelt, zijn wiskundig niet interessant.

De volgende truc is frappant en toch is de verklaring wiskundig en eenvoudig.

Op tafel ligt een spel kaarten onderste boven.

De goochelaar neemt de bovenste 20 kaarten en legt ze met de plaatjes boven weer terug op het spel.

Hij vraagt aan de toeschouwer het pak nu op de normale wijze te schudden, zodat de 20 omgekeerde kaarten op geheel willekeurige plaatsen in het spel komen te zitten. De toeschouwer mag nu het spel onder de tafel houden en 20 kaarten van boven aftellen. Dit pakje van 20 overhandigt hij onder de tafel aan de goochelaar.

Deze zegt: „In mijn pakje zit een aantal omgekeerde kaarten; U noch ik weten hoeveel. Waarschijnlijk zijn er minder omgekeerd dan in het stapeltje (van 32) dat U nog heeft. Zonder te kijken, zal ik nu nog enige kaarten omdraaien om het aantal omgekeerde kaarten van mijn pakje gelijk te maken aan dat van U”.

Daarna leggen goochelaar en toeschouwer hun kaarten op de tafel en tellen het aantal omgekeerde kaarten.

Dit blijkt even groot te zijn?

Wat heeft de goochelaar nu onder de tafel gedaan?

Wie een hekel heeft aan kaart-trucs kan hetzelfde doen met een doosje lucifers. Het omdraaien der kaarten komt dan overeen met het andersom leggen der lucifers. (De kop naar de andere kant.)

De voorjaarsprijsvraag 1962

In nummer 3 van jaargang I werd de volgende opdracht gegeven als voorjaarsprijsvraag:

Een hotelhouder heeft een klein dakterras met uitzicht naar alle windstreken. De mensen komen daar 's zomers graag om van het fraaie uitzicht te genieten. Vanzelf gaan de bezoekers zich interesseren voor de markante punten in het landschap: in welke plaats staat die kerktoeren? Wat is dat voor een gebouw? Waar loopt die weg naartoe? enz. Ten gerieve van de bezoekers wil de hotelhouder midden op het dakterras een panorama-kaart opstellen van de omgeving, zodat ze zelf op kunnen zoeken wat ze in de verte zien. We zouden de hotelhouder kunnen adviseren een kaart van zijn omgeving te kopen bij de Topografische Dienst, maar die kaart heeft een groot nadeel: ze lijkt helemaal niet op wat de bezoeker van het dakterras ziet. Deze ziet nl. alles wat dichtbij is veel groter en gedetailleerder dan wat veraf is. De afstanden krimpen a.h.w. in, hoe dichterbij zijn blik de horizon nadert. Hij zou een kaart willen laten maken, die ook enigszins deze eigenschap vertoont.

De opgave is nu, een of meer manieren aan te geven, waarop zo'n kaart getekend kan worden uitgaande van een gegeven topografische kaart. Bovendien moet je één van deze manieren praktisch uitwerken, dus zo'n kaart maken voor een bepaalde plaats en voor een zelf gekozen hoogte boven de grond.

Het lijkt de redactie, dat ze zich verkeken heeft op de mogelijkheid van zo'n prijsvraag. Er waren nl. maar weinig inzendingen en daaronder geen enkele, die voor de hoofdprijs in aanmerking kwam.

In ieder geval moeten we een zeer zorgvuldige studie vermelden van J.W.D. de Vries, Heymanslyceum B 5A te Groningen, die echter juist langs het goede resultaat heenzeilde. Toch was dit uitstekend werk, dat we graag de tweede prijs toekennen. Verder heeft René Hoenson, gym. VB te Amsterdam een oplossing geschetst met een vrij curieus door hem zelf bedacht instrument. Hij heeft dit echter tot nu toe niet uitgewerkt.

We kunnen hier niet een uitvoerige uitwerking van het probleem geven, maar volstaan met het vermelden van de hoofdzaken van een simpele en niet zo moeilijk uitvoerbare oplossing.

Zoals in fig. 21 blijkt, zal een bezoeker van het terras, als zich dat op de hoogte h boven de aarde bevindt, de kim zien op een afstand r , waarvoor geldt:

$$r^2 = (R + h)^2 - R^2$$

waarin R de straal van de aarde is.

Aangezien h relatief klein is ten opzichte van R , kan men hieruit afleiden, dat $r \approx \sqrt{2Rh}$ (de term h^2 is erg klein).

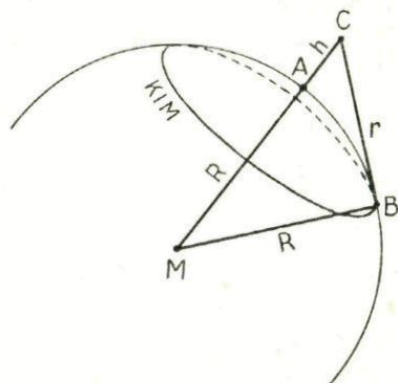


Fig. 21

Nu is $R \approx 6400$ km; stellen we de hoogte van het terras 10 m, dus 0,01 km, dan is dus $r \approx \sqrt{128}$ km $\approx 11,3$ km.

Trekken we op een topografische kaart dus een cirkel met het hotel als middelpunt en met een straal van 11,3 km, dan is het gebied binnen deze cirkel dat, wat de bezoeker op het terras overziet. Verdelen we de cirkel door concentrische cirkels, zoals in fig. 22a zo, dat de straal MA_5 in gelijke delen wordt verdeeld, dan moeten we trachten de panoramakaart zodanig te tekenen, dat de stukken van de straal van M naar A_5 toe geleidelijk kleiner worden. De vraag is, hoe we deze verkleining moeten uitvoeren. We zouden daarbij gebruik kunnen

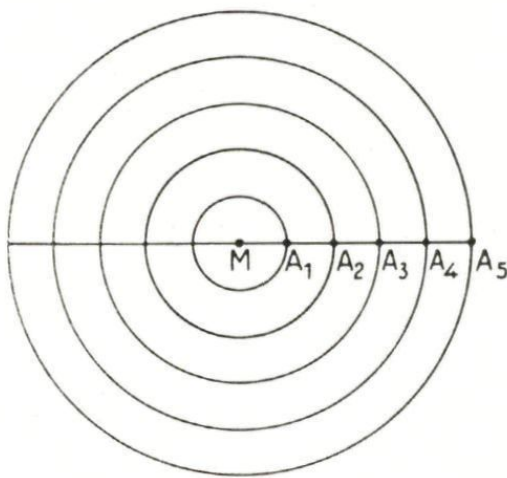


Fig. 22a

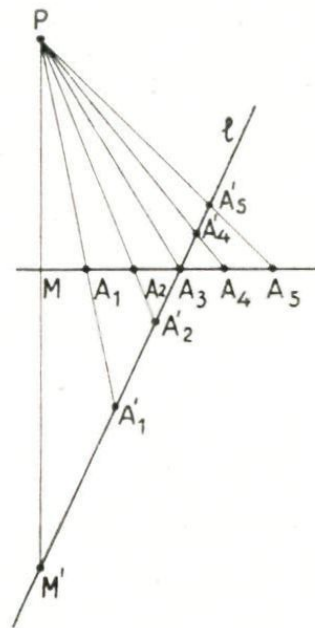


Fig. 22b

maken van centrale projectie (zie het artikel over projectieve meetkunde). In fig. 22b is de in 5 gelijke stukken verdeelde straal MA_5 uit een willekeurig punt P op een willekeurige rechte l geprojecteerd. De stukken $M'A'_1$, $A'_1A'_2$, enz. nemen nu op „natuurlijke” wijze in grootte af. Vanzelfsprekend is de keuze van P en van l erg belangrijk, maar de plaatsruimte laat ons niet toe op de technische uitvoering verder in te gaan. We hopen, dat het principe van deze oplossing althans duidelijk geworden is.



°°° *Getallen, die „GROEIEN” of „AFNEMEN”*

door de Heer J. C. van Rhijn te Vollenhove

In enkele artikelen in jaargang I („Een oppervlaktefunctie met bijzondere eigenschappen”) maakten we kennis met het in de hogere wiskunde zo belangrijke getal e . In de reeks artikelen van de Heer van Rhijn zullen we de kennismaking met e hernieuwen. We ontmoeten het nu echter op een geheel andere manier, zodat ook zij, die de artikelen in de eerste jaargang niet gelezen hebben, die van de Heer van Rhijn zonder bezwaar kunnen bestuderen.

Als n de rij der natuurlijke getallen voorstelt (dus $n = 1, 2, 3, \dots$ enz.), is er iets bijzonders op te merken over de grootte van de getallen g_n , gegeven volgens het voorschrift:

$$g_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Voor $n = 1$ heeft men: $g_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$

Voor $n = 2$ wordt het: $g_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}$

Voor $n = 3$ vinden we: $g_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2\frac{10}{27}$

enz. enz.

Wanneer we voortgaan deze getallen te berekenen, dan merken we het volgende op:

1. de uitkomsten, dus de getallen g_n , worden steeds groter. Op het bewijs hiervan dat nogal meevalt, komen we later terug. Voorlopig stellen we ons ermee tevreden, dat de juistheid van het beweerde blijkt uit iedere „steekproef”, die we nemen op deze getallen uit de rij $g_1, g_2, g_3, \dots, g_n, \dots$ enz.
2. De onderlinge verschillen tussen twee opvolgende getallen uit deze rij worden steeds kleiner naarmate n groter gekozen wordt. Op het bewijs hiervan – dat trouwens aanzienlijk lastiger is – gaan we hier niet verder in. We stellen ons tevreden met de constatering van het genoemde verschijnsel.

Zouden we alleen aan het eerste punt aandacht schenken (dus het simpele feit van het „groeien” van de getallen g_n naarmate n groter wordt gekozen), dan zijn we wellicht te gauw geneigd om te veronderstellen, dat g_n willekeurig groot kan worden, eenvoudig door n maar groot genoeg te kiezen.

Denk maar eens aan een rekenkundige rij met een (positief) verschil v . Al kiest men nu voor v nog zo'n klein positief getalletje, we kunnen dan een rangnummer n kiezen zo, dat zo'n term zo groot wordt, als wij maar wensen. Dit zou natuurlijk ook met ons getal g_n gebeuren, als er op het groeiproces geen rem zou zitten.

Er moet dus werkelijk bewezen worden, dat de onderlinge verschillen steeds zo afnemen, dat deze rem inderdaad aanwezig is.

Geattendeerd op het feit, dat de onderlinge verschillen van twee opeenvolgende getallen g_n kleiner worden naarmate n groter wordt, is het verleidelijk om te veronderstellen, dat dan g_n , hoe groot men n ook neemt, niet boven een bepaalde grootte zal stijgen.

Dat men met zo'n veronderstelling zeer voorzichtig moet zijn, toont het volgende voorbeeld. We construeren een getallenrij van de volgende vorm:

$$S_1 = 1 + \frac{1}{1}$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

.....

$$S_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots \dots \dots + \frac{1}{n}$$

In dit geval zijn we zelfs heel zeker van de volgende overeenkomstige beweringen:

1. De getallen S_n worden groter, naarmate n groter gekozen wordt;
2. De onderlinge verschillen van de getallen S_n en S_{n+1} worden kleiner, als n groter wordt,

m.a.w. het groeien blijft, maar het groeiproces neemt af.

Maar toch kan bewezen worden, dat we S_n boven elk willekeurig getal kunnen doen toenemen, als we n maar groot genoeg kiezen. S_n is nl. *groter* dan:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \dots \left(8 \text{ termen } \frac{1}{16}\right) \dots + \frac{1}{16} + \text{enz.}$$

Dit is gelijk aan

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \text{enz.}$$

en dat kunnen we zo groot laten worden, als we zelf willen.

We keren dan nu terug naar onze getallen $g_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ en moeten vooralsnog het volgende constateren:

1. We weten nog steeds niet hoe het groeiproces van g_n is, d.w.z.: worden voor onbepaald toenemende n de getallen g_n willekeurig groot, of blijven ze onder een bepaalde grens?
2. Opdat de getallen g_n onder een bepaalde grens blijven is het *nodig*, dat de onderlinge verschillen tussen twee opeenvolgende getallen kleiner worden, naarmate n groter wordt, maar *voldoende* is dat verschijnsel op zichzelf *nog niet*.

In het volgende nummer zullen we eerst nog een andere getallenrij bestuderen en daarna op de getallen g_n terugkomen.

°WIE IS DE LAATSTE

Twee variaties op hetzelfde thema

1. Twee spelers hebben een briefkaart voor zich.
Ieder legt telkens een dubbeltje op de briefkaart. De dubbeltjes mogen niet meer verschoven worden. Wie het laatste dubbeltje neer legt, krijgt het hele bedrag dat erop ligt.
Hoe kun je dit spel altijd winnen?
2. Een drooglijntje van 2 m lengte wordt door twee buurvrouwen gebruikt om de was op te hangen. Hoe ze op het idee kwamen, is niet bekend, maar op zekere dag wilden beiden een aantal even grote zakdoeken te drogen hangen. Ze zouden telkens om de beurt een zakdoek ophangen. Ze waren benieuwd, wie de laatste zou ophangen.
Kon een van beide er voor zorgen, dat ze de laatste zakdoek kon ophangen?

°EEN BRANDSPIEGEL *in de wereldruimte*

Met een brandglas of een holle spiegel kunnen we iets in brand steken. Al het zonlicht, dat op de spiegel (of door de lens) valt, wordt geconcentreerd op een klein vlakje, waardoor een grote hitte ontstaat.

Verschillende science-fiction-schrijvers hebben in hun verhalen grote holle brandspiegels van dunne aluminiumfolie in de ruimte laten schieten, die zich eerst ontvouwd en als ze zich in een baan rond de aarde bewogen.

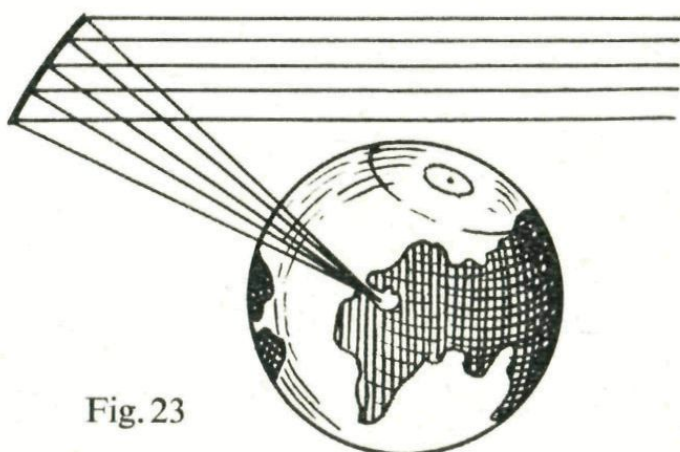


Fig. 23

Deze spiegels met een middellijn van enige kilometers trekken dan brandstrepen over de aarde, waardoor alles op hun baan verwoest wordt.

De vraag is nu, of zoiets mogelijk is.

Daarvoor moeten we iets weten van de werking van de holle spiegel. Voor wie dit nog niet of niet precies meer weet, volgt eerst een korte verklaring.

M is het krommingsmiddelpunt van de spiegel. Stralen, die door het krommingsmiddelpunt gaan, worden door de spiegel in dezelfde richting teruggekaatst als vanwaar ze komen. Die komen dus weer terug door M.

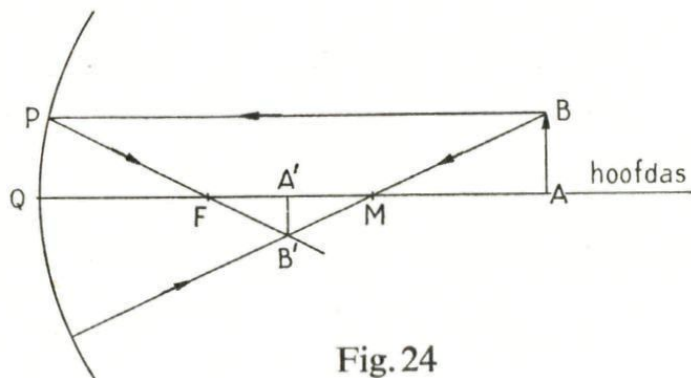


Fig. 24

Stralen die evenwijdig met de hoofdas op de spiegel vallen, worden naar het brandpunt (F) teruggekaatst. Dit ligt midden tussen M en de spiegel. Als we nu een voorwerp AB hebben, dan kunnen we met de bovenstaande regels het beeld A'B' construeren.

Uit de figuur volgt: $\frac{A'B'}{A'M} = \frac{AB}{MA}$

Nu komt de toepassing op de brandspiegel.

AB is de zon, en de afstand van de zon tot M is ongeveer 150 000 000 km. Dus $AM = 150 \cdot 10^6$ km.

Het beeld A'B' komt bij de grote afstand van de zon ongeveer in F, dus $A'M' = \frac{1}{2} QM = f$ (als we de brandpuntsafstand van de spiegel f noemen). Verder is AB, de middellijn van de zon, ongeveer $1,4 \cdot 10^6$ km. Hiermee kunnen we de grootte van het beeld (A'B') berekenen:

$$\frac{A'B'}{f} = \frac{1,4 \cdot 10^6}{150 \cdot 10^6} = \frac{1,4}{150} \approx \frac{1}{100} \text{ ofwel } A'B' \approx \frac{f}{100}$$

Laten we de brandspiegel rond de aarde cirkelen op een afstand van 2000 km, dan moet deze dus een brandpuntsafstand van 2000 km hebben. Het beeld A'B' wordt dan $\frac{2000}{100}$ km = 20 km.

Als we nu de spiegel de enorme middellijn van 20 km geven, zodat het beeld even groot is als de spiegel, dan komt er op de plaats van het beeld juist net zoveel zonlicht als normaal, zodat het resultaat niet erg gevaarlijk is. De brandspiegel in de wereldruimte is dus alleen maar „fiction”, geen „science”.

Cycloïde

van het Griekse woord *kyklos* = cirkel.

Exact

nauwkeurig, volkomen. Van het Latijnse werkwoord *exigere* = ten einde brengen.

Invariant

niet veranderend. Van het Latijnse werkwoord *variare* = veranderen.

Kegelsnede

snijfiguur van een plat vlak met een kegel.

Kwadratuur

omvorming in een vierkant, oppervlaktebepaling.

Parabool

van het Griekse werkwoord *paraballein* = er langs leggen (in een der volgende nummers van deze jaargang zal de betekenis van de namen der kegelsneden besproken worden).

Parallel

van het Griekse woord *parallelos* = langs elkaar gelegen.

Perspectief

van het Latijnse werkwoord *perspicere* = door heen zien. Een projectiemethode, die lichamen tracht af te beelden, zoals ze gezien worden.

Projecteren

van het Latijnse werkwoord *proiecere* = vóórwerpen of neerwerpen.

Science-fiction

de vorm van gefantaseerde lectuur, die recente wetenschappelijke, eigenlijk meer technische vindingen als uitgangspunt heeft. (Jaarboek Winkler Prins 1958) *science* = (natuur-)wetenschap, *fiction* = verdimtsel.

Trisectie

het verdelen in drie (gelijke) delen; van het Latijnse werkwoord *secare* = snijden.

Trochoïde

naam door Roberval (1602-1675) aan de cycloïde gegeven. Van het Griekse woord *trochos* = rad.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

Aan het eerste adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het tweede adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden. *Inzenden uiterlijk 15 nov. 1962.*

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal 4 maal per schooljaar verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f2,— per jaargang. Voor anderen f3,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J. B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J. B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.