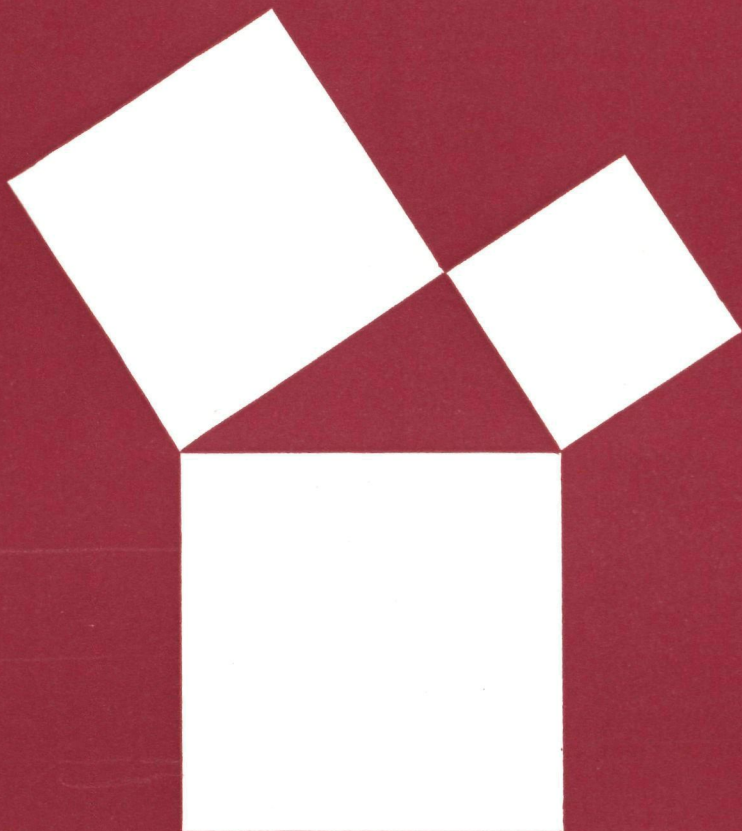


# PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift  
voor jongeren

4

*Tweede jaargang*



*Sterresporen van de sterren van Orion. Een gewone camera werd op het sterrenbeeld gericht en de lens werd twee minuten opengezet. Door de aardrotatie trekt het beeldje van de ster zijn spoor op het negatief. Dat zulke opnamen door amateur-astronomen nog enig wiskundig overleg vragen kun je in ons eerste interview lezen. (pag. 91)*

*Welke astronomische opnamen iedereen zonder telescoop kan maken wordt beschreven in: „Sterrenfotografie met uw eigen camera” een uitgave van Volkssterrenwacht Simon Stevin, Oudenbosch.*

## °ENKELE INTERESSANTE KROMMEN - VII

### DE TRISECTRIX VAN MAC LAURIN

Een der klassieke problemen van de wiskunde is de vraag of het mogelijk is een willekeurige hoek in drie gelijke delen te verdelen en bij deze constructie slechts gebruik te maken van passer en liniaal<sup>1)</sup>.

We weten, dat de Griekse wiskundigen zich van omstreeks 500 v. Chr. af met dit probleem hebben beziggehouden en dat hebben wiskundigen en amateurs de eeuwen door gedaan, tot in het begin van de 19e eeuw bewezen werd, dat de constructie op deze wijze niet mogelijk is.

Voor de driedeling van een hoek zijn verschillende benaderingsconstructies gevonden. In sommige daarvan wordt gebruik gemaakt van krommen. Een dezer krommen is de trisectrix van Mac Laurin. In dit nummer willen we volstaan met het aangeven van de manier, waarop punten van deze kromme geconstrueerd kunnen worden. In het volgende nummer wordt de kromme besproken en wordt het gebruik daarvan bij de trisectie (driedeling) van een hoek behandeld.

#### *Constructie van de trisectrix van Mac Laurin*

1. Trek een cirkel ( $M, 2a$ ). (fig. 1)
2. Kies op de cirkel een punt  $O$ .
3. Construeer de middelloodlijn  $l$  van  $OM$ .
4. Trek door  $O$  een rechte  $m$ , die  $l$  in  $P_2$  en de cirkel in  $P_1$  snijdt.
5. Kies op  $m$  het punt  $P$  zo, dat  $OP = OP_1 - OP_2$ . ( $P$  aan dezelfde kant van  $O$  als  $P_1$  en  $P_2$ ).
6. De trisectrix is nu de verzameling der punten  $P$ , als men de rechte  $m$  om  $O$  laat draaien.

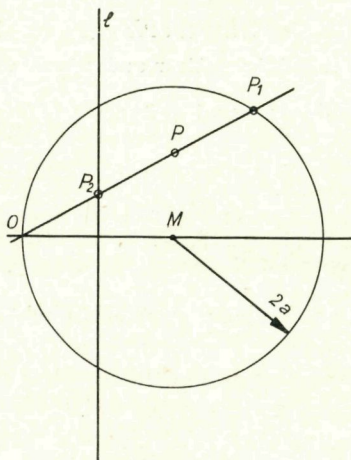


Fig. 1

<sup>1)</sup> De liniaal mag hierbij niet als *meetlat* gebruikt worden, zoals sommige lezers bij het oplossen van de „Denkertjes” wel doen.



Bij het doorbladeren zal ons waarschijnlijk de Wimecos-prijsvraag opvallen. Niet alleen wegens de belangrijke daaraan verbonden prijzen, maar vooral omdat we hopen, dat onder de lezers van Pythagoras veel sportieve puzzelaars voorkomen, verwachten we een groot aantal inzendingen. De Heer M.C.Escher was weer zo vriendelijk ons een paar van zijn boeiende prenten af te staan. We vinden ze op de bladzijden 86 en 88. In het artikel „Meetkunde spelen met speelkaarten” komt deze keer de meetkunde nog niet voor. In het volgende nummer zal blijken op hoe verrassende wijze de meetkunde plotseling aanwezig blijkt te zijn in een spel speelkaarten.

We ontvingen van onze lezers talloze bijdragen. Zoveel zelfs, dat het ons onmogelijk is gebleken op alle inzendingen persoonlijk te reageren. Het zal duidelijk zijn, dat we deze niet alle kunnen plaatsen. Onder de inzendingen troffen we veel puzzels zonder oplossingen aan (we hebben echt geen tijd ze allemaal uit te dokteren), verder heel veel overbekende puzzels. We hebben er zelf een grote voorraad van en kennen de meeste van de boekjes, waaruit de inzenders ze gehaald hebben. Het is dus overbodig deze in te zenden.

Wat waarde heeft, zijn puzzels en problemen, die je zelf bedacht hebt. Kom daarmee gerust voor den dag.

Tenslotte: We hebben echt geen gelegenheid de brieven te beantwoorden, die beginnen met: „Ik heb een probleem, waar ik niet uit kan komen....” 't Is jammer, maar redacteurs zijn ook maar mensen.

### ***Was al hun werk vergeefs?***

Het Delische probleem en de trisectie van een hoek.

In de nummers 1 en 2 van deze jaargang werd het Delische probleem besproken. We zagen daarin, dat er eeuwen lang gezocht werd naar een constructie, die voldeed aan de „spelregels”, dat daarbij alleen maar passer en liniaal zouden worden gebruikt.

Een dergelijk probleem was de vraag of het mogelijk zou zijn elke willekeurige hoek met behulp van passer en liniaal in drie gelijke delen te verdelen. (Zie in dit nummer het artikel „Interessante krommen”).

Gedurende eeuwen hebben wiskundigen en amateurs naar oplossingen van deze problemen gezocht. Nu nog zijn er amateurs, die menen een oplossing gevonden te hebben of te zullen vinden. Helaas (voor hen) weten de wiskundigen, dat ze geen gelijk kunnen hebben. In het begin van de 19e eeuw nl. ontwikkelde de jonge Franse wiskundige Evariste Galois (1811–1832) een algebraïsche theorie, die het mogelijk maakte ook meetkundige problemen op een nieuwe wijze te onderzoeken.

We hopen later nog eens terug te komen op de algebraïsche achtergronden van de hierboven genoemde problemen. In dit nummer is



Deze bewijzen maakten een eind aan bijna 20 eeuwen zoeken. Is dat nu allemaal vergeefs geweest? We mogen zeker zeggen, dat dit niet het geval is. Deze twee en de vele andere problemen, die onoplosbaar waren of nog zijn, zijn stimulansen geweest, waardoor men ook op naburige terreinen samenhangen vond. En afgezien daarvan, aan vele zoekers hebben ze een intellectuele vreugde verschaft, die een grote persoonlijke betekenis voor hen had. Ook al vonden ze de oplossing niet of ontdekten ze dat hun oplossing fout was.

*Een benaderingsconstructie voor de oplossing van het Delische probleem.*

Ingezonden door L. Geldrop te Rotterdam.

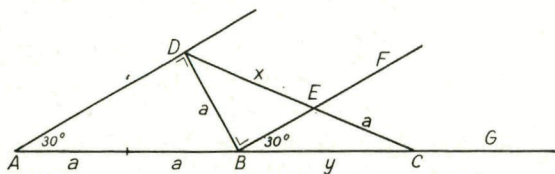


Fig. 2

Op bladzijde 7 van deze jaargang zagen we, dat het Delische probleem van ons eist een lijnstuk  $x$  te construeren, dat voldoet aan  $x^3 = 2a^3$ , als  $a$  de lengte van de ribbe van een gegeven kubus is.

Zie nu fig. 2, waarbij de grootten van enkele hoeken en lijnstukken vermeld staan.

In  $\triangle DBC$  is volgens de cosinusregel:

$$(x + a)^2 = a^2 + y^2 - 2ay \cos 120^\circ$$

dus  $x^2 + 2xa + a^2 = a^2 + y^2 + ay.$

Hieruit volgt:  $x(x + 2a) = y(a + y)$ ,

dus  $(x + 2a) : (a + y) = y : x. \dots \dots \dots (1)$





## °ONMOGELIJKE FIGUREN

Het afbeelden van de ruimtelijke werkelijkheid op een plat vlak kunnen wij op vele manieren uitvoeren. Een van deze wijzen van afbeelden: de perspectivische projectie, is de meest gebruikelijke. Ze voldoet ons ook het meeste omdat wij de driedimensionale wereld zó menen te zien, als zij zich in een perspectivische projectie vertoont. De fotografische afbeelding wijkt maar weinig af van de perspectivische projectie.

Ook andere wijzen van projecteren op een plat vlak leveren figuren op, die wij gemakkelijk interpreteren als ruimtelijke figuren. (zie fig. 5)

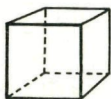


Fig. 4.  
Perspectivische projectie  
van een kubus

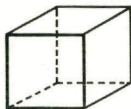


Fig. 5.  
Scheve projectie  
van een kubus

Het is echter mogelijk figuren te tekenen op een plat vlak, die op geen enkele wijze uit de projectie van een ruimtelijke figuur ontstaan kunnen zijn en toch bedriegelijk veel daarop lijken.

Figuur 6a lijkt bedriegelijk veel op een afbeelding van een driehoekig raam, dat van drie balken gemaakt is. Toch is er geen enkele timmerman die zoiets zou kunnen maken. Bij elke hoek klopt de zaak volkomen en ook op stukken „balk” tussen de hoekpunten is niets aan te merken, zoals de figuren 6b, c en d laten zien. En toch... is het een onmogelijke ruimtelijke figuur!

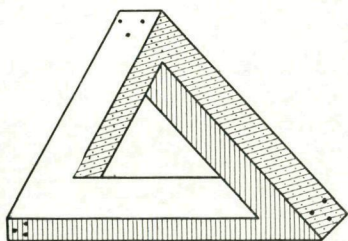


Fig. 6a

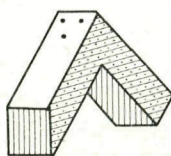


Fig. 6b

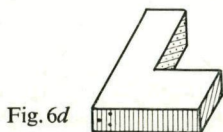


Fig. 6d

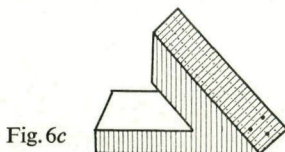


Fig. 6c

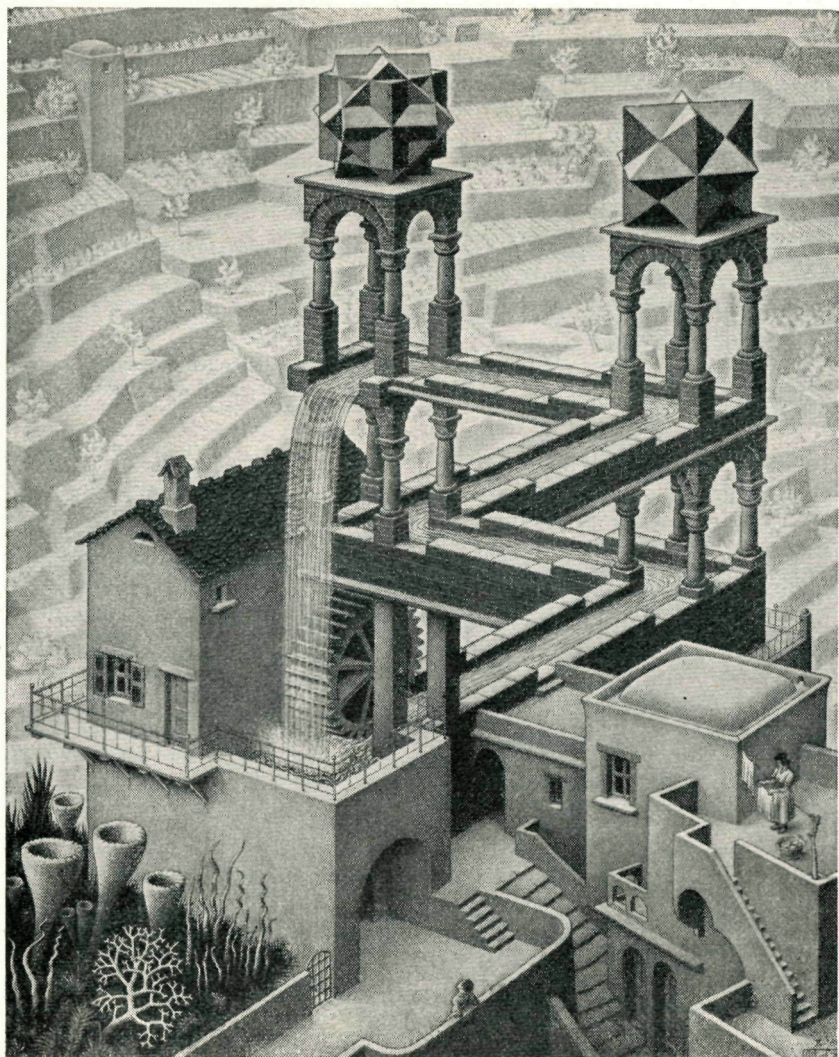


Fig. 7



Als deze onmogelijke „driebalk” nog wat verder aangekleed wordt, om de ruimtelijke suggestie te versterken, kunnen in zo'n „ruimte” ook de onmogelijkste dingen gebeuren. M.C. Escher heeft in de hier afgebeelde prent drie van zulke „driebalken” aaneengeschaakeld tot een perpetuum mobile (fig. 7). Beginnen we links bovenaan te kijken, dan zien we het water naar beneden vallen, daar brengt het een rad in beweging. Daarna stroomt het weg in een afvoergeul. We volgen nu de loop van het water. Het komt telkens lager.... tot het ineens weer *bovenaan* blijkt te zijn. Op deze wijze blijft het altijd maar door stromen en wordt het rad steeds in beweging gehouden: een *perpetuum mobile*!

Onze projecties van ruimtelijke figuren op een plat vlak zijn soms voor meerdere interpretaties vatbaar; m.a.w. er beantwoorden meer ruimtelijke lichamen aan eenzelfde projectie. We hebben in het eerste nummer van Pythagoras hier reeds een voorbeeld van gezien (Hol en bol).

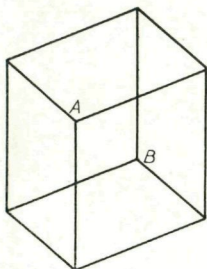


Fig. 8

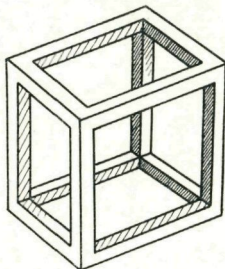


Fig. 9

In figuur 8 weten we niet of een kubus is afgebeeld, waarvan A dan wel B het dichtste bij ons is.

Beide interpretaties zijn even voor de hand liggend. Gaan we echter nog meer elementen aan de projectie toevoegen (door bv. van de ribben balkjes te maken) dan moeten we kiezen voor de ene of voor de andere interpretatie (fig. 9 en 10).

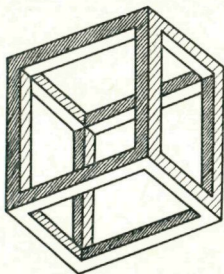


Fig. 10

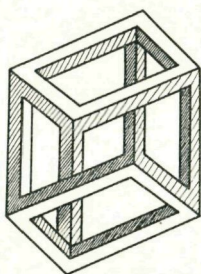


Fig. 11



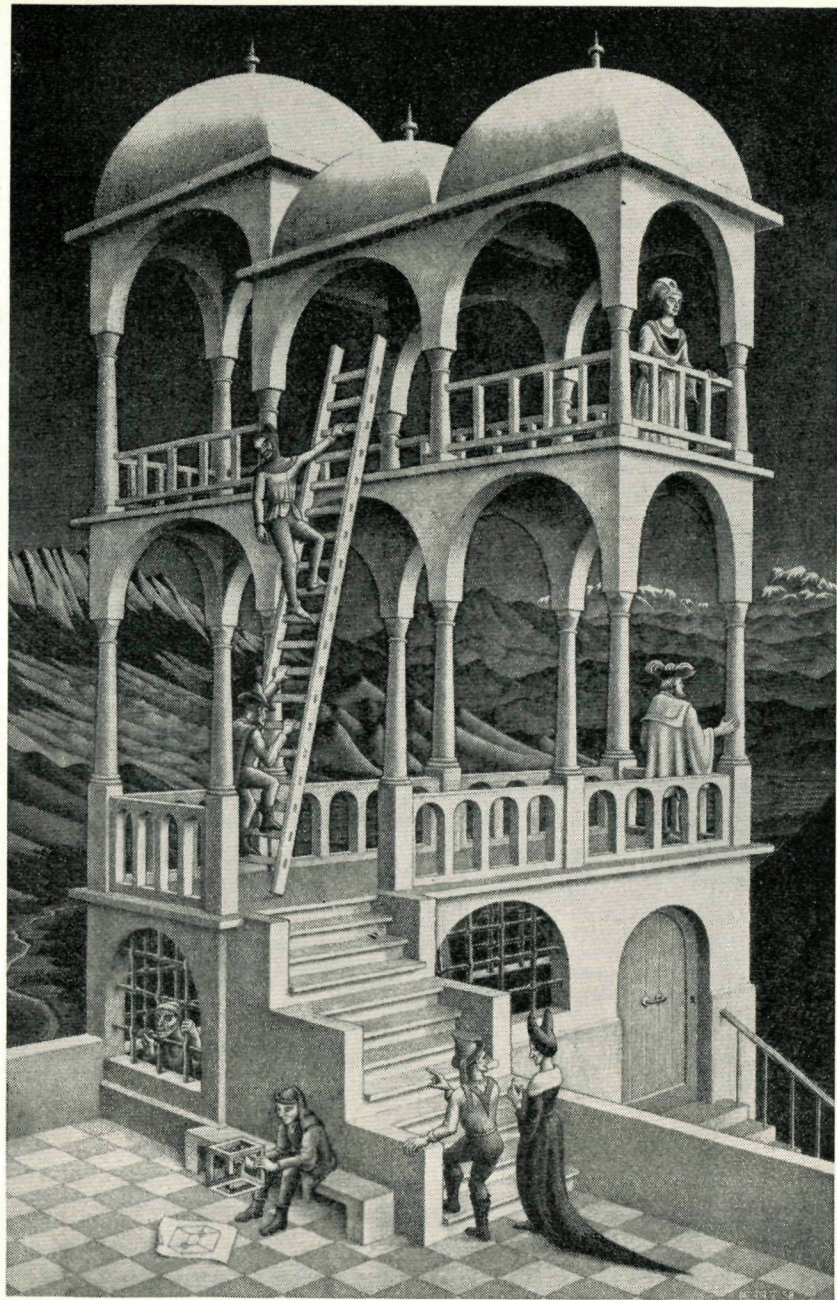


Fig. 12

Het is echter ook mogelijk om voor de onderkant van de kubus de ene en voor de bovenkant de andere interpretatie te kiezen (fig. 11). Er ontstaat dan echter weer een „onmogelijke figuur” waaraan geen ruimtelijk lichaam beantwoordt. Het is geen projectie van een ruimtelijk lichaam en toch heeft het er gelijkenis mee. Ook op dit thema heeft Escher een prent gemaakt, die hij *Belvédère* noemde (fig. 12). De onderste en bovenste verdieping van de uitzichttoren zijn onberispelijk. Het middenstuk is een absurditeit. Zes van de acht kolommen behoren boven niet tot dezelfde zijde van het „zaaltje” als beneden. En het meest merkwaardige is, dat de jongen boven op de trap *in* het zaaltje stond toen hij de trap beklom en bovenaan gekomen tegen de *buitenwand* van het zaaltje blijkt te staan. Wat is binnen en wat is buiten? Deze relaties bestaan hier niet, omdat de middelste verdieping geen afbeelding kan zijn van een ruimtelijk lichaam!

## WIMECOS-PRIJSVRAAG

De vereniging van leraren in *Wiskunde*, *Mechanica* en *Cosmografie* „Wimecos” heeft prijzen beschikbaar gesteld voor het oplossen van de volgende puzzels. Deze prijzen bestaan uit een boekenbon van f50,— en twee boekenbonnen van elk f25,—. Voor de oplossing van elke puzzel worden ten hoogste 10 punten gegeven. Wie het hoogste aantal punten bereikt, komt in aanmerking voor de 1e prijs. De beide daarop volgende puntenaantallen geven recht op de 2e en de 3e prijs. Mochten er inzenders zijn met een gelijk aantal punten, die voor een der prijzen in aanmerking zouden komen, dan wordt deze onder hen verloot. De oplossingen van deze puzzels kunnen tot uiterlijk 15 mei worden ingezonden bij G. Krooshof, Noorderbinnensingel 140, Groningen. Vermeld: Naam, adres, school en leerjaar.

1. Op nevenstaande kaart (fig. 13) is een wegenet geschetst met wegen, dorpen (○) en gehuchten (●). Iemand wil van A naar B rijden, alleen gebruik maken van de wegen en onderweg alle andere dorpen en gehuchten één maal passeren. Geen enkele plaats (A en B zelf ook niet) mag dus vaker dan één maal worden bezocht. Als dit kan, wordt gevraagd de route aan te geven; kan het niet, dan wordt het bewijs gevraagd, dat het niet kan.

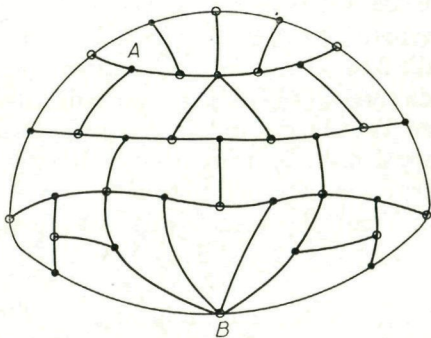


Fig. 13



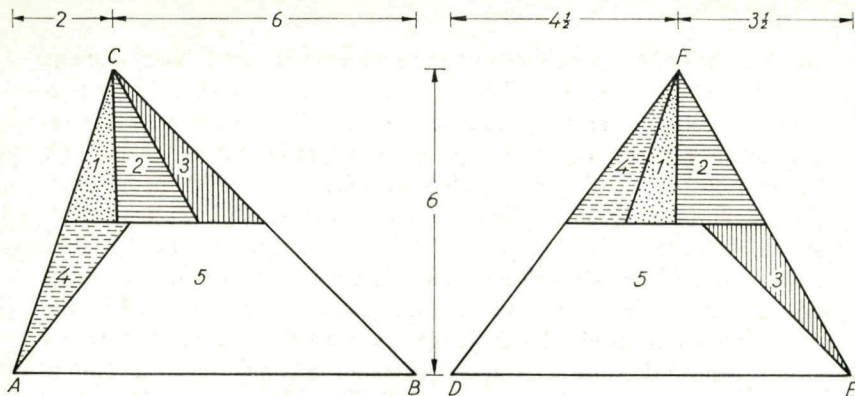


Fig. 14a

Fig. 14b

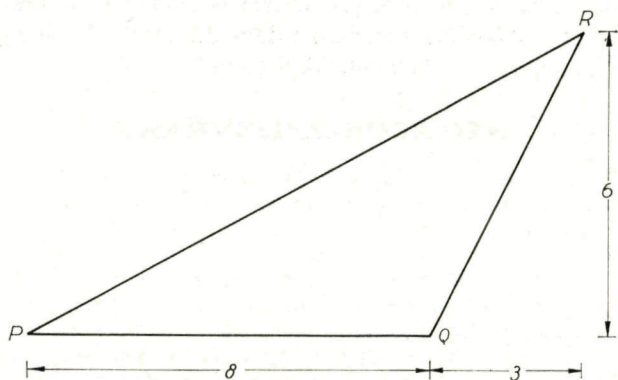


Fig. 14c

2. In de figuren 14a en 14b zijn twee driehoeken ABC en DEF gegeven, beide met basis 8 en hoogte 6. (Ze zijn afgedrukt op  $\frac{2}{3}$  van de ware grootte). In  $\triangle ABC$  verdeelt de hoogtelijn uit C de basis in twee delen, die 2 en 6 lang zijn. In  $\triangle DEF$  verdeelt de hoogtelijn uit F de basis in de stukken  $4\frac{1}{2}$  en  $3\frac{1}{2}$ . De beide driehoeken hebben gelijke oppervlakte en kunnen daarom in een gelijk aantal congruente delen verdeeld worden. In de figuren 14a en 14b zijn ze elk verdeeld in 5 delen, die twee aan twee congruent zijn.

- Tracht de methode volgens welke de driehoeken verdeeld zijn op te sporen en breng deze overzichtelijk onder woorden.
- Pas deze methode toe op  $\triangle ABC$  (fig. 14a) en  $\triangle PQR$  (fig. 14c). Deze moeten dus beide in een gelijk aantal delen verdeeld worden, die twee aan twee congruent zijn. Het aantal delen behoeft daarbij natuurlijk niet 5 te zijn. Teken beide driehoeken zo, dat de aangegeven maten in centimeters worden genomen.



3. Van een getallenrij wordt de  $n^e$  term gegeven door de betrekking:

$$t_n = n^2 + n + 24. \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Welke termen van de rij zijn ontbindbaar in twee factoren, die

- a. natuurlijke getallen zijn;
- b. onderling 1 verschillen?

Schrijf de berekening overzichtelijk op.

## **WAT BETEKEN DE WISKUNDE VOOR U?**

Interviews met allerlei mensen die in hun vak of hobby wiskunde gebruiken.

### *De Amateur-Astronoom*

Wij bezochten voor U Br. Erich, leider van de volkssterrenwacht *Simon Stevin* te *Oudenbosch*.

R. Om met de deur in huis te vallen, Br. Erich, een van Uw hobby's is de sterrenkunde, en U komt door de volkssterrenwacht in aanraking met vele andere amateurs; kan naar Uw mening de wiskunde iets bijdragen tot een vruchtbare beoefening van Uw hobby?

B.E. Ik geloof dat er weinig hobby's zijn, waarbij enige wiskundekennis zo wenselijk en vruchtbaar is, als juist bij de astronomie.

R. Kunt U daarvan ook voorbeelden geven?

B.E. Om vruchtbaar te kunnen waarnemen (ik bedoel hier dus niet mee het af en toe eens bekijken van het maanlandschap of van een planeet) moet men zijn instrument kennen. Men krijgt dan te maken met lensdiameters, oplossend vermogen, vergroting, uittreepupil, schijnbaar en werkelijk gezichtsveld enz. Het verband tussen deze grootheden wordt uitgedrukt in eenvoudige wiskundige formules en wie daar mee kan werken heeft werkelijk veel voor op iemand zonder enige wiskundige opleiding.

En als ik een greep doe uit de waarnemingen die een amateur kan doen en die hij geheel of gedeeltelijk kan uitwerken:

Plaatsbepaling van zonnevlekken, sterbedekkingen door de maan, meteoren, veranderlijke sterren, dubbelsterren etc. Dan komt hem ook daarbij een middelbareschool-kennis van wiskunde goed van pas.

R. Hebben die waarnemingen enige wetenschappelijke betekenis?

B.E. Dat kunnen ze zeker hebben. Er zijn ook in ons land groepen amateurs die zich onder leiding van vakastronomen toeleggen op waarnemingen, die voor de astronomie van betekenis zijn. Toch zie ik niet daàrin de grote betekenis van de amateurastronomie. De amateur stelt op de eerste plaats belang in, – laten we het maar romantisch zeggen –; de wonderen van het heelal en in de wijze waarop de wetenschap deze ontdekt heeft. Nu komt hij door zijn waarnemingen zelf in direct contact met hetgeen zijn verwondering gaande maakt. En dit contact zal hem in staat stellen beter te begrijpen wat de vak-astronomen gevonden hebben, ook al kan hij hun waarnemingen en wiskundige afleidingen, niet nadoen.

R. Maar wat ik graag van U zou zien is een of andere wiskundige uitwerking waarvan U zegt: kijk, dat moet een amateur-astronoom nu beslist zelf kunnen doen, anders kan hij niet verder.

B.E. Ik zou U kunnen wijzen op een formuleetje dat hij nodig heeft om het polijstproces van een parabolische spiegel te controleren, of op het feit, dat hij bij het slijpen en polijsten van vlakke spiegels voortdurend drie vergelijkingen met drie onbekenden moet oplossen, telkens wanneer hij zijn spiegels na een bewerking weer test. Maar dan ben ik speciaal bij de amateur die zelf zijn optiek slijpt.

Interessanter is misschien voor de lezers van Pythagoras het volgende, als een greep uit de vele omstandigheden, waarin de amateur-astronoom zijn wiskundekennis gebruikt.

Enige tijd geleden maakte ik een paar proefopnamen van sterrensporen op kleurenfilm. Een gewone camera wordt dan op een bepaald deel van de hemel gericht en de lens wordt enige tijd bv. 10 minuten opengezet.

Op de fotografische plaat verschijnen kleine boogjes, inplaats van stipjes omdat de aarde in die 10 minuten niet stilstond.

Deze opnamen waren zò interessant (de verschillende kleuren der sterren kwamen sprekender naar voren dan ik ooit gezien had), dat ik besloot de hele zichtbare hemel zo te fotograferen. Maar dan doen zich enige moeilijkheden voor die wiskundig opgelost moeten worden:

Om vergelijkbare opnamen te krijgen wilde ik, dat op alle opnamen de sterrensporen even lang zouden zijn. Dit is niet mogelijk door alle opnamen even lang te belichten, want een ster op de hemelequator trekt



in één minuut een veel langer spoor, dan een ster dicht bij de hemelpool. Verder wilde ik de helderheden der sterren aan de helderheid van het spoor kunnen schatten. Maar bij gelijke belichtingstijd en gelijke diafragmaopening, zouden de sterren bij de pool veel helderder sporen trekken dan die bij de equator. En ten slotte was de vraag: hoeveel opnamen moeten er gemaakt worden om het deel van de hemelbol, dat op een bepaald tijdstip zichtbaar is, te fotograferen. Al deze probleempjes kunnen wiskundig heel eenvoudig opgelost worden, en daarna kunnen we de opnamen achter elkaar maken. Alleen van het eerste probleempje wil ik de uitwerking laten zien. In fig. 15 is een halve hemelbol getekend met de Noordpool boven. De

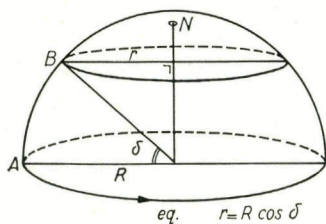


Fig. 15

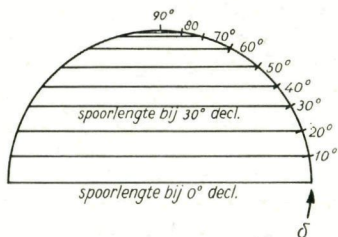


Fig. 16

boogjes die de ster A op de equator en de ster B op een hogere breedte-cirkel (declinatiecirkel!) trekken, verhouden zich als de omtrekken van beide cirkels en die verhouden zich weer als hun stralen dus als  $r/R$ . Als  $\delta$  de declinatie van ster B is, is  $r = R \cos \delta$ ; en  $r/R = \cos \delta$ . De belichtingstijden voor de verschillende declinaties moeten dus vermenigvuldigd worden met  $\cos \delta$ , als we even lange sterresporen willen krijgen.

Later vond ik, dat de lengte der sterresporen bij eenzelfde belichtingstijd gemakkelijker *grafisch* te bepalen zijn: de middellijn van de halve cirkel (zie fig. 16) stelt de lengte van het sterrespoor van een ster op de equator voor in een bepaalde tijd. De lengte der sporen voor een andere declinatie vinden we dan eenvoudig door een lijn evenwijdig aan deze middellijn te trekken door een punt op de omtrek dat de declinatie aangeeft. Dit zullen Uw lezers zelf wel kunnen aantonen.

*De volkssterrenwacht Simon Stevin* wil de amateur-astronomie bevorderen. Behalve de „kijkavonden” in het winterhalfjaar organiseert ze cursussen in het slijpen van spiegels en kijkerbouw, geeft ze praktische boekjes uit voor de amateur en stuurt op gezette tijden mededelingenbladen rond. Wil je er meer van weten, stuur dan een briefkaartje aan: Volkssterrenwacht Simon Stevin, Oudenbosch.



OPLOSSINGEN  
HIERVAN  
KUNNEN WORDEN  
INGEZONDEN

## 28. Kroos

Iemand heeft een vijver in zijn tuin gemaakt. Er wil echter niets in groeien en de vissen gaan erin dood. Naast zijn huis is een grote villa KROOSHOF genaamd, waarbij drie vijvers zijn vol met kroos. Onze man gaat naar zijn buurman en vraagt of hij zijn vijver ook niet vol met kroos kan krijgen. Deze zegt hem: „Kijk, je neemt één kroosje uit mijn vijver

mee en na 20 dagen zit jouw vijver helemaal vol met kroos. Dat gaat nl. zo: uit elk kroosplantje vormen er zich iedere dag twee. De tweede dag heb je dus al twee plantjes, de derde dag vier, enz.”

„Dat is prachtig”, zegt onze man, „maar ik wilde mijn vijver wel eerder vol hebben. Mag ik twee kroosplantjes meenemen?”

Dit mocht. Nu zijn er twee vragen:

a. Na hoeveel dagen is de vijver nu volgegroeid?

b. Hoe groot is de oppervlakte van de vijver, als één kroosplantje een oppervlakte beslaat van  $10 \text{ mm}^2$ ?

Ingezonden door Cornelis Schuckink Kool, Sted. gymn. IIIc, Utrecht.

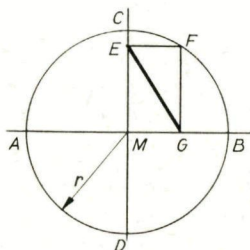


Fig. 17

29. In fig. 17 zien we een cirkel  $(M, r)$ ,  $AB$  en  $CD$  zijn loodrecht op elkaar staande middellijnen. Men kiest op  $MC$  het punt  $E$  zo, dat  $CE = x$ . Door  $E$  trekt men  $EF \parallel AB$  ( $F$  op de cirkel). Verder wordt  $FG \parallel CD$  getrokken.

*Gevraagd:* Bereken zo eenvoudig mogelijk de lengte van  $EG$ .

Ingezonden door Drs. R. Kooistra, Culemborg.

30. Bedenk een eenvoudige en snelle manier om een vierhoek  $ABCD$  te construeren waarin  $AD = BC$  en  $\angle A = \angle C$ , terwijl  $ABCD$  geen parallellogram is.

Ingezonden door Drs. R. Kooistra, Culemborg.



## °°MEETKUNDE SPELEN MET SPEELKAARTEN I

Ingezonden door N. G. de Bruijn te Nuenen (N.Br.).

Kijk eens naar het volgende schema van 3 rijen en 7 kolommen:

|   |    |     |    |   |    |     |
|---|----|-----|----|---|----|-----|
| 1 | 1  | 1   | 2  | 2 | 3  | 3   |
| 2 | 4  | 6   | 4  | 5 | 4  | 5   |
| 3 | 5  | 7   | 6  | 7 | 7  | 6   |
| I | II | III | IV | V | VI | VII |

De kolommen hebben we romeins genummerd; deze romeinse aanduidingen dienen om over het schema te kunnen praten, maar ze horen zelf niet tot het schema.

We merken op:

- Elk der getallen 1 t.e.m. 7 komt even vaak (dat is 3 keer) in het schema voor.
- In geen enkele kolom komen twee gelijke getallen voor.
- Kiezen we twee verschillende uit de getallen 1 t.e.m. 7, dan is er precies één kolom waar ze allebei in staan (Voorbeeld: 45 slechts in kolom II, 47 slechts in kolom VI).
- Kiezen we twee verschillende kolommen, dan is er precies één getal, dat in beide voorkomt (Voorbeeld: I en IV bevatten beide 2, III en V bevatten beide 7).

We zullen dergelijke schema's wat algemener gaan bestuderen. In plaats van dit schema met 3 rijen en 7 kolommen nemen we een schema met  $k$  rijen en  $n$  kolommen, met analoge eigenschappen, nl.:

- Elk der getallen 1 t.e.m.  $n$  komt  $k$  keer voor.
- Een getal komt in een kolom hoogstens één keer voor.
- Kiezen we twee verschillende uit 1 t.e.m.  $n$ , dan is er precies één kolom waar beide in staan.
- Kiezen we twee verschillende kolommen, dan is er precies één getal dat in beide staat.

Het is lang niet voor alle  $k$  en  $n$  mogelijk zo een schema op te bouwen. In de eerste plaats merken we op dat uit 2 en 3 volgt dat

$$5. \quad n = k^2 - k + 1.$$

Dit bewijzen we als volgt. Het aantal manieren waarop uit 1 t.e.m.  $n$  een getallenpaar (bestaand uit twee verschillende getallen) gekozen

kan worden, bedraagt  $\frac{1}{2}n(n-1)$  (ga dat na), en blijkens 2 kan elke kolom  $\frac{1}{2}k(k-1)$  paren leveren. De  $n$  kolommen samen leveren er dus  $\frac{1}{2}nk(k-1)$ . Wegens 3 is nu

$$\frac{1}{2}nk(k-1) = \frac{1}{2}n(n-1),$$

dus  $k^2 - k = n - 1$ , waaruit 5 volgt.

Met  $k = 3$  vinden we  $n = 7$ , zoals in ons eerste voorbeeld. Met  $k = 2$  vinden we  $n = 3$ , en dan gaat het ook:

|   |    |     |
|---|----|-----|
| 1 | 2  | 3   |
| 2 | 3  | 1   |
| I | II | III |

Met  $k = 1$  vinden we  $n = 1$ , en dan is er geen aardigheid meer aan. Maar  $k = 4$  levert  $n = 13$ , en ook dan lukt het. Met deze mogelijkheid hebben producenten van speelkaarten blijkbaar reeds eeuwenlang rekening gehouden, want het normale pak van 52 kaarten is precies aan onze behoefte aangepast. In plaats van de getallen 1 t.e.m. 13 werken we nu met de symbolen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, b, v, h, a, die we *waarden* zullen noemen; van elk dezer zijn er in het pak precies de vier exemplaren, die we voor ons spel nodig hebben. De kleuren (schoppen, harten, ruiten, klaveren) laten ons voorlopig volkomen onverschillig. Er zijn trouwens nog meer dingen in het te maken schema onbelangrijk: zowel de volgorde der kolommen onderling als de volgorde der kaarten in elke kolom kunnen we naar hartelust veranderen zonder de eisen 1 t.e.m. 5 geweld aan te doen. Trouwens, als het ons belieft in het schema bijv. alle drieën door vijven te vervangen en alle vijven door drieën, dan stoort dat geenszins.

De lezers worden nu uitgenodigd een pak speelkaarten te nemen en zelf te proberen deze te leggen in een schema van 4 rijen en 13 kolommen, zó dat het aan alle eisen voldoet.

Teneinde het puzzelen te vergemakkelijken geven we een algemene aanwijzing; vooraf spreken we af, dat we elk paar van twee verschillende waarden een *waardenpaar* zullen noemen.

We vervangen de voorwaarden 1, 3 en 4 nu door één enkele (6), die slechts een *deel* van 3 eist, nl.

6. elk waardenpaar staat *hoogstens* in één kolom.

Men kan nu bij het leggen van het schema volstaan met er voor te zorgen, dat er aan 2 en 6 voldaan is. (Voor het pak kaarten is, zoals we zagen, voldaan aan 5).



We beredeneren nog dat het voldoende is dat er aan 2, 5 en 6 voldaan is. Wie deze redenering wat moeilijk mocht vinden, hoeft zich daardoor niet van het puzzelen te laten afschrikken. Ook zonder het volgende te begrijpen kan men wel een  $4 \times 13$  schema vinden en controleren, dat het aan alle eisen voldoet.

We nemen aan, dat we een schema ( $k$  rijen en  $n$  kolommen) hebben, dat aan 2, 5 en 6 voldoet.

Er zijn  $\frac{1}{2}n(n-1)$  manieren om een waardenpaar te kiezen, en elke kolom levert er  $\frac{1}{2}k(k-1)$ . Blijkens 6 leveren de kolommen samen  $\frac{1}{2}nk(k-1)$  verschillende waardenparen. Maar wegens 5 is  $\frac{1}{2}nk(k-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ , zodat de kolommen samen *alle* waardenparen produceren. Hieruit volgt: bij elk waardenpaar is er een kolom, waar dat paar in voorkomt. Samen met 6 betekent dat 3.

Het is nu niet moeilijk om 1 af te leiden. Vatten we een waarde in het oog, bijv.  $a$ , dan zijn er  $n-1$  waardenparen die  $a$  bevatten. Een kolom die  $a$  bevat, bevat  $k-1$  van deze waardenparen, zodat nu blijkt dat er  $(n-1)/(k-1)$  kolommen zijn die  $a$  bevatten. Daar  $(n-1)/(k-1) = k$  (volgens 5), is nu 1 bewezen. We merken op, dat dit voor ons geval niet zo interessant is, want we veronderstellen met een eerlijk pak kaarten te doen te hebben.

Tenslotte bewijzen we 4. We weten al dat 3 waar is, dus twee kolommen hebben hoogstens één waarde gemeen. We bekijken nu de *kolommenparen*. Elke waarde komt in  $k$  kolommen voor, en het is dus op  $\frac{1}{2}k(k-1)$  manieren mogelijk om twee kolommen aan te wijzen, die juist die waarde als gemeenschappelijk element hebben. Daar er  $n$  waarden zijn, komt het in totaal  $\frac{1}{2}nk(k-1)$  keer voor dat twee kolommen een element gemeen hebben. Dit aantal is (wegens 5) juist  $\frac{1}{2}n(n-1)$ , en dat is het *totaal aantal* kolommenparen. Derhalve zijn hiermee alle kolommenparen afgeteld, zodat elk kolommenpaar een gemeenschappelijk element heeft.

In het volgende nummer geven we een oplossing en dan zullen we gaan vertellen, wat dit met meetkunde te maken heeft.

## °°Projectieve Meetkunde III

Als drie punten  $A$ ,  $B$  en  $C$  op een rechte liggen, dan veranderen door het projecteren in het algemeen niet alleen de lengten van  $AB$  en  $BC$ , maar ook hun onderlinge verhouding. Dit is goed te zien in fig. 18, waar  $AB$  en  $BC$  gelijk zijn, maar  $A'B'$  en  $B'C'$  niet.

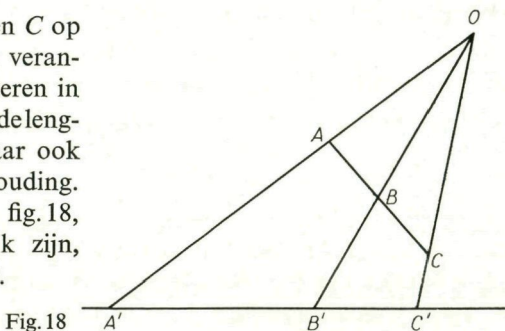


Fig. 18

Verhoudingen zijn dus niet „bestand tegen projecteren”.

Des te merkwaardiger is het, dat het quotiënt van twee verhoudingen wel invariant is bij projecteren. Zo'n quotiënt van twee verhoudingen heet een *dubbelverhouding*. Het invariant zijn van dubbelverhoudingen is een eigenschap, die in de projectieve meetkunde fundamenteel is.

*Wat is een dubbelverhouding?*

We beschouwen vier punten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$ , die op een rechte  $l$  liggen. Voorlopig veronderstellen we, dat geen dezer punten samenvalt met het oneindig verre punt van  $l$ .

We kiezen op  $l$  een oorsprong  $O$  van een coördinatenstelsel, zodat we de ligging der punten kunnen aangeven door hun (georiënteerde) afstanden tot  $O$ . De coördinaten der vier punten kunnen we bijv. positief rekenen, als ze rechts van  $O$  liggen en negatief, als ze links van  $O$  liggen. In fig. 19 zijn de coördinaten  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  en  $x_4$  alle positief.

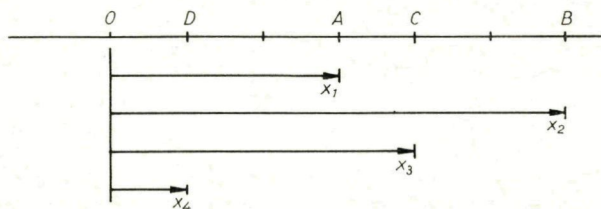


Fig. 19

Onder de lengte van het lijnstuk  $CA$  verstaan we nu  $(x_1 - x_3)$ , terwijl de lengte van het lijnstuk  $AC$  zal zijn  $(x_3 - x_1)$ .  $CA$  heeft dus een negatieve lengte, terwijl die van  $AC$  positief is.

In fig. 19 ligt  $C$  tussen  $A$  en  $B$ . De verhouding  $\frac{CA}{CB}$  is nu negatief.

We zeggen, dat  $C$  het lijnstuk  $AB$  *inwendig* verdeelt in de verhouding  $\frac{CA}{CB}$ .

Het punt  $D$  „verdeelt”  $AB$  *uitwendig* in de verhouding  $\frac{DA}{DB}$ . Deze verhouding is positief, zoals gemakkelijk te controleren valt.

Als *dubbelverhouding*  $(ABCD)$  definiëren we nu het quotiënt  $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ .

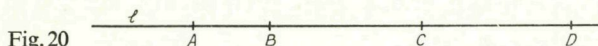
$$\text{Dus is } (ABCD) = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4}.$$



In het symbool  $(ABCD)$ , waarmee de dubbelverhouding wordt aangeduid, geven de beide eerste letters dus de uiteinden van het lijnstuk aan, dat door de punten, die door de beide andere letters worden aangeduid, in zekere verhoudingen wordt verdeeld.

Ga even na, dat  $(ADBC)$  betekent  $\frac{x_1 - x_2}{x_4 - x_2} : \frac{x_1 - x_3}{x_4 - x_3}$ .

Sommige dubbelverhoudingen zijn negatief, andere positief. Controleer, dat  $(ABCD)$  voor de vier punten in fig. 20 positief is.



*Vraag:* Men construeert in  $\triangle ABC$  de binnen- en buitenbissectrice van  $\angle C$ . De binnenbissectrice snijdt  $AB$  in  $D$ , de buitenbissectrice snijdt het verlengde van  $AB$  in  $E$ . Hoe groot is de dubbelverhouding  $(ABDE)$ ?

*De invariantie van dubbelverhoudingen*

We projecteren de vier punten  $A, B, C$  en  $D$  van de rechte  $l$  op een rechte  $l'$ . Zie fig. 21.

We willen nu bewijzen:  $(ABCD) = (A'B'C'D')$

dus 
$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'}$$

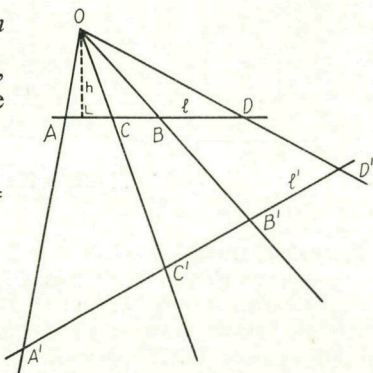


Fig. 21

We maken daarbij gebruik van twee verschillende manieren, waarop de oppervlakte van een driehoek berekend kan worden, nl.:

1.  $O = \frac{1}{2}c \cdot h$ , waarin  $h$  de lengte van de hoogtelijn op de zijde  $c$  is.
  2.  $O = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ , waarin  $\gamma$  de hoek is door de zijden  $a$  en  $b$  ingesloten.
- We stellen de oppervlakte van  $\triangle OAC$  voor door  $O(OAC)$ .

Nu is in fig. 21:  $O(OAC) = \frac{1}{2}CA \cdot h = \frac{1}{2}OA \cdot OC \cdot \sin COA$   
 $O(OBC) = \frac{1}{2}CB \cdot h = \frac{1}{2}OC \cdot OB \cdot \sin COB$

Hieruit volgt: 
$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA \sin COA}{OB \sin COB} \dots \dots \dots (1)$$

Op gelijke wijze kan men bewijzen: 
$$\frac{DA}{DB} = \frac{OA \sin DOA}{OB \sin DOB} \dots \dots \dots (2)$$

We vinden nu dat de dubbelverhouding ( $ABCD$ ) gelijk is aan

$$\frac{OA \sin COA}{OB \sin COB} : \frac{OA \sin DOA}{OB \sin DOB} = \frac{\sin CAO}{\sin COB} : \frac{\sin DOA}{\sin DOB}.$$

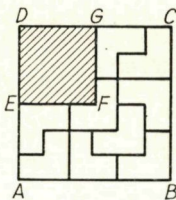
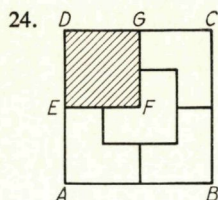
De grootte van de dubbelverhouding hangt dus alleen af van de grootte der hoeken  $COA$ ,  $COB$ ,  $DOA$  en  $DOB$ . Deze hoeken zijn dezelfde voor de vier punten  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  en  $D'$ . Hun dubbelverhouding is dus gelijk aan ( $ABCD$ ).

## OPLOSSINGEN van de DENKERTJES in Pythagoras 2-2

Boekenbonnen zijn toegekend aan:

P. de Regt Sassing P35 Axel (Zld).

Els Groeneveld v. Baerlestraat 42 Dordrecht.



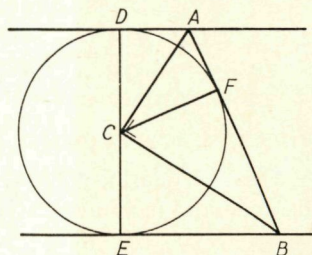
25. De oplossing is simpel. De schoenmaker heeft een schade geleden van f 25,—. Dit is n.l. de „waarde” van het valse bankbiljet van f 25,—.

26. Het linker getal geeft het aantal cc. in 't glas van 5 cc. aan, het rechter getal in het glas van 9 cc.:

50 - 05 - 55 - 19 - 10 - 01 - 51 - 06 - 56 - 29 - 20.

Oplossing van M. Markus te Eindhoven.

27. *Analyse.* De raaklijnen uit  $A$  en  $B$  aan de gevraagde cirkel moeten evenwijdig zijn. We tekenen dus een cirkel met middelpunt  $C$  en trekken twee evenwijdige raaklijnen (raakpunten  $D$  en  $E$ ). Als we nu willekeurig  $CA$  trekken en  $CB$  loodrecht daarop, dan krijgen we twee gelijkvormige driehoeken, n.l.  $\triangle CDA$  en  $\triangle BEC$  ( $\angle D = \angle E = 90^\circ$ ,  $\angle A = \angle ECB$ ).



$$\therefore CA : BC = DA : EC \text{ of daar } EC = CD : CA : BC = DA : DC$$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle ADC \quad \therefore \angle CAB = \angle CAD.$$

Laten we nu uit  $C$  de loodlijn  $CF$  op  $AB$  neer, dan vinden we twee congruente driehoeken, n.l.  $\triangle CAF$  en  $\triangle CAD$  ( $CA = CA$ ,  $\angle CAB = \angle CAD$ ,  $\angle D = \angle F = 90^\circ$ ).

Dus is  $CF$  gelijk aan de straal van de cirkel, waaruit blijkt, dat de cirkel ook aan  $AB$  raakt.

*Constructie:* Laat uit  $C$  in de gegeven driehoek de loodlijn  $CF$  op  $AB$  neer. Deze is de straal van de gevraagde cirkel.

$$\text{Berekening: Uit } CF \times AB = CA \times CB \text{ volgt } CF = \frac{a \cdot b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}.$$

**Cissoïde**

afkomstig van het Griekse woord *kissos* = klimop. De cissoïde (klimopvormige lijn) droeg bij de Grieken deze schijnbaar slecht passende naam, omdat ze alleen het deel van de kromme beschouwden, dat binnen de bij de voortbrenging gebruikte cirkel ligt en daarbij letten op de vorm van het oppervlak, begrensd door dat deel van de kromme en de cirkelboog tussen de snijpunten met de kromme.

**Declinatio**

Latijn; betekent afwijking. Onder de declinatie van een ster verstaat men de afstand over de hemelbol gemeten van de ster tot de hemel-equator.

**Perpetuum  
mobile**

Latijn. Onder een „perpetuum mobile” verstaat men een werktuig, dat voortdurend (perpetuum = alijdurend) in beweging kan blijven (mobile = bewegen), zonder dat men er enig arbeidsvermogen aan toevoert. Het uitvinden van een „perpetuum mobile” is een wetenschappelijk ideaal geweest tot men in de fysica een beter inzicht kreeg in ’t begrip energie en de wet tot behoud van energie kon opstellen.

**trisetrix**

Afkorting van „linea trisectrix”. Kromme, die gebruikt kan worden bij het in drie gelijke delen verdelen van een hoek.



## *Zakelijke mededelingen*

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

### REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

Aan het eerste adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het tweede adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden. *Inzenden vóór 15 mei 1963.*

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

### ABONNEMENTEN

Pythagoras zal 4 maal per schooljaar verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f2,— per jaargang. Voor anderen f3,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J. B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J. B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.