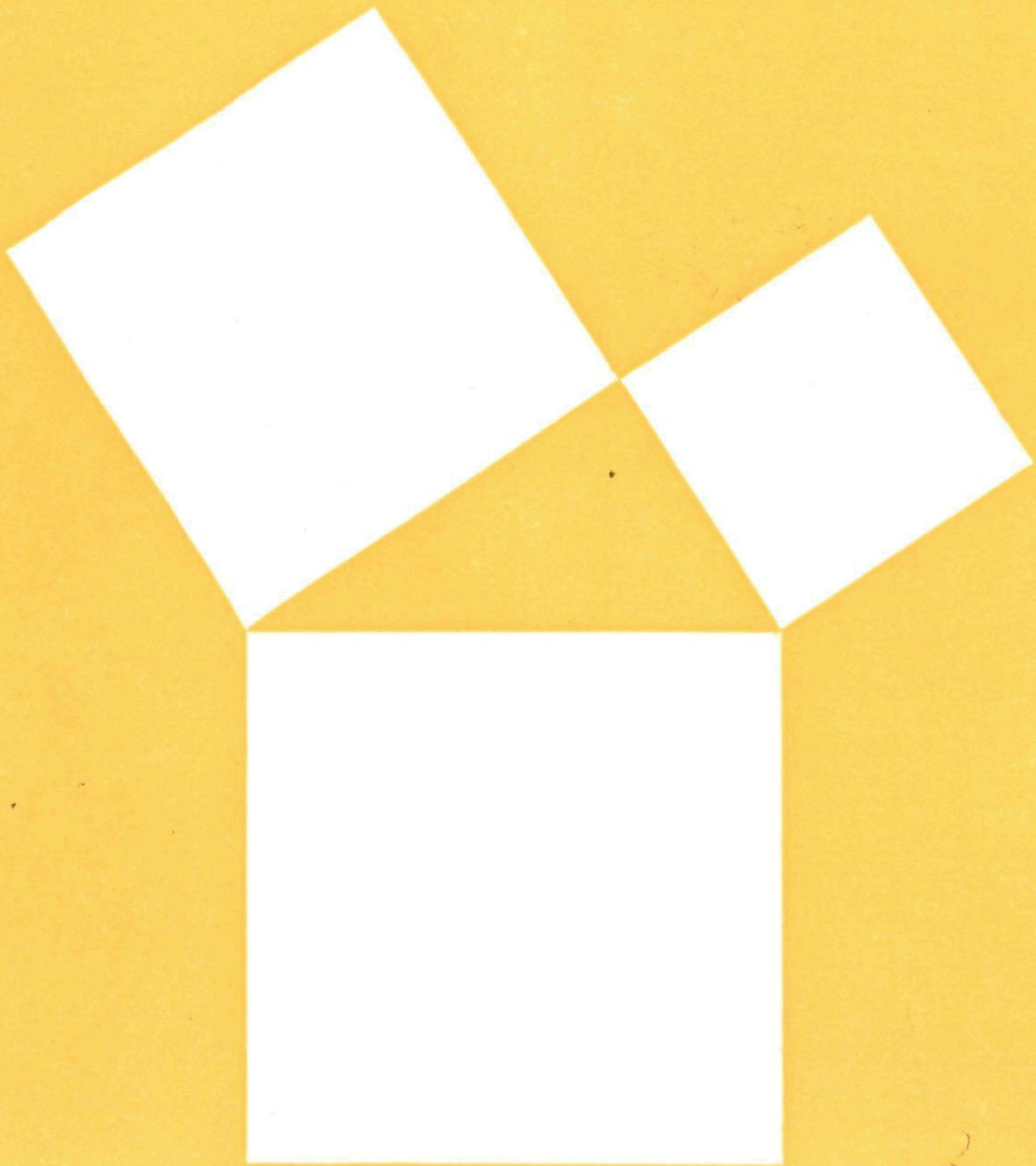


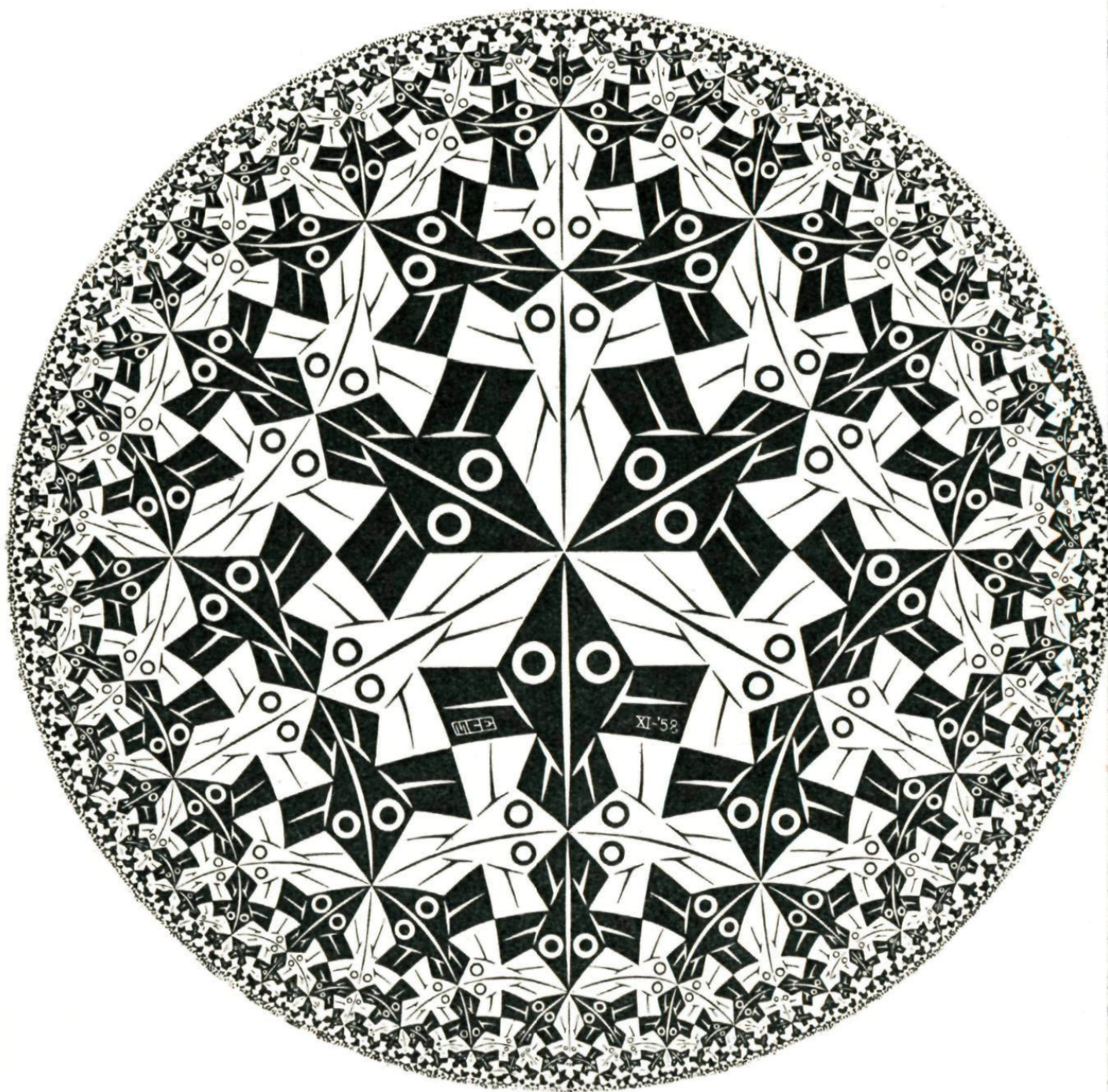
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

5

Tweede jaargang



Wat is er buiten deze schijf? Het „absolute niets”. Evenwel een uitermate actief „niets”, want alle middelpunten der cirkels, waaruit het skelet van de prent is opgebouwd, bevinden zich daar in strakke mathematische ordening.

M.C. Escher over deze prent. (Zie bldz. 110).

ENKELE INTERESSANTE KROMMEN - VIII

°°DE TRISECTRIX VAN MAC LAURIN

In Pythagoras 2-4 werd de trisectrix van Mac Laurin besproken. Een deel van deze kromme is afgebeeld in fig. 2. Hieronder wordt de vergelijking van de kromme afgeleid, terwijl tevens blijkt, wat deze te maken heeft met de driedeling (trisectie) van een hoek.

De vergelijking van de trisectrix

In fig. 1 is $P(x, y)$ een punt van de trisectrix. Volgens de gegevens (zie Pyth. 2-4, blz. 81) is $OC = CM = a$.

Verder is $PP_1 = OP_2$, dus is ook $AB = OC = a$.

Nu is dus $OB = x + a$ en $BD = 3a - x$.

Omdat $P_1B^2 = OB \cdot BD$, is $P_1B = \pm \sqrt{(3a - x)(a + x)}$, waarbij het plusteken geldt, als P_1 op de bovenste helft van de cirkel ligt en het minteken, als P_1 op de onderste helft ligt.

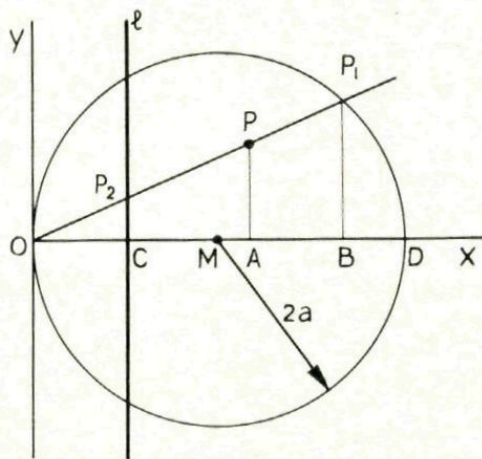


Fig. 1

Wegens de gelijkvormigheid van de driehoeken OCP_2 en OBP_1 is

$$\frac{y}{x} = \frac{P_1B}{OB} = \pm \sqrt{\frac{(3a - x)}{a + x}}$$

Als vergelijking van de trisectrix kunnen we dus schrijven:

$$y = \pm x \cdot \sqrt{\frac{3a - x}{a + x}} \quad \dots \dots \dots (1)$$

We zien hieraan, dat de kromme nulpunten heeft voor $x = 0$ en $x = 3a$. Er is een asymptoot bij $x = -a$. Verder blijkt, dat we slechts reële waarden voor y vinden, als $-a < x \leq 3a$.

De vergelijking van de trisectrix is te herleiden tot

$$y^2x + x^3 + ay^2 - 3ax^2 = 0 \quad (2)$$

Poolcoördinaten

a. Stellen we in fig. 2 $\vec{OP} = \mathbf{r}$ en $\angle POD = \psi$, dan zien we dat voor de coördinaten van P geschreven kan worden:

$$x = r \cos \psi \text{ en } y = r \sin \psi.$$

Substitueren we dat in vergelijking (2), dan vinden we na enige herleiding:

$$r = 4a \cos \psi - \frac{a}{\cos \psi} \quad (3)$$

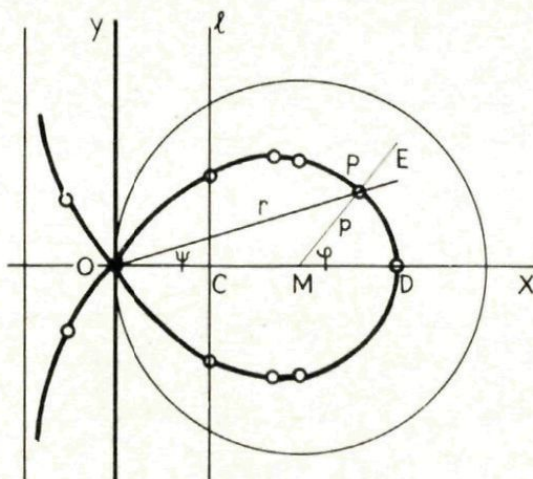


Fig. 2

r en ψ kunnen we beschouwen als poolcoördinaten. Vergelijking (3) vertelt ons dan, hoe de grootte van r afhangt van de grootte van ψ , wanneer de vector $\mathbf{r}$ draait om O.

b. Het is echter eveneens mogelijk de vector $\vec{MP} = \mathbf{p}$ te beschouwen, en te onderzoeken hoe de grootte p van $\mathbf{p}$ afhangt van de grootte van $\angle PMD = \varphi$.

We zien, dat in dit geval $x - 2a = p \cos \varphi$ en $y = p \sin \varphi$.

Substitueren we dit in vergelijking (2), dan vinden we tenslotte:

$$p^3 \cos \varphi + 3ap^2 - 4a^3 = 0 \quad (4)$$

De sinusregel in $\triangle OMP$ geeft ons het verband tussen de variabelen

$$r, p, \psi \text{ en } \varphi, \text{ nl. } r : p = \sin \varphi : \sin \psi \quad (5)$$

ADIEU PLATLANDER

In Pyth. 2-2 zagen we, dat onze vriend Platlander een brief geschreven had aan Prof. Stein, waarin hij om opheldering vroeg, naar aanleiding van zijn merkwaardige wiskundige ervaringen in biljartballand. Hij had zijn brief geadresseerd aan de familie Nix, bij wie hij Prof. Stein had ontmoet.

Onze platlander wist, dat het ongeveer drie dagen zou duren voor zijn bericht bij de familie Nix aankwam. De lichtsnelheid in biljartballand is nl. veel kleiner dan bij ons, hoewel ze toch nog vele malen groter is dan de grootste snelheid, waarmee men zich in dat land kan verplaatsen.

Hij wachtte dus rustig het antwoord af. Na de tiende dag werd hij ongeduldig en schreef het volgende korte berichtje: *Zeer geachte Dr. Nix, heeft U mijn brief al ontvangen en doorgegeven? Dank voor uw goede zorgen: P.L. Atlander.*

Zes dagen later kwam het antwoord: *Waarde P.L. Atlander, wij moeten u eerlijk bekennen dat wij aanvankelijk uw bericht niet door durfden geven aan Prof. Stein. Het kwam ons voor, dat uw wiskundige vorming nogal wat hiaten vertoonde. Wat u schreef over die gelijkzijdige driehoeken is n.l. volkomen normaal. Wie slechts één jaar wiskunde gestudeerd heeft, kan de uitkomst die u zo vreemd vindt, verklaren. Toevallig bezocht Prof. Stein ons dezer dagen en we brachten het gesprek op u en uw bericht. Hoewel ook hij uw verwondering merkwaardig vond, gelooft hij toch dat er iets meer achter zit en hij wil graag eens met u persoonlijk daarover van gedachten wisselen. Wanneer komt u? U kunt bij ons logeren. Met vriendelijke groet: Dr. Nix.*

Professor Stein deed zelf open en bracht zijn bezoekers naar zijn studeerkamer. Na een gezellig babbeltje over van alles en nog wat verontschuldigde Dr. Nix zich: hij moest die avond naar een vergadering. Onze platlander was daar blij om. Nu kon hij vrijuit spreken.

ST. Ik ben blij dat u zich de moeite van die lange reis getroost hebt om met mij over uw merkwaardige wiskundige opvattingen te spreken. Ik moet u vooraf zeggen dat ik werkelijk niets van uw verwondering over de door u geconstrueerde gelijkzijdige driehoeken begrijp en ik zie ook niet in, dat dit iets te maken heeft met mijn hypothese, dat ons heelal wel eens gekromd zou kunnen zijn als een cirkel.

PL. Professor, laat ik beginnen met enige meetkundige stellingen te formuleren, waarvan ik vermoed, dat ze u vreemd voorkomen:

Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde, zijn verwisselende binnenhoeken gelijk.

ST. Mag ik u nu onderbreken: wat verstaat u onder evenwijdige lijnen?

PL. Twee rechten noem ik evenwijdig, als ze elkaar niet snijden. Ze hebben dan bovendien de eigenschap, dat ze van elke rechte, die loodrecht op beide staat een lijnstuk van constante lengte afsnijden.

ST. Maar het moet u toch bekend zijn, dat in onze wereld *elk* tweetal rechten p en q elkaar snijdt, zelfs in twee punten. Bovendien is er slechts één rechte mogelijk, die loodrecht op beide staat. Wat u evenwijdige lijnen noemt bestaat dus niet in onze wereld. Het schijnt mij toe, dat u over benaderingen en speciale gevallen spreekt, alsof ze exact en algemeen zijn. Men kan nl. dicht bij AB een rechte CD trekken, die bij benadering loodrecht staat zowel op p als op q . Maar het lijnstuk CD is korter dan AB en bij C en D zijn de hoeken niet recht. (fig.3).

Wat die verwisselende binnenhoeken betreft: alleen in het geval van fig.4, waarin de snijlijn s door het midden van M van AB gaat, zijn deze gelijk. Maar dat is een speciaal geval.

En nu wilt u een systeem opbouwen, dat deze niet exacte en speciale gevallen tot exacte en algemene regels maakt? Ik ben benieuwd welke consequenties dat met zich voert.

Tot zover het gesprek tussen onze platlander en Prof. Stein. Gelukkig bracht P.L. Atlander niet zijn herkomst uit een ander heelal (waarin

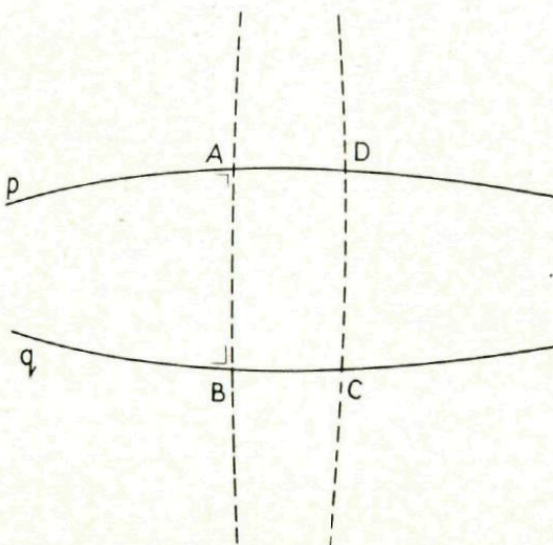


Fig.3

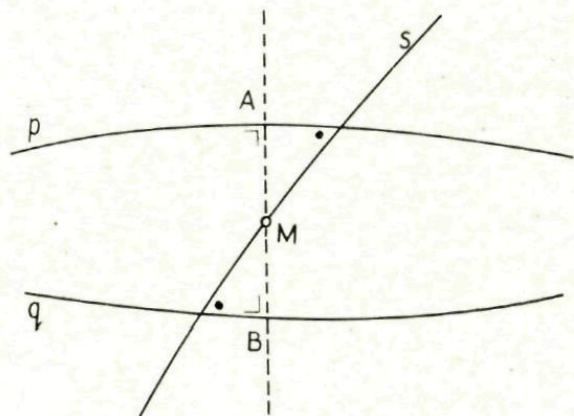


Fig.4

hijzelf vast geloofde) ter sprake, want dat zou waarschijnlijk de sfeer van het gesprek bedorven hebben. Wel beweerde hij in staat te zijn uit zijn stellingen: *als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn twee verwisselende binnenhoeken gelijk*, te bewijzen:

1. In een driehoek is de som der hoeken 180° ,
2. In een gelijkzijdige driehoek is elke hoek 60° ,
3. Men kan 6 gelijkzijdige driehoeken zo om een punt A leggen, dat ze alle A als top hebben en elk der driehoeken grenst aan twee der andere. Er zijn dan dus geen openingen of „overlappingsen”. Platlander vergeleek dat nog eens met zijn brief, die je op bladz. 46 van deze jaargang vindt.

Prof. Stein wilde deze conclusies wel onderschrijven als benaderingen in de biljartballandmeetkunde. Het interesseerde hem echter het meeste, of platlander in staat zou zijn deze conclusies uit zijn bovengenoemde en enkele andere stellingen van wat hij noemde „vlaklandmeetkunde” als algemeen geldig te kunnen bewijzen.

Vanzelfsprekend kwamen beide wiskundigen deze avond met hun besprekingen niet klaar. Toen ze diep in de nacht afscheid namen waren allerlei belangrijke zaken nog niet ter sprake gekomen, bijv. het voor onze platlander eigenaardige feit, dat er in biljartballand geen constante verhouding bestaat tussen de omtrek en de straal van een cirkel en vooral niet, wat dit alles te maken heeft met het al of niet gekromd zijn van biljartballand.

En, zult u vragen, waarom dan *Adieu Platlander*? Wel, omdat we vrezen, dat deze gesprekken betrekkelijk vruchteloos zullen blijven. Want Prof. Stein zal, vanuit de wiskunde van zijn wereld, niet kunnen komen tot het inzicht van het gekromd zijn daarvan. We verwachten daarom, dat onze platlander het een opluchting zal vinden, dat we hem voorlopig (op een voor hem onbegrijpelijke wijze) weer terugbrengen naar zijn oorspronkelijke wereld: vlakland. Daar gaat hij dan: Goede reis en adieu Platlander!



°°Projectieve Meetkunde IV

In het vorige artikel zagen we, dat onder de dubbelverhouding (ABCD) verstaan wordt $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$, waarbij A, B, C en D vier punten van een rechte l zijn.

Er werd bewezen, dat de dubbelverhouding bij projecteren invariant is.

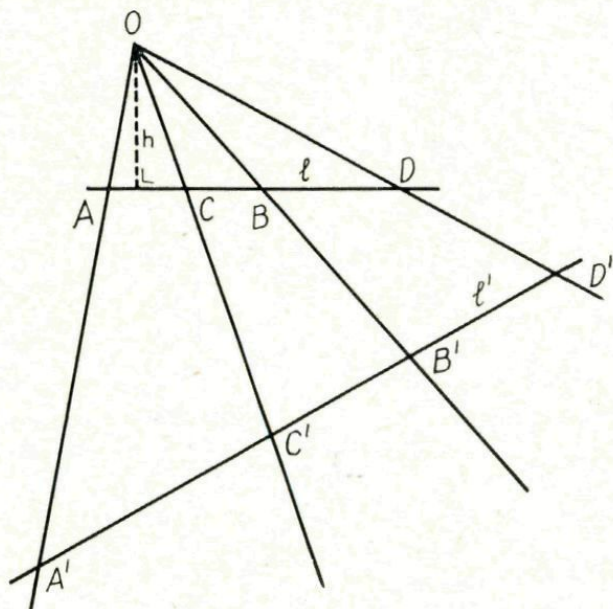


Fig. 5

In fig. 5 is

$$(ABCD) = (A'B'C'D') = \frac{\sin COA}{\sin COB} : \frac{\sin DOA}{\sin DOB}.$$

Hierbij werd verondersteld, dat geen der vier punten zou samenvallen met het oneindig verre punt van l .

We zullen nu eerst nagaan, wat we kunnen verstaan onder de dubbelverhouding van vier punten, als één daarvan het oneindig verre punt van l is. We zullen dit punt voorstellen door het symbool D_{∞} .

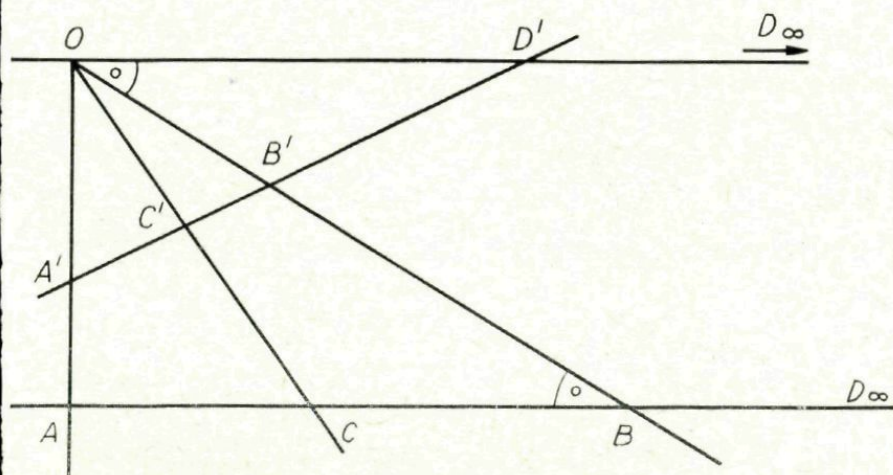


Fig. 6

Zie nu fig. 6. Het ligt voor de hand de dubbelverhouding $(ABCD_{\infty})$ gelijk te stellen aan $(A'B'C'D')$, zodat ook in dit geval de invariantie bij projecteren blijft bestaan.

Dus is:
$$(ABCD_{\infty}) = \frac{\sin C'OA'}{\sin C'OB'} : \frac{\sin D'OA'}{\sin D'OB'}.$$

Let nu op de gelijkheid van verwisselende binnenhoeken bij evenwijdige lijnen, bijv. $\angle D'OB' = \angle OBC$.

$$(ABCD_{\infty}) = \frac{\sin COA}{\sin COB} : \frac{\sin CAO}{\sin CBO} = \frac{\sin COA \cdot \sin CBO}{\sin CAO \cdot \sin COB}.$$

Door toepassing van de sinusregel in de driehoeken COA en COB blijkt nu

$$(ABCD_{\infty}) = \frac{CA}{CO} \cdot \frac{CO}{CB} = \frac{CA}{CB}.$$

De dubbelverhouding $(ABCD_{\infty})$ is dus gelijk aan de verhouding van de lijnstukken CA en CB. Is M het midden van AB, dan zien we, dat de vier punten A, B, M en het oneindig verre punt D_{∞} van l de dubbelverhouding -1 hebben.

Als een puntenviertel de dubbelverhouding -1 heeft zeggen we, dat ze een *harmonisch* viertal vormen. De punten van het ene paar zijn dan harmonisch aan elkaar toegevoegd ten opzichte van de punten van het andere paar.

Als in $\triangle ABC$ de binnenbissectrice van $\angle C$ de basis AB snijdt in D en de buitenbissectrice van $\angle C$ snijdt het verlengde van AB in E, dan zijn D en E harmonisch aan elkaar toegevoegd ten opzichte van A en B. Trek om dat te bewijzen een rechte evenwijdig met CE en let op de lijnstukken, die CA, CD en CB op deze rechte insnijden.

De vier rechten CA, CD, CB en CE noemen we nu een *harmonisch viertal*. Elke rechte, die niet door C gaat snijdt ze in vier punten, waarvan er twee harmonisch toegevoegd zijn aan de andere twee.

We zeggen ook wel, dat de rechte CB de poollijn is van het punt A ten opzichte van het rechtenpaar CD en CE.

De harmonische ligging speelt een zeer belangrijke rol in de relatie pool en poollijn.

Deze relatie is voor alle kegelsneden dezelfde, nl.:

Trekken we door de pool P een rechte, die de poollijn snijdt in Q en de kegelsnede in R en S, dan is (PQRS) een harmonisch viertal, dus de dubbelverhouding $(PQRS) = -1$.

Wegens de invariantie van de dubbelverhouding bij projecteren is het voldoende deze relatie te bewijzen voor een cirkel. Zie fig. 7. Hier is het puntenviertal (PQRS) getekend, dat men vindt op de middellijn door P. Gemakkelijk ziet men in, dat in $\triangle APQ$ de lijnen AR en AS binnen- en buitenbissectrice zijn, zodat $(PQRS) = -1$ is.

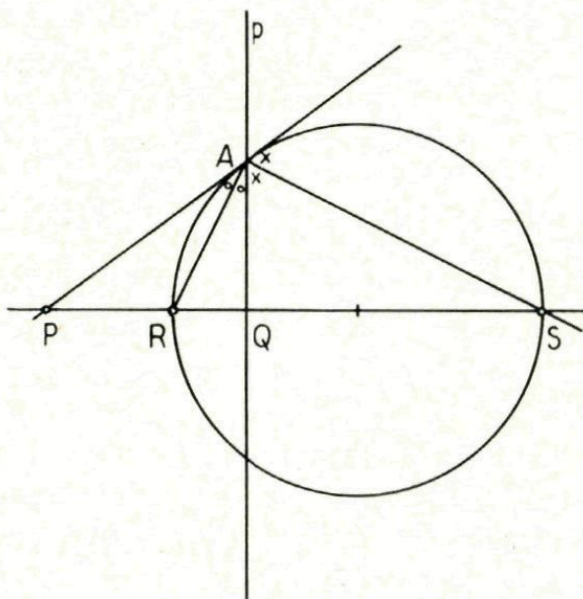


Fig. 7

Een bewijs voor een willekeurige rechte door P is meetkundig niet zo moeilijk te geven, maar het vergt wat meer voorbereiding dan onze plaatsruimte toelaat. Hier volgt een aanwijzing voor een bewijs met behulp van de analytische meetkunde:

Kies de pool P in de oorsprong van een rechthoekig assenstelsel en laat de cirkel als vergelijking hebben

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2.$$

De poollijn heeft dan als vergelijking

$$x = \frac{a^2 - r^2}{a}.$$

De abscissen van de snijpunten van een rechte $y = mx$ door P met de cirkel volgen uit de vergelijking

$$(1 + m^2)x^2 - 2ax + (a^2 - r^2) = 0.$$

Zijn x_1 en x_2 de wortels van deze vergelijking dan is het voldoende om te controleren,

$$\frac{x_1}{x_1 - \frac{a^2 - r^2}{a}} : \frac{x_2}{x_2 - \frac{a^2 - r^2}{a}} = -1.$$

Wanneer men een beetje handig gebruik maakt van de eigenschappen van de wortels van een vierkantsvergelijking valt het niet moeilijk de juistheid hiervan te verifiëren. Dat laten we dus aan de lezers over.



Oneindig

Oneindig groot, oneindig veel, oneindig lang, . . . zulke uitdrukkingen zijn voor de meeste mensen geladen met gevoel. Ze suggereren iets groots, iets onbereikbaars. De wiskundigen werken ook met het begrip oneindig. Ze zijn er echter uiterst voorzichtig mee. Toch komen ze tot eenvoudige resultaten, die onbegrijpelijk schijnen, maar wiskundig niets geheimzinnigs hebben.

Men zou bijvoorbeeld verwachten, dat de som van een *oneindig* groot aantal getallen ook oneindig groot zou moeten zijn. Maar bekijk nu eens de som

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

De wiskundige bewijst gemakkelijk, dat deze som, al neemt men het aantal termen nog zo groot, niet boven het getal 2 uitkomt, maar daarvan op den duur willekeurig weinig verschilt. Wie iets van meetkundige rijen weet kan dat gemakkelijk narekenen. Toch blijft het wonderlijk: oneindig veel getallen optellen en desondanks een eindige uitkomst krijgen.

M.C. Escher, van wie we al enige prenten besproken hebben, heeft getracht dit in beeld te brengen. Zelf schrijft hij over de houtsnode, die op de binnenzijde van het omslag is afgedrukt:

„. . . deze prent toont een weg die kan leiden tot het ontstaan van een volmaakt twee-dimensionaal *heel*-al. Maar het zij verre van mij te beweren, dat in dit specifieke voorbeeld de volmaaktheid inderdaad zou zijn bereikt. Dit rudimentaire vissenoermotief, zoals het zich in het centrum van de prent in de grootste omvang vertoont, driemaal in witte, driemaal in zwarte gedaante, laat zeer veel te wensen over wat expressiviteit betreft. Deze vis is nog maar nauwelijks uitgegroeid tot een hoger stadium dan dat van een rechte lijnige abstractie en het is de vraag, of hij zich er ooit toe zal willen lenen om verder te evolueren. En toch bevredigt mij dit resultaat als iets waar ik jaren lang tevergeefs naar heb gezocht.

De omvang van mijn vis-patronen, maximaal van grootte in het centrum, slinkt gaandeweg naar buiten toe en bereikt de limiet van het oneindig kleine formaat en tevens van het oneindig grote aantal in een cirkel die alles omsluit.

Het skelet van deze figuratie bestaat behalve uit de drie rechte lijnen die elkaar in het centrum snijden, uit louter cirkelbogen, met steeds kortere stralen, die de omhullende cirkel alle loodrecht snijden.

Wat is er buiten deze schijf? Het „absolute niets”. Evenwel een uitermate actief „niets” want alle middelpunten der cirkels, waaruit het skelet is opgebouwd, bevinden zich daar in strakke mathematische or-

dening ...” Dit zijn dus bespiegelingen van een kunstenaar in woord en beeld over: oneindig.

De tweede prent is van Ir A. Bosman; hij is tijdens de oorlog getekend op dezelfde tekentafel, waarop het ontwerp voor een duitse oorlogsbuit uitgewerkt moest worden. De tekening van de boot is nooit klaargekomen, de *boom van Pythagoras*, zoals de tekening gedoopt is, echter wel.

Ze is als volgt gebouwd: teken eerst een vierkant (de dikke stam). Hierbovenop een rechthoekig gelijkbenige driehoek. Op de beide rechthoekszijden worden weer vierkanten geconstrueerd, daarop weer rechthoekig gelijkbenige driehoeken enz.

Ir. Bosman schrijft over deze figuur.

„Hoe de tekening zal worden is niet te voorzien. Willen we het weten dan zullen we hem verder moeten construeren.

Het oppervlak van het grootste vierkant is gelijk aan de som van de 2 kleinere daaropvolgende, ook gelijk aan de 4 dááropvolgende enz. Het aantal vierkanten met gezamenlijk gelijk oppervlak groeit: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 512, 1024, 2048 ... tot het wonderlijk bouwsel van de Pythagoreïsche boom met scherpe limietlijnen en fijn kantwerk.

Elk vierkant ervan kan beschouwd worden als het oorspronkelijk vierkant, waaruit de boom zich ontwikkelde, zodat deze bestaat uit een ineenvoeging van gelijkvormige steeds kleiner wordende bomen.

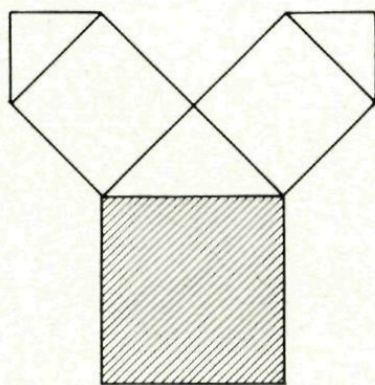
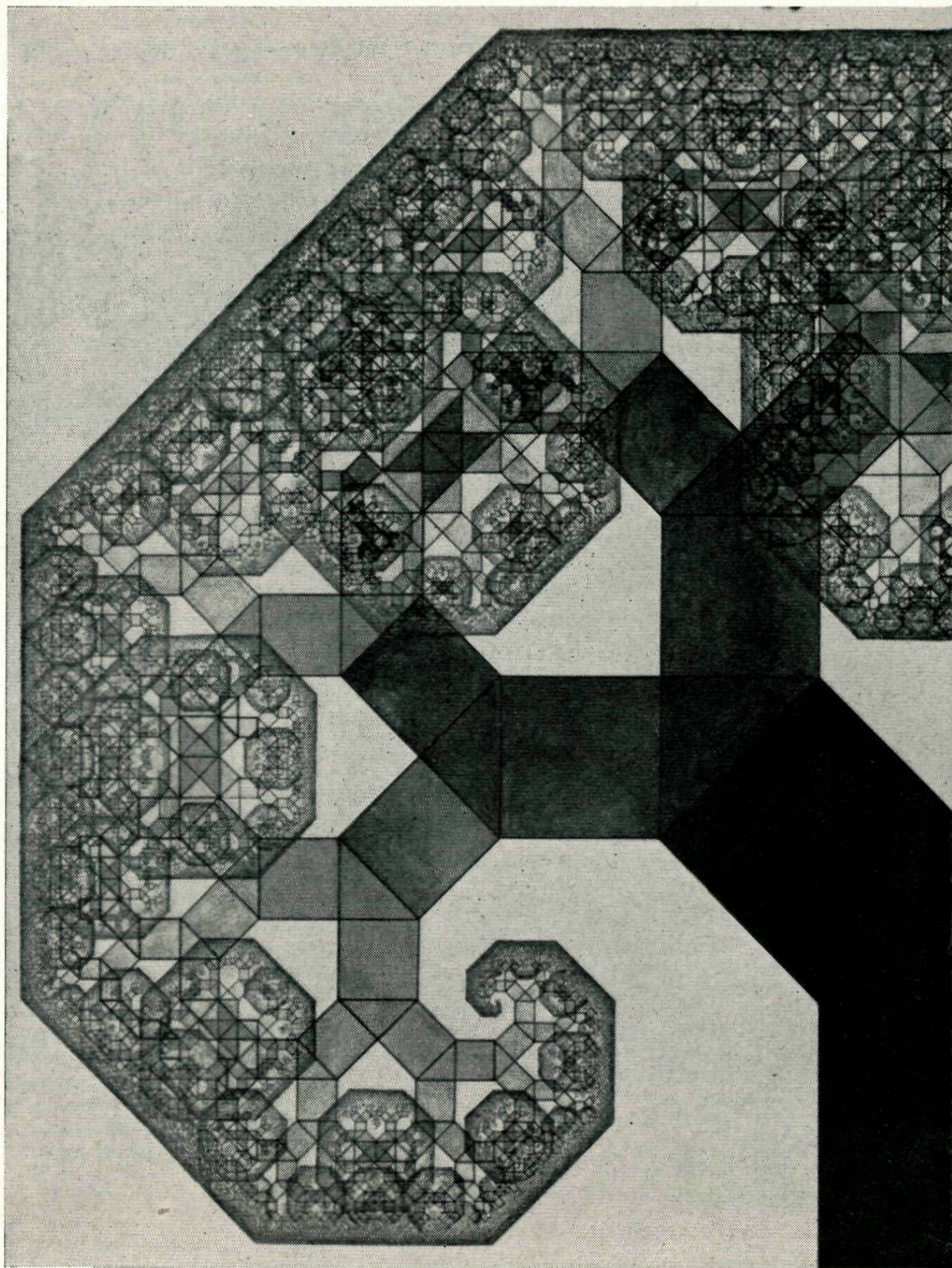


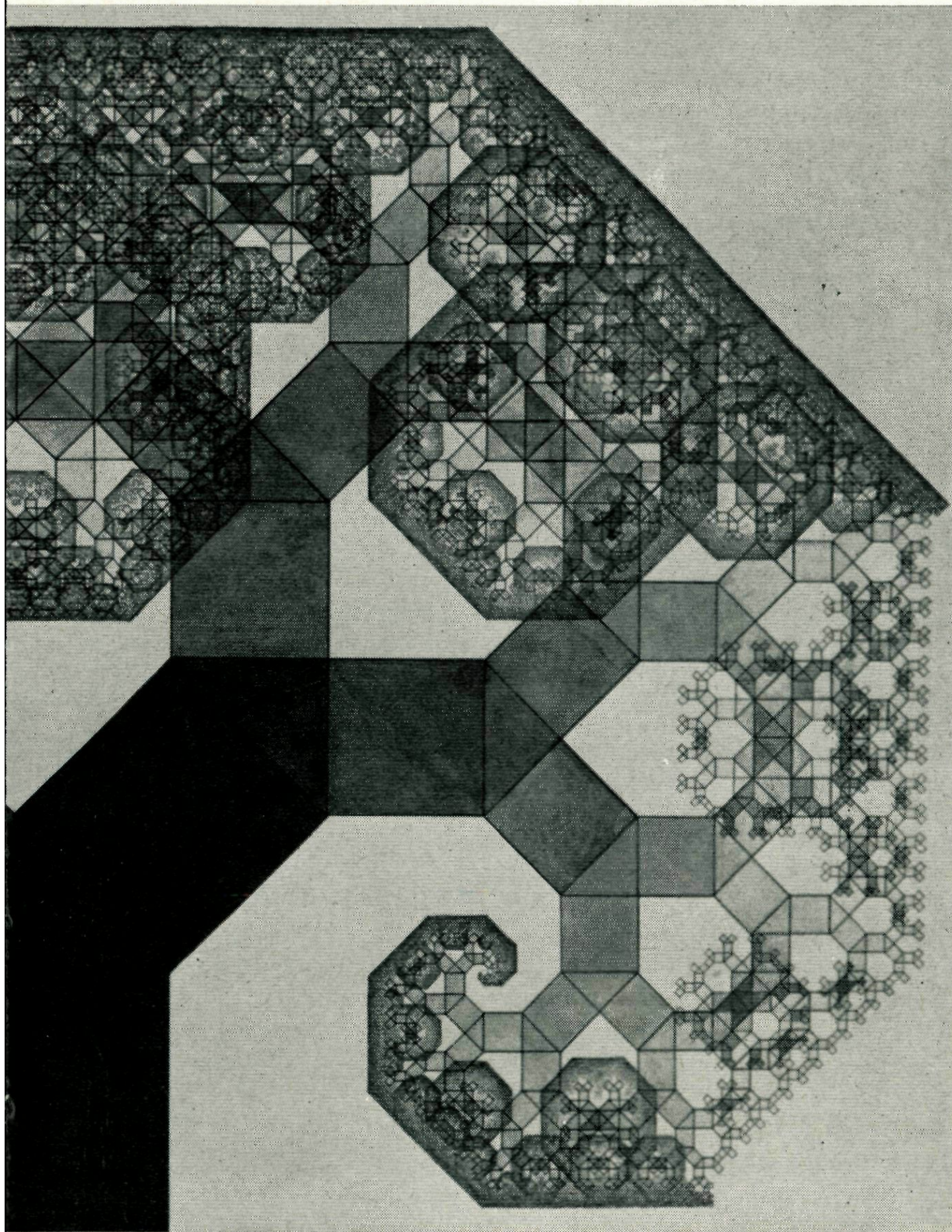
Fig. 8

De gedachten, die bij deze figuur opkomen, zullen bij ieder anders zijn. We kunnen ons voorstellen, dat iemand wil weten hoe hoog deze boom is, als zijn stamdikte a is. Hoe breed zijn kroon aan de bovenkant en in het midden is, waar het centrum van de krulpunten gelegen is enz ...”

Al deze vragen zijn op te lossen met enige eenvoudige planimetrische stellingen en kennis van de somformule voor de oneindig voortlopende afdalende meetkundige rij.

In deze tekening is ook het „oneindige” in beeld gebracht. Wat hier opvalt is, dat er zo’n grote verscheidenheid van vormen ontstaat. We zien weliswaar telkens een herhaling van het voorafgaande, maar daar-





bij ontstaat een heel eigenaardige omtrek, terwijl binnen dit gebied steeds nieuwe golven van achthoeken ontstaan, die de indruk wekken dat ze ontstaan zijn door terugkaatsing der elementen tegen de buiten-omtrek.

¹⁾ Wie verder kennis wil maken met het werk van Escher, kan lezen: *Grafiek en tekeningen*. M. C. Escher. J. J. Tijl, Zwolle.

Voor het werk van Bosman zie: *Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde*. Ir. A. E. Bosman. / Parcival N.V. Utrecht.

Het zijn twee prachtige boeken, waaraan men steeds opnieuw plezier kan beleven.



°° *De Monte-Carlo-methode en de zalmtrek*

Naar aanleiding van het artikel over de Monte-Carlo-methode in Pythagoras 2-1 zijn een aantal uitwerkingen binnengekomen, waaronder zeer uitvoerige van Piet Delhooven uit Heel, T. den Hartog uit Utrecht en Hans Hoefnagels uit Eindhoven. Er waren ook inzenders, die op een *systematische* manier „pijlen gingen schieten”. Maar daarmee miskenden ze het speciale karakter van de Monte-Carlo-methode. Men past deze natuurlijk niet toe om de oppervlakte van een cirkel of een andere regelmatige figuur te vinden. De methode wordt gebruikt om iets te kunnen voorspellen van processen, die zich aan elke regelmaat schijnen te onttrekken. Een typerend voorbeeld daarvan is de bestudering van de zalmtrek.

Verschillende zalmsoorten leven in de Stille Oceaan. Ze worden echter geboren in de riviermonden van de westkust van Noord Amerika. De jonge vissen trekken de Stille Oceaan op. Ze leven daar enige jaren en keren dan terug naar precies dezelfde riviermond, waar ze geboren waren. Natuurlijk komen niet alle daar terug, maar slechts een zeker percentage, dat uit waarnemingen bekend is.

Hoe ze, eenmaal bij de kust gekomen, de juiste riviermond vinden was reeds lang bekend: ze herkennen de stroom aan zijn geur. Het was echter een raadsel hoe ze de duizenden kilometers in volle zee in de juiste richting aflegden. Men heeft, om dit te verklaren allerlei ingewikkelde navigatie-organen voorgesteld. Deze bleken bij anatomisch onderzoek echter niet aanwezig te zijn.

Nu heeft een wiskundig onderzoek aan het licht gebracht, dat het veronderstellen van een navigatie-orgaan niet nodig is om het waargenomen percentage terugkerende zalm te verklaren.

Men neemt aan dat een zalm – die tijdens de lange tocht zo goed als niets eet – de broedplaatsen niet meer bereikt, als hij langer dan 175 dagen zou zwemmen. Men kan nu een hypothetische zalm ergens zijn tocht laten beginnen en hem in een willekeurige richting een tijdlang laten zwemmen. Vanuit het punt, dat hij dan bereikt heeft, kan men hem in een andere willekeurige richting laten zwemmen, enz. Zo kan men berekenen, waar hij na 175 dagen is.

Dit onderzoek heeft geen zin, zolang we maar *enkele* vissen op die manier volgen op hun tocht. Er zijn een zeer groot aantal berekeningen nodig, die men door electronische rekenmachines laat uitvoeren. Het is bij deze berekeningen gebleken, dat als men elke richting even waarschijnlijk acht, er een veel te klein percentage vissen terug zou keren op de broedplaatsen. Veronderstelt men echter een zwak richtend vermogen, bijvoorbeeld doordat de zalm 's morgens bij voorkeur tegen de zon inzwemt, 's middags deze ongeveer aan de rechterzijde houdt en er 's avonds vanaf zwemt, dan vindt men bij de berekeningen reeds spoedig het juiste percentage.

Men kan deze voorkeur voor een richting bij de rekenmachine nabootsen door de waarschijnlijkheid van bepaalde richtingen in de berekeningen te verkleinen. De richting pal oost kan men bijvoorbeeld tien maal laten voorkomen en de richting pal west slechts één maal.

Zo blijkt de Monte-Carlo-methode een oplossing te kunnen geven, die van een veel eenvoudiger veronderstelling (slechts een zwak richtend vermogen) gebruik maakt, dan men aanvankelijk nodig meenden te hebben. Slechts doordat de electronische rekenapparaten ons de gelegenheid geven de zeer talrijke berekeningen binnen niet al te lange tijd uit te voeren, zijn we nu in staat deze methode toe te passen en daardoor een beter inzicht te verkrijgen in een tot nu toe raadselachtige zaak.



°°MEETKUNDE SPELEN MET SPEELKAARTEN II

Ingezonden door N. G. de Bruijn te Nuenen (N. Br.).

Gevraagd werd een normaal pak van 52 speelkaarten zó in een rechthoekig schema van 4 rijen en 13 kolommen uit te leggen, dat elk waardenpaar (zoals bijv. 8b) precies in één kolom voorkomt, dat geen enkele waarde twee keer in eenzelfde kolom voorkomt, en zo dat er bij elk kolommenpaar precies één waarde is die in beide kolommen staat. Hier is dan een oplossing:

a	a	a	a	h	h	h	v	v	v	b	b	b
h	10	7	4	10	9	8	10	9	8	10	9	8
v	9	6	3	7	6	5	6	5	7	5	7	6
b	8	5	2	4	3	2	2	4	3	3	2	4
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII

Deze werd als volgt verkregen: De eerste kolom ahvb werd neergeschreven in de gedachte dat er in elk geval vier waarden in moeten staan, en dat het er op dat ogenblik niet toe doet welke dat zijn. Vervolgens moeten er nog 3 kolommen zijn waar de aas in voorkomt; die drie azen leggen we alvast neer; eenzelfde waarde mag niet twee keer onder de aas liggen, zodat de negen waarden 2 t.e.m. 10 elk één keer aan de beurt komen. Aangezien deze nog niet door ons gebruikt zijn, is het onverschillig hoe ze precies in de kolommen II, III, en IV worden gelegd; we hebben een willekeurige keuze gedaan.

Van de resterende 9 kolommen kunnen we zeggen dat hvb elk drie keer moeten voorkomen, en nooit twee van deze in één kolom (omdat in kolom I al hvb staan). We schrijven dus hhhvvvbbb aan de kop van de 5e t.e.m. 13e kolom.

We gaan vervolgens de negen resterende kaarten 10 9 8 plaatsen. De 10 9 8 komen samen voor in kolom II, dus in elk der kolommen V t.e.m. XIII mag er van deze negen kaarten maar één komen. Dat is dus precies één per kolom. Daar combinaties als h 10 maar één keer mogen optreden kunnen we nu op de 5e t.e.m. 13e plaats in de tweede rij leggen 10 9 8 10 9 8 10 9 8.

Het is nu niet moeilijk meer de hoek rechts onderaan met de resterende achttien kaarten op te vullen zo dat geen waardenpaar in twee kolommen voorkomt. Nu is aan alle eisen voldaan: In de vorige aflevering is uiteengezet dat we niet meer alles behoeven te controleren: we behoeven niet meer na te gaan dat nu ook elk waardenpaar ergens in een kolom voorkomt, en dat er bij elk kolommenpaar precies één waarde is die in beide kolommen ligt. Bijvoorbeeld: gaan we uit van 7b, dan is dat alleen kolom XII; noemen we kolommen III en IX, dan is het alleen de 5 die in beide staat.

Nu de meetkunde: het hele systeem gaat op meetkunde lijken als we maar een meetkundige terminologie invoeren. Laten we afspreken, dat we „punt” zeggen in plaats van „waarde”, en „lijn” in plaats van „kolom”. Als een zekere waarde in een zekere kolom voorkomt zeggen

we „het punt ligt op de lijn” of ook wel „de lijn gaat door het punt”. Zo ligt punt b op lijn XI en zo gaat lijn V door punt 7. We kunnen nu ook verder gaan: als twee lijnen beide door eenzelfde punt gaan, dan zeggen we dat ze elkaar in dat punt snijden, en dat het punt een snijpunt is van de beide lijnen. En als twee punten op eenzelfde lijn liggen, kunnen we die lijn verbindingslijn van de beide punten noemen. Dank zij de speciale eigenschappen van ons schema kunnen we vaststellen:

(A) *Twee lijnen hebben steeds precies één snijpunt.*

(B) *Twee punten hebben steeds precies één verbindingslijn.*

In de gewone vlakke meetkunde geldt (A) niet, want daar zijn evenwijdige lijnenparen, die dus geen snijpunt hebben. Maar in de projectieve meetkunde, waarover in Pythagoras verschillende malen is gesproken, gelden (A) en (B) wél.

Onze tafel-vol-speelkaarten heeft belangrijke eigenschappen met die projectieve meetkunde gemeen. Zo gelden bijvoorbeeld de stellingen van *Desargues* en *Pappus*. (Deze stellingen kan men ook in de gewone vlakke meetkunde uitspreken wanneer men zich beperkt tot gevallen waarbij in de figuur geen evenwijdigheden optreden).

De stelling van *Desargues* luidt: hebben twee driehoeken $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ de eigenschap dat de lijnen A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 , door één punt S gaan (ondersteld is dat deze drie lijnen twee aan twee verschillend zijn), dan zullen de punten P , Q , R (resp. snijpunt van de „overeenkomstige zijden” B_1C_1 en B_2C_2 , C_1A_1 en C_2A_2 , A_1B_1 en A_2B_2) op één lijn l liggen. (Zie bldz. 46 van deze jaargang).

Laten we hiervan maar een geval controleren (dit wordt dus geen echt bewijs, maar een verificatie van één speciaal geval). Neem voor S het punt 9; door S trekken we de lijnen II, VI, XII. Op II nemen we $A_1 = 8$, $A_2 = a$; op VI nemen we $B_1 = 6$, $B_2 = h$; op XII nemen we $C_1 = 7$, $C_2 = 2$. Nu gaan we de zijden van de driehoeken bepalen: B_1C_1 is de verbindingslijn van 6 en 7, dus lijn III, en verder $B_2C_2 = VII$, $C_1A_1 = X$, $C_2A_2 = IV$, $A_1B_1 = XIII$, $A_2B_2 = I$. Nu is P het snijpunt van III en VII, dus $P = 5$; Q is het snijpunt van X en IV, dus $Q = 3$; R is het snijpunt van XIII en I, dus $R = b$. De stelling van *Desargues* spreekt nu uit dat 5, 3 en b op één lijn liggen, en inderdaad, ze liggen op XI.

De lezers zullen er misschien plezier in hebben ook andere toepassingen van dezelfde stelling te controleren.

Nu de stelling van *Pappus*: We hebben twee lijnen l en m , en zes verschillende punten P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , P_6 , afwisselend gelegen op l en m .

dus P_1, P_3, P_5 op l en P_2, P_4, P_6 op m . Neem nu het snijpunt Q_1 van P_1P_2 en P_4P_5 , het snijpunt Q_2 van P_2P_3 en P_5P_6 , en het snijpunt Q_3 van P_3P_4 en P_6P_1 . De stelling van Pappus spreekt nu uit dat $Q_1Q_2Q_3$ op één lijn liggen.

Deze stelling van Pappus geldt ook voor ons kaartentafeltje. Neem maar iets in het wilde weg: $l = \text{III}$, $m = \text{IX}$, en daarop $P_1 = a$, $P_3 = 6$, $P_5 = 7$, resp. $P_2 = 4$, $P_4 = v$, $P_6 = 9$ (het is niet verboden om voor één dezer zes punten het snijpunt S van III en IX te kiezen, maar in dat geval wordt de stelling een beetje flauw, omdat dan Q_1, Q_2 en Q_3 niet meer alle verschillend zijn, en dan de mededeling dat ze op één lijn liggen wat kinderachtig is).

Bij de gemaakte keuze is $P_1P_2 = \text{IV}$, $P_2P_3 = \text{XIII}$, $P_3P_4 = \text{VIII}$, $P_4P_5 = \text{X}$, $P_5P_6 = \text{XII}$, $P_6P_1 = \text{II}$. Dus $Q_1 = 3$, $Q_2 = b$, $Q_3 = 10$, en inderdaad liggen deze op één lijn, nl. XI .

Op grond van (A), (B), Desargues en Pappus zeggen, we dat ons kaartentafeltje een *projectieve meetkunde* is, maar een preciese definitie daarvan zullen we niet geven. Het begrip evenwijdigheid komt hierin niet voor. Maar door een kleine wijziging aan te brengen kunnen we er een z.g. affiene meetkunde uit maken, waarin wél evenwijdige lijnen optreden. Het is alsof de speelkaartenproductie hiermee vanouds rekening heeft gehouden, door vier der 13 waarden een bijzonder karakter te geven, n.l. de „plaatjes” a, h, v, b . We zullen deze niet meer als eigenlijke punten beschouwen; de eigenlijke punten zijn $2, 3, \dots, 10$. Ook de lijn I danken we af, omdat daar geen enkel eigenlijk punt op ligt. We houden over een systeem met negen punten en twaalf lijnen:

10	7	4	10	9	8	10	9	8	10	9	8
9	6	3	7	6	5	6	5	7	5	7	6
8	5	2	4	3	2	2	4	3	3	2	4
II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII

De lijnen $\text{II}, \text{III}, \text{IV}$ (die vroeger de aas bevatten) zullen we nu evenwijdig noemen (II en III hebben geen snijpunt, omdat we dat juist hebben afgedankt; daarom noemen we ze maar evenwijdig, evenzo met III en IV , en met II en IV). Ook de lijnen $\text{V}, \text{VI}, \text{VII}$ noemen we onderling evenwijdig, en evenzo het stel $\text{VIII}, \text{IX}, \text{X}$ en het stel $\text{XI}, \text{XII}, \text{XIII}$. Er zijn dus vier „richtingen”, die we weer resp. met de letters a, h, v, b . zouden kunnen aanduiden.

Het zal onmiddellijk duidelijk zijn dat ons afdankproces de uitspraken (A) en (B) vervangt door (A') en (B'):

(A') Twee lijnen zijn òf evenwijdig òf ze hebben precies één snijpunt; twee lijnen, die elk evenwijdig zijn met een derde, zijn ook onderling evenwijdig.
 (B') Twee punten hebben precies één verbindingslijn; door een punt P buiten de lijn l gaat precies één lijn die evenwijdig is met l .
 Maar ook geldt het omgekeerde: als we een schema van drie rijen en negen kolommen hebben dat aan (A') en (B') voldoet, dan kunnen we weer „plaatjes” toevoegen zo, dat een systeem ontstaat, dat aan (A) en (B) voldoet.

Op precies dezelfde manier kan men de gewone vlakke meetkunde (die aan (A') en (B') voldoet) uitbreiden tot een projectieve meetkunde. De „plaatjes” die we toevoegen zijn de „richtingen”, die we nu „oneigenlijke punten” zullen noemen. En we voegen één zg. „oneigenlijke lijn” toe, waar alle plaatjes op liggen. Op die manier ontstaat een systeem dat aan (A) en (B) voldoet. (Zie bldz. 41 van deze jaargang).



°°° *Getallen, die „GROEIEN” of „AFNEMEN” III*

door J.C. van Rhijn te Vollenhove

In de beide voorgaande artikelen (Pyth. jaargang 2 bldz. 21 e.v. en bldz. 43 e.v.) bestudeerden we de getallenrijen met de formules

$$g_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ en } G_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \quad (n \geq 2)$$

We stelden vast, dat de rij g_n monotoon stijgend en de rij G_n monotoon dalend is. Bovendien zagen we dat voor elke $n \geq 2$ geldt:

$$2 \leq g_n < G_n \leq 4.$$

We verwachten nu, dat de beide rijen tot eenzelfde limiet zullen naderen, als we n onbeperkt laten toenemen. Dit is inderdaad het geval. Deze gemeenschappelijke limiet wordt voorgesteld door de letter e . Dat deze gemeenschappelijke limiet bestaat volgt uit:

1. het monotoon stijgen van g_n ; (zie bldz. 44 van deze jaargang).
2. het monotoon dalen van G_n ; (zie bldz. 45).
3. het naderen tot nul van $G_{n+1} - g_n$.

Dat laatste gaan we nu bewijzen:

$$\begin{aligned}
 G_{n+1} - g_n &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-(n+1)} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \\
 &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left[\frac{n+1}{n} - 1\right] = \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{n} \cdot g_n.
 \end{aligned}$$

Nu hadden we al bewezen, dat $2 \leq g_n \leq 4$ is, dus is $\frac{2}{n} \leq G_{n+1} - g_n \leq \frac{4}{n}$.

Wanneer n onbeperkt toeneemt, naderen het eerste en derde lid tot nul. Het tweede dus ook. Hieruit volgt, dat het verschil van G_{n+1} en g_n zo klein gemaakt kan worden, als we zelf willen, nl. door n maar groot genoeg te kiezen. Er volgt ook uit, dat de termen van beide rijen naderen tot eenzelfde limiet. Zou dat nl. niet het geval zijn, doordat g_n naderde tot de limiet l en G_n tot de limiet L , waarbij $L - l \neq 0$ is, dan zouden de verschillen $G_{n+1} - g_n$ niet tot nul kunnen naderen. Immers voor heel grote n zouden de getallen g_n dicht in de buurt van l liggen en de getallen G_n dicht in de buurt van L en hun verschil dus dicht in de buurt van $L - l$ en dat zou dus niet nul zijn.

We zijn nu gekomen aan het eind van ons betoog. We hebben gezien, dat de getallen $g_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tot een limiet naderen, die we e hebben genoemd. Het berekenen van deze limiet is nog niet zo eenvoudig. e is trouwens een onmeetbaar getal, dus niet in een eindigende of periodieke decimale breuk uit te drukken. We eindigen met het geven van een benadering in 10 decimalen:

$$e \approx 2,7182818285$$



DE WIMECOS-PRIJSVRAAG

De eerste prijs kon worden toegekend aan:

Frans J. Keune, leerling Cartesiuslyceum, h.b.s. 5B Amsterdam.

De tweede en derde prijs zijn voor:

R. M. Visscher, leerling Lod. Makeblijde Coll. Gymn. 6 β Rijswijk.

Jan Burema, leerling Praediniusgymn. 5 β Groningen.

Opgave 1

Hoewel het onderscheid tussen dorpen en gehuchten een overbodig gegeven was, kon men er toch gemakkelijk gebruik van maken. Dit deed o.a. *Wilberd van der Kallen* te Bussum. Hier volgt zijn oplossing:

- a. Uit de kaart blijkt, dat ieder gehucht (behalve A) slechts kan worden bereikt via een dorp.
- b. Er zijn, buiten A, 17 gehuchten.
- c. Men moet dus langs 17 dorpen voor men in het laatste gehucht is aangekomen.
- d. Hierna moet men nog naar dorp B.
- e. Er moeten daarom minstens 18 dorpen zijn, er zijn er maar 17, dus *het kan niet*.

Opgave 2a

Het bleek nogal moeilijk zorgvuldig onder woorden te brengen op welke wijze de verdeling van de beide driehoeken had plaats gevonden. *A. D. Freye* te Harkstede (Gr.) schreef:

1. Zorg ervoor dat de bases van de beide driehoeken evenwijdig lopen en dat de toppen van de driehoeken aan dezelfde kant van de bases liggen.
2. Trek in elke driehoek de middenparallel, die evenwijdig is met de basis.
3. Trek uit de top de loodlijn op de middenparallel.
4. Trek door de hoekpunten van de ene driehoek rechten evenwijdig aan de zijden van de andere driehoek.
5. Beschouw van deze rechten alleen de lijnstukken, die beginnen in het hoekpunt en eindigen in het snijpunt van de rechte met de middenparallel (of de zijde).

Opgave 2b

We geven hiervan alleen de figuren die door *A.D. Freye* getekend zijn. Er waren ook andere verdelingen mogelijk.

Fig.9

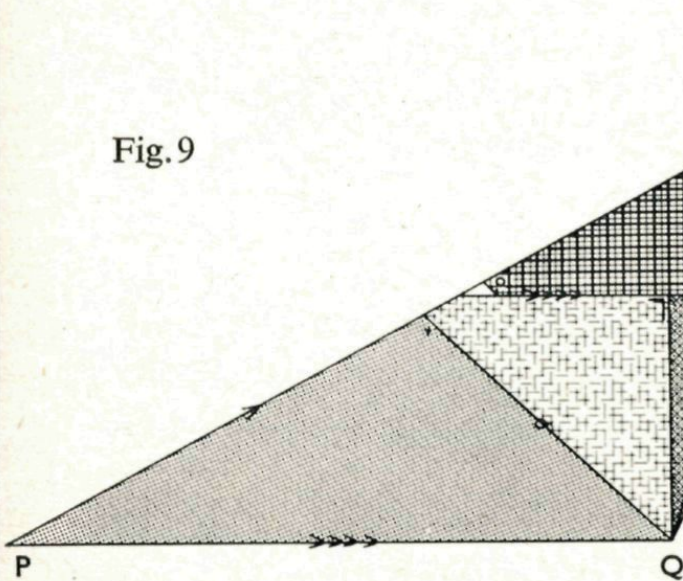
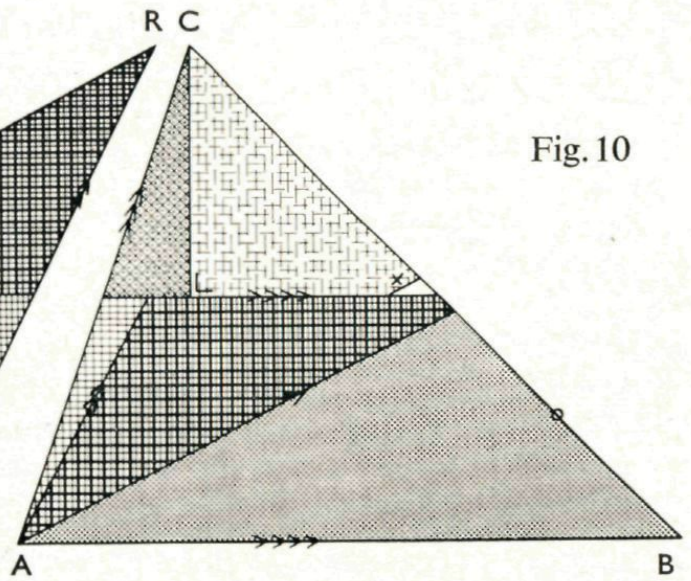


Fig.10



Opgave 3

De volgende oplossing is van *J.Wolleswinkel* te Wormerveer:

$$\begin{aligned} \text{Stel } n^2 + n + 24 &= r(r + 1) \\ n^2 + n + 24 &= r^2 + r \\ 24 &= r^2 - n^2 + r - n \\ 24 &= (r - n)(r + n + 1) \end{aligned}$$

24 kan ontbonden worden in de volgende stellen factoren:

1 en 24 ; 2 en 12 ; 3 en 8 ; 4 en 6.

Daar r geheel is en $r - n$ en $r + n + 1$ ook geheel moeten zijn, moet n geheel zijn. Dan zijn $r - n$ en $r + n$ beide even of beide oneven, dus $r - n$ en $r + n + 1$ even en oneven of oneven en even.

De mogelijkheden 2 en 12 en 4 en 6 vervallen dus.

Er blijven nog twee mogelijkheden over:

$$\begin{array}{ll} r - n = 1 & \text{en} \quad r - n = 3 \\ r + n + 1 = 24 & \text{en} \quad r + n + 1 = 8 \end{array}$$

In het eerste geval vinden we $n = 11$, in het andere geval $n = 2$.

OPLOSSINGEN van de DENKERTJES in Pythagoras 2-4

Een boekenbon werd gewonnen door:

Joke Kraan, leerlinge van het Huygens Lyceum te Voorburg, klas 4B.

1. a. Alleen de eerste dag wordt nu „overgeslagen”. De vijver is dus in 19 dagen vol.
b. De oppervlakte van de vijver is $2^{19} \cdot 10 \text{ mm}^2 \approx 5,24 \text{ m}^2$.

De opgave zou ook zo geïnterpreteerd kunnen worden, dat men voor de oppervlakte $2^{20} \cdot 10 \text{ mm}^2$ zou kunnen rekenen.

2. Niet alle inzenders hebben gezien, dat vierhoek MGFE een rechthoek is en dus $EG = MF = r$.

3. Teken een gelijkbenige driehoek ACD ($AD = CD$) Kies een willekeurige punt B op AC, dat niet met het midden samenvalt. Trek BD.

Cirkel BC uit D om en DC uit B. Het snijpunt is C' . $ABC'D$ is de gevraagde vierhoek. Zie fig. 11.

Deze oplossing van de in-
zender van de opgave werd
door niemand gevonden.

Wel gaven enkele inzen-
ders een oplossing, die
vrijwel even eenvoudig
was als deze.

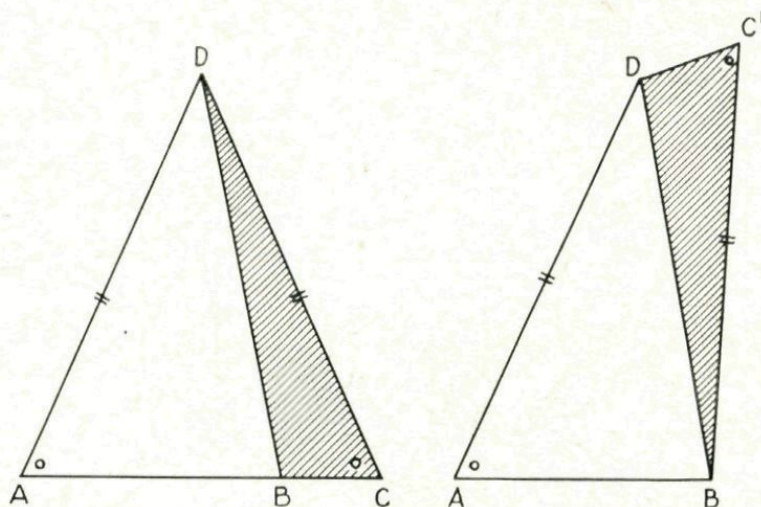


Fig. 11

°°PYTHAGORAS IN DE RUIMTE

Dit is geen artikel over ruimtevaart! Roel Zijlmans – St. Thomascollege. hbs 5b schreef het volgende artikeltje. Hij had het zelf uitgedijferd en vermoedde, dat het niets nieuws was. Dat is het inderdaad niet, maar we nemen het op, omdat velen het misschien niet kennen.

Het is een bekend verschijnsel, dat verschillende planimetrie-stellingen in de stereometrie in iets gewijzigde vorm terugkomen. De termen uit de formules zijn dan „een dimensie verschoven”. Zo kan men ook voor de stelling van Pythagoras een analogon in de ruimte vinden.

Gegeven:

Viervlak ABCD; $AC = a$, $AB = b$, $AD = c$. In A staan de 3 ribben loodrecht op elkaar.

Te bewijzen:

$$[O(BCD)]^2 = [O(ACD)]^2 + [O(ABC)]^2 + [O(ABD)]^2$$

Hierin betekent $O(BCD)$ de oppervlakte van $\triangle BCD$. De andere symbolen hebben een dergelijke betekenis.

Bewijs:

$$O(ACD) = \frac{1}{2}ca \rightarrow [O(ACD)]^2 = \frac{1}{4}c^2a^2$$

$$O(ABC) = \frac{1}{2}ab \rightarrow [O(ABC)]^2 = \frac{1}{4}a^2b^2$$

$$O(ABD) = \frac{1}{2}bc \rightarrow [O(ABD)]^2 = \frac{1}{4}b^2c^2$$

We berekenen $[O(BCD)]^2$ op de volgende manier:

$$O(BCD) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h \text{ (zie fig. 6)} \rightarrow$$

$$\rightarrow [O(BCD)]^2 = \frac{1}{2} \cdot (BC)^2 \cdot h^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)h^2.$$

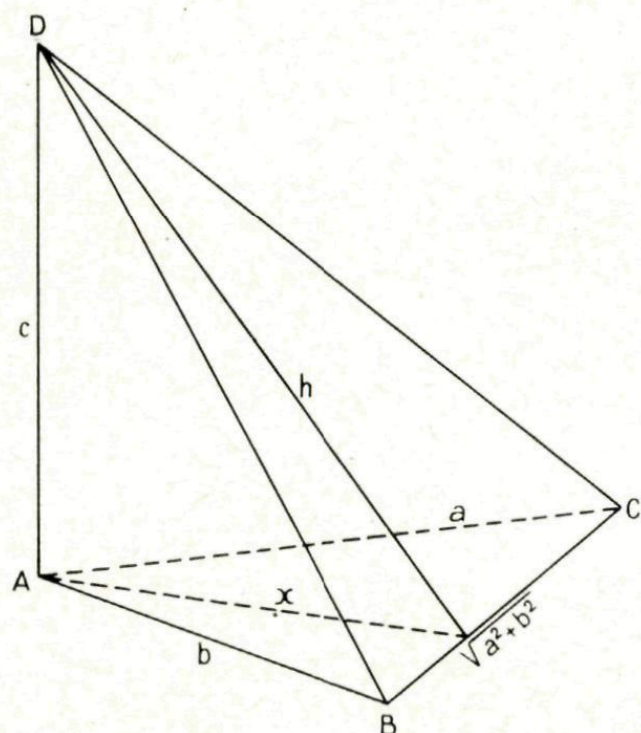


Fig. 12

Hierin is: $h^2 = x^2 + c^2$ en $x = \frac{ab}{BC} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

Dus: $h^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} + c^2 = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2}.$

We zien nu:

$$[O(BCD)]^2 = \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2) \cdot \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$$

Inderdaad:

$$[O(BCD)]^2 = [O(ABC)]^2 + [O(CAD)]^2 + [O(ABD)]^2.$$

Asymptoot

Uit het Grieks. Letterlijk: „niet ontmoetend”.

Coördinaten

Afkomstig van een uit het Grieks vertaalde Latijnse uitdrukking, die ongeveer betekent: in een bepaalde richting trekken. Het woord „coördinaten” werd door Leibniz (1646–1716) in de wiskunde ingevoerd.

Harmonisch

verwant met het Griekse werkwoord „harmozein”, dat „passen” of „overeenstemmen” betekent; uit de mathematische muziekleer afkomstig.

Hypothese

Uit het Grieks: onderstelling. Het woord komt in de Griekse wiskunde oorspronkelijk voor in de zin van een bewijsbare, maar wegens instemming van de hoorder zonder bewijs aanvaarde bewering. Deze betekenis raakte later in de wiskunde in onbruik, omdat in de natuurkunde het woord gebruikt werd in de betekenis van gissing.

Limiet

Het Latijnse woord „limes” betekent „grens”.

Monotoon

Uit het Grieks. Betekent letterlijk: eentonig. Monotoon veranderend betekent in de wiskunde: Steeds in dezelfde zin veranderend.

Reëel

Afkomstig van het Latijnse woord „realis”, dat „werkelijk” betekent.

Variabele

Afkomstig van het Latijnse werkwoord „variare” = „veranderen”.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

Aan het eerste adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het tweede adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden.

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal 4 maal per schooljaar verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f2,— per jaargang. Voor anderen f3,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J. B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J. B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.