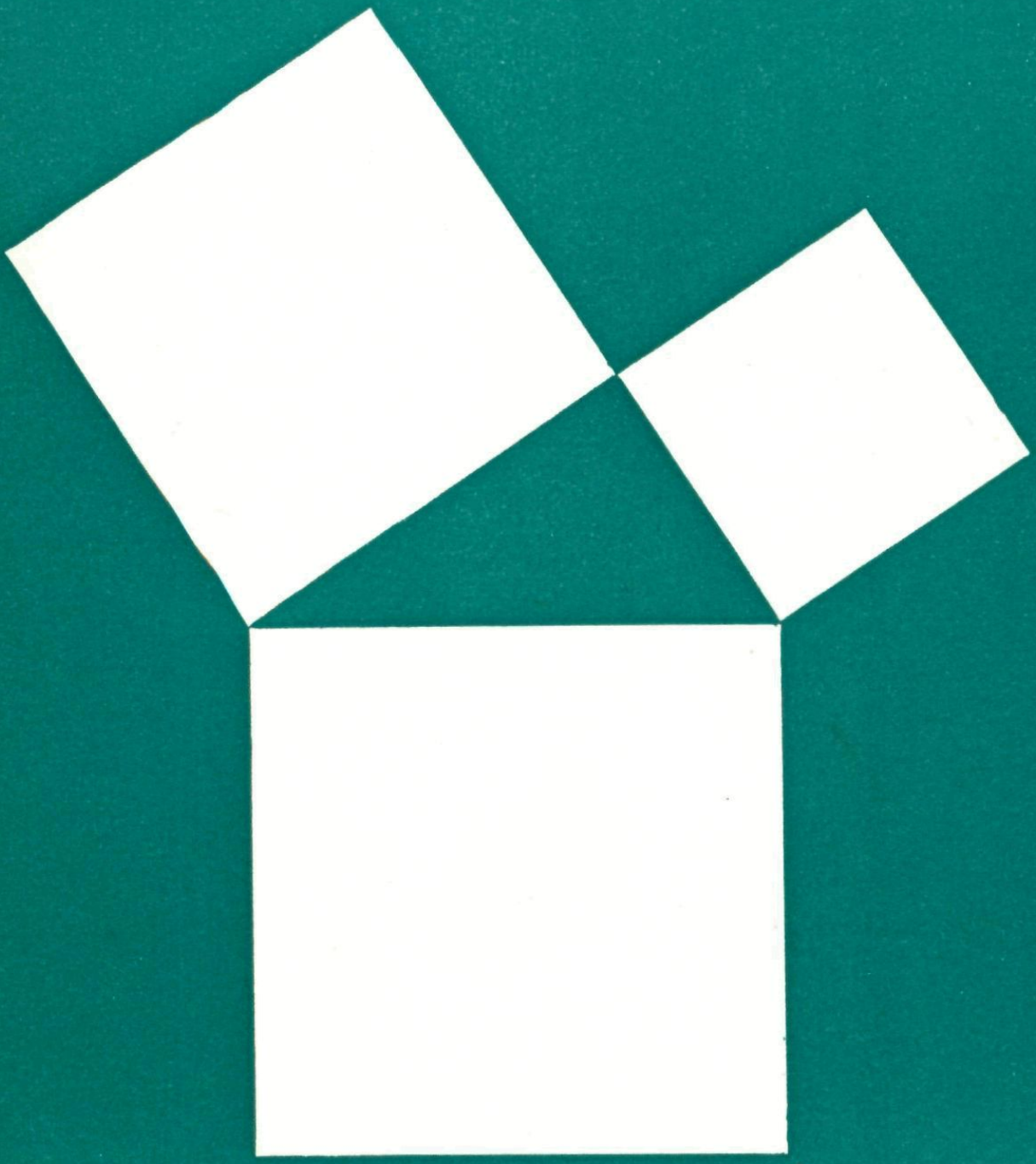
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

1

Derde jaargang

De berkebladroller snijdt een feilloze weg, omdat het feilloze in zijn wereld heerst. Er valt niets te verklaren. – Wat maakt, dat de kever zinvol snijdt? Wat maakt, dat de spin doelmatig weeft? Etc. De antwoorden ontbreken één voor één. Doch de vragen zijn onjuist. De wereld om ons is zinvol tot in de uithoeken, als zodanig; niet door deze en gene „kleine Mathematiker", maar door de grote bouwer van die wereld „– die geen wiskundige is". Wij *zijn wiskundigen, uit gebrek; uit een even ellendig als gelukkig gebrek.*

Prof. Dr. J. H. v. d. Berg

(Het menselijk lichaam II pag. 175*)*

°EEN CIRKEL WORDT AFGEWIKKELD

1. *Hoe fig. 1 tot stand kwam*

(Deze figuur is op een derde van de ware grootte afgedrukt).

We namen een rol papieren plakband en plaatsten deze cilinder op ons tekenpapier. Rond de onderkant konden we de grondcirkel tekenen. Aan het losse eind van het plakband hadden we een potloodstift geplakt (fig. 2) en toen we nu het band gingen afwikkelen tekende deze stift de spiraallijn, beginnende bij het punt $S_1(A_1)$. Vanzelfsprekend hielden we het band tijdens het afwikkelen goed strak, zodat het „automatisch" steeds in het raakvlak aan de cilinder lag. In de figuur zijn A_2S_2 en A_3S_3 dus raaklijnen aan de cirkel.

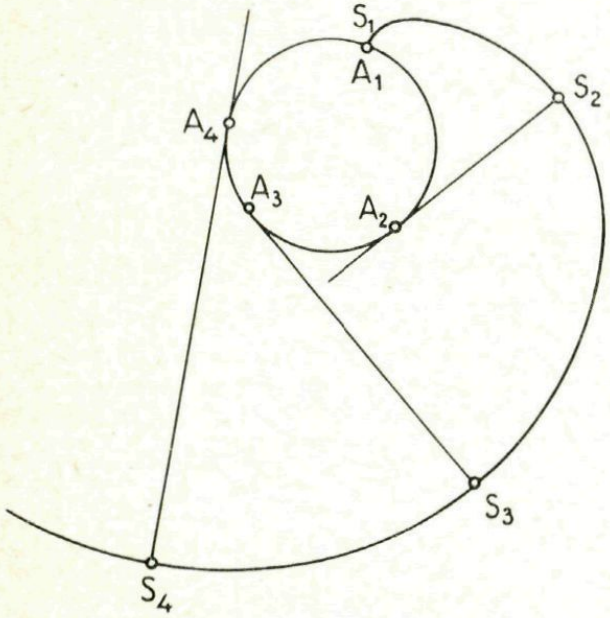


Fig. 1

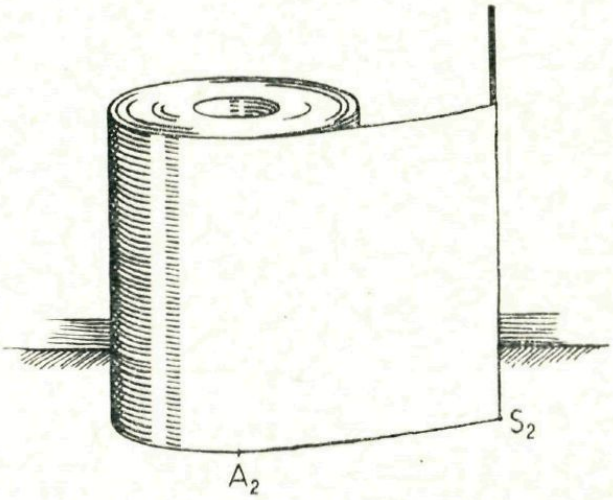


Fig. 2

2. *De evolventen van een cirkel*

De in fig. 1 getekende spiraallijn heet een *evolvente* (een *involute*) van de cirkel. Nederlandse namen voor evolvente zijn wel: ontwindende, ontwikkelende of afwikkelingslijn.

Bij elke kromme kan men evolventen construeren. Men kan bijvoorbeeld de kromme uit een stuk karton zagen, dan om de kromme een draad leggen, deze aan één eind vastmaken en hem afwikkelen. Als de draad daarbij goed gespannen wordt gehouden, dan beschrijft het vrije uiteinde een der evolventen van de kromme.

In het artikel over de berkebladroller (blz. 3) wordt gesproken over de evolventen van een cirkel. Een dezer evolventen staat dus in fig. 1.

We bestuderen die wat nader:
Laten we aannemen, dat we bij het afwikkelen gekomen zijn tot aan de lijn A_2S_2. Gaan we nu verder, dan verplaatst zich niet alleen het punt S, maar ook het punt A. Wanneer we echter slechts een heel klein stukje verder gaan, dan kunnen we A wel even als een vast punt beschouwen, zodat S dan een cirkelboogje beschrijft met A als middelpunt en SA als straal.
In de buurt van elk punt S van de evolvente kunnen we deze kromme beschouwen als een stukje cirkelboog, waarvan AS de straal is. We zeggen, dat AS de kromtestraal is in het punt S van de evolvente. Hoe kleiner deze straal is, des te sterker is de kromming.

We zien in fig. 1 gemakkelijk, dat daar telkens de kromtestraal AS gelijk is aan de lengte van de cirkelboog van dat punt A gerekend tot het beginpunt A_1 van de evolvente.
De lijnen A_nS_n in fig. 1 zijn raaklijnen aan de gegeven cirkel en normalen van de evolvente. Is de evolvente gegeven, dan kan men de cirkel terugvinden, door de normalen van de evolvente te trekken. Deze omhullen dan „vanzelf" de cirkel.

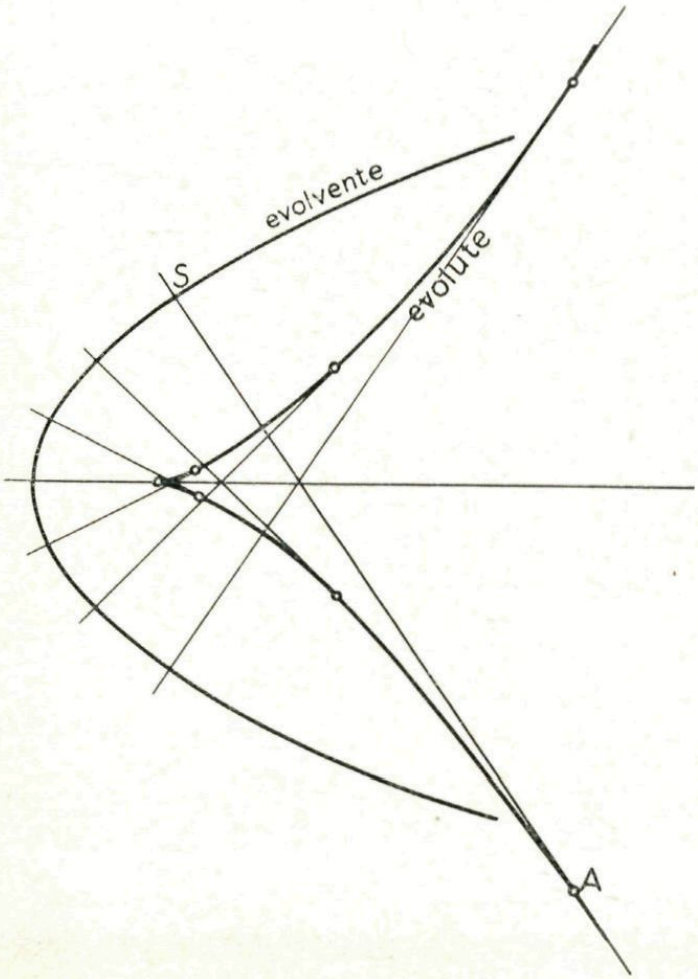


Fig. 3

3. *De evolute van een kromme*

Men noemt de verzameling van de krommingsmiddelpunten van een gegeven kromme de *evolute* (ontwondene, afgewikkelde) van die kromme. De cirkel in fig. 1 is dus de evolute van de daar getekende evolvente. In fig. 3 is bij een parabool de evolute geconstrueerd. Deze heet parabool van Neil.

Ga eens na: Bij een gegeven evolvente behoort slechts één evolute, maar bij een gegeven evolute behoren oneindig veel evolventen. Wat kun je zeggen van alle evolventen, die behoren bij de in fig. 3 getekende evolute?

WE BLADEREN DIT NUMMER EVEN DOOR

Vóór we gaan bladeren: Dit jaar zullen er 6 nummers van Pythagoras verschijnen! Eén daarvan zal geheel gewijd zijn aan *nomogrammen*. In de andere zullen we weer een bonte afwisseling van artikelen aantreffen. Enkele vaste rubrieken zullen zijn: de *Denkertjes* (in elk nummer minstens 10), *Uit het Wondere Onderzoekingsveld van de Meetkunde*, *Wikken en Wegen*, *Computers*. In dit nummer vind je van elk dezer rubrieken het eerste artikel. Verder bekijken we het wondere werk van de *berkebladroller*, terwijl daarnaast in een tweetal artikelen de „wiskunde van dit kevertje" bestudeerd wordt. Dr. Groenman rekende een t.v.-puzzel uit en geeft *Jos* nu te denken.

We verwachten, dat de artikelen, die met ° gemerkt zijn, door iedereen goed gevolgd kunnen worden, die met °° zijn wat moeilijker en die met °°° zijn het moeilijkst. *Maar kijk bij elk artikel vooral, hoever je kunt komen. Dat kon best eens meevallen.* En je kunt moeilijkheden ook altijd nog met elkaar in de klas bespreken.

°De snijcurve van de berkebladroller

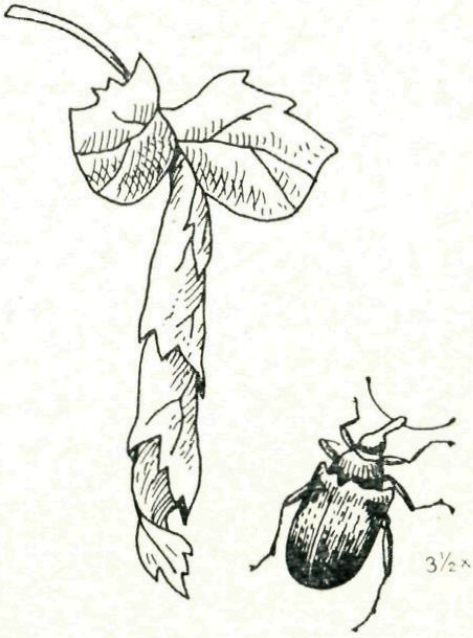


Fig. 4

De berkebladroller is een zwart kevertje van nauwelijks $\frac{1}{2}$ cm lang. Het wijfje gaat bij het eierenleggen op een eigenaardige manier te werk. Ze kiest een berkeblad uit en begint rechts aan de bovenrand een staande S in het blad te vreten. De hoofdnerf slaat ze over en daarna wordt op dezelfde manier een liggende S in de linkerhelft van het blad gemaakt. Dat duurt bij elkaar niet meer dan één minuut (fig. 5 en 6). Daarna gaat het kevertje weer naar de rechterkant en begint, lopend langs de snijrand, het onderste stuk van het blad, stijf op te rollen tot een kegel met een kleine tophoek (bijna tot een cilinder). Ook dat duurt ongeveer een minuut. Na een korte rustpauze wordt ook het linkerdeel van het blad om de ontstane trechter gerold. Daarna worden er een paar eitjes in de

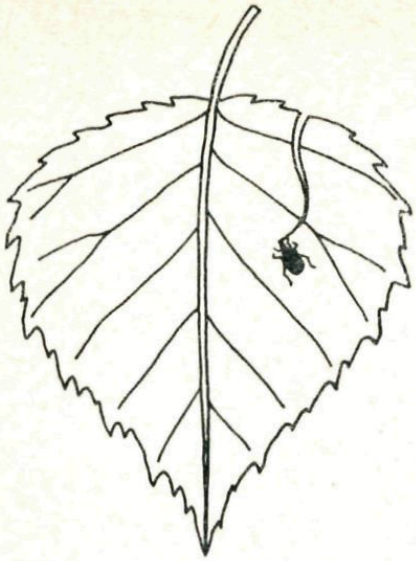


Fig. 5

trechter gelegd. (Zie fig. 4 en de foto op de binnenzijde van de omslag). Het hele proces met de latere afwerking van de trechter meegerekend, duurt ongeveer één uur. Als je het kevertje daarmee bezig wilt zien, moet je op een zonnige morgen in mei een aantal berkestruiken afzoeken. Het resultaat: de trechter en de S-curven zijn nog de hele zomer te zien. Bij nader inzien zijn het juist beide S-curven, die het mogelijk maken dat dit kevertje met zijn beperkte kracht een deel van het blad tot een stijve trechter kan oprollen. Bekijk eens figuur 7. Ook met twee rechte insnijdingen is het mogelijk, dat we een trechter rollen. Maar nu moet (als we aan de rechterkant beginnen) de hele snijrand KA meteen opgewikkeld worden. Daarvoor is het kevertje te klein en het heeft te weinig kracht. Als het dit, zittend midden tussen K en A zou willen doen, zou het blad daar waarschijnlijk ook inscheuren. Verder zou bij het wikkelen van de hele trechter het blad bij K gaan scheuren: het blad heeft immers enige dikte, zodat dicht bij K te „veel blad" komt.

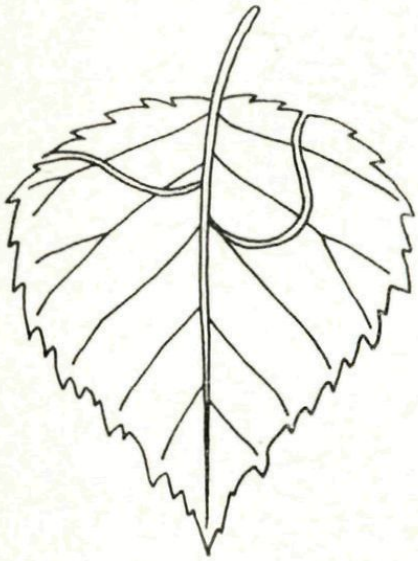


Fig. 6

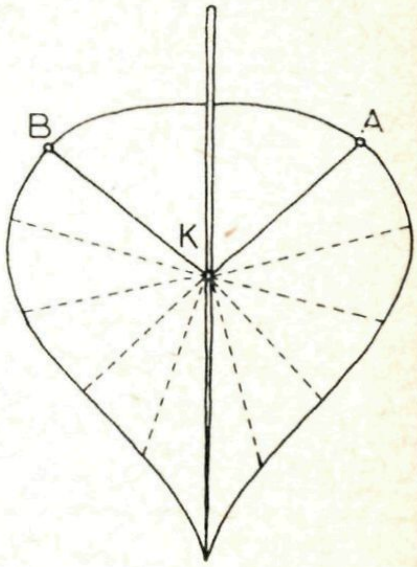


Fig. 7

Bekijken we nu figuur 8, dan zien we hoe de berkebladroller het doet. De gestippelde lijnen zijn de mantellijnen van de kegel die er later uit gewikkeld zal worden. Het kevertje begint helemaal rechts het blad op te rollen, het heeft daarvoor lang niet zoveel kracht nodig en bovendien komt er geen opeenhoping van materiaal bij K. Natuurlijk hebben deze handige S-curven, die door de berkebladroller zo vanzelfsprekend in het berkeblad gebeten

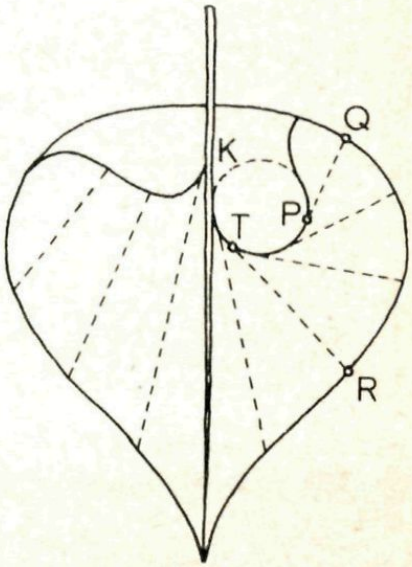


Fig. 8

worden, wel eens de aandacht van een wiskundige getrokken. Men heeft daarbij gedacht aan een evolute en evolvente (zie blz. 1).
Het gedeelte PT van de rechtse S-curve kan men als cirkelboog beschouwen. De bladrand QR zou dan de evolvente zijn, die behoort bij de evoluut PT. De mantellijnen van de kegel, vanaf PQ tot en met TR zouden de stralen van de evolvent zijn: zij raken aan de cirkelboog en staan loodrecht op de bladrand. We zouden kunnen zeggen dat het kevertje de evoluut PT construeert bij de gegeven evolvent QR. De linker S-curve is verder zo geconstrueerd, dat de kegel van boven mooi afgesloten wordt, terwijl er toch geen grote spanningen in het blad optreden.
In de vorige eeuw heeft men nogal veel over dit merkwaardig geconstrueerde trechtertje geschreven en de wiskundige interpretatie stamt ook uit die tijd. Tegenwoordig vinden wij zo'n omschrijving een beetje geforceerd (zie het citaat van Prof. v. d. Berg op de binnenzijde van de omslag). Maar het blijft merkwaardig.

°°°Kromtecirkel-kromtestraal-kromming

In fig. 3 (blz. 2) werd de evolute van een parabool geconstrueerd. Het was daarvoor nodig om in enkele punten de kromtestraal te berekenen. Hier volgt die berekening.

1. We vergelijken de kromming in een punt S van de parabool met die van een cirkel door S. Daarvoor moeten we natuurlijk die cirkel kiezen, die in de omgeving van S ongeveer samenvalt met de parabool. Nu is een cirkel door 3 punten bepaald. We zouden dus behalve S nog de punten P en Q van de parabool kunnen kiezen en door P, Q en S een cirkel construeren (M_1). In het algemeen zal deze natuurlijk niet goed in S bij de parabool aansluiten (fig. 9*a*).

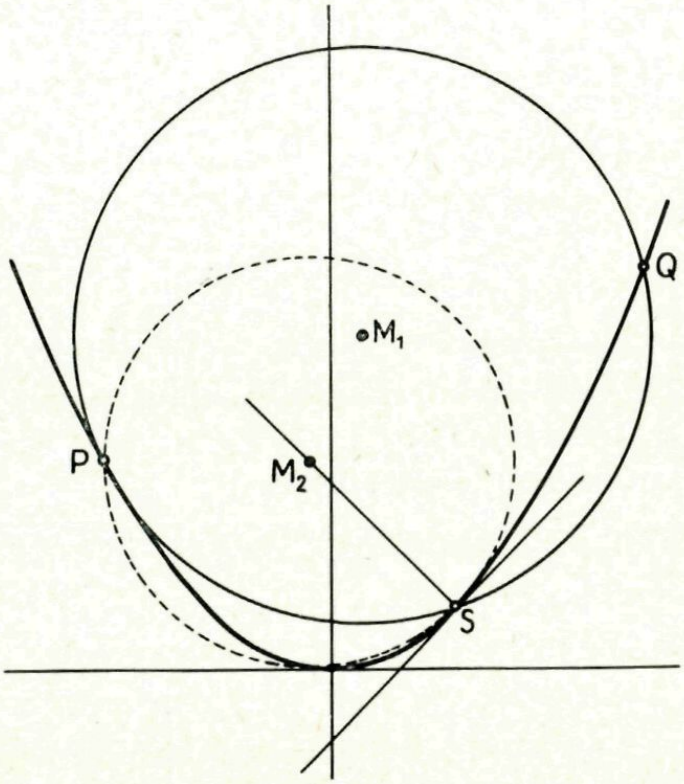


Fig. 9*a*

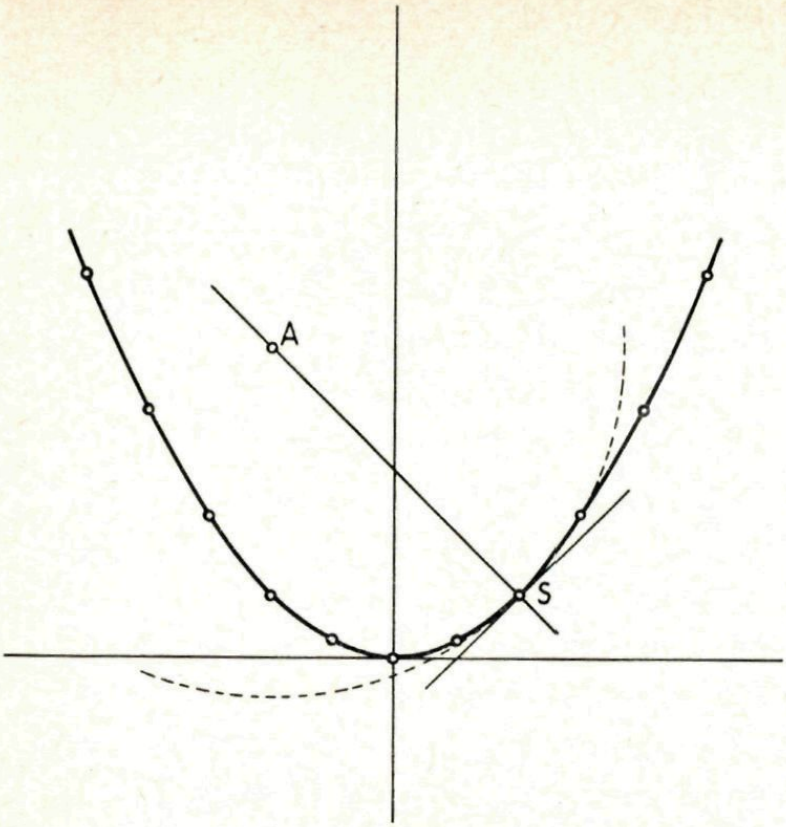


Fig. 9*b*

Beter wordt het, als we bijvoorbeeld Q met S laten samenvallen, zodat de cirkel en de parabool in S een gemeenschappelijke raaklijn hebben. Het middelpunt (M_2) moet dan liggen op de normaal in S. We zien wel in fig. 9*a*, dat cirkel M_2 nog een veel sterkere kromming heeft dan de parabool.
Wanneer we echter ook P naar S brengen, zodat de drie punten, waardoor de cirkel bepaald is, alle drie in S vallen, dan zullen de kromming van de parabool en de cirkel in S zo goed mogelijk overeenstemmen. Zie fig. 9*b*, waar de *kromtecirkel* is geconstrueerd.

2. Hoe wordt nu echter het middelpunt (A) gevonden? Hiervoor schakelen we de differentiaalrekening in.
We veronderstellen, dat de parabool de grafiek is van de functie f(x). Heeft de kromtecirkel de vergelijking

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

dan kunnen we deze in de omgeving van het punt S beschouwen als de grafiek van de functie

$$y = b - \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$$

(We zien in fig. 9*b*, dat S dichter bij de x-as ligt dan A, daarom kiezen we in dit geval het minteken).
Schrijven we hiervoor ter afkorting $y = g(x)$, dan kunnen we de volgende eisen opstellen:

a. De parabool en de cirkel hebben het punt S (x_0, y_0) gemeen, dus $f(x_0) = g(x_0)$.
b. Ze hebben in S een gemeenschappelijke raaklijn. Dus $f'(x_0) = g'(x_0)$.
c. Maar ze hebben in S drie punten gemeen, er vallen dus bij wijze van spreken twee raaklijnen in S samen. Daarvoor is nodig, en voldoende, dat $f''(x_0) = g''(x_0)$.

We berekenen nu eerst $g'(x)$ en $g''(x)$. In deze berekeningen zullen we de volgende afkortingen gebruiken:

$$g = g(x),\ g' = g'(x) \text{ en } g'' = g''(x)$$

$$g = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}, \text{ dus} \quad \ldots \quad (1)$$

$$g' = \frac{x-a}{\sqrt{r^2 - (x-a)^2}} = -\frac{x-a}{g-b} \quad \ldots \quad (2)$$

$$g'' = -\frac{(g-b) - g'(x-a)}{(g-b)^2} = -\frac{1}{g-b} + \frac{x-a}{g-b} \cdot \frac{g'}{g-b} =$$

$$= -\frac{1}{g-b} - \frac{(g')^2}{g-b} = -\frac{1+(g')^2}{g-b} \quad \ldots \quad (3)$$

Nu hebben we hierboven gezien, dat in punt S

$$g(x_0) = f(x_0); \qquad g'(x_0) = f'(x_0); \qquad g''(x_0) = f''(x_0).$$

We kunnen in (1), (2) en (3) dus overal de g vervangen door een f. Om de formules zo eenvoudig mogelijk te houden zullen we de afkortingen f_0, f'_0 en f''_0 gebruiken, resp. voor $f(x_0)$, $f'(x_0)$ en $f''(x_0)$.
We vinden nu:

Uit (1): $f_0 = b - \sqrt{r^2 - (x_0 - a)^2}$, dus $(x_0 - a)^2 + (f_0 - b)^2 = r^2$ . . . (4)

Uit (2): $f_0' = -\dfrac{x_0 - a}{f_0 - b}$ . . . . . (5)

Uit (3): $f_0'' = -\dfrac{1 + (f_0')^2}{f_0 - b}$ . . . . . (6)

Nu volgt uit (6): $f_0 - b = -\dfrac{1 + (f_0')^2}{f_0''}$ . . . . . (7)

We veronderstellen $f_0'' \neq 0$.

Uit (7) en (5) volgt: $f_0' = \dfrac{(x_0 - a) f_0''}{1 + (f_0')^2}$

dus $x_0 - a = \dfrac{f_0'[1 + (f_0')^2]}{f_0''}$ . . . . . (8)

Tenslotte vinden we uit (7), (8) en (4):

$$r^2 = \frac{(f_0')^2 [1 + (f_0')^2]^2}{(f_0'')^2} + \frac{[1 + (f_0')^2]^2}{(f_0'')^2}$$

Voor de kromtestraal in een punt S (x_0, y_0) van de grafiek van de functie $y = f(x)$ vinden we dus, mits $f_0'' \neq 0$:

$$\boxed{r = \frac{[1 + (f_0')^2]^{\frac{3}{2}}}{f_0''}}$$

Hoe kleiner de kromtestraal is, des te sterker is de kromming.

Als maat voor de kromming neemt men daarom $k = \frac{1}{r}$.

Berekening van twee kromtestralen.

Wanneer we de y-as van een coördinatenstelsel leggen langs de symmetrieas van de parabool in fig. 3 en de oorsprong in de top van de parabool, dan is de vergelijking daarvan

$$y = \tfrac{1}{4}x^2.$$

De parabool is dus de grafiek van de functie

$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^2.$$

Dan is $f'(x) = \frac{1}{2}x$ en $f''(x) = \frac{1}{2}$.

In het punt S (2, 1) is nu $f_0 = 1$; $f_0' = 1$; $f_0'' = \frac{1}{2}$.

Voor de kromtestraal in S vinden we:

$$r = \frac{[1 + 1]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}.$$

De waarde van de kromming in S is dus $\frac{1}{4\sqrt{2}}$.

De coördinaten van het middelpunt van de kromtecirkel in S kunnen berekend worden met behulp van de formules (7) en (8). Het is het punt $(-2, 5)$.

In de oorsprong is $f_0 = 0$, $f_0' = 0$ en $f_0'' = \frac{1}{2}$.
Dan is $r = 2$, dus $k = \frac{1}{2}$ en het middelpunt van de kromtecirkel het punt (0, 2). Dit punt is dan het laagste punt van de evolute in fig. 3.

Uit „Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde" I

Ir. A. E. Bosman heeft verschillende interessante samenhangen ontdekt in het gebied van de gewone vlakke meetkunde. Het zijn geen lastige onderzoekingen, ook geen belangrijke dingen, maar toch verrast hij dikwijls door de bijzondere wijze, waarop hij de dingen ziet en weer nieuw weet te maken. In deze jaargang komen enkele artikelen uit zijn werk.

Relaties tussen de zijden van een driehoek

In *elke* driehoek is de som van de *hoeken* 180°. Zo'n eenvoudige relatie bestaat er niet voor de *zijden* van elke driehoek. Het eerste, wat we opmerken, als we de lengten van de zijden gaan vergelijken, is dat

$$a - b < c < a + b.$$

Maar we willen eigenlijk wel iets meer kunnen zeggen, dan deze eenvoudige orderelatie. Daarom gaan we eerst eens kijken naar de „mooie" driehoeken. De gelijkzijdige driehoeken zijn „te mooi", voor hen geldt $a = b = c$. Dus wenden we ons tot de rechthoekige. De gelijkbenige rechthoekige driehoeken treffen we dikwijls aan in tegelvloeren, zoals in fig. 10. Het is niet moeilijk in te zien, dat de oppervlakte van het grote zwarte vierkant gelijk is aan de som der oppervlakten van de beide kleine zwarte vierkanten. Dus $c^2 = 2a^2$, als we de lengte van de schuine zijde van de witte rechthoekige driehoek in het midden van fig. 10, gelijk c stellen en de lengten der rechthoekszijden a.

We komen er nu vanzelf toe vierkanten te tekenen „op" de zijden van een willekeurige rechthoekige driehoek. Zie fig. 11. Let in deze figuur eens op de gearceerde parallellogrammen. Ze zijn congruent,

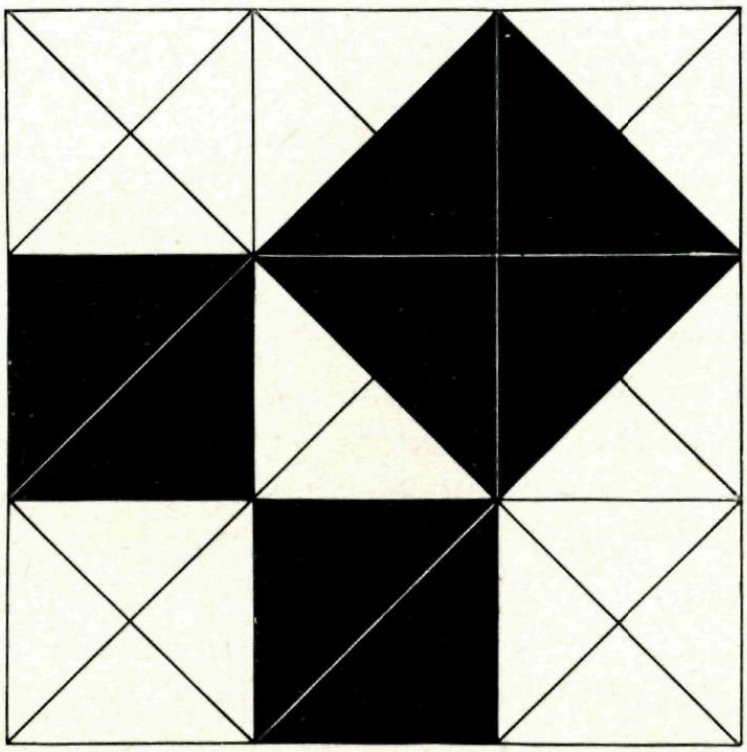


Fig. 10

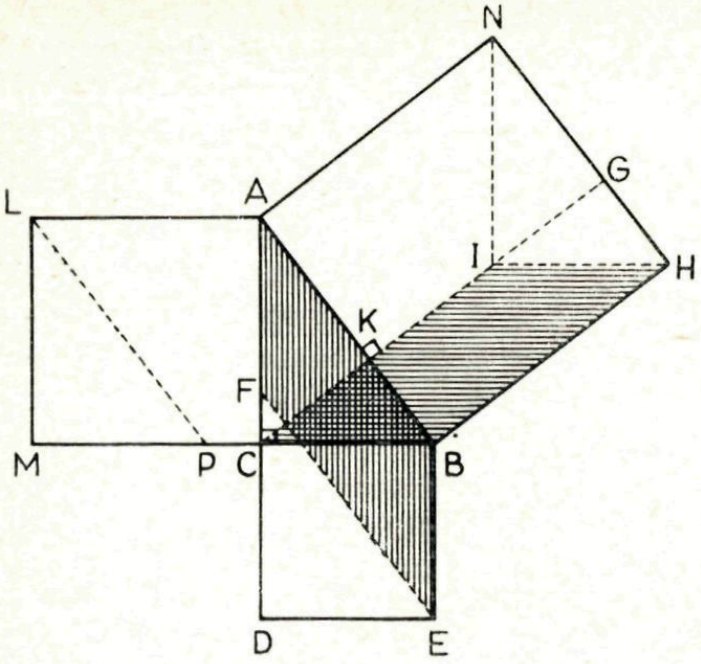


Fig. 11

want als je het ene een kwart slag laat draaien om B, valt het met het andere samen. Er zijn ook twee congruente parallellogrammen met A als gemeenschappelijk hoekpunt in de figuur te herkennen. En zie je, dat er dan drie driehoeken ontstaan, die congruent zijn met △ ABC?
Dan kun je gemakkelijk nagaan, dat de oppervlakte van parallellogram EBAF gelijk is aan de oppervlakte van het vierkant DEBC. (Tel bij beide maar de oppervlakte van △ABC op en je krijgt de oppervlakte van vierhoek ABED).

We zien dus:

opp. DEBC = opp. EBAF = opp. CBHI = opp. BHGK
opp. ACML = opp. ABPL = opp. ACIN = opp. AKGN

opp. DEBC + opp. ACML = opp. ABHN opt.

Dus: $a^2 + b^2 = c^2$. Dat is de welbekende Stelling van Pythagoras.

Nu proberen we hetzelfde procédé bij een willekeurige driehoek. Zie fig. 12. Op de zijden van de driehoek tekenen we weer vierkanten. Bij elk der hoekpunten vinden we weer congruente parallellogrammen, die een kwartslag ten opzichte van elkaar gedraaid liggen. Het hoogtepunt F van de driehoek is gemeenschappelijk hoekpunt van drie van deze parallellogrammen. Vergelijk nu fig. 12 met fig. 13. We zien dat de verlengden van de hoogtelijnen van △ ABC de vierkanten op de zijden telkens in twee rechthoeken verdelen. Met behulp van de parallellogrammen van fig. 12 controleren we gemakkelijk, dat tel-

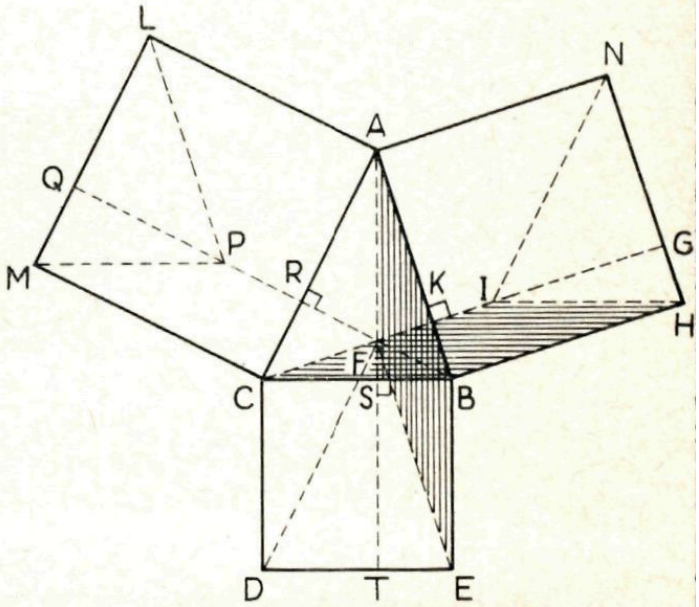


Fig. 12

kens twee gelijk gearceerde rechthoeken in fig. 13 gelijke oppervlakte hebben.

We zien nu in de eerste plaats, dat in deze scherphoekige driehoek:

$c^2 < a^2 + b^2$; $b^2 < a^2 + c^2$ en $a^2 < b^2 + c^2$.

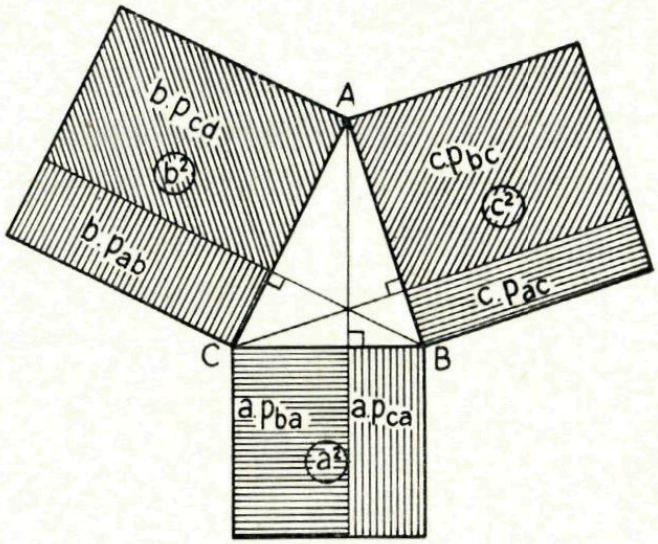


Fig. 13

Gebruiken we verder voor de projectie van de zijde b op de zijde c de schrijfwijze p_{bc}, dan kunnen we de gelijkheid van de oppervlakten der rechthoeken met de volgende relaties weergeven:

$$b \cdot p_{cb} = c \cdot p_{bc}$$
$$b \cdot p_{ab} = a \cdot p_{ba}$$
$$c \cdot p_{ac} = a \cdot p_{ca}$$

Kijk nu nog even naar fig. 13 en zie, dat bijv.

$$c^2 = a^2 + b^2 - b \cdot p_{ab} - a \cdot p_{ba}$$

Dus $$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot p_{ab} = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot p_{ba}$$

En dat is dan de projectiestelling.

°°JOS GAF TE WEINIG

Ingezonden door Dr. J. T. Groenman te Groningen.

1. In het televisiespel „Dat geeft te denken", gebracht door Jos van Loon en Pim Dikkers, is het de gewoonte de kijkers een puzzel op te geven, waarover ze een paar weken mogen denken. Zo gaf Jos in januari 1963 de volgende opgave:

   Schrijf op de volgende rij getallen: 4, 5, 12, 39, 160. Hoe groot is het volgende getal?

Dit vraagstuk is niet bepaald; de bedoeling is natuurlijk uit deze vijf getallen een rekenrecept te halen. Dit moet dan worden toegepast om het zesde getal te vinden. Een leuk spelletje. Inderdaad geeft het te denken.

Hier is de oplossing die Jos gaf: Ga uit van het getal 4 en ga dan als volgt te werk:

Neem: $1 \cdot 4 + 1 = 5$
$2 \cdot 5 + 2 = 12$
$3 \cdot 12 + 3 = 39$
$4 \cdot 39 + 4 = 160$

Het zesde getal is dus $5 \cdot 160 + 5 = 805$.

2. Men kan een rij getallen op verschillende wijzen vastleggen, o.a. op de volgende manieren:

   a. Men geeft t_n als functie van n, bijv. $t_n = 2n^2$, dan krijgt men 2, 8, 18, 32, ... enz.

   b. Men geeft een of meer begintermen en een *recurrente betrekking* voor de volgende termen; dit is een betrekking, waarmee een term wordt uitgedrukt in een of meer voorafgaande termen, bijv.:

   $$t_1 = 0,\ t_2 = 1 \text{ en } t_{n+2} = t_n + t_{n+1} \qquad (n \geqq 1)$$

   We krijgen dan de rij 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... enz. (Dit is de zg. Rij van Fibonacci).

3. Van de „rij van Jos" zijn vijf termen gegeven. Daarmee kan men dus vijf vergelijkingen krijgen; men stelt bijv.:

   $$t_n = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$$

   en voert daarmee vijf onbekenden a, b, c, d en e in, die men kan berekenen, door voor n de getallen 1, 2, 3, 4 en 5 te substitueren. Het oplossen van deze vijf vergelijkingen met vijf onbekenden is niet moeilijk. Men vindt:

   $$a = 2\tfrac{1}{2},\ b = -22\tfrac{2}{3},\ c = 76\tfrac{1}{2},\ d = -107\tfrac{1}{3},\ e = 55.$$

   Waaruit we vinden:

   $$6t_n = 15n^4 - 136n^3 + 459n^2 - 644n + 330$$

   waarmee t_n als functie van n gegeven is. We vinden nu voor t_6 een ander getal dan Jos, nl. 509.

Men hoeft voor t_n dus maar een uitdrukking te schrijven met 5 onbekenden erin. Kan men de vijf vergelijkingen, die ontstaan door substitutie van $n = 1$ tot en met 5 oplossen, dan is men klaar. Zo zou het mogelijk zijn te schrijven:

$$t_n = an^8 + bn^5 + cn^4 + dn^2 + e.$$

We zouden dan voor t_6 weer een ander getal gevonden hebben. Nu Jos alleen de vijf begintermen gaf, was het vraagstuk onbepaald en was er in feite geen puzzel aanwezig.

4. De door Jos gegeven oplossing bevatte een recurrente betrekking, die er als volgt uit ziet:

   Neem $\quad t_1 = 4$ en $t_{n+1} = n \cdot t_n + n = n(t_n + 1) \qquad (n \geqq 1)$

   Zie de oplossing aan het begin van dit artikel.

°°°5. Bij het „spelen" met de vijf door Jos gegeven getallen kwam ik tot het vermoeden, dat de termen van de rij op de volgende wijze als functie van n geschreven zouden kunnen worden:

$$t_1 = 4 \text{ en } t_n = (n-1)! \left[4 + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}\right] \qquad (n \geqq 2)$$

Onder $n!$ (spreek uit „n-faculteit") verstaan we het produkt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots . 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Dus:

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \\ 4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \\ 3! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \\ 2! &= 2 \cdot 1 = 2 \\ 1! &= 1 = 1 \end{aligned}$$

Het zal duidelijk zijn, dat voor alle waarden van $n \geqq 2 \quad n! = n \cdot (n-1)!$. Willen we dit ook laten gelden voor $n = 1$, dan moet $1! = 1 \cdot 0! = 1$ zijn. Daaruit volgt, dat we aan 0! de waarde 1 moeten toekennen. Ook in andere gebieden van de wiskunde, waarin met faculteiten gerekend wordt, is het zinvol gebleken voor 0! de waarde 1 te kiezen.

Onder $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}$ verstaan we de som $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots . + \frac{1}{(n-2)!}$,

dus $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots . + \frac{1}{(n-2)!}$.

Bij narekenen bleek, dat de begintermen klopten:

$t_1 = 4$

$t_2 = 1!\left[4 + \frac{1}{\ }\right] = 5$

$t_3 = 2!\left[4 + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}\right] = 2 \cdot 6 = 24$

$t_4 = 3!\left[4 + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right] = 6 \cdot 6\tfrac{1}{2} = 39$

Nu moest ik nog bewijzen, dat voor elke natuurlijke waarde van n mijn t_n overeenstemde met die van Jos.
Dat kan op de volgende manier: We bewijzen, dat als mijn formule voor t_n een term van de rij van Jos geeft, dat dit dan ook het geval is voor t_{n+1}.
We veronderstellen dus, dat gegeven is, dat

$$t_n = (n-1)!\left[4 + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}\right]$$

een term van de rij van Jos is. En gaan bewijzen, dat nu

$$t_n = n!\left[4 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right]$$

de volgende term van de rij van Jos is.
Omdat de formule voor de eerste vier termen klopt, is dat dan ook het geval voor t_5 en daarom voor t_6 en vervolgens voor t_7 enz.
Een bewijs als dit heet een bewijs met behulp van *het principe van de volledige inductie*.

Bewijs:

Jos gaf als recurrente betrekking $t_{n+1} = n \cdot (t_n + 1)$. We moeten dus bewijzen, dat

$$n \cdot [t_n + 1] = n!\left[4 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right].$$

Nu is

$$n \cdot [t_n + 1] = n \cdot \left[(n-1)![4 + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}] + 1\right] =$$

$$n \cdot (n-1)!\left[4 + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}\right] + n = n!\left[4 + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}\right] + \frac{n!}{(n-1)!} =$$

$$n!\left[4+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n-1)!}\right]=n!\left[4+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\right],$$

hetgeen te bewijzen was.

Substitutie van $n = 6$ geeft

$$t_6 = 5!\left[4+\sum_{k=0}^{k=4}\frac{1}{k!}\right] = 805.$$

Dat zei Jos ook, maar ze had meer moeten geven. Wel valt te vermelden, dat ze haar doel bereikt had. Inderdaad gaf het te denken. Of ik een prijs gewonnen heb? Nee, de oplossing was wel goed, maar bij loten laat het geluk mij meestal in de steek.

OPLOSSINGEN HIERVAN KUNNEN WORDEN INGEZONDEN AAN DE HEER A. VAN TOOREN, NACHTEGAALPLEIN 10, DEN HAAG.

(Oplossingen inzenden voor 15 november 1963)

31. *a.* In een meetkundeboek van de eerste klas van de ULO staat de volgende opgave:
Iemand loopt over een lijnstuk AB van 1 m; in B maakt hij een kwartdraai naar rechts en loopt $1\frac{1}{2}$ m. Dan maakt hij weer een kwartdraai naar rechts en loopt 2 m, enz. Zo doet hij 5 keer.
Construeer de weg, die hij loopt. Schaal 1 : 100.
Hier zijn de oplossingen van twee leerlingen:

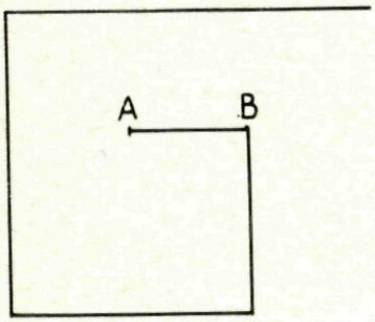


Fig. 14

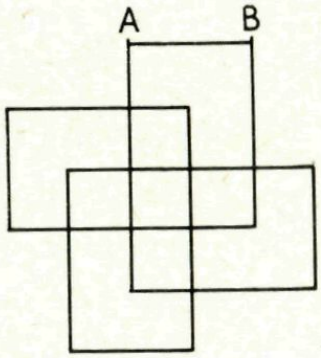


Fig. 15

Wie van de beide leerlingen had gelijk, die van fig. 14 of die van fig. 15?

b. De tweede figuur is bijzonder aardig. Bedenk zelf enige van deze figuren en beschrijf ze als een opgave, waarin geen twijfel kan bestaan over wat precies bedoeld is.

32. *a.* Hoeveel maal staan tussen 8 uur en 20 uur de wijzers van een klok loodrecht op elkaar?
b. Kun je een formule opstellen, die aangeeft hoe laat het is, als de wijzers van een klok loodrecht op elkaar staan.

33. Van twee verschillende firma's kregen we de volgende prijsopgaven voor het veraluminiseren van een (cirkelvormige) telescoopspiegel:
Firma A: *f* 1,40 per cm middellijn.
Firma B: *f* 0,30 per cm².
Bij welke firma zal ik mijn telescoopspiegel laten veraluminiseren, als de kwaliteit bij beide gelijk is?

34. Rangschikken we de getallen 1 tot en met 9 in hun natuurlijke volgorde in een vierkant:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

dan blijkt, dat de som der getallen in de ene diagonaal gelijk is aan die in de andere diagonaal, nl. 15.
Onderzoek of steeds, als n^2 getallen in hun natuurlijke volgorde in een vierkant gerangschikt worden, de som der getallen in elk der beide diagonalen gelijk is.
Bewijs je bevinding.

35. In fig. 16 is △ ABC rechthoekig in C. ACDE en BCFG zijn vierkanten. AG en BE snijden elkaar in I. Verder snijdt AG de zijde BC in H, terwijl BE de zijde AC in J snijdt.
Bewijs, dat de oppervlakte van △ ABI gelijk is aan de oppervlakte van vierhoek CHIJ.

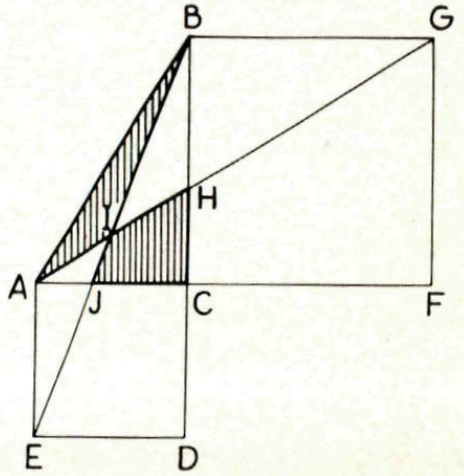


Fig. 16

36. Gegeven is een cirkel met middelpunt M. Binnen de cirkel ligt een vast punt P. Door P trekt men twee onderling loodrechte koorden AC en BD. Men tekent de koordenvierhoek ABCD (fig. 17).
Bewijs, dat de verbindingslijnstukken van de middens van AB en CD en van de middens van BC en DA elkaar in een punt S snijden, dat onafhankelijk is van de oorspronkelijke keuze van de koorde AC.

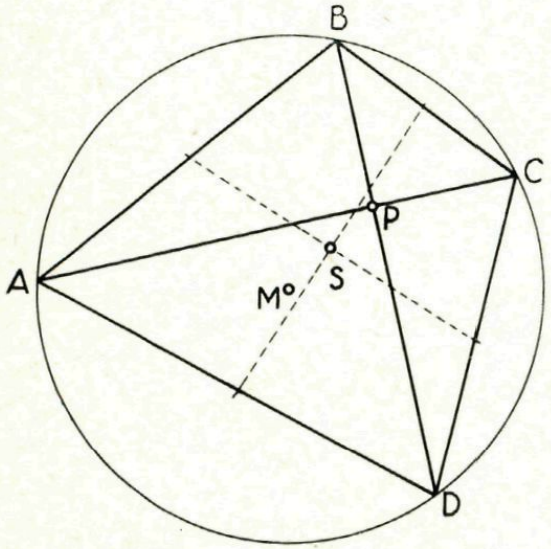


Fig. 17

Anders gezegd: Laat men de koorde AC om P draaien en steeds de koorde BD door P loodrecht op AC staan, dan zal S een vast punt zijn. De ligging van S is zelfs onafhankelijk van de grootte van de cirkel. Bewijs dit.

Ingezonden door
Dr. J. T. Groenman te Groningen.

De volgende vier Denkertjes zijn ontleend aan de Amerikaanse test, die in de vorige cursus op verschillende scholen werd gegeven. De bedoeling is, dat je steeds uit de vijf gegeven antwoorden het juiste kiest.

37. Punt P ligt binnen een vierkant met zijden a zo, dat het gelijke afstanden heeft tot twee opvolgende hoekpunten en tot de zijde tegenover deze hoekpunten. Deze afstand is gelijk aan:

(A) $\frac{3a}{5}$ (B) $\frac{5a}{8}$ (C) $\frac{3a}{8}$ (D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (E) $\frac{1}{2}a$

38. Als $2^a + 2^b = 3^c + 3^d$ en a, b, c en d geheel zijn, dan kunnen hiervan hoogstens negatief zijn:

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

39. In een gelijkzijdige driehoek is een cirkel beschreven en in de cirkel een vierkant. De oppervlakten van driehoek en vierkant verhouden zich dan als:

(A) $\sqrt{3}:1$ (B) $\sqrt{3}:\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{3}:2$ (D) $3:\sqrt{2}$ (E) $3:2\sqrt{2}$

40. De uitdrukking $\dfrac{\dfrac{a}{a+y}+\dfrac{y}{a-y}}{\dfrac{y}{a+y}-\dfrac{a}{a-y}}$ $(a \neq 0)$ is gelijk aan -1 voor

(A) alle waarden van y op twee na,

(B) slechts twee waarden van y,

(C) alle waarden van y,

(D) slechts één waarde van y,

(E) geen waarde van y.

°Computers I

Een computer is een snelle elektrische rekenmachine[1]). In deze jaargang van Pythagoras zullen we enkele artikelen wijden aan de computers en de wijze, waarop ze worden gebruikt. We zullen daarbij nogal aan de oppervlakte moeten blijven, omdat de bouw van deze apparaten buitengewoon ingewikkeld is en ook het werken ermee een grondige voorbereiding vergt.
Na een algemene inleiding, waarin onder meer de bouw van een computer wordt bekeken, zullen we in volgende artikelen bespreken: het binaire stelsel, waarmee de meeste computers werken; een typische wijze van rekenen, die „feed back" wordt genoemd en het programmeren.

Kort na de tweede wereldoorlog werd in de Verenigde Staten van Amerika, de eerste, door de industrie gebouwde grote computer in gebruik genomen. Sindsdien is de toepassing van deze snelle rekenapparaten steeds omvangrijker geworden, vooral in Amerika, maar ook daarbuiten. Momenteel zijn er ongeveer 100 computers in Nederland in gebruik.
We onderscheiden twee typen nl. de digitale- en de analogie-computers. De digitale rekenen met echte getallen. (Het Engelse woord „digit" betekent „cijfer".)
De digitale rekenapparaten doen hetzelfde als hun kleinere familieleden, die we op lessenaars van bankinstellingen en op de toonbanken van winkels zien staan. Alleen worden ze niet met de hand bediend

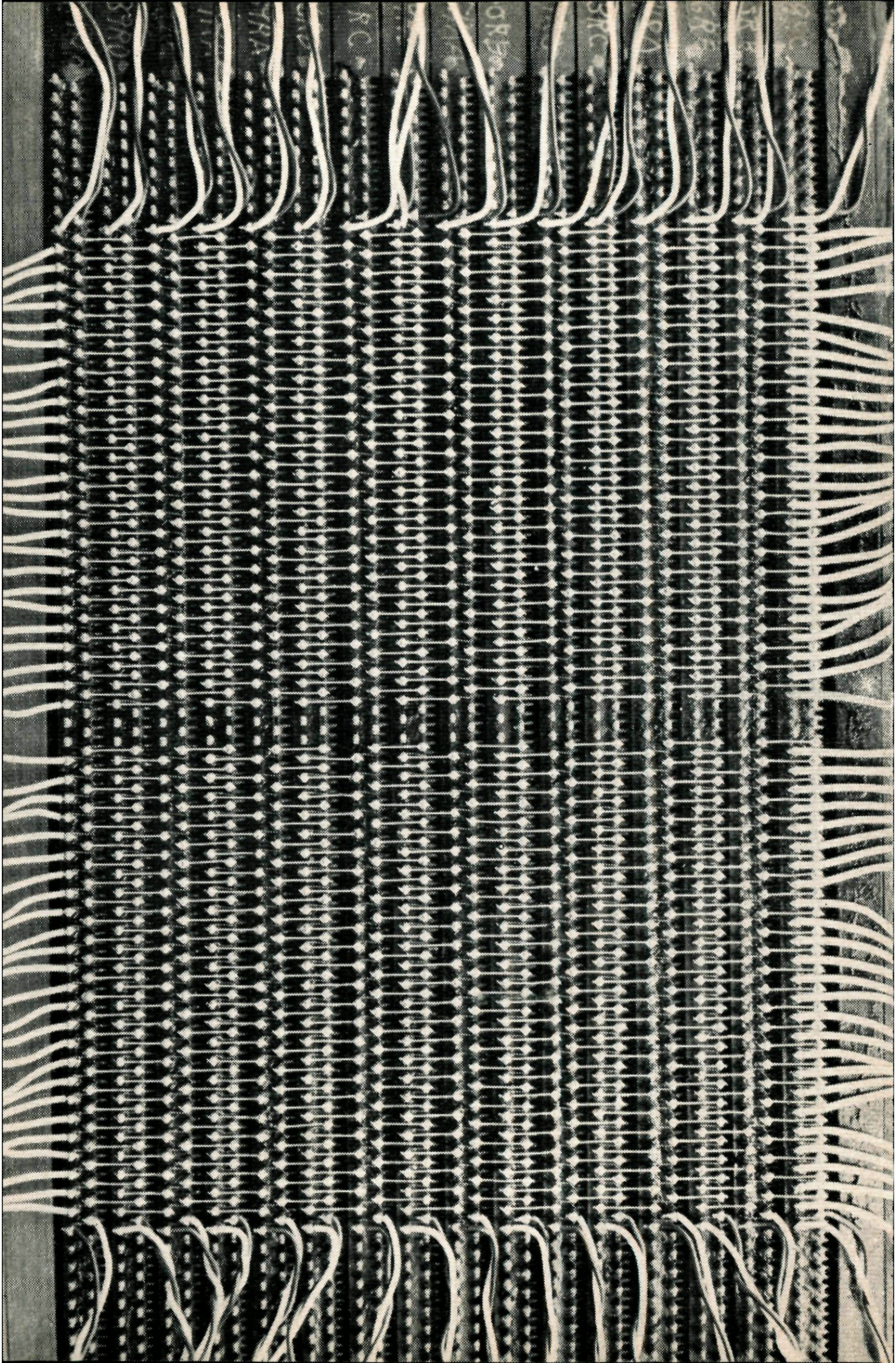
[1]) Een betere naam zou zijn „elektronische informatieverwerkende machine", want een computer doet veel meer dan enkel rekenen.

en zijn ze te snel om de gebruiker gelegenheid te geven de getallen met drukknoppen in te stellen. Maar evenals deze kleine apparaten werken ze met getallen tot in een, door de bouw van het apparaat bepaald, aantal decimalen nauwkeurig.
De analogie-computers vervangen de getallen door grootheden, die *gemeten* kunnen worden. Een heel eenvoudig voorbeeld van een analogie-rekenapparaat is een rekenliniaal. De getallen zijn daarop vervangen door lengten, die achter elkaar of over elkaar worden afgepast, zodat het resultaat van de berekening gemeten kan worden.
Norbert Wiener, een Amerikaans wiskundige, gaf het volgende voorbeeld van een analogie-rekenapparaat (in het boek „I am a mathematician").

> In een elektrodynamometer bevinden zich twee spoelen, die elkaar aantrekken, als er door de spoelen een stroom gaat. Deze aantrekking is evenredig met het produkt van de sterkten der stromen in de beide spoelen. Gaat er nu door de ene spoel een stroom met de sterkte 5 en door de andere een stroom met de sterkte 7, dan kan men op een meetapparaat, dat de grootte van de aantrekking weergeeft, iets aflezen, dat overeenkomt met het getal 35, bijv. 34,998.

Een zeer groot analogie-rekenapparaat staat in Brussel, waar het opdrachten uitvoert, die uit verschillende landen van West-Europa komen.
De analogie-apparaten zijn eenvoudiger te bouwen, dan de digitale, maar ze werken veel langzamer.
Met de moderne digitale apparaten kan men de eenvoudigste bewerkingen laten uitvoeren in miljoensten van seconden.

Het is wel duidelijk, dat men niets zou hebben aan zulke grote snelheden, als de getallen op de machine door de rekenaar zouden moeten worden ingesteld. Doordat de computers zelf „de knoppen indrukken", kunnen ze ook verder zo uitzonderlijk snel werken.
De machine kan echter, hoewel men hem wel eens „elektronisch brein" noemt, niet denken en kan alleen die handelingen uitvoeren, waarvoor de rekenaar de machine instructies heeft gegeven.
Alle instructies te zamen, die men de computer moet geven om een bepaald doel te bereiken, noemt men een *programma*.
Het samenstellen van een programma is het werk van de programmeur.
Er zal bij het toenemen van het aantal computers een steeds grotere vraag naar programmeurs ontstaan.



Een computer heeft in het algemeen vijf hoofdonderdelen, nl.:

1. het apparaat, waarmee de gegevens aan de machine worden verschaft (de „input"). De machine kan de gegevens bijvoorbeeld aflezen van een ponsband of magnetische band.
2. Het apparaat, waarmee de machine de resultaten van zijn rekenwerk meedeelt (de „output"). Deze resultaten worden bijvoorbeeld automatisch uitgetypt op een schrijfmachine of in een band geponst. Deze band kan dan weer door een lees- of schrijfapparaat gevoerd worden.
3. Het rekenlichaam, dat naar zijn kenmerkendste onderdeel wel accumulator genoemd wordt. Dit onderdeel is te vergelijken met de niet-automatische rekenapparaten.
4. Het stuurlichaam, dat werk doet, dat de rekenaar zelf moet doen bij de niet-automatische apparaten.
5. Het geheugen. Bij verschillende computers bestaat dit uit een snel ronddraaiende trommel, die bedekt is met een laag, die plaatselijk gemagnetiseerd kan worden. Maar ook andere vormen zijn mogelijk bijv. een elektrostatische ladingsverdeling op isolatorplaten (vergelijk dit met de grammofoonplaten in een juke-box) of een draadrooster met op de snijpunten van de horizontale en verticale draden ferrietringen. (Ferriet is een mengsel van zeer fijn verdeeld ijzer en een bindmiddel. Dit materiaal heeft de voor deze apparaten gewenste elektromagnetische eigenschappen).

Het geheugen komt overeen met de papieren, die de rekenaar op zijn tafel heeft liggen: een papier met formules, een met gegeven getallen, een kladpapier voor tussenresultaten, een voor uitkomsten, enz. Verder bevat het geheugen allerlei, wat de rekenaar „uit het hoofd" weet. In het geheugen worden dus de gegeven getallen opgenomen en de instructies van het programma. Een plaats in het geheugen kan een getal bevatten, maar ook een opdracht om met getallen iets uit te voeren.

In de foto op de bladzijde hiernaast is een deel van het geheugen van een rekenapparaat afgebeeld. Elk wit „knopje" is een ferrietkern. Elke kern kan het cijfer 0 of 1 vasthouden. De foto werd ter beschikking gesteld door de I. B. M. te Amsterdam. Men noemt daar dit onderdeel van het rekenapparaat het „matje".

°°WIKKEN en WEGEN (I)

In dit artikel bespreken wij een zeer merkwaardig meetkundig probleem. Het is zo moeilijk dat het, voor zover wij weten, nog door niemand opgelost werd. Toch durven wij het aan onze lezers voor te leggen, want zij kunnen bij hun pogingen om er een oplossing voor te vinden even ver komen als wij. Of verder.

De eigenaar van een groot, vierkant stuk grond wil van dat terrein een bungalowpark maken. Het aantal te bouwen bungalows heeft hij, lettende op de afmetingen van het terrein, op 100 bepaald. Hij kan echter nog niet bepalen waar die bungalows zullen komen te staan, want de toekomstige bewoners zullen daar zeker iets over te zeggen willen hebben.
Voor hij propaganda voor zijn plan kan gaan maken, moet hij weten welke prijs hij moet vragen voor zijn „geriefelijke en riant gelegen bungalows in bosrijke omgeving, gebouwd in Californische stijl, voorzien van loggia, zonneterras en garage". Welnu, de prijs is hem bekend. Maar.... er zullen ook wegen op z'n stuk grond aangelegd moeten worden waarlangs mettertijd honderd auto's hun garages kunnen bereiken. Zolang niet bekend is, wat hij voor het aanleggen van die wegen zal moeten betalen, kan hij de prijs van zijn bungalows niet vaststellen.
De eigenaar zoekt dus enkele wegenbouwers, die belangstelling voor zijn plan hebben en er iets aan hopen te verdienen. Hij vraagt hen om prijsopgave, maar krijgt onmiddellijk een wedervraag te horen: hoeveel moet de totale lengte van al die wegen worden? Natuurlijk kan hij daar geen bevredigend antwoord op geven, omdat de plaatsen van de bungalows nog niet gekozen zijn. Het werk zal echter gegund worden aan degene, die de laagste prijs noemt. En die mag dan binnenkort, als de plaatsen van de honderd bungalows bekend zijn, zelf uitzoeken hoe hij de wegen wil aanleggen. Wanneer elke bungalow maar langs de weg bereikt kan worden, is de eigenaar al tevreden. De wegenbouwer mag dan de totale weglengte zo kort maken als hij kan.
En daarmee is de eigenaar verlost van zijn probleem. Maar de wegenbouwers (en wij) zitten er mee opgescheept. Zij mogen de totale lengte van de wegen minimaal maken en zullen om te kunnen concurreren nu al moeten overwegen hoe ze dat straks zullen doen. Als de toekomstige bewoners voor hun bungalows plaatsen kiezen, die voor de wegenbouwer gunstig zijn, dan kan dat voor hem een heel

prettige winst opleveren. Maar bij een ongunstige keuze wenst hij geen verlies te lijden. Dus zijn probleem luidt: hoe groot zal die minimale weglengte zijn bij de meest ongunstige keuze van de plaatsen van de bungalows?

Wij gaan ons nu verdiepen in de gedachten van de wegenbouwers. We kiezen er eerst een uit, die het waarschijnlijk niet ver zal brengen in zijn vak. Deze man denkt zich een stervormig wegenstelsel (zie fig. 18), waarin elke bungalow verbonden is met het centrum S van het vierkante terrein. Een enkele van die wegen wordt doorgetrokken tot de rand van het vierkant, want het terrein moet van buiten af toegankelijk zijn. In de figuur zijn, om de tekenaar te sparen, slechts enkele bungalows aangeduid en dus ook slechts enkele wegen getekend.
Elk van de honderd wegen is hoogstens even lang als een halve diagonaal van het vierkant; voor niet meer dan vier van die wegen kan deze maximale lengte nodig zijn. De totale lengte van de wegen is dus zeker kleiner dan honderd halve diagonalen of $50a\sqrt{2}$, wanneer we de zijde van het vierkant a noemen. Op deze lengte, ongeveer $70{,}71a$ bedragende, baseert de wegenbouwer dus zijn inschrijvingsprijs.

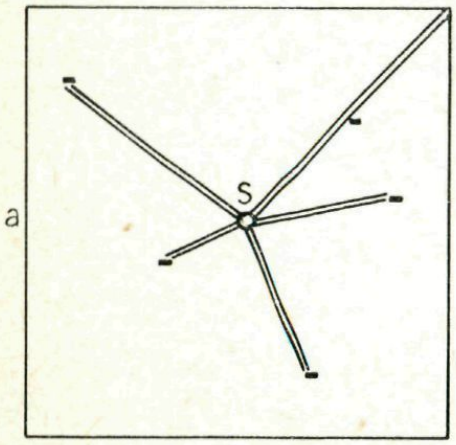


Fig. 18

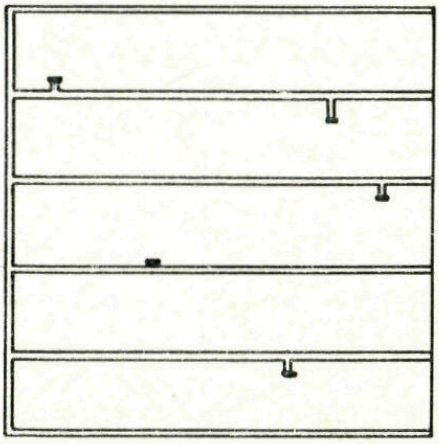


Fig. 19

Het is niet moeilijk om kritiek op de geschetste gedachtengang te leveren: bij gegeven plaatsing van de bungalows zal het stervormige wegenstelsel zeker niet de minimale weglengte geven, dat is wel duidelijk. Toch is er ook wel iets verdienstelijks in de redenering te ontdekken: hij geldt voor elke plaatsing van de bungalows, dus zeker ook voor de ongunstigste plaatsing.

De tweede wegenbouwer heeft een wat subtielere aanpak, die we in figuur 19 geïllustreerd zien. Hij wil een hoofdweg maken langs een zijde van het vierkant. Daar laat hij dan een zestal zijwegen op uit-

komen, die het vierkant verdelen in vijf even brede stroken. En tenslotte stelt hij zich voor elke bungalow met de dichtstbijzijnde zijweg te verbinden. De lengte van zulk een aansluiting is hoogstens gelijk aan de halve breedte van elke strook, dus hoogstens gelijk aan $0{,}1a$. Alle aansluitingen samen zijn dus hoogstens gelijk aan $100 \cdot 0{,}1a = 10a$. Voegen we dit bij de lengte van de hoofdweg en de zijwegen, in totaal $7a$ bedragende, dan vinden we dat de totale weglengte niet groter behoeft te zijn dan $17a$ en op deze lengte kan de tweede wegenbouwer zijn inschrijvingsprijs dus met een gerust hart baseren.
De bijgedachten van deze wegenbouwer zijn nogal doorzichtig. Als de plaatsen van de bungalows eenmaal gekozen zullen zijn, dan zal hij wel een wegenstelsel kunnen ontwerpen dat een totale lengte van minder dan $17a$ heeft. Aan de uiteinden van de zijwegen bijvoorbeeld zal hij wel iets kunnen weglaten. Maar daar durft hij nu nog niet op te rekenen, uit angst voor de meest ongunstige keuze van de bungalow-plaatsen.

De twee hierboven beschreven plannen hebben veel gemeenschappelijk. Ze ontwijken namelijk allebei het maximumkarakter van het gestelde probleem. En dat is ook wel verstandig, want het lijkt onmogelijk om een antwoord te geven op de vraag: *bij welke plaatsing van de bungalows is het wegstelsel van minimale lengte het langst.*
Het andere facet van het probleem is het minimumkarakter ervan: *hoe maakt men bij gegeven plaatsing van de bungalows een wegenstelsel van minimale lengte.* En dat facet is door de tweede wegenbouwer aanzienlijk beter aangepakt dan door de eerste, al heeft hij er dan ook geen afdoende oplossing voor gevonden.
Nu leggen wij de lezers de vraag voor, op welke manier een nog scherpere calculatie te verkrijgen is. Zo verschrikkelijk moeilijk is dat werkelijk niet, zodat wij goede hoop hebben dat een aantal van hen in de komende weken enkele prettige uren als adspirant-wegenbouwer zullen doorbrengen. In het volgende nummer van Pythagoras trachten wij dan in een vervolg op dit artikel hun prestaties te evenaren of te overtreffen.
En.... ziet er inmiddels misschien ook nog iemand kans om de kleine onschadelijke denkfout te ontdekken, die in het bovenstaande schuilt?

accumulator vgl. met het Franse werkwoord: *accumuler* = *opeenhopen, opeenstapelen, vergaren.*

analogie uit het Grieks, *analogia* = *overeenkomst, evenredigheid.*

computer uit het Latijn, *computare* = *berekenen.*

curve uit het Latijn, *curvus* = *krom.*

digitaal uit het Latijn, *digitus* = *vinger*, (vgl. het Engelse *digit* = *cijfer*).

evolute uit het Latijn, *evolvere* = *ontrollen.*
evolutum is het voltooid deelwoord van evolvere.

evolvente evolvens is het tegenw. deelwoord van evolvere.

faculteit uit het Latijn, *facultas* = *vermogen om iets te doen.* De term faculteit werd in de wiskunde ingevoerd in 1791 door de wiskundige Kramp naar analogie van *potentia* = *macht, vermogen.* Een macht is een produkt van gelijke factoren, een faculteit is een produkt van factoren, die telkens met 1 toenemen. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$.

inductie uit het Latijn, *inducere* = *heenleiden.*
In de logica is inductie de redeneermethode, waarbij men uit een aantal bijzondere gevallen tot een algemene stelling besluit. Tegenover inductie staat deductie, *deducere* = *afleiden.*

involute uit het Latijn, *involvere* = *inwikkelen.*

normaal uit het Latijn, *norma* = *winkelhaak, angulus normalis* = *rechte hoek.*

recurrent uit het Latijn, *recurrere* = *teruglopen.*

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.
G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.
A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.
Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden.
Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.
Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, *f* 2,— per jaargang. Voor anderen *f* 3,—.
Abonnementen kan men opgeven bij J.B.Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B.Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.