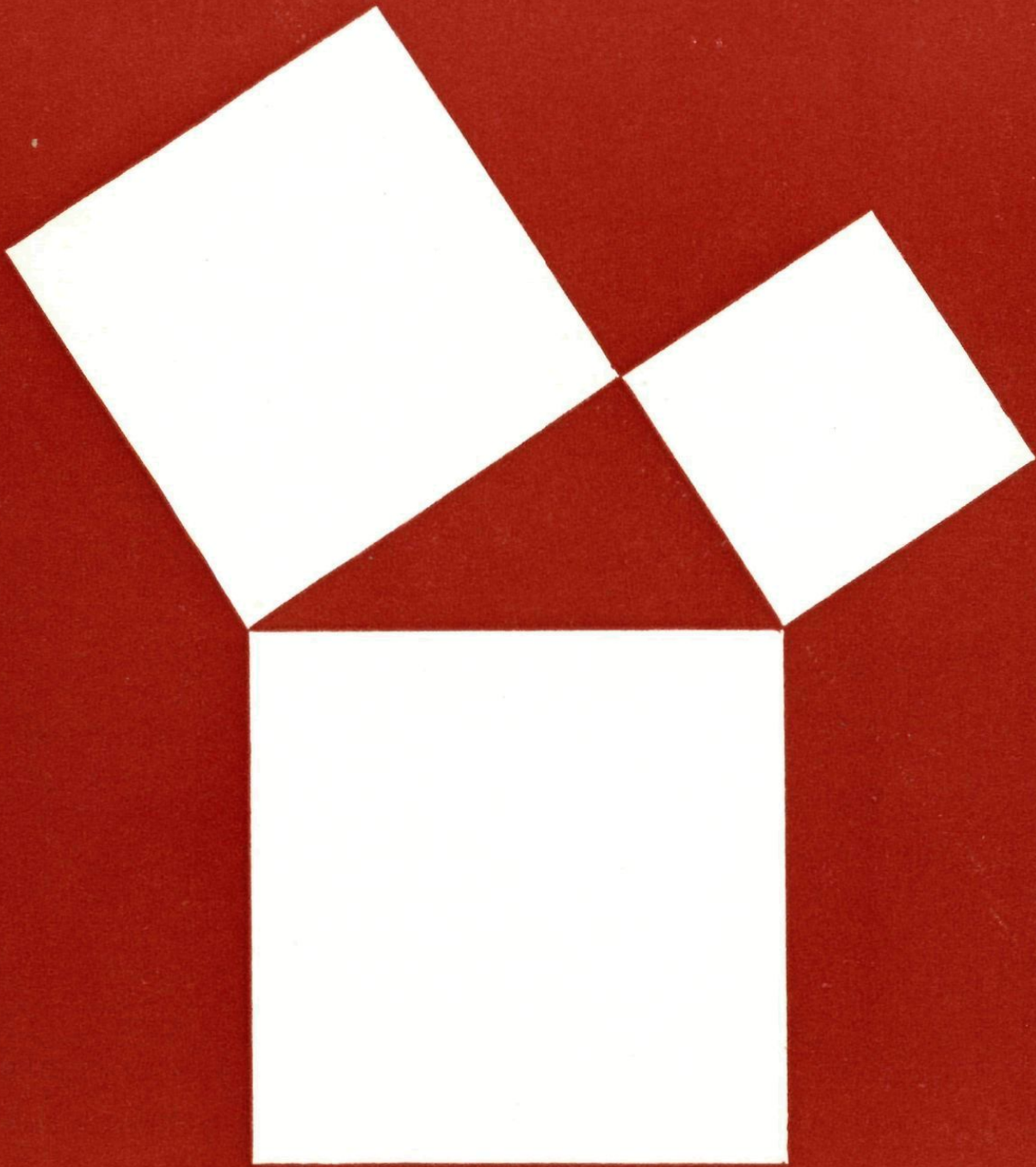


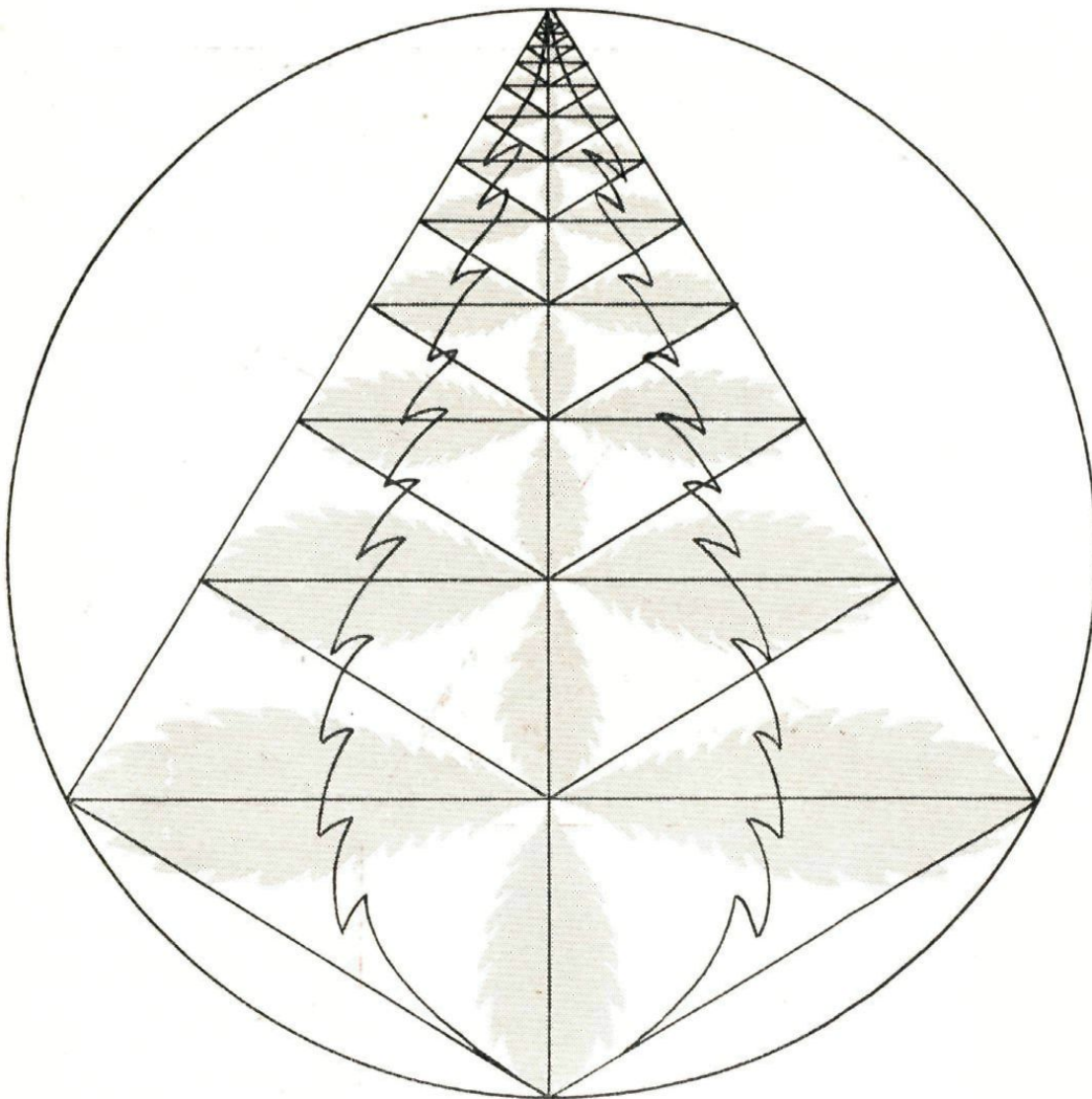
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

2

Derde jaargang



Het blad van
Pythagoras
(blz. 31)

De wiskunde is een machtig bouwwerk, dat de mens zich geschapen heeft om het heelal te begrijpen. Men ontmoet daarin het absolute en het oneindige, het denkbare en het onvoorstelbare.

Le Corbusier

De getallen van Fibonacci „in de bloemen”

In het vorige nummer troffen we op bladz. 12 de rij van Fibonacci aan. We vinden deze nu terug in de bloemen.

Fibonacci („zoon van Bonaccio”) is de naam, waaronder een Italiaans koopman – Leonardo van Pisa – bekend is geworden. Hij leefde omstreeks 1200 en schreef verschillende boeken over rekenkunde en algebra, waarin hij onder meer pleitte voor het invoeren van de Arabische schrijfwijze voor de cijfers en de Hindoese wijze van rekenen met het tientallig stelsel.

Dat veel mensen zijn naam nu nog kennen is vooral te danken aan een vraagstukje, dat hier volgt:

Iemand koopt op 1 januari van zeker jaar een konijnenpaartje. Dit krijgt na een maand (stel op 1 februari) twee jongen en wel een paartje en een maand later opnieuw. Daarna krijgt het oorspronkelijke paar geen jongen meer. Veronderstel nu verder dat het elk paartje, dat geboren werd, net zo vergaat als het eerste paar. Het paartje dat op 1 februari geboren werd krijgt dus op 1 maart twee jongen (een paartje) en op 1 april opnieuw. Daarna niet meer. Enz. De vraag is nu: Hoeveel konijnenpaartjes zijn er na een jaar?

Werk dit zelf maar eens uit. Wij gaan alleen bekijken hoeveel *nieuwe* paartjes er telkens in 's mans bezit komen:

1 jan.	1 febr.	1 mrt.	1 apr.	1 mei	1 juni	1 juli	1 aug.	
1	1	2	3	5	8	13	21	

We vinden de rij van Fibonacci, die gekenmerkt wordt door de recurrenthe betrekking:

$$t_1 = 1, t_2 = 1, t_{n+2} = t_n + t_{n+1}$$

Zie Pyth. 3-1, blz. 12, waar echter $t_1 = 0$ en $t_2 = 1$ werden gekozen.

Deze rij vertoont verschillende regelmatigheden. Eén daarvan is, dat hij na de 4e term steeds meer op een meetkundige rij gaat lijken.

Een meetkundige rij heeft de eigenschap, dat het quotiënt van elk tweetal op elkaar volgende termen constant is. Stellen we dit constante getal voor door de letter r , dan is in een meetkundige rij dus $\frac{t_{n+1}}{t_n} = r$. Een voorbeeld van een meetkundige rij is 2, 6, 18,

54, In dit geval is $\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = \dots = \frac{t_{n+1}}{t_n} = 3$.

Bij de rij van Fibonacci is $t_{n+1} = t_n + t_{n-1}$, dus

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = 1 + \frac{t_{n-1}}{t_n}$$

We kunnen hieruit afleiden, dat $1 < \frac{t_{n+1}}{t_n} < 2$, immers alle termen zijn positief en $t_{n-1} < t_n$.

Je kunt gemakkelijk controleren, dat $\frac{t_7}{t_6}, \frac{t_8}{t_7}, \frac{t_9}{t_8}, \dots$ enz. alle in de buurt liggen van 1,62.

Deze controle is natuurlijk geen bewijs. Dat laten we achterwege.

Vertakkingen

Bij veel planten komt een zijtak uit de oksel van een blad. De zijtakken krijgen dan op dezelfde manier weer zijtakken.

Nu is het eigenaardig, dat een zijtak niet tegelijk met de hoofdtak een nieuwe zijtak krijgt, maar dat de zijtak „de eerste keer overslaat”. Als we de schematische figuur bekijken, blijkt de zin hiervan te zijn een betere spreiding van de plant t.o.v. het licht.

Het aantal punten, waar een zijtak ontspringt, blijkt nu van onder naar boven de getallenrij van Fibonacci te vormen.

Het is natuurlijk niet gemakkelijk een plant te vinden, die dit precies vertoont; er treden plaatselijk versnellingen en vertragingen op in het vormen van zijtakken. Maar het zoeken ernaar is een boeiend werkje omdat we trachten in een zekere chaos (het driedimensionale geheel van een plant ziet er niet zo overzichtelijk uit als figuur 1) de regelmaat te vinden.

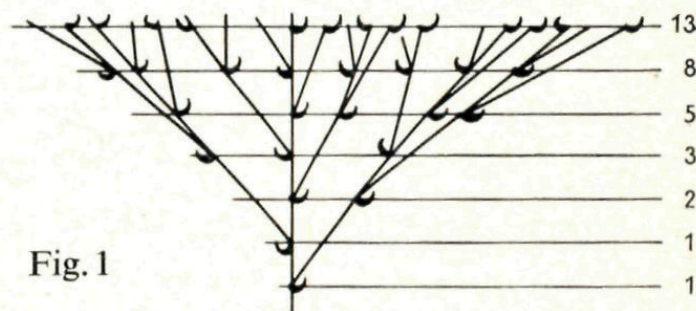


Fig. 1

Composieten en de getallenrij van Fibonacci

Een zelfde groeimechanisme schijnt ten grondslag te liggen aan de vorming van de bloemhoofdjes der composieten.

De buitenste bloempjes van vele composieten hebben langere blaadjes (lintbloemen). Als we deze gaan tellen, komen we merkwaardigerwijze bijna altijd op een Fibonacci-getal uit.

3 komt wel voor bij Fuchs Kruiskruid (ook wel 5 en 8)
5 komt weinig voor; b.v. Duizendblad
8 vinden we bij enige Kruiskruiden, Cineraria
13 bij Jacobs Kruiskruid en Gele Ganzebloem
21 bij veel tuinplanten: Margriet, Aster, Cichorei
34 komt het meeste voor: Madeliefje, Gaillardia, Pyrethrum
55 bij gecultiveerde madelieven
89 eveneens bij gecultiveerde madelieven.

Natuurlijk zijn dit gemiddelden; bij een bosje margrietten gaf een telling 21, 21, 20, 34, 32, 32, 34, 38.

Bij verschillende soorten merkten we op, dat de beter uitgegroeide exemplaren op een volgend Fibonacci-getal springen.

Het is een boeiend groepswerkje om op deze wijze een groot gedeelte van de composietenfamilie uit te kammen. We vermoeden zelfs, dat het hart van de composieten (de buisbloempjes) zich ook houdt aan de Fibonacci-getallen.

We kunnen er echter niets van zeggen, omdat we ons niet gewaagd hebben aan een hopeloze tellerij; misschien kan een lezer daartoe de moed opbrengen. Alleen bij de Muursla, die 5 bloempjes in elk korfje heeft, kost het tellen geen moeite.

WE BLADEREN DIT NUMMER EVEN DOOR

Het is altijd plezierig, als we iets origineels toegezonden krijgen. Ditmaal is het *Egbert Jan Hoogenberk* uit Doorn, die een idee lanceert voor het construeren van een ellipspasser (blz. 28). Evenals in het vorige nummer treffen we deze keer weer de rij van Fibonacci aan. Van de artikelen over Ir. Bosman, Computers, Wikken en Wegen vinden we de vervolgen. Een aardig gezelschapsspelletje zal je misschien aan het denken zetten. Een onzer redacteurs had een gesprek met een architect en stelde hem de vraag: „Wat betekent de wiskunde voor u?” Zo kwamen we op het citaat van Le Corbusier op de binnenzijde van het omslag. En dan zijn er weer de Denkertjes en de oplossingen daarvan.

EEN GEZELSCHAPSSPELLETJE

Een spel, waarbij men de indruk wekt gedachten te kunnen lezen, heeft, als het goed gespeeld wordt, altijd veel succes. Niemand gelooft, dat je het kunt, maar wanneer je goed geoefend hebt en zonder fouten werkt, is de geheimzinnigheid meestal zo groot, dat alleen de vraag al, hoe het in zijn werk gaat, het spel boeiend maakt.

Hier volgt zo'n spel, dat je samen met een helper moet instuderen.

Je beweert, dat je gedachten kunt lezen en vraagt je helper om, terwijl je zelf zolang de kamer verlaat, met het gezelschap een getal af te spreken, dat je zult raden, als je weer binnengeroepen bent. De helper gaat bij de tafel staan en spreekt bijvoorbeeld af, dat 23 het getal zal zijn, dat geraden moet worden. Hierbij moet hij zien door een praatje wat tijd te winnen, zodat hij inmiddels de gelegenheid heeft om *ongemerkt* enkele kopjes en schoteltjes op de tafel te rangschikken, die de „gedachtenlezer” in staat moeten stellen het afgesproken getal te vinden. In dit geval plaatst hij (vooral niet te duidelijk op een rijtje) vier kopjes en een schoteltje in deze volgorde: k s k k k.

Het is misschien wel aardig nu even niet verder te lezen en erover te denken of jij, als je de „gedachtenlezer” was, hieruit het getal 23 zou kunnen afleiden. Zie je daartoe geen kans, dan moest je eerst het artikel over computers maar eens lezen, dat je op bladz. 40 vindt. Na dat artikel volgt dan de verklaring van dit gezelschapsspel.

Instrumenten voor het tekenen van ellipsen

Egbert Jan Hoogenberk, leerling van het Revis Lyceum in Doorn, schreef ons:

Hierbij stuur ik U een tekening van een ellipspasser, die ik, naar ik meen, voor het eerst uitgevonden heb. Hij is iets ingewikkelder dan een gewone passer, maar is ongeveer even groot.

Er zitten twee paar tandwielletjes in, die met elkaar de verhouding 1 : 2 moeten vormen. Hij bestaat uit een grote stang; aan het einde

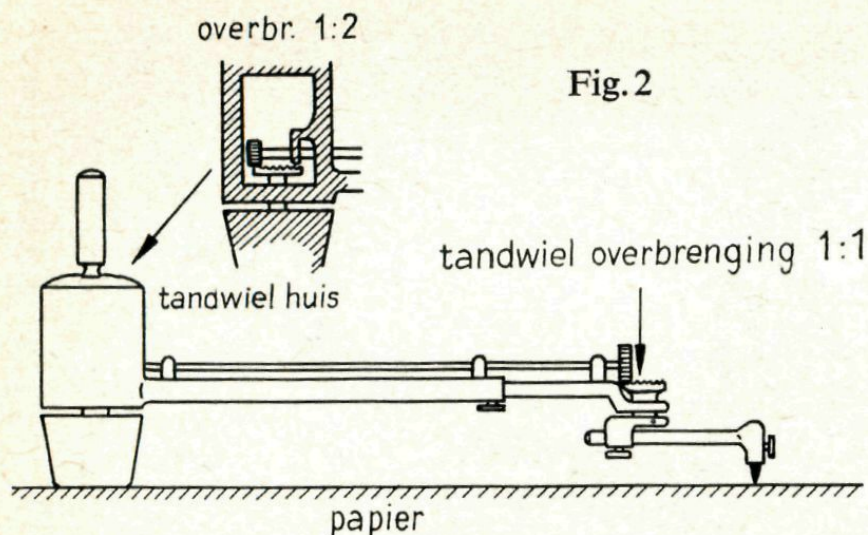


Fig. 2

daarvan is een kleinere stang draaibaar bevestigd. Deze stang (die tweemaal ronddraait tegen de grote eenmaal) draagt aan het einde een schrijfstift (figuur 2). Wanneer je de grote stang 360° laat roteren, draait het kleine

stangetje 720° , en beschrijft het potloodpuntje een ellips.

Met behulp van figuur 3 kunnen we dat gemakkelijk bewijzen:

Coördinaten van P:
$$x = R \cos \alpha + r \cos \alpha = (R + r) \cos \alpha$$
$$y = R \sin \alpha - r \sin \alpha = (R - r) \sin \alpha$$

Dus:

$$\sin \alpha = \frac{y}{R - r}; \cos \alpha = \frac{x}{R + r};$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\frac{x^2}{(R + r)^2} + \frac{y^2}{(R - r)^2} = 1$$

Dit is de vergelijking van een ellips.

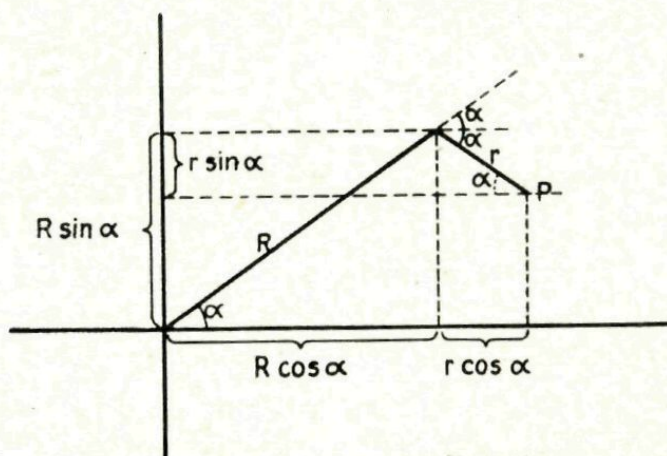


Fig. 3

Tot zover de brief van Egbert. Hij beschrijft hier een instrument, dat heel solied gebouwd kan worden en waarmee niet alleen één bepaalde ellips beschreven kan worden, maar elke gewenste, door verandering van de lengte der stangen R en r .

Een ander instrumentje, waarmee men verschillende ellipsen kan tekenen vonden we in een prijscourant van Ahrend onder de naam Rulalipse. Stang a (figuur 5) kan in zijn lengterichting heen en weer schuiven. Stang b is draaibaar om het eindpunt van a . Op het einde

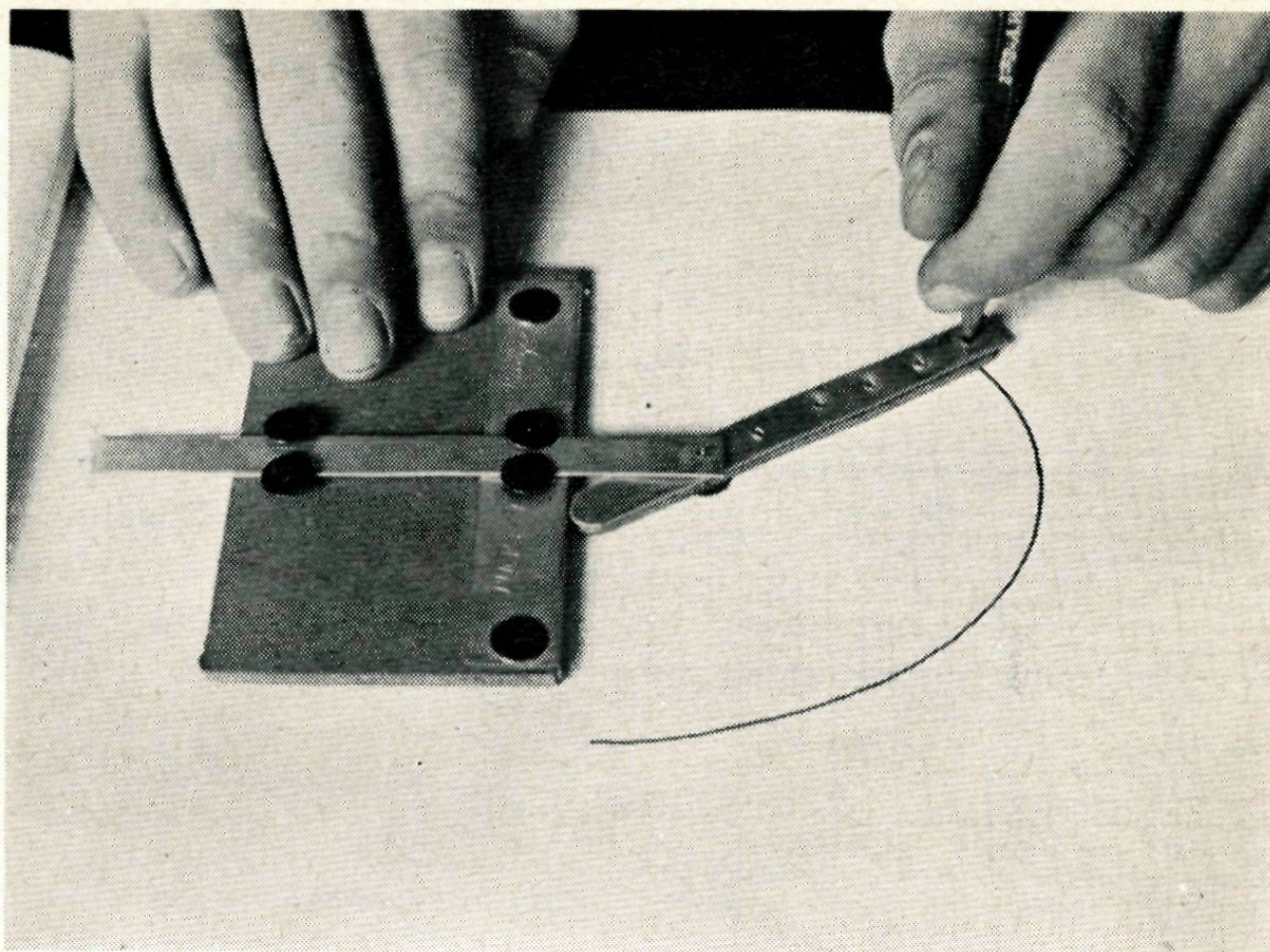


Fig. 4

van stang b zit de tekenstift. Als we zorgen dat punt p van stang b steeds tegen de liniaal c gedrukt blijft, beschrijft het potlood een (halve) ellips. Probeer dat zelf eens te bewijzen: het is een zelfde soort bewijs met analytische meetkunde als Egbert Jan gegeven heeft.

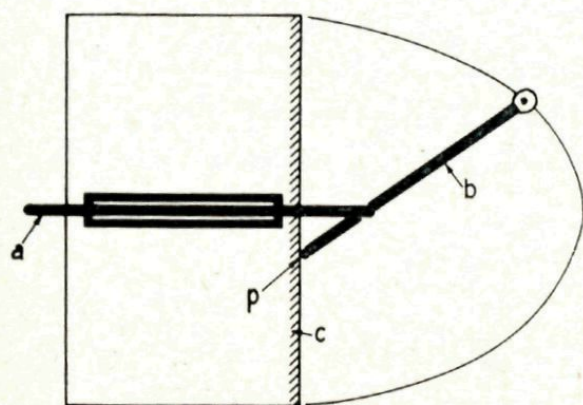


Fig. 5

De foto (fig. 4) laat zien hoe je dit instrumentje zelf na kunt maken met een stukje karton, drie metaalstrippen en een aantal punaises.

Er zijn nog meer instrumenten bedacht om ellipsen te tekenen. Het eenvoudigste „instrument”, dat je allen kent, bestaat uit een eindje touw en twee spelden, die op de plaats gestoken worden, waar we de brandpunten van de ellips willen hebben. Het volgende instrument is waarschijnlijk nog nooit praktisch gebruikt, en misschien is het moeilijk, het zo uit te voeren, dat het soepel gebruikt kan worden. We maken een passer waarvan het ene been om

een vaste as (a) gedraaid kan worden. Het andere been (b), dat de schrijfstift draagt, kan in zijn lengterichting verschoven worden om steeds contact met het papier te bewaren (figuur 6).

Het is duidelijk, dat het been, dat de schrijfstift draagt, een kegelmantel beschrijft en dat de schrijfstift de doorsnee van de kegel met het tekenvlak vastlegt.

Zo'n „passer” kan natuurlijk gemakkelijk zo ingesteld worden, dat er een parabool of een hyperbool op het tekenvlak komt. Het is een „kegelsnedenpasser”. Het is echter te betwijfelen, of het instrument in de praktijk zo eenvoudig te maken is als op papier!

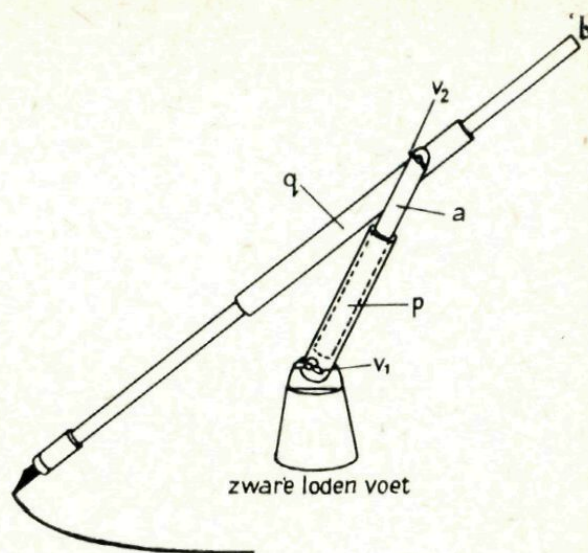


Fig. 6

a draait in bus p; b schuift in bus q; bus p kan met vleugelmoer V_1 in een bepaalde stand vastgezet worden; V_2 zet bus q in een vaste stand.

Uit „Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde” II

Ir. A. E. Bosman heeft verschillende interessante samenhangen ontdekt in het gebied van de gewone vlakke meetkunde. Het zijn geen lastige onderzoeken, ook geen belangrijke dingen, maar toch verrast hij dikwijls door de bijzondere wijze, waarop hij de dingen ziet en weer nieuw weet te maken. Dit is het tweede artikel over zijn werk.

°° HET BLAD VAN PYTHAGORAS

In fig. 7 is $\triangle ABC$ rechthoekig in C. Op de zijden van de driehoek zijn halve cirkels getekend. De hoogtelijn CD verdeelt $\triangle ABC$ in twee kleinere rechthoekige driehoeken. Ook op de zijden daarvan zijn halve cirkels getekend. Stellen we nu $CD = h$, $AD = p$ en $BD = q$, dan zien we dat de som der gepunteerde oppervlakten gelijk is aan:

$$\frac{1}{8}\pi p^2 + \frac{1}{8}\pi q^2 + \frac{1}{4}\pi h^2 = \frac{1}{8}\pi(p^2 + q^2 + 2h^2) = \frac{1}{8}\pi(p^2 + q^2 + 2pq) = \frac{1}{8}\pi c^2$$

De som der gepunteerde oppervlakten is dus gelijk aan de oppervlakte van de halve cirkel beschreven op de zijde AB.

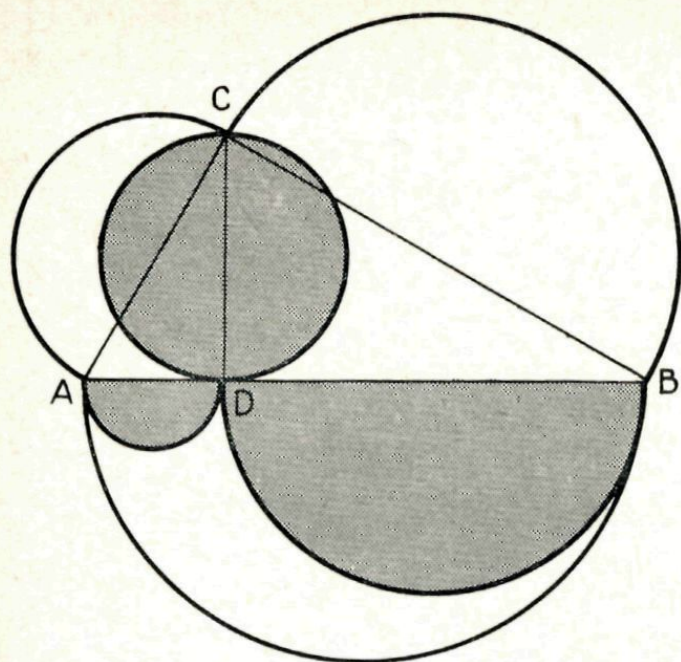


Fig. 7

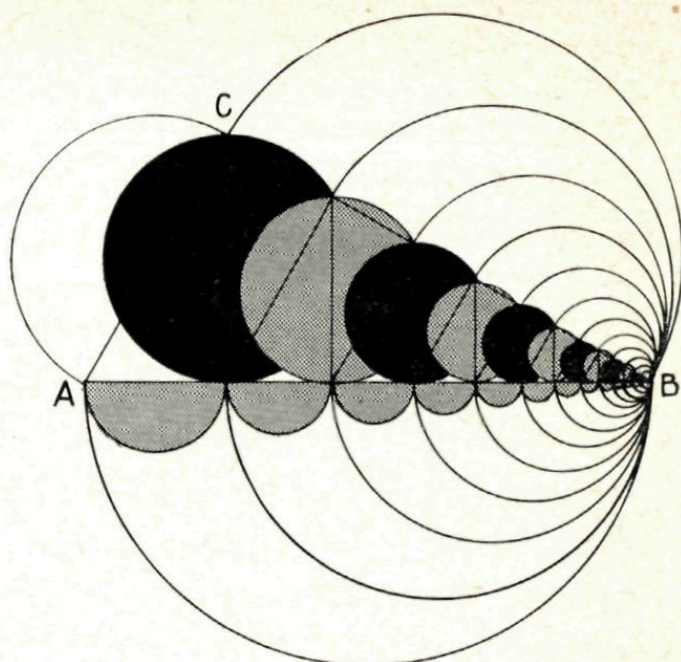


Fig. 8

Bekijk nu figuur 8. We zien daarin een rij van rechthoekige driehoeken, gelijkvormig met $\triangle ABC$. Het is niet moeilijk na te gaan, dat de som van de oppervlakten van alle zwarte en gepunteerde cirkels en halve cirkels gelijk is aan de oppervlakte van de halve cirkel op AB beschreven. (Daarbij moeten we de hele cirkels in hun geheel rekenen en dus niet alleen de delen, die „achter de aangrenzende cirkel te voorschijn komen”.)

We behoeven ons bij figuren als deze niet te beperken tot het tekenen van halve cirkels op de zijden van de rechthoekige driehoeken. Als de „op deze zijden getekende” figuren maar gelijkvormig zijn. Ir. Bosman nam voor deze figuren een bladvorm en verkreeg zo de tekening, die afgedrukt staat op de binnenzijde van het omslag. Hierin is de oppervlakte van het grote verticale blad gelijk aan de som van de oppervlakten van alle kleine blaadjes.

Je zou er nu nog eens over kunnen denken hoe het met de omtrekken van de cirkels in fig. 7 staat. En met de omtrekken der blaadjes en het grote blad in de tekening van Ir. Bosman. En misschien, dat je aandacht valt op een oneindig voortlopende, dalende meetkundige rij, die in de figuren als het ware zichtbaar wordt. Dat geeft je stof om verder te denken en te puzzelen.



Wat betekent *de wiskunde* voor u?

Interviews met allerlei mensen, die in hun vak of hobby wiskunde gebruiken.

DE ARCHITECT

La musique est: temps et espace, comme l'architecture.

La musique et l'architecture dépendent de la mesure.

Le Corbusier

Voor de artikelenserie „Wat betekent de wiskunde voor u” hadden we een gesprek met de Heer P.L. de Vrieze, architect te Groningen. De Heer De Vrieze bouwt o.a. nieuwe kerken en restaureert oude. Een belangrijke taak heeft hij momenteel in het mede leiding geven aan de ingrijpende restauratie van de eeuwenoude Martinikerk te Groningen.

Het was over Escher, diens geniale tekeningen en wonderlijke fantasieën, dat ons gesprek begon. Onze gastheer had ze gevonden in de tweede jaargang van ons blad en met ons had hij genoten van Eschers fopperijen en zich bijvoorbeeld afgevraagd, waar we nu eigenlijk „beduveld” werden in de tekening, waarin het water naar boven stroomt (2e jaargang, blz. 86).

Het was niet moeilijk van de fantasieën van Escher over te stappen op de werkelijkheid van het bouwen en het aandeel van de architect daarin.

Ziet u, – zo zei de Heer De Vrieze, – de meeste mensen denken, dat bouwen betekent het stapelen van bakstenen tot muren om er dan een dak op te plaatsen. Zij zien de massa, het materiaal.

De architect beschouwt muren en daken slechts als begrenzingen van de ruimte. De ruimte is voor hem het wezenlijke. In de ruimte leeft de mens, beweegt hij zich, werkt hij. Hij zet zijn meubels in die ruimte en omringt zich met de dingen, waarvan hij houdt. Door de ramen valt het licht in de ruimte en schept er het spel van de schaduwen. Deuren geven toegang tot woon- en werkruimten. Deze ruimten ontwerpt de architect. Hij construeert er de muren, plafonds en vloeren omheen.

U zult dus vooral wel veel gehad hebben aan stereometrie, was onze veronderstelling.

Inderdaad en in het bijzonder aan de beschrijvende meetkunde. Het was juist doordat ik zo'n plezier had in beschrijvende meetkunde, dat het plan werd geboren om in de bouwkunde te gaan.

U moogt wel eens even iets vertellen over de beschrijvende meetkunde, want onze leerlingen kennen dat vak niet meer. Enige jaren geleden werd het op de h.b.s.'en vervangen door de analytische meetkunde.

In de beschrijvende meetkunde worden van stereometrische figuren projecties getekend op twee of meer onderling loodrechte vlakken. In bouwtekeningen zien we zulke projecties als „boven-, voor- en zij-aanzichten” van het bouwwerk of onderdelen daarvan.

Bovendien leert men in de beschrijvende meetkunde ware lengten van lijnstukken en ware grootten van hoeken te construeren. Denk maar eens aan een ingewikkelde dakconstructie, waarbij verschillende dakvlakken elkaar onder scheve hoeken snijden. Om de kapconstructie, die de pan- of leibedekking draagt, te kunnen ontwerpen, moeten o.a. de ware lengten van schuine kanten worden geconstrueerd. De kap moet daarvoor worden „uitgeslagen”. De leerlingen doen dit uitslaan ook wel, als ze van een piramide of prisma een netwerk maken, waarin ze bijvoorbeeld ware lengten van hoogtelijnen construeren.

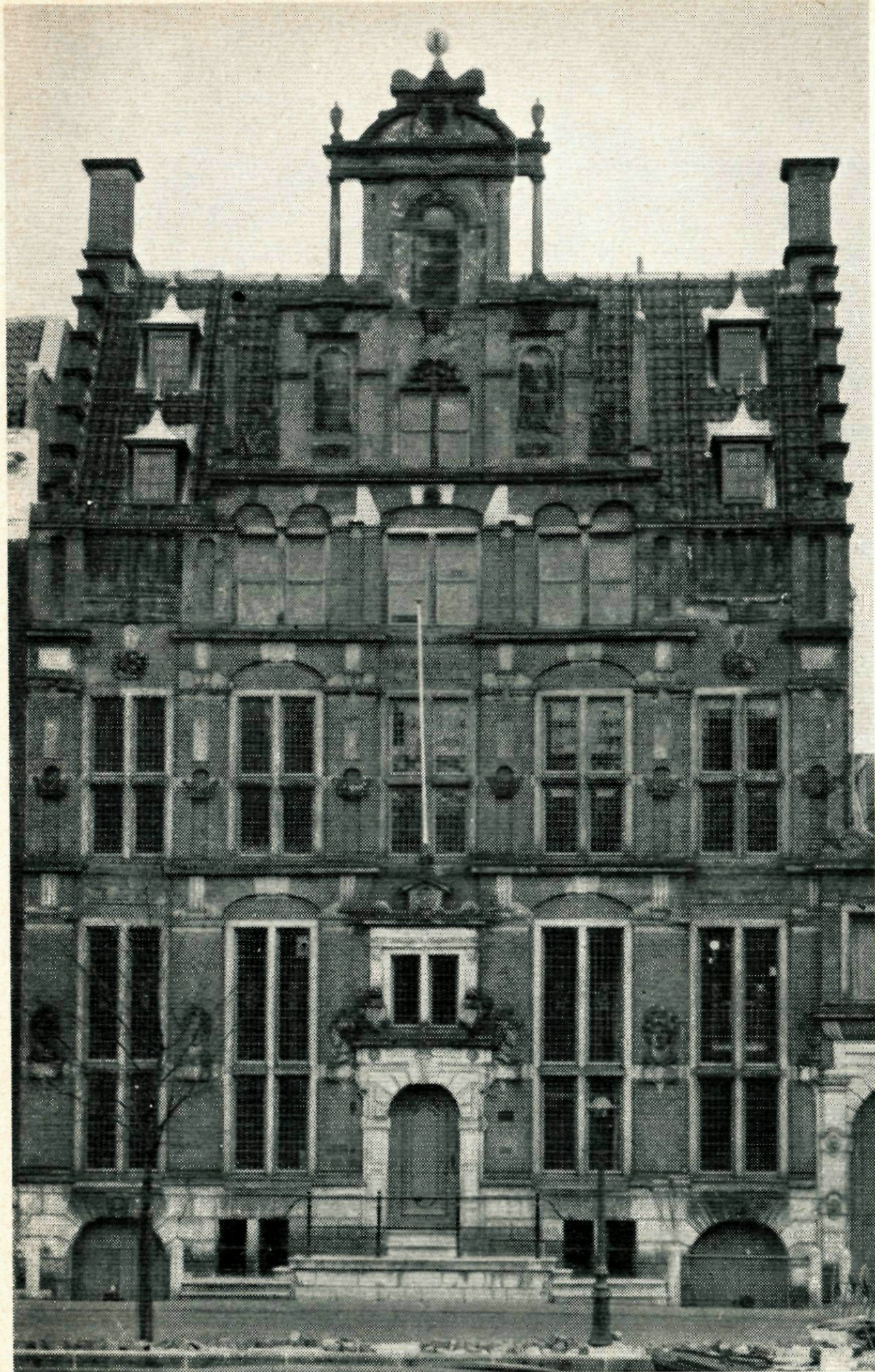
U hebt zeker meer aan de meetkunde dan aan de algebra in uw vak?

In zekere zin wel. Er zijn tegenwoordig bij de beton- en staalconstructies nogal ingewikkelde berekeningen nodig, waarbij zelfs de hogere wiskunde (differentiaalrekening) te pas komt. Maar de architect berekent deze dingen meestal zelf niet meer.

Daarvoor zijn constructiebureaus, die zich op dit rekenwerk gespecialiseerd hebben. De architect stuurt zijn gegevens en verlangens betreffende de betononderdelen naar zo'n bureau en ontvangt daarvan de uitwerkingen betreffende de hoeveelheid materiaal en de constructie van het ijzeren vlechtwerk terug. Uiteraard gaat hieraan een intensief overleg met de constructeur vooraf.

Kunt U een onderdeel van de meetkunde noemen, dat een belangrijke rol speelt in de architectuur?

Het aardigste voorbeeld is waarschijnlijk wel de kwestie van de verhoudingen. U begrijpt, dat bijvoorbeeld een gevel zó ontworpen moet worden, dat muurvlakken, ramen, deuren enz. een harmonisch geheel vormen. Ze moeten een bepaalde onderlinge verhouding hebben, willen ze een evenwichtige indruk op de beschouwer maken. Kijkt u maar eens naar de gevels van de Amsterdamse grachtenhuizen. Van onderen naar boven nemen de lengten der ramen regelmatig af. De onderste



Het „Huis met de Hoofden” te Amsterdam.

In de gevel van het „Huis met de Hoofden” verhouden de lengten der ramen zich ongeveer als 3 : 2 : 1.

zijn erg hoog. De bovenste zijn een stuk kleiner. De verhouding van deze lengten geeft deze gevels zo'n prachtig evenwicht.

Zijn er bepaalde verhoudingen, waarvan de architect gebruik maakt?

Dikwijls tekent hij bij het ontwerpen de verhoudingen intuïtief. We zouden kunnen zeggen, dat de gedachte voorop gaat en dan pas de wiskunde komt. Bij betonconstructies moet bijvoorbeeld de betonconstructeur nagaan of de gedachte van de architect te verwezenlijken is.

Moderne bouwmeesters maken soms zeer uitzonderlijke vormen. Misschien hebt u wel eens een afbeelding gezien van het Palazzo dello Sport in Rome, ontworpen door de Italiaanse constructeur-architect P.L. Nervi.

Toch geloof ik, dat de grote bouwmeesters vroeger vaak gebruik maakten van de „gulden snede”, u weet wel de verhouding, waarbij een lijnstuk a zo in twee stukken x en $a - x$ wordt verdeeld, dat $(a - x) : x = x : a$. Het grootste stuk is dan middel-evenredig tussen het kleinste en het gehele lijnstuk.

Inderdaad. Deze verhouding wordt nòg wel graag gebruikt. De grote Franse architect Le Corbusier heeft hem bij wijze van spreken herontdekt. Hij heeft een systeem van maten ontworpen, dat hij Le Modulor noemt. Dit heeft hij gebaseerd op de maten van het menselijk

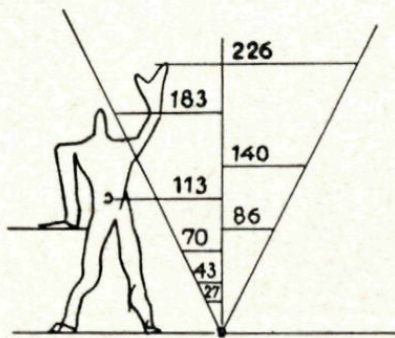
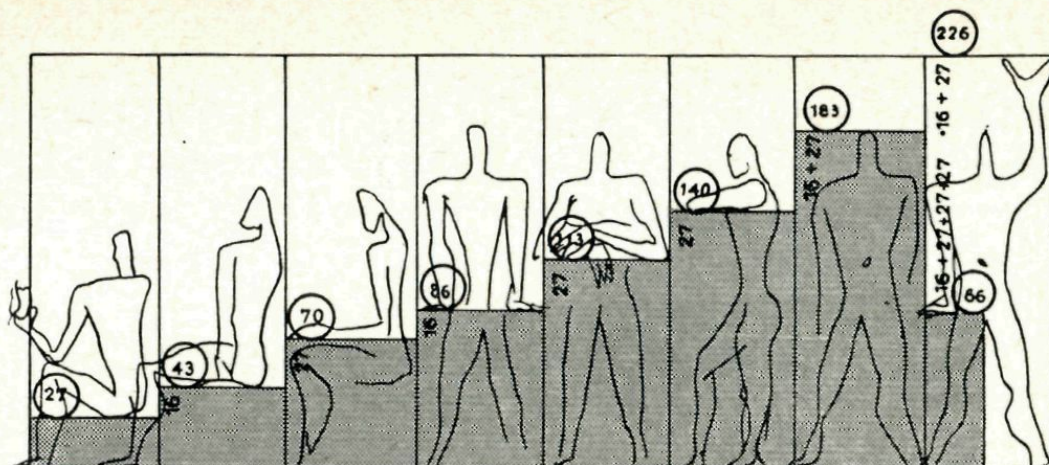


Fig. 9

lichaam. Het is wel grappig om in zijn boekje over Le Modulor te lezen, dat hij oorspronkelijk als maatstaf had genomen een man met een lengte van 1.75 m. Toen bleek echter, dat de verhoudingen niet zo ideaal werden als hij wel zou wensen. Een Amerikaanse vriend wees hem erop, dat een westelijk schoonheidsideaal is een man met een lengte van 6 voet, dat is ongeveer 1.83 m. Toen hij deze als grondslag van zijn systeem nam, kreeg hij de getallenrijen, die bij zijn

Fig. 10



„mannetjes” in de figuren 9 en 10 zijn vermeld. U merkt wel op, dat $43^2 \approx 27 \cdot 70$ en $70^2 \approx 43 \cdot 113$ enz., zodat de gulden snede er inderdaad in zit.

We vroegen de Heer De Vrieze tenslotte nog, wat hij een ideale voorbereiding vond voor het beroep van architect. Het liefst gymnasium B of 5 jaar hbs, was het antwoord, en daarna de T.H. of de H.T.S. plus Academie voor Bouwkunst, welke laatste in 9 grote steden avondcursussen v. en H.B.O. (Voortgezet en Hoger Bouwkunst Onderricht) geeft. De Heer De Vrieze is in Groningen docent aan zo'n cursus.



OPLOSSINGEN HIERVAN KUNNEN WORDEN INGEZONDEN AAN
DE HEER A. VAN TOOREN, NACHTEGAALPLEIN 10, DEN HAAG.

(Oplossingen inzenden voor 1 januari 1964)

41. In de som $3 + 7 + 10 + 17 + 27 + 44 = 108$ zijn de eerste twee getallen (3 en 7) willekeurig gekozen en de andere daaruit afgeleid volgens een regel, die je gemakkelijk kunt vinden. Vorm op deze wijze andere sommen van telkens zes getallen, waarbij je de eerste twee willekeurig kiest.

Het zal blijken, dat het getal achter het gelijkteken elke keer op dezelfde manier samenhangt met een der zes getallen voor het gelijkteken. Hoe? Verklaar het.

42. In een restaurant komen dag in dag uit (ook 's zondags) zes personen A, B, C, D, E en F eten. Ze nemen daarbij plaats aan een tafel, waarvan de plaatsen genummerd zijn van 1 tot en met 6. Ze hebben afgesproken, dat ze elke dag in een andere volgorde aan tafel zullen gaan zitten. (Zo zijn dus ABCDEF en ABCEDF twee verschillende volgorden.) Natuurlijk zal er een dag komen, dat alle verschillende volgorden, die mogelijk zijn, hun beurt hebben gehad. Als ze op 1 januari 1963 voor het eerst samen gegeten hebben en toen de afspraak maakten, op welke datum zullen ze dan voor het laatst een volgorde kunnen kiezen, die nog niet aan de beurt is geweest?
43. Bedenk een manier om een lijnstuk in drie gelijke delen te verdelen door alleen gebruik te maken van passer en liniaal, maar daarbij geen evenwijdige lijnen te construeren.
44. Twee kantoorbedienden vergelijken hun salarissen. De een krijgt zijn salaris slechts eenmaal per jaar uitbetaald, nl. op 31 december. Het eerste jaar (31-XII-'62) kreeg hij 8000 gld. uitbetaald. Elk volgend jaar zal hij f 200,— meer krijgen. De ander krijgt zijn salaris elk halfjaar uitbetaald, nl. op 30 juni en 31 december. De eerste keer (30-VI-'62) kreeg hij 4000 gld. uitbetaald. De tweede keer 50 gld. meer. Zo zal hij elk halfjaar een salarisverhoging van f 50 ontvangen. Wie van de twee zal tot en met 31 december 1968 het meeste salaris gebeurd hebben?
45. Gegeven 17 punten, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{17}$, die willekeurig over 't vlak van tekening verspreid liggen. Men trekt tussen deze punten alle verbindingslijnstukken, hetzij rood, hetzij blauw, hetzij groen. Er ontstaan dus veel driehoeken, die drie der punten als hoekpunten hebben. Bewijs dat minstens één dezer driehoeken drie gelijkgekleurde zijden heeft.

(Ingezonden door Dr. J. T. Groenman, Groningen)

De volgende vijf opgaven zijn weer ontleend aan de Amerikaanse test. Uit de vijf bij elke opgave genoemde antwoorden moet telkens het juiste gekozen worden.

46. Bij het tellen van n ballen, die elk rood of zwart zijn, werd gevonden, dat 49 van de eerste 50 rood waren. Daarna waren van elke 8 er 7 rood. In totaal waren minstens 90 procent van alle ballen rood. Dan is n maximaal gelijk aan:
(A) 225 (B) 210 (C) 200 (D) 180 (E) 175
47. In een cirkel met middelpunt O is een scherphoekige $\triangle ABC$ beschreven; boog $AB = 120^\circ$ en boog $BC = 72^\circ$. Een punt E wordt gekozen op de kleinste boog AC zo, dat OE loodrecht staat op AC . De verhouding van de grootten van de hoeken OBE en BAC is dan:
(A) $\frac{5}{18}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{4}{9}$
48. A geeft B evenveel centen als B heeft en ook C evenveel centen als C heeft. Daarna geeft B aan A en C elk evenveel centen als ze nu hebben. Daarna geeft C aan A en B elk evenveel centen als ze nu hebben. Tenslotte heeft ieder 16 centen. Hoeveel centen had A aanvankelijk?
(A) 24 (B) 26 (C) 28 (D) 30 (E) 32
49. Punt F ligt op de zijde AD van vierkant $ABCD$. In C wordt een loodlijn opgericht op CF ; deze snijdt het verlengde van AB in E . De oppervlakte van $ABCD$ is 256 en die van $\triangle CEF$ is 200. De lengte van BE is:
(A) 12 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 20
50. In hoeveel delen wordt het platte vlak verdeeld door zes lijnen, waarvan er geen twee evenwijdig zijn en geen drie door één punt gaan?
(A) 16 (B) 20 (C) 22 (D) 24 (E) 26



°Computers II

In het vorige artikel zagen we, dat de meeste computers binaire apparaten zijn. We gaan nu na wat dat betekent.

Bij elektrische of magnetische apparaten kan men dikwijls een keuze doen tussen twee mogelijkheden: Stroom in- of stroom uitgeschakeld; Positieve of negatieve lading; Noordpool of zuidpool.

Willen we echter met onze gebruikelijke getallen rekenen, dan moeten we een keuze kunnen doen tussen tien mogelijkheden, we moeten nl. de cijfers 0 tot en met 9 kunnen kiezen. Met deze tien cijfers kunnen we elk getal schrijven als een combinatie van machten van 10. Zo betekent 705,42

$$7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

De keuze van het getal 10 als basis van het getallenstelsel is het gevolg van het rekenen op de tien vingers, maar is wiskundig gezien een volkomen willekeurige keuze. Er zijn dan ook wel volkeren geweest, die een andere basis hadden. De Sumeriërs bijvoorbeeld. Ze rekenden met een zestigtallig stelsel. Daarom verdelen we een graad nog steeds in 60 minuten en een minuut in 60 seconden. Ook de voorvaders van de Fransen hadden een ander talstelsel hetgeen nog te merken is aan getallen als soixante-dix en quatre-vingts.

Voor computers kiest men dikwijls als basis van het getallenstelsel het getal 2. Men schrijft dan dus elk getal als een combinatie van machten van 2.

Het getal 43 is gelijk aan

$$1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Het kan daarom *binair* als volgt geschreven worden: 101011.

Wat betekent het binair geschreven getal $1101_2 11$? Hierin staat de ₂ op de plaats, waar in het tientallig stelsel de komma staat. Men ziet eraan, dat het geen tiendelige breuk is, maar een binair geschreven getal.

Men ontcijfert dit getal het gemakkelijkst door eerst even de machten van 2 op te schrijven:

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	$\frac{1}{2} 2^{-1}$	2^{-2}	2^{-3}
		1	1	0	1	$\frac{1}{2}$ 1	1	

We zien, dat $1101_2 11$ gelijk is aan $2^3 + 2^2 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2}$, dus is het gelijk aan $8 + 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 13\frac{3}{4}$.

Het is niet moeilijk een getal, dat geschreven is in het tientallig stelsel, om te zetten in een in het binaire stelsel geschreven getal. Daartoe delen we het gegeven getal telkens door 2 en schrijven de rest 0 of 1, die daarbij overblijft telkens achter het deeltal, bijv.:

<i>Getallen</i>	<i>Resten</i>	We zeggen dus:
7453	1	$7453 = 2 \cdot 3726 + 1$
3726	0	$= 2 \cdot (2 \cdot 1863) + 1 = 2^2 \cdot 1863 + 1$
1863	1	$= 2^2 \cdot (2 \cdot 931 + 1) + 1$
931	1	$= 2^3 \cdot 931 + 1 \cdot 2^2 + 1$
465	1	$= \text{enz.}$
232	0	We zien, dat de bovenste 1 in de rij der resten van het binair geschreven getal 7453 de meest rechtse 1 wordt.
116	0	
58	0	
29	1	Het getal 7453 binair geschreven wordt dus
14	0	1110100011101. Reken maar na:
7	1	$1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^4 +$
3	1	$+ 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 =$
1	1	$4096 + 2048 + 1024 + 256 + 16 + 8 + 4 +$
		$+ 1 = 7453.$

De tafels voor het optellen en vermenigvuldigen in het binaire stelsel zijn erg gemakkelijk:

$0 + 0 = 0$	$0 \cdot 0 = 0$
$0 + 1 = 1$	$0 \cdot 1 = 0$
$1 + 1 = 10$	$1 \cdot 1 = 1$

Enkele voorbeelden van berekeningen in het binaire systeem:

$\begin{array}{r} 110110 \\ 100101 \\ \hline 1011011 \end{array} \text{ opt.}$	$\begin{array}{r} 110110 \\ 100101 \\ \hline 10001 \end{array} \text{ aft.}$	$\begin{array}{r} 110110 \\ 100101 \\ \hline 110110 \end{array} \text{ verm.}$
		$\begin{array}{r} 110110 \\ 110110 \\ \hline 11111001110 \end{array}$

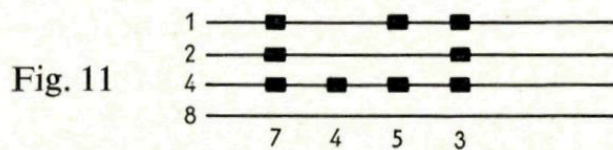
Je kunt dit gemakkelijk controleren door de getallen decimaal te schrijven.

Sommige breuken worden, als we ze decimaal schrijven, repeterend. Zo is $\frac{1}{3} = 0,333 \dots$. We schrijven daarvoor wel $0,\bar{3}$, waarbij de streep

wijst op het repeteren van de 3. Controleer, dat voor $\frac{1}{3}$ binair geschreven kan worden $0_2\overline{01}$. Dat is dus $0_201010101\dots$

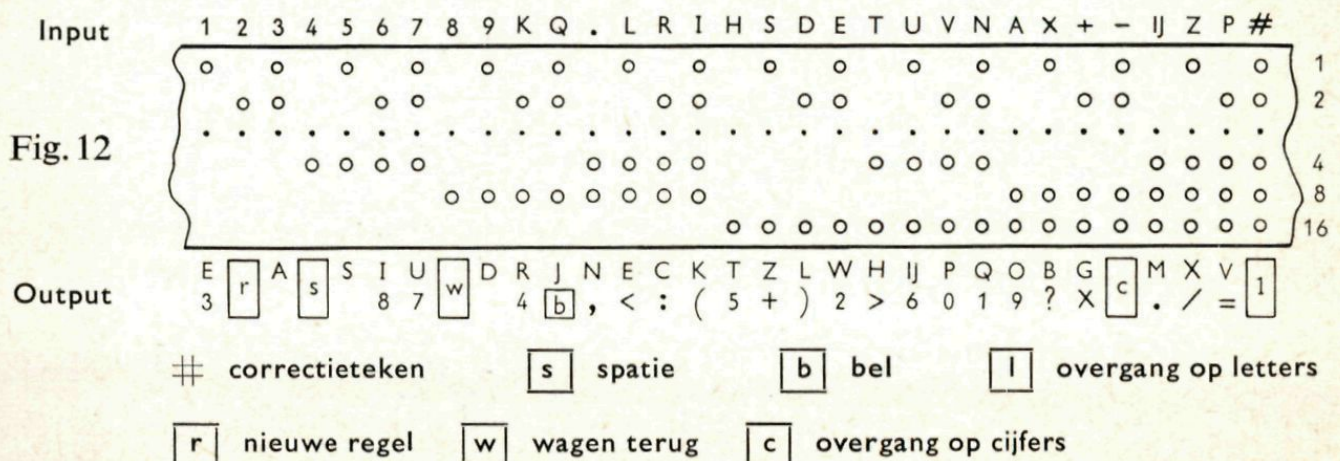
Breuken, die decimaal niet repeteren, doen dat binair soms wel. Zo is $\frac{1}{5}$ decimaal geschreven gelijk aan 0,2 maar binair $0_2\overline{0011}$.

In sommige computers combineert men het binaire met het decimale stelsel. Men schrijft dan alleen de *cijfers* van elk getal binair, dus wordt voor 7453 dan geschreven 0111|0100|0101|0011. Men kan dan elk cijfer door middel van elektrische impulsen op vier leidingen (kanalen) aangeven (fig. 11):



Verschillende computers ontvangen hun instructies via een ponsband. Behalve op een schrijfmachine kunnen ze de resultaten ook weer op een ponsband mededelen. De ponsgaatjes voor de input hebben een andere betekenis dan die van de output.

In fig. 12 ziet men de tekens, die men op de ponsband kan aanbrengen. De rij stippen in het midden stellen kleine gaatjes voor, die dienen voor het voortgeleiden van de band. We zien, dat er vijf ponsgaatjes boven elkaar mogelijk zijn. Zo kan men op elke verticale lijn een der getallen 00001, 00010, 00011, 00100, 00101, 00111, enz. voorstellen. Bij de input kan men zo elk der cijfers 0 tot en met 9 door een combinatie van 0 tot en met 4 ponsgaatjes voorstellen. Zou men op de ponsband de getallen binair verder tellen, dan zou men komen tot en met 31. Maar na de 9 gebruikt men de ponsgaatjes niet meer voor getallen maar voor letters, die instructies voor het programma voorstellen.



Bij de output ziet men, dat elke combinatie van 1 tot en met 5 pons-gaatjes zowel letters als cijfers en wiskundige tekens kunnen voorstellen. Zo stelt 11000 de letter O of het cijfer 9 voor. Die 9 klopt nu niet meer met de binaire schrijfwijze van het getal. De bij de output gegeven interpretatie van de ponsgaatjes is internationaal overeengekomen.

Enkele gaatjescombinaties hebben een bijzondere bedoeling. Zo dient 00010 ervoor om de schrijfmachine, waarop het resultaat wordt uitgetypt, aan een nieuwe regel te laten beginnen. 00100 dient voor het maken van een spatie (ruimte tussen twee woorden) op de schrijfmachine. Het getal 11111 zegt, dat de machine van cijfers moet overgaan op letters, terwijl 11011 de overgang van letters op cijfers aangeeft.

EEN GEZELSCHAPSSPELLETJE

(vervolg van blz.28).

Hier volgt nu de oplossing van het geheim van het gezelschapsspel, waarbij het getal 23 geraden moest worden. Het werd door de helper „opgeschreven” in het binaire stelsel; stelt nl. een kopje het getal 1 voor en een schoteltje het getal 0, dan staat er met kopjes en schoteltjes genoteerd het getal 10111. Dat is dus, van links af gerekend:

$$16 + 0 + 4 + 2 + 1 = 23.$$

De voorbereiding voor dit spel moet bestaan in het goed leren hanteren van de binaire getallen bijvoorbeeld tot en met 63. Hoger maar niet, want dan zijn er teveel kopjes en schoteltjes nodig en loopt het manipuleren daarmee te gauw in de gaten. Je moet je dus oefenen in het lezen en omrekenen van zo'n getal, bijv. $k s k s s k = 41$. Terwijl je helper juist snel van het decimale in het binaire stelsel moet kunnen omrekenen. Bijv. $35 = 32 + 2 + 1$, dus binair geschreven 100011.

Vanzelfsprekend kun je met allerlei ander materiaal dan kopjes en schoteltjes werken, als je maar van tevoren afsprekt, wat de 1 en wat de 0 zal voorstellen.

Bijvoorbeeld: potloden met de punt naar je toe of van je af, of schriften met het etiket naar boven of naar beneden. Maar werk vooral met materiaal, dat al aanwezig is, zodat het zo min mogelijk opvalt, wat het is, waarmee je het getal overbrengt. En ga natuurlijk ook eerst even na of er iemand in het gezelschap is, die Pythagoras gelezen heeft.

°° WIKKEN en WEGEN II

Het is niet zo moeilijk om de calculatie van de tweede wegenbouwer te verscherpen. Er zijn zelfs drie verschillende verbeteringen, die aangebracht kunnen worden zonder het karakter van het oorspronkelijke plan te veranderen.

Ten eerste is het nuttig om andere zijwegen te kiezen. We laten ze niet meer langs de randen van de vijf stroken lopen maar midden door die stroken heen (in figuur 13 zijn de randen van de stroken door stippellijnen aangegeven en de zijwegen door getrokken lijnen). Het blijft dan nog steeds waar, dat voor de aansluiting van een bungalow op een zijweg hoogstens een weglengte van $0,1 a$ nodig is. Maar . . . in dit geval hebben we een hele zijweg minder. De minimale weglengte zal dus bij geen enkele plaatsing van de bungalows groter zijn dan $16a$. Ten tweede kiezen we de hoofdweg niet meer langs de rand van het terrein, maar evenwijdig daarmee op een afstand van een halve strookbreedte. En de zijwegen worden elk met die halve strookbreedte ingekort. Zouden er bungalows gebouwd moeten worden tussen de nieuwe hoofdweg en de rand van het terrein, dan kunnen die nu met die hoofdweg verbonden worden en daar is dan ook niet meer dan $0,1a$ voor nodig. Door deze manoeuvre krijgen we een besparing van $5 \cdot 0,1a = 0,5a$. En de nieuwe schatting wordt dus $15,5a$.

Ten derde stellen we ons de vraag: waarom zouden we nu juist vijf stroken maken en niet een ander aantal? Misschien is het veel slimmer om er vier of acht te gebruiken.

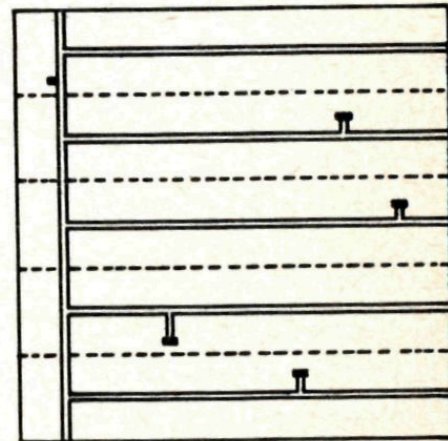


Fig. 13

Goed, we verdelen het vierkante terrein dus in n stroken, waarvan elk de breedte $\frac{a}{n}$ heeft. We nemen een hoofdweg, die op een afstand van een halve strookbreedte, dus van $\frac{a}{2n}$, van de rand verwijderd is en we laten daar n zijwegen op uitkomen. Elk van die zijwegen loopt midden door een strook heen en heeft een lengte $a - \frac{a}{2n}$. Elke bungalow verbinden we met een zijweg of met de hoofdweg en voor zulk een aan-

sluiting is dan hoogstens een weglengte van $\frac{a}{2n}$ nodig. De totale weglengte wordt dus hoogstens gelijk aan

$$a + n\left(a - \frac{a}{2n}\right) + 100 \cdot \frac{a}{2n} = \left(n + \frac{50}{n} + \frac{1}{2}\right)a$$

Nu proberen we het natuurlijke getal n zodanig te kiezen, dat de factor $n + \frac{50}{n} + \frac{1}{2}$ minimaal wordt. Dit blijkt te gebeuren als we 7 kiezen voor n . Er wordt dus door de tweede wegebouwer zo scherp mogelijk geconcurrerd, indien hij zijn inschrijvingsprijs op een totale weglengte van $14\frac{9}{14}a$ laat berusten.

Er verschijnt nu een derde wegebouwer ten tonele, wiens gedachten wij tot de onze gaan proberen te maken.

Hij redeneert eerst op dezelfde manier als zijn voorganger en komt dus, evenals hij, tot een schatting van $14\frac{9}{14}a$. Maar nu valt hem iets merkwaardigs op. Indien er voor veel bungalows een plaats gekozen zal worden, die dicht bij de *middenlijn* van een van zijn zeven stroken ligt, dan komt dat laatste plan wel erg gunstig uit, want er zullen dan vrijwel geen aansluitwegen gemaakt moeten worden. Maar indien er erg veel bungalows erg dicht bij de *rand* van een strook moeten komen te liggen, dan is het toch beter om de zijwegen weer langs die strookranden te laten lopen. Weliswaar is er dan een zijweg meer nodig maar dat zal waarschijnlijk niet opwegen tegen de winst, die in dat geval op de aansluitwegen gemaakt wordt. Het is dus verstandig om de keuze tussen de beide plannen nog wat uit te stellen en het is prettig, dat dit ook mogelijk is.

Bij het beschouwen van de figuren 14 en 15, die de beide plannen uitbeelden, komt er een bijzonder gelukkige gedachte in hem op.

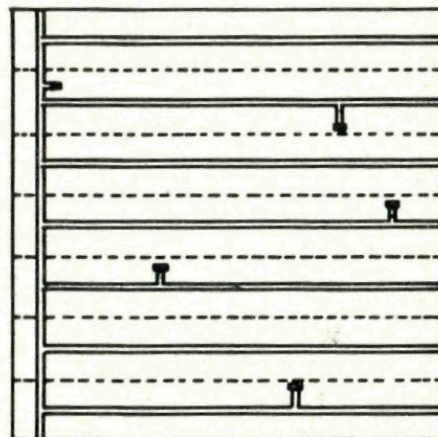


Fig. 14

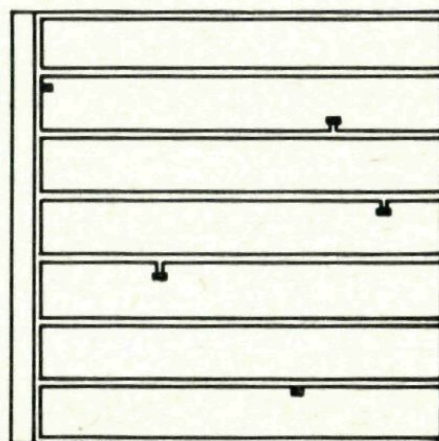


Fig. 15

Kijkt hij slechts naar een van die figuren, dan realiseert hij zich dat er over de lengte van de aansluitwegen alleen maar een vrij vage bewering te doen is: elke aansluiting is hoogstens gelijk aan een halve strookbreedte, dus hoogstens gelijk aan $\frac{1}{4}a$.

Kijkt hij echter naar beide figuren tegelijk, dan ziet hij dat er toch ook iets te zeggen is, dat meer exact is: voor elke bungalow apart geldt, dat de aansluitweg in het eerste plan en die in het tweede plan samen een lengte van $\frac{1}{4}a$ hebben.

Nee, dat is niet waar. Eventuele bungalows, die tussen de hoofdweg en de rand van het terrein moeten komen, bederven dat weer. Maar dat is te verhelpen door die hoofdweg niet op een afstand van $\frac{1}{4}a$ van de rand te leggen, maar op een afstand van $\frac{1}{8}a$. Dan zijn de twee aansluitwegen voor zulk een bungalow in de twee plannen samen hoogstens $\frac{1}{4}a$ lang.

En nu aan het cijferen:

Het totaal van de weglengten in de beide plannen wordt:

$2a$ voor de beide hoofdwegen

plus $(8 + 7) \cdot (a - \frac{1}{8}a) = 14\frac{3}{8}a$ voor de $8 + 7$ zijwegen

plus hoogstens $100 \cdot \frac{1}{4}a = 7\frac{1}{2}a$ voor alle aansluitingen samen.

Dat is dus hoogstens $23\frac{7}{8}a$.

Maar dat betekent, dat minstens een van die twee plannen een totale weglengte vereist, die niet groter is dan $\frac{1}{2} \cdot 23\frac{7}{8}a = 11\frac{4}{5}\frac{5}{6}a$. Welk plan dat is, dat kan pas worden uitgemaakt wanneer de plaatsing van de bungalows bekend zal zijn, maar dat is geen bezwaar.

Min of meer triomfantelijk stelt de derde wegebouwer dus vast: de minimale weglengte is zelfs bij de meest ongunstige ligging van de bungalows niet groter dan $11\frac{4}{5}\frac{5}{6}a$. En daar baseert hij daarom zijn inschrijvingsprijs op.

Kunnen we het maximum van de minimale weglengte nog dichter benaderen?

Wij moeten toegeven dat wij niet in staat zijn nog veel af te knabbelen van die $11\frac{4}{5}\frac{5}{6}a$. Nog een kleinigheid slechts. En die bewaren we dan tot de volgende aflevering.

En . . . dat is waar ook . . . die kleine denkfout! We hebben hem al weer gemaakt in het bovenstaande. In het slotartikel zullen we dus ook nog onszelf in staat van beschuldiging moeten stellen.

OPLOSSINGEN van de DENKERTJES in Pythagoras 3-1

31a. De formulering van de opgave in dit ULO-boek is zo onduidelijk, dat beide leerlingen gelijk kunnen hebben.

32a. 22 keer. In elk vol uur 2 keer, behalve in de uren, die beginnen met 9 uur en 15 uur. Deze beide uren zijn dan als geval meegerekend bij 8 uur en 14 uur.

32b. Is p een der getallen 1 tot en met 12, dan is de hoek van de wijzers om p uur $30p^\circ$. Per minuut legt de grote wijzer 6° af en de kleine $\frac{1}{2}^\circ$. Om x minuten na p uur is de hoek van de wijzers dus $(30p - 5\frac{1}{2}x)^\circ$. We zullen zeggen, dat de hoek van de wijzers 90° is, als hij 90° met de klok mee moet draaien om op de plaats van de kleine te komen. We zullen de hoek -90° stellen, als de grote wijzer 90° tegen de klok in zou moeten draaien om op de plaats van de kleine te komen.

De hoek van de beide wijzers is recht als $30p - 5\frac{1}{2}x = \pm 90^\circ$.

Hieruit volgt, dat de hoek van de wijzers recht is op de tijdstippen $\frac{2}{11}(30p \pm 90)$ minuten na (voor) p uur. Het tijdstip ligt vóór p uur, als het aantal minuten negatief is.

33. Het antwoord is afhankelijk van de middellijn van de spiegel. Stel de straal van de spiegel r , dan kost het veraluminiseren bij firma I:

$$2r \cdot 140 \text{ cent} = 280r \text{ cent.}$$

En bij firma II:

$$\pi r^2 \cdot 30 \text{ cent} = 30\pi r^2 \text{ cent} \approx 94,2r^2 \text{ cent.}$$

In fig. 16 zien we, dat de prijzen gelijk zijn voor $r = 0$ en $r \approx 3$.

Ook zien we, dat voor het veraluminiseren van grotere spiegels firma I goedkoper is.

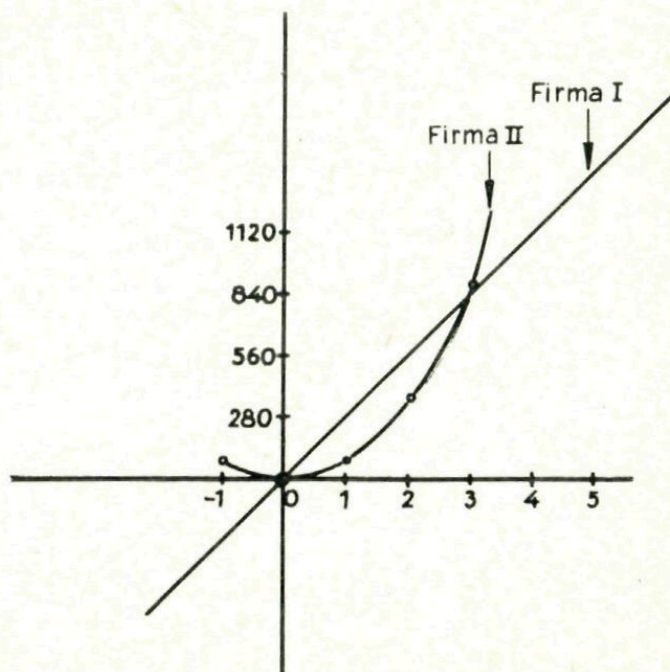


Fig. 16

34. Dit is inderdaad het geval voor elk natuurlijk getal n . De som der getallen in de ene diagonaal is:

$$1 + (n + 2) + (2n + 3) + \dots + n^2 = \frac{1}{2}n(1 + n^2) \quad (\text{rekenkundige rij})$$

en in de andere diagonaal:

$$n + (2n - 1) + (3n - 2) + \dots + (n^2 - n + 1) = \frac{1}{2}n(n + n^2 - n + 1) = \frac{1}{2}n(1 + n^2)$$

(eveneens een rekenkundige rij)

35. Het gestelde is bewezen, als opp. $\triangle AHB = \text{opp. } \triangle BJC$.

$$\text{Dan moet} \quad \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot JC.$$

$$\text{Dus te bewijzen is:} \quad AC : BC = JC : BH.$$

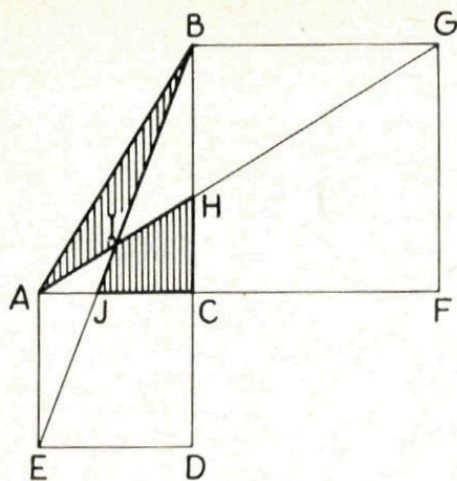


Fig. 17

Wegens de gelijkvormigheid van $\triangle ACH$ en $\triangle GBH$ is $AC : BC = HC : HB$.

We moeten dus nog bewijzen, dat $JC = HC$.

We zien gemakkelijk in de figuur:

$$JC : AC = BC : (AC + BC)$$

$$\text{en } HC : BC = AC : (AC + BC).$$

Daaruit volgt de gelijkheid van JC en HC .

36. Het gevraagde punt is het midden van PM . Dit is te bewijzen door aan te tonen, dat $XPYM$ een parallellogram is. We bewijzen hier, dat $PX \parallel MY$. Op gelijke wijze kan dan de evenwijdigheid van PY en XM bewezen worden.

$$\angle P_1 = \angle B \text{ (} PX = AX = BX \text{)}$$

$$\angle B = \angle C \text{ (op dezelfde boog staande)}$$

$$\angle S_1 = \angle S_2 = \angle C \text{ (o.a. omdat } MY \perp CD \text{)}$$

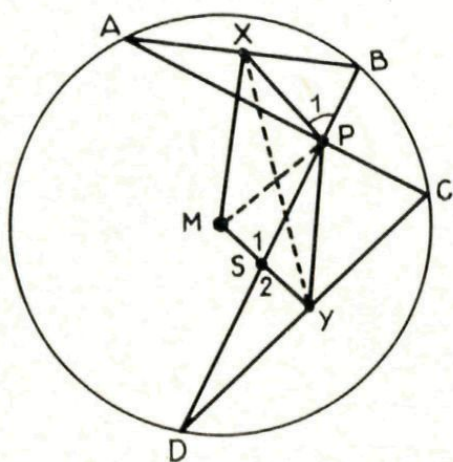


Fig. 18

We zien dus, dat $\angle B = \angle S_1$ en daaruit volgt de evenwijdigheid van PX en MY . De diagonalen van het parallellogram delen elkaar middendoor, dus snijden XY en PM elkaar in het midden van PM .

Van de opgaven 37 tot en met 40 vermelden we alleen het juiste antwoord:

37. (B) $\frac{5a}{8}$;

39. (C) $3\sqrt{3} : 2$;

38. (E) 0; ,

40. (A) alle, op 2 na.

Binair

Uit het Latijn. *Bini* = *telkens twee*.

Calculatie

Uit het Latijn. *Calx* = *kieselsteen*, d.w.z. een steen op het rekenbord. *Calculatie* = *berekening*.

Coëfficiënt

Uit het Latijn. *Co-* = *samen, tegelijk, gemeenschappelijk*. *Efficere* = *bewerken*.

Le Corbusier

Pseudoniem voor de Frans-Zwitserse architect Charles Edouard Jeanneret, geb. 6-10-1887 te La Chaux de Fonds.

Index

(mv. indices). Uit het Latijn. *Index* = *aanwijzer*. (Een index is o.a. een teken, dat ter onderscheiding aan een symbool wordt toegevoegd).

Module

Frans. Zetmaat, die de proporties van een gebouw aangeeft.

Modus

Latijn. Betekent: *Maat*.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden.

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,— per jaargang. Voor anderen f 3,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J.B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.