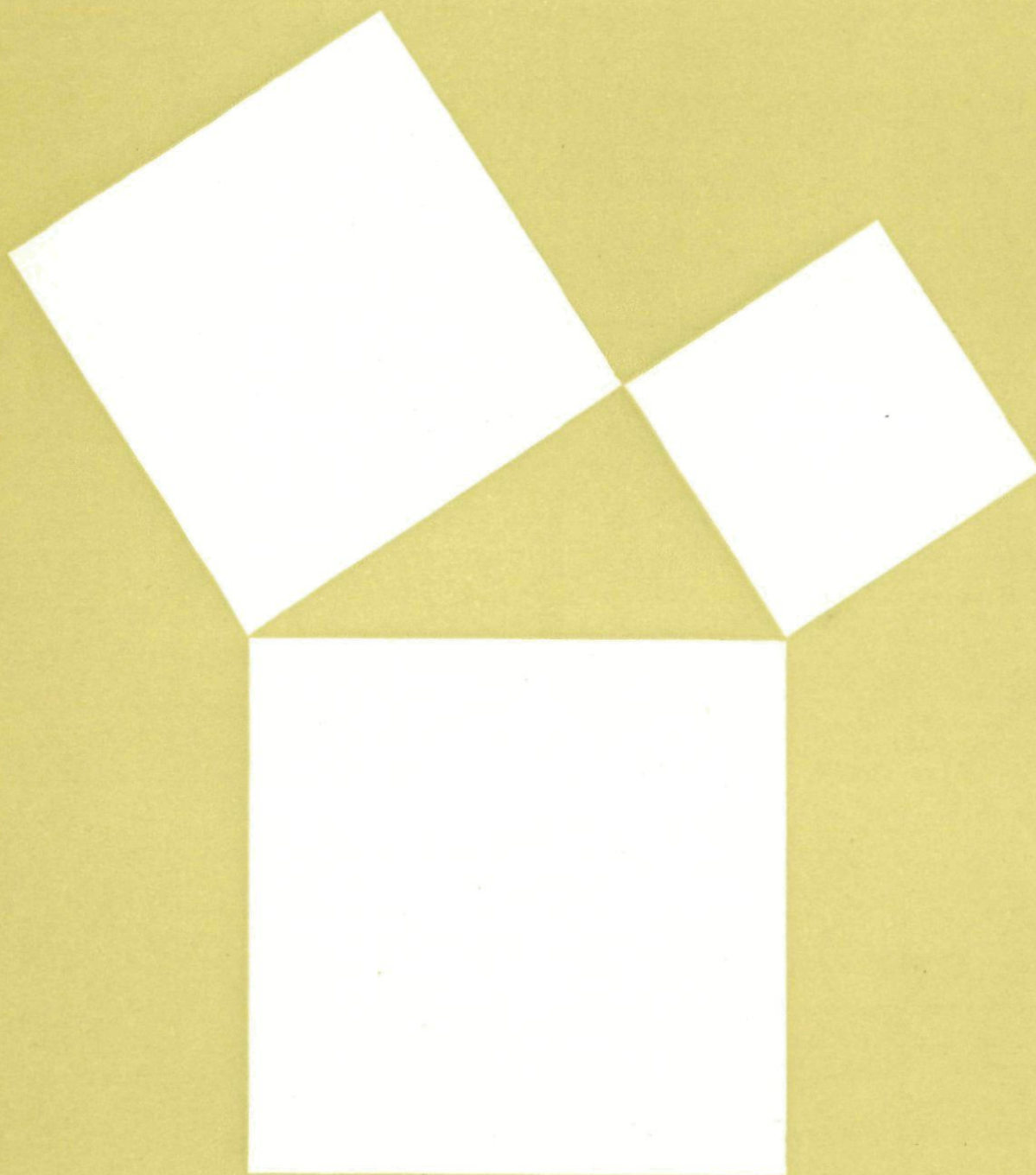


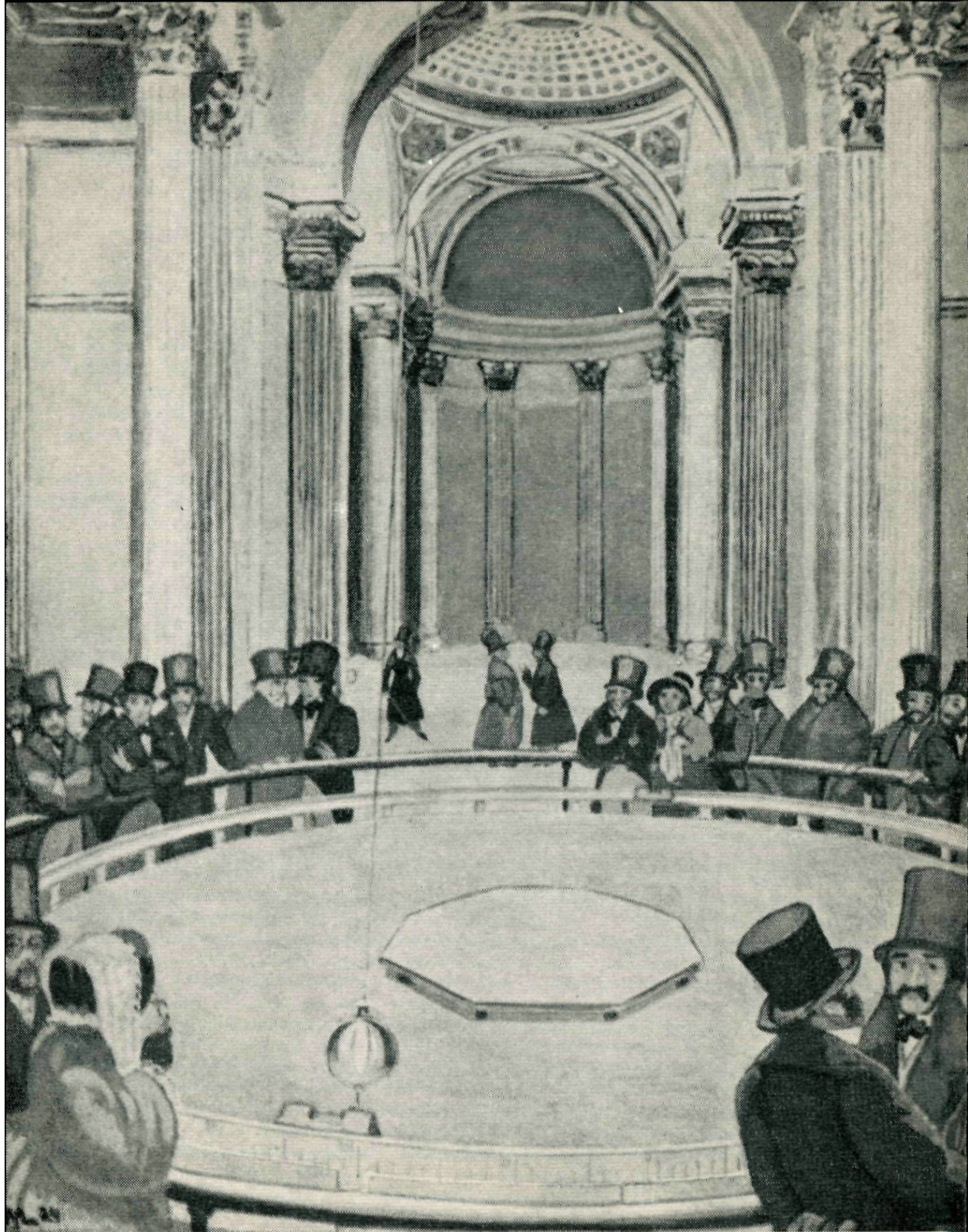
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

3

Derde jaargang



*Aquarel van de slingerproef van Foucault in het
Panthéon te Parijs (blz. 51)*

°° PERMUTATIES De kunst van het methodisch tellen

In de Denkertjes vinden we onder nummer 42 (blz. 38) de volgende opgave:

In een restaurant komen dag in dag uit (ook 's zondags) zes personen A, B, C, D, E en F eten. Ze nemen daarbij plaats aan een tafel, waarvan de plaatsen genummerd zijn van 1 tot en met 6. Ze hebben afgesproken, dat ze elke dag in een andere volgorde aan tafel zullen gaan zitten. Als ze op 1 januari 1963 de afspraak maakten en toen voor het eerst samen gegeten hebben, op welke dag zullen ze dan voor het laatst een volgorde kunnen kiezen, die nog niet aan de beurt is geweest? (Zie ook blz. 71 van dit nummer.)

In dit Denkertje wordt gevraagd op hoeveel manieren zes personen gerangschikt kunnen worden. In plaats van rangschikking zegt men ook wel *permutatie*. Het aantal permutaties van n dingen zullen we voorstellen door P_n . In dit geval moet dus P_6 berekend worden.

We zien gemakkelijk, dat we twee dingen op twee manieren kunnen rangschikken, nl. AB en BA . $P_2 = 2$.

Het aantal permutaties van drie dingen is zes, nl. ABC, ACB, BAC, BCA, CAB en CBA . $P_3 = 6$.

We gaan nu bewijzen, dat $P_n = n!$, waarbij $n!$ betekent $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-1) \cdot n$. Het bewijs wordt gegeven met behulp van het *principe van de volledige inductie*. (Zie ook blz. 13 van deze jaargang.)

Zo'n bewijs bestaat uit twee delen:

- a. Eerst wordt bewezen, dat het gestelde juist is voor $n = 1$. Dat is hier het geval, zelfs ook voor $n = 2$ en $n = 3$.
- b. Dan wordt aangenomen, dat het gestelde juist is voor $n = k$, waarna wordt bewezen, dat dit dan ook het geval is voor $n = k + 1$. Daaruit volgt dan, dat het voor elk natuurlijk getal n juist is.

Nemen we dus aan, dat $P_k = k!$. We gaan nu onderzoeken hoe groot P_{k+1} is. Wanneer we de dingen 1, 2, 3, ..., k willekeurig op een rij hebben gezet, moeten we het ding $k + 1$ nog plaatsen. Dat kan op $k + 1$ manieren, nl. vóór de 1e plaats, vóór de 2e plaats, ..., vóór de k -plaats en achter de k -de plaats. Het aantal permutaties van $k + 1$ dingen is dus $(k + 1) \cdot k! = (k + 1)!$ (q.e.d.)

Het antwoord op de vraag van Denkertje 42 is dus $P_6 = 6! = 720$.

Een aantal jaren geleden vierde een schoenwinkelier een jubileum en schreef ter gelegenheid daarvan de volgende prijsvraag uit:

In zijn etalage waren 10 paren schoenen uitgestald, genummerd 1 tot en met 10. Verder lagen er 10 verschillende prijskaartjes voorzien van de letters A tot en met J. De deelnemers moesten nu raden welk prijskaartje bij elk der paren schoenen behoorde en de geraden combinatie op een formulier inleveren. Zo'n combinatie was bijvoorbeeld:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	D	F	E	J	A	C	H	I	G

Er was een nogal grote prijs uitgelooft. Nu kwam een jongeman op de gedachte deze voor zijn school te veroveren door elk der 500 leerlingen een verschillend formulier te laten inleveren. Een kleine berekening zou voldoende zijn geweest om hem tot het inzicht te brengen, dat het aantal leerlingen bij lange na niet toereikend was. Hoeveel leerlingen had de school moeten hebben om volledige zekerheid te kunnen geven, dat het winnende formulier onder de ingeleverde was?



WE BLADEREN DIT NUMMER EVEN DOOR

De gravure, die op de binnenzijde van de omslag is afgedrukt, laat zien hoe in 1851 de Franse natuurkundige Foucault zijn beroemde slingerproef nam. Wat hij daarmee wilde demonstreren lezen we in het artikel op blz.51. Het Technisch Filmcentrum te Den Haag stelde ons in staat bij het artikel over het oeroude Chinese symbool TAO de originele Chinese schrifttekens voor Yang en Yin af te beelden. Door de medewerking van Shell Nederland konden we bij het artikel over het „opcmenteren” van buizen een foto plaatsen, waarin men dit ziet gebeuren. Een merkwaardige werkwijze, die in Amerika feed-back wordt genoemd, wordt in het vervolgartikel over de computers besproken. De vereniging WIMECOS heeft evenals het vorige jaar weer enige prijzen beschikbaar gesteld voor het oplossen van enkele bijzondere puzzels. De eerste daarvan, die niet al te moeilijk is, vind je op blz.68. Van een der Denkertjes wordt een uitvoerige oplossing gegeven, waardoor je tevens kennis maakt met permutaties. Het aantal inzendingen voor de Denkertjes kan gerust groter zijn. Je hoeft ze niet allemaal af en goed te hebben wil je voor een prijs in aanmerking komen. Voor de Denkertjes uit Pythagoras 3-1 werd aan Albert Verbeek te Blaricum een boekenbon toegekend.

Van de in de beide vorige jaargangen verschenen extra nummers (Rekenliniaal, Vectoren) zijn nog exemplaren verkrijgbaar. Prijs f0,75 per ex. Bestellen per giro bij J.B. Wolters.

En toch beweegt ze!

°In 1543 schreef de astronoom Copernicus in zijn beroemde boek „De revolutionibus orbium coelestium”:



Foucault.

Practisch alle geleerden zijn het er over eens, dat de aarde in het centrum van het heelal RUST. Zij vinden het onbegrijpelijk en zelfs belachelijk, als iemand er anders over denkt. Maar als men de zaak zorgvuldig overweegt, zal men inzien, dat het laatste woord hierover nog niet gesproken is en dat men niet zomaar aan deze kwestie voorbij kan gaan.

Honderd jaar later is de wetenschappelijke wereld (op enkele uitzonderingen na) er nog van overtuigd, dat de aarde in het middelpunt van het heelal staat; dat de sterrenhemel dagelijks éénmaal rond die aarde draait en dat de zon in één jaar een baan om de aarde beschrijft. In 1633 wordt de bekende Italiaanse wis- en natuurkundige Galileo Galileï, een fervent aanhanger van het wereldbeeld van Copernicus, zelfs gedwongen zijn opinie niet meer in het openbaar te verkondigen. De legende zegt, dat Galileï na het proces uitgeroepen zou hebben: **EN TOCH BEWEEGT ZE!** Gedacht heeft hij het zeker.

Het duurt dan nóg bijna een eeuw vóór het copernicaanse wereldbeeld algemeen aanvaard wordt. In 1791 wordt voor het eerst met valproeven een experimenteel bewijs voor de aswenteling van de aarde gegeven. Zestig jaar later bedenkt de Franse natuurkundige Foucault zijn bekende slingerproef, waarbij de toeschouwers als het ware de aarde konden **ZIEN** draaien.

In het Panthéon te Parijs had hij een slinger opgehangen bestaande uit een staaldraad van 67 m met daaraan een stalen bol van 28 kg. Zie de afbeelding op de binnenzijde van de omslag. De meer of minder geleerde toeschouwers konden zien, dat bij het verstrijken van de tijd het vlak, waarin de slinger zich bewoog, draaide. Dit kon bijvoorbeeld afgelezen worden op de schaalverdeling, die in de op de afbeelding zichtbare rand was aangebracht. Deze draaiing was een experimenteel bewijs voor de dagelijkse aswenteling van de aarde.

Het gemakkelijkst is dat in te zien, als men zich de slinger opgesteld denkt aan de noordpool, het ophangpunt zuiver boven de plaats, waar

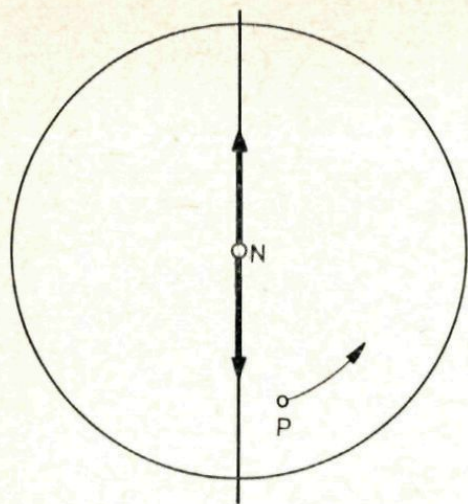


Fig. 1

de aardas het aardoppervlak snijdt. Is in fig. 1 N de noordpool, waar we van boven af op kijken, dan zien we de aarde zich bewegen in de door de pijl bij P aangegeven richting. Beweegt de slinger zich in het door de rechte lijn aangegeven vlak, dan zal een toeschouwer, die zich niet boven maar op de aarde bevindt, en dus de draaiing van de aarde meemaakt, de indruk krijgen, dat hij zelf zich in rust bevindt en dat het vlak van de slingerbeweging draait en wel in een richting tegengesteld aan zijn eigen beweging, dus met

de klok mee. Hij zal in de loop van een etmaal de indruk krijgen, dat het slingervlak 360° draait. Daarmee heeft hij dan de aswenteling van de aarde waargenomen.

°°° *De toeschouwers bij het experiment van Foucault zagen niet een draaiing van 360° van het slingervlak. Is φ de geografische breedte van de waarnemingsplaats, dan is deze draaiing in een etmaal nl. gelijk aan $360^\circ \cdot \sin \varphi$.*

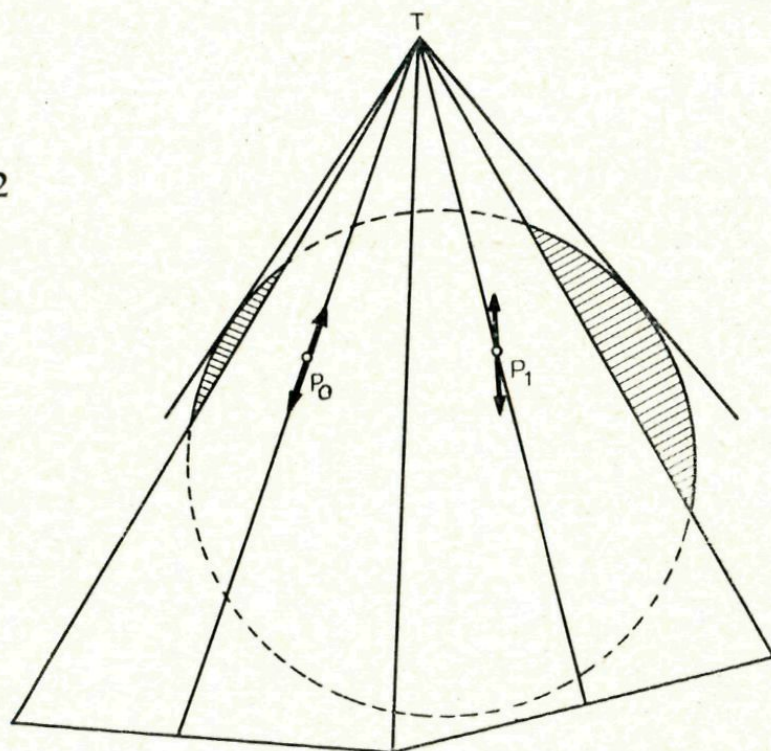
We gaan een poging ondernemen dit te verklaren:

Dat de toeschouwer aan de noordpool het slingervlak ziet draaien is het gevolg van het feit, dat de slinger zich in de ruimte beweegt ten opzichte van een assenstelsel, dat onafhankelijk is van de aarde, alsof hij aan de sterrenhemel was opgehangen. De aarde draait dan onder hem door. Op de plaats, waar Foucault zijn proef nam, is de zaak nogal wat ingewikkelder. Nu wordt nl. het slingervlak ook door de aarde meegenomen. Toch blijft ook het verschijnsel bestaan, dat de slinger zich beweegt ten opzichte van een assenstelsel buiten de aarde.

Het onderste eind van de slinger beweegt zich in het raakvlak aan de aarde op de plaats van waarneming. Bij benadering kunnen we daarom de beweging van dit onder eind wel vervangen door die van een oscillator, die een harmonische trilling uitvoert rondom het raakpunt. Een waarnemer buiten de aarde ziet nu, dat na verloop van enige tijd het raakvlak, waarin de oscillator zich beweegt, een andere stand heeft aangenomen. Het is met de aarde mee gedraaid ten opzichte van de

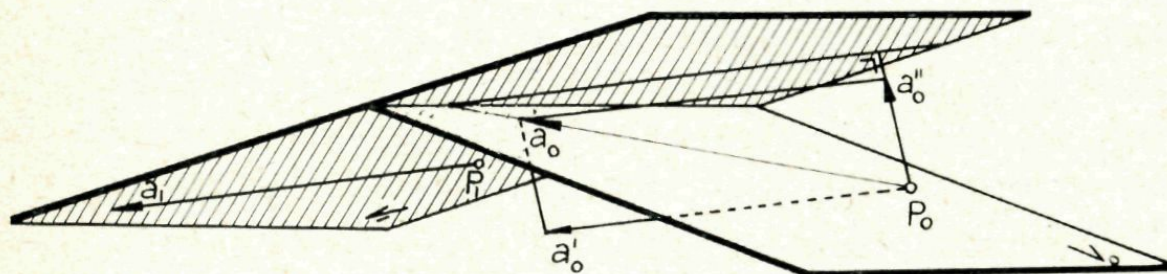
eerste stand. Trilde de oscillator op het tijdstip t_0 in het raakvlak V_0 , op het tijdstip t_1 trilt hij in het raakvlak V_1 , dat V_0 snijdt. (Zie fig. 2).

Fig. 2



We kunnen de vector, die in P_0 de *richting* aangeeft, waarin de oscillator trilt ($\mathbf{a}_0$), ontbinden in twee componenten, nl. één component evenwijdig met vlak V_1 ($\mathbf{a}_0'$) en één loodrecht op V_1 ($\mathbf{a}_0''$). Dus $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0' + \mathbf{a}_0''$. (Zie fig. 3). De nieuwe richting van de vector $\mathbf{a}_1$ in V_1 is die van $\mathbf{a}_0'$. We zien nu duidelijk, dat de richting, waarin de oscillator trilt in V_1 een andere is dan in V_0 . Dat is dus de draaiing, die de toeschouwers opmerken.

Fig. 3



De vector $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0$ staat dus loodrecht op V_1 . Dit is dan ook het geval met de vector $\frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0}{t_1 - t_0}$, dat is nl. de vector $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0$ gedeeld door een scalair (getal). De overgang van het ene vlak in het andere gaat natuurlijk niet sprongsgewijs, maar continu, zodat we $t_1 - t_0$

tot nul moeten laten naderen en tot de limiet moeten overgaan: Is $\mathbf{a}_t$ de richting van de vector op het ogenblik t , dan is de afgeleide van deze vector naar de tijd (dat is de „snelheid”, waarmee deze verandert) $\frac{d\mathbf{a}_t}{dt}$ steeds loodrecht op het raakvlak V_t . De richting van $\mathbf{a}_t + \Delta t$ is dus steeds de projectie van $\mathbf{a}_t$ op het nieuwe raakvlak.

In de differentiaalmeetkunde, waarin we nu beland zijn, kan bewezen worden, dat dit afbeelden van een raakvlak V_t op een naburig raakvlak $V_t + \Delta t$ door projecteren vervangen kan worden door het eerste om de snijlijn met het tweede te laten draaien tot het met het tweede is samengevallen. (Dat wil dus zeggen, dat bij dit draaien de richting, die $\mathbf{a}_0$ in de nieuwe stand krijgt, bij zeer grote benadering dezelfde is, als de richting, die de projectie van $\mathbf{a}_0$ op het naburige raakvlak zou hebben. In fig. 3 zien we gemakkelijk, dat bij het draaien van V_0 om de snijlijn tot het met V_1 is samengevallen, $\mathbf{a}_0$ *niet* zodanig in V_1 komt te liggen, dat hij met $\mathbf{a}_1$ evenwijdig wordt. Maar in deze figuur is V_1 ook niet een „naburig” raakvlak van V_0).

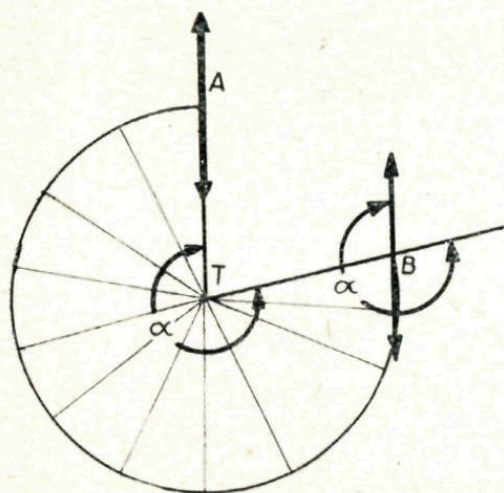


Fig. 4

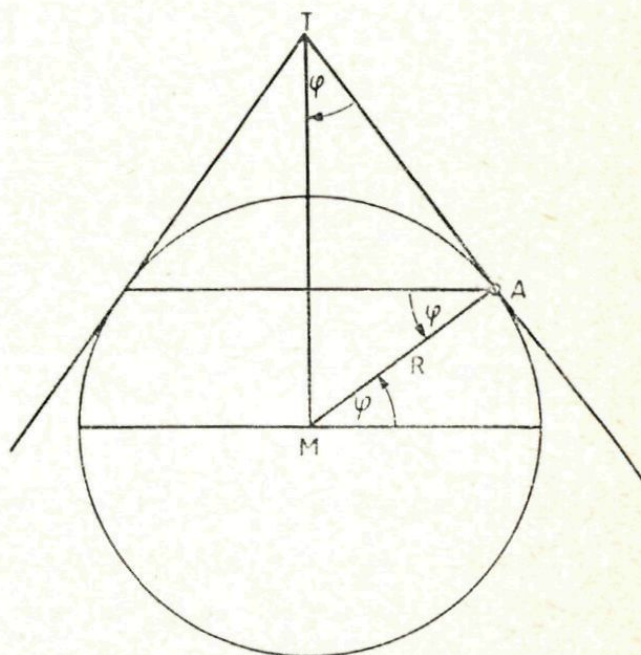


Fig. 5

Het raakvlak, dat bij de proef van Foucault de aarde raakt in een punt van de breedtecirkel van Parijs, rolt bij deze draaiing bij wijze van spreken over deze cirkel. Het rolt daarbij tevens over de kegel, die de aarde volgens deze breedtecirkel omhult (Fig. 2). Zouden we op het raakvlak (aan de „onderzijde”) een veld van krijtlijntjes evenwijdig met de vector $\mathbf{a}_0$ trekken, dan zouden die bij het draaien van het raakvlak sporen op de kegel achterlaten, waaraan het draaien van de vector te zien zou zijn. Die sporen zouden „evenwijdig” spiraallijnen zijn. Deze zelfde sporen zou men echter ook zien, als men niet het raakvlak over de kegel liet rollen, maar de kegel over het raakvlak. Stel je nu voor, dat de beschrijvende lijn TA van de kegel met het raakvlak samenvalt aan het begin van de beweging en dat op dat

moment de richting van de oscillator samenvalt met de richting van TA (zie fig. 4). Is de kegel éénmaal rond gerold over het vlak, dan valt de beschrijvende lijn TA niet weer met zijn oorspronkelijke ligging samen, maar bijvoorbeeld met TB. Immers, als we een kegel over een vlak laten rollen, dan doen we het zelfde als wanneer we de oppervlakte van de kegel in het vlak uitslaan. De uitslag van een kegel is echter een cirkelsector, bijvoorbeeld met hoek α . De sporen van de krijtlijntjes zouden in deze uitslag van de kegel weer evenwijdig lijnen worden, zodat de richting van de vector in het punt B evenwijdig is met die in punt A. Maar die in punt A viel in het verlengde van de beschrijvende lijn TA. Die in B maakt met de beschrijvende TB (die eigenlijk ook TA is) de hoek α . De toeschouwers, die de draaiing een etmaal meemaakten, zouden als eindrichting van de oscillator dus die zien, die de hoek α met de oorspronkelijke richting maakt. Het komt er nu nog maar op aan de hoek α te berekenen; dat gebeurt als volgt: De lengte van boog AB is gelijk aan de omtrek van de breedtecirkel. Deze is, zoals in fig. 5 te zien is, gelijk aan $2\pi R \cdot \cos \varphi$, als R de straal van de aarde is en φ de noorderbreedte.

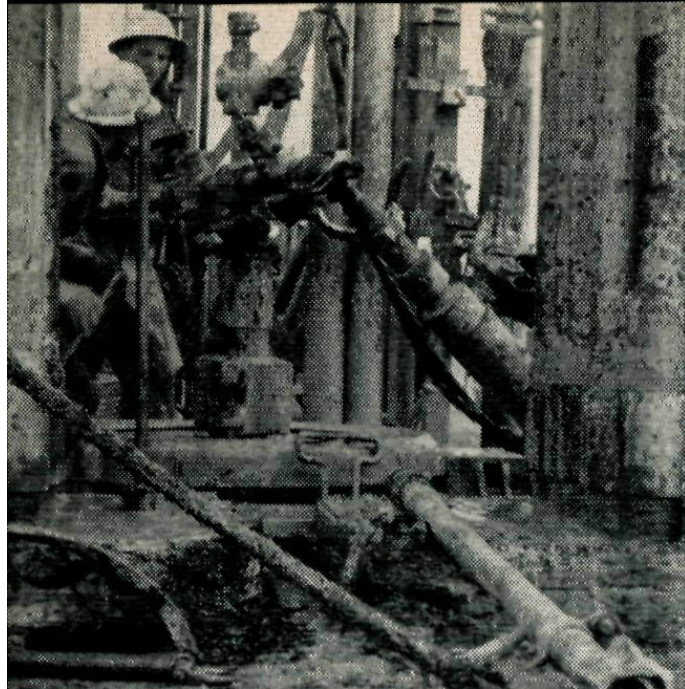
Boog AB is ook gelijk aan $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot TA$. Hierin is $TA = R \cotg \varphi$.

Door deze beide waarden van AB aan elkaar gelijk te stellen blijkt gemakkelijk, dat $\alpha = 360^\circ \sin \varphi$.

Aan de noordpool is $\varphi = 90^\circ$, dus $\alpha = 360^\circ$. Aan de evenaar is $\varphi = 0^\circ$, dus $\alpha = 0^\circ$. Neemt men de slingerproef van Foucault dus in een plaats op de evenaar, dan is er geen draaiing van het slingervlak te zien.

Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868) heeft in zijn vrij korte leven de natuurwetenschappen verrijkt met ontdekkingen op verschillende gebieden. In 1850 slaagde hij erin de snelheid van het licht in een laboratorium te meten en kon hij aantonen, dat de snelheid van het licht in een medium omgekeerd evenredig is met de brekingsindex van dat medium. Hij vond de gyroscoop uit en ontdekte het bestaan van wervelstromen in een koperen schijf, die zich in een magneetveld beweegt.

In 1855 werd hij als fysicus verbonden aan de Parijse sterrenwacht, waarvoor hij verscheidene uitstekende spiegeltelescopen maakte. In 1858 publiceerde hij zijn mes-proef, waarmee telescoopspiegels op hun juiste vorm getest konden worden.



°Een vuistregeltje

voor boormeesters

Onderstaand artikel werd geschreven naar aanleiding van een paar brieven, die we ontvingen van Ir. L. D. Minnigh te Leidschendam. Nu er in ons land op grote schaal geboord wordt, zal men het ongetwijfeld waarderen, dat hij onze aandacht vestigde op een eenvoudig vuistregeltje, dat bij de boringen gebruikt kan worden.

De inwendige diameter van pijpen wordt in de techniek meestal in inches (duimen) uitgedrukt; 1 inch = 2,54 cm. Een 7-duims pijp heeft dus een inwendige diameter van 17,78 cm. Nu komt het vaak voor, dat men van een stuk pijp snel de inhoud moet kunnen bepalen. Het komt daarbij meestal niet aan op zeer grote nauwkeurigheid. Een eenvoudig vuistregeltje is nu, dat het aantal liters per meter pijp wordt aangegeven door de formule $I = \frac{1}{2}d^2$, waarin d de diameter in inches is. Volgens deze formule is de inhoud van 1 m van een 7"-pijp dus gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot 49 \text{ l} = 24\frac{1}{2} \text{ l}$.

We controleren dit even: de diameter van zo'n pijp is, zoals we hierboven al opmerkten 17,78 cm. De inhoud van een cilinder vindt men door het produkt te bepalen van de oppervlakte van het grondvlak en de hoogte. Dat wordt dus in dit geval: $\frac{1}{4}\pi \cdot 17,78^2 \cdot 100 \text{ cm}^3 \approx 24,8 \text{ l}$. Je ziet, dat de vuistregel veel vlugger werkt, maar een te klein resultaat geeft. In de praktijk is dat echter niet erg.

Dit vuistregeltje kan bijvoorbeeld gebruikt worden bij de cementatie van buizen in boorgaten. De buizen worden daarbij omringd met een laag cement, zodat ze vast in het boorgat komen te zitten. Het cement wordt in de buizen eerst omlaag gestuwd. Met behulp van water wordt het daarna langs de onderkant van de buis aan de buitenzijde omhooggewerkt. De vaklieden spreken daarom van „opcementeren”. Men

moet nu eerst berekenen hoeveel cement er nodig is om een bepaalde hoogte van opcementereren te verkrijgen tussen de boorgatwand en de buitenzijde van de buizen. Verder moet er berekend worden hoeveel water er door de buizen achter het cement aan gepompt moet worden om het op zijn plaats te krijgen. Wil men bijv. een 7-duims boorbuis cementeren in een 10-duims boorgat op 1000 m diepte en wil men het cement ongeveer 100 m achter de boorbuis omhoog laten komen, dan heeft men nodig:

$\frac{1}{2} \cdot 10^2 - \frac{1}{2} \cdot 7^2 = 25,5$ liter per m buis. Dus voor 100 m is nodig 2550 liter. Daarbij wordt nog 10 % toeslag gevoegd, zodat er ongeveer 2800 liter cementbrij nodig is. De na te pompen hoeveelheid water om het cement achter de boorbuis omhoog te brengen, bedraagt $\frac{1}{2} \cdot 7^2 \cdot 1000$ liter = 24500 liter. Aangezien men niet het gevaar wil lopen, dat dit water gedeeltelijk achter de pijpen komt, laat men bijv. 5 m cement in de bodem van de pijpen. Men stopt dan met het napompen van water, als er 24300 liter is nagepompt. Het boorgat wordt dan afgesloten om het cement de gelegenheid te geven te verhardnen. Nadat dit is geschied worden de paar meters cement uit de bodem van de pijpen weggeboord. Hierbij heeft men dan tevens een goede controle of de cementatie technisch geslaagd is, aangezien men het cement op de berekende diepte moet aantreffen. Is de cementatie inderdaad geslaagd, dan kan men verder gaan met de boring om op grotere diepte te komen.

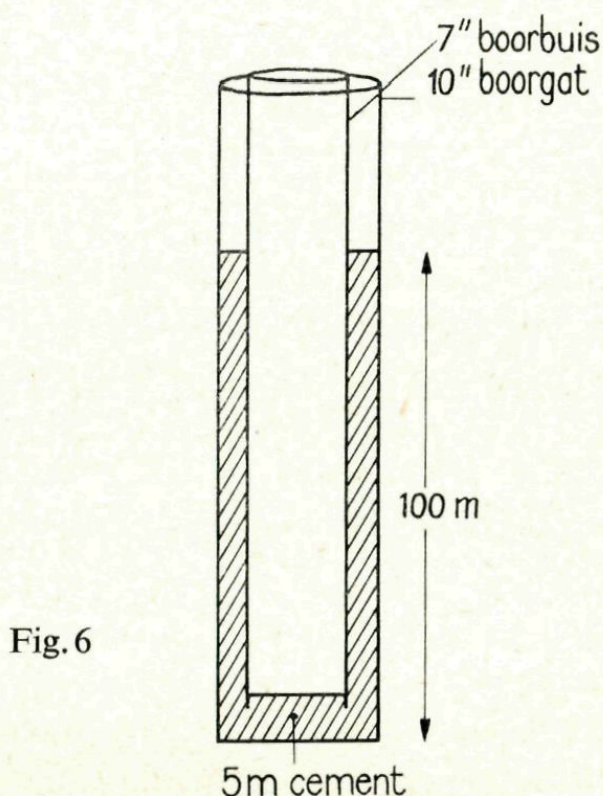


Fig. 6

51. Een vierhoek is een parallellogram, zodra twee van zijn overstaande hoeken en tevens twee van zijn overstaande zijden gelijk zijn. Probeer dat te bewijzen met behulp van nevenstaande figuur. De daarin getekende hulplijnen moeten gebruikt worden, terwijl er geen andere hulplijnen bijgetekend mogen worden.

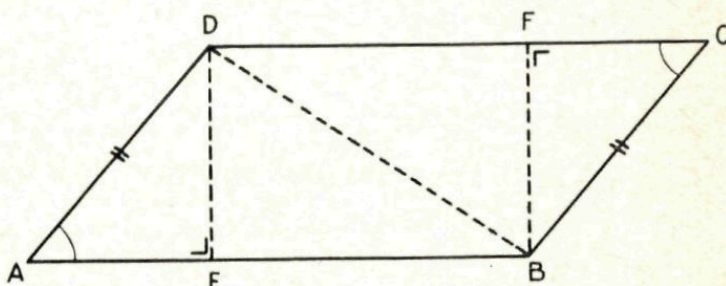


Fig. 7

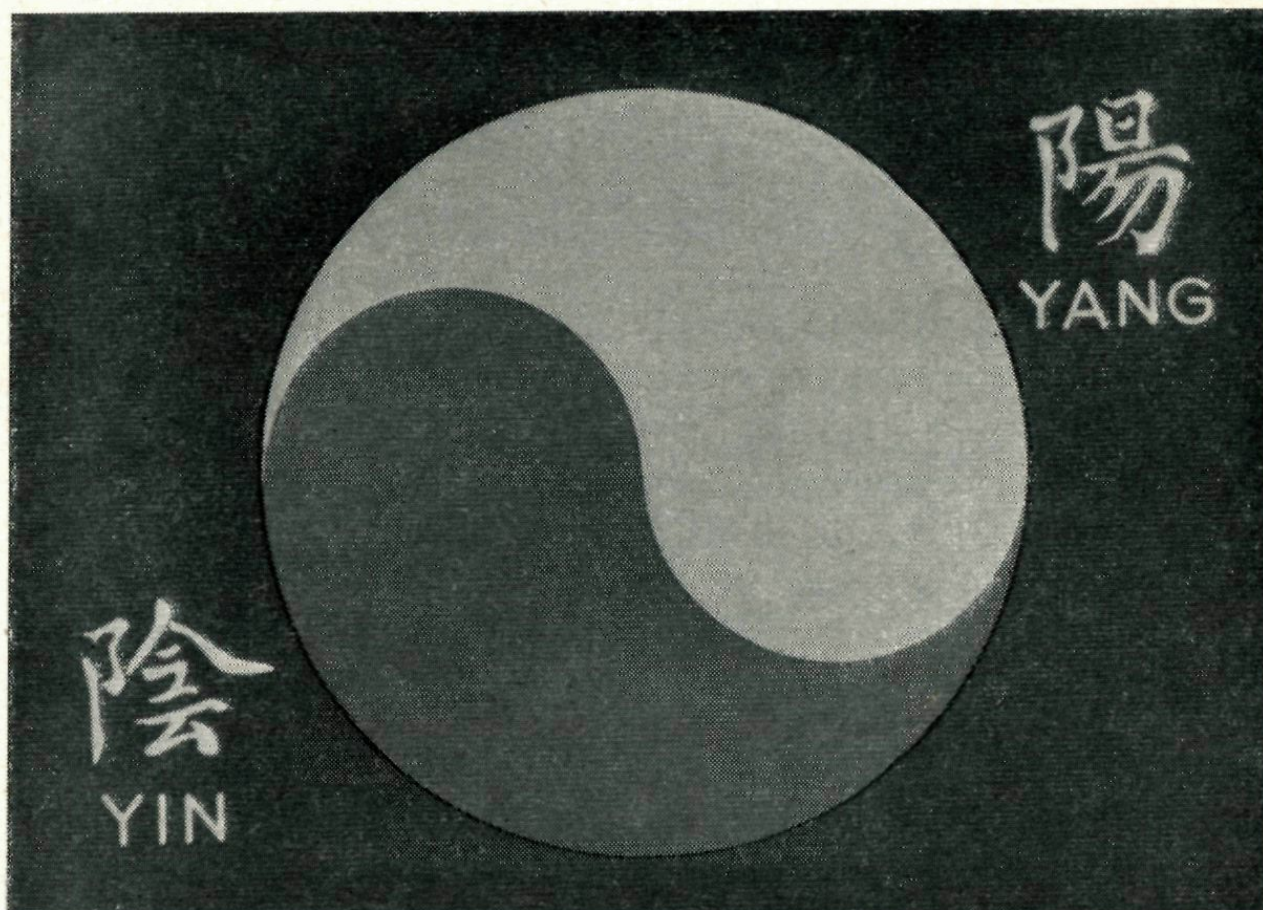
52. a. Iemand wil een aantal foto's maken van een regelmatig twintigvlak. Hij wil, dat *elk* punt van dat twintigvlak op (minstens) een der foto's voorkomt. Hoe groot is het kleinste aantal foto's, waarmee dat doel bereikt kan worden?
- b. Dezelfde vraag, maar nu gesteld met betrekking tot foto's van een bol.
53. Er is een $\triangle ABC$ gegeven met een punt D op de zijde BC en een punt E op de zijde AC. De gegevens zijn zodanig, dat de drie driehoekjes, waarin AD en DE $\triangle ABC$ verdelen congruent zijn. Bewijs, dat ze bovendien gelijkvormig zijn met $\triangle ABC$.
54. Een (buitenlandse) televisiemaatschappij zendt in haar programma korte reclamefilmpjes uit, die 10 seconden of 1 minuut duren. Voor het uitzenden van een 10-seconden-filmpje laat ze f 150,— betalen, de 1-minuut-filmpjes kosten f 500,—.
- De maatschappij heeft zichzelf als regel gesteld, dat er tussen elk tweetal reclamefilmpjes minstens 2 minuten dienen te verlopen. Ook dat er in een uitzending van een uur niet meer dan 12 minuten reclame mag voorkomen, dus minstens 48 minuten niet-commercieel moeten zijn.
- Hoeveel filmpjes van 10 seconden en van 1 minuut zal de programmaleider in een uitzending opnemen, die in totaal een uur duurt? (Natuurlijk moet hij ervoor zorgen, dat zijn maatschappij zo veel mogelijk aan die uitzending verdient.)

55. De binnenafmetingen van een sigarettendoos zijn: lengte 160 mm, breedte 70 mm, hoogte 78 mm. Men vult die doos met sigaretten, die 70 mm lang zijn en 8 mm dik. Hoeveel sigaretten kan men in de doos bergen?
56. De lengten van de zijden BC, CA en AB van $\triangle ABC$ zijn achtereenvolgens a , b en c . De getallen a , b en c zijn geheel, terwijl verder gegeven is $a > b > c$, $a + b = 7c$, de lengte van de hoogtelijn uit C is $b - 1$ en de oppervlakte van $\triangle ABC$ is 24.
Bereken nu a , b en c .
57. Gegeven is een lijnstuk van 8 cm lengte. Bespreek, wat de verzameling is van de middelpunten der cirkels, die een straal van 5 cm hebben en die twee (verschillende) punten met het lijnstuk gemeen hebben.
58. *Definitie A*: Onder de afstand van een punt P tot een figuur F verstaat men de lengte van het kortste verbindingslijnstuk van P met een punt van F.
Definitie B: Een hoek is een figuur die bestaat uit twee halve rechten met gemeenschappelijk eindpunt (die men de benen van de hoek noemt).
Los nu het volgende planimetrievraagstuk op en geef daarbij nauwkeurig aan waar en hoe deze beide definities in de oplossing worden gebruikt: Bepaal de verzameling van de punten, die gelijke afstanden hebben tot de benen van een gegeven hoek.
59. In het platte vlak zijn twee punten A en B gegeven. Construeer met passer en liniaal een van de twee rechthoekige driehoeken ABC die AB tot hypotenusa hebben en waarvan de rechthoekszijde AC tweemaal zo lang is als de rechthoekszijde BC. Voer de constructie zo uit dat er zo weinig mogelijk tekenhandelingen verricht worden. Toelichting: er worden slechts twee verschillende soorten tekenhandelingen toegestaan, namelijk het trekken van een rechte lijn door twee al eerder bekende punten en het tekenen van een cirkel met bekend punt als middelpunt, die door een ander bekend punt gaat.
(naar Facteur X)
60. Iemand heeft een lijst, waarop een groot aantal getallen van 15 cijfers staan. Uit elk van die getallen moeten vijf cijfers geschraapt

worden en wel zodanig dat de overblijvende cijfers, in de volgorde, waarin ze staan, een zo groot mogelijk getal vormen. Hij wil dat werk opdragen aan zijn zoontje van 10 jaar. Hoe luidt, in woorden, het voorschrift dat hij het kereltje geeft.

Voorbeeld: 594605418279992 wordt wellicht 594605418279992, dus 9658279992.

Beredeneer, dat het voorschrift tot het gewenste resultaat leidt.



Hierboven is afgebeeld het bekende symbool voor TAO (het universum) van de oude Chinezen. In TAO is geen tegenstelling. Daarom moet het zich splitsen in YANG (leven) en YIN (vorm).

Uit „Het wondere onderzoekingsveld van de vlakke meetkunde” III

Ir. A. E. Bosman heeft verschillende interessante samenhangen ontdekt in het gebied van de gewone vlakke meetkunde. Het zijn geen lastige onderzoeken, ook geen belangrijke dingen, maar toch verrast hij dikwijls door de bijzondere wijze, waarop hij de dingen ziet en weer nieuw weet te maken. We bespreken deze maal uit zijn werk:

°° *Cirkelvormige figuren met gelijke omtrekken en gelijke oppervlakten*

Het oud-Chinese symbool voor het universum (Tao), waarin de „vis-sen” Yang en Yin twee volkomen tegenstellingen zijn, die samen de volmaakte eenheid vormen, is ook wiskundig bekeken een interessante figuur. Onmiddellijk is te zien, dat de beide delen gelijke oppervlakten en gelijke omtrekken hebben. Ir. Bosman heeft nu gezocht naar andere verdelingen van de cirkel, waarbij óf de omtrekken, óf de oppervlakten óf beide gelijk zijn. De figuren 8 tot en met 12 zijn resultaten van zijn onderzoek.

In fig. 8 zijn halve cirkels getekend met achtereenvolgend $\frac{1}{2}AB$, $\frac{1}{4}AB$, $\frac{1}{8}AB$, enz. tot middellijn. Deze halve cirkels worden al spoedig zo klein, dat het niet mogelijk is er meer dan zes of zeven te tekenen. Maar theoretisch zijn er oneindig veel, want er komt geen eind aan de rij $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, enz. In de figuur is gemakkelijk te zien, dat de beide delen, waarin de cirkel door de zich „om AB slingerende” lijn wordt verdeeld, niet gelijk zijn. Zouden we in staat zijn de oneindig vele halve cirkels te tekenen en daarmee dus werkelijk het punt B te bereiken, dan zou deze slingerlijn blijken de lengte πr te hebben, dus gelijk te zijn aan de lengte van de halve cirkel. De beide delen van de cirkel hebben dan dus even grote omtrekken.

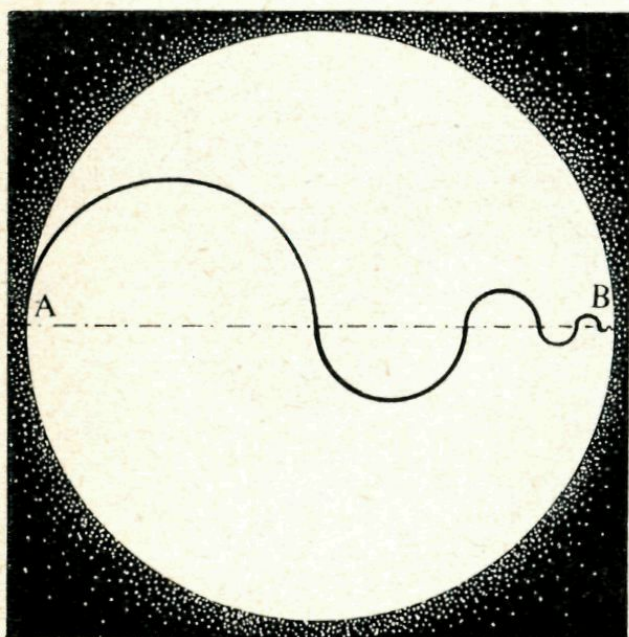


Fig. 8

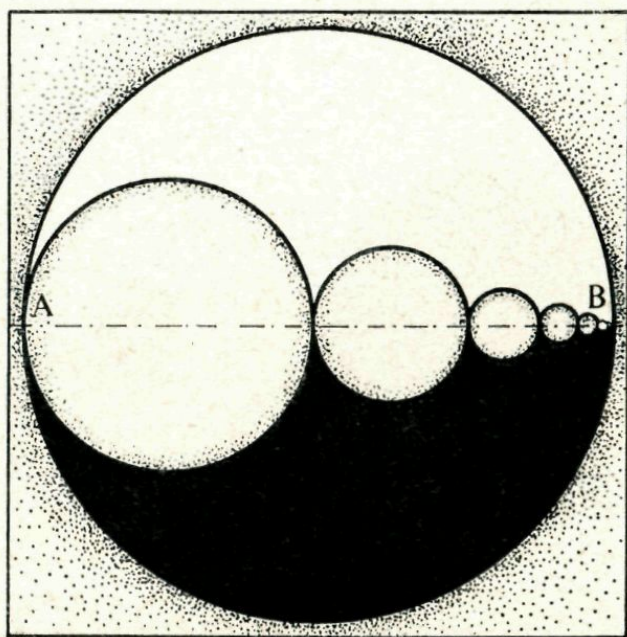


Fig. 9

Dat de lengte van de slingerlijn nadert tot πr kan gemakkelijk nagerekend worden door hen, die de theorie van de meetkundige rijen kennen. De lengte van de slingerlijn nadert nl. tot de limiet van:

$$\frac{1}{2}\pi r + \frac{1}{4}\pi r + \frac{1}{8}\pi r + \dots \text{ en die is gelijk aan } \frac{1}{2}\pi r \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \pi r.$$

We kunnen in fig. 8 dus langs drie wegen van A naar B gaan, die alle drie even lang zijn, nl. de beide halve cirkels en de slingerlijn. Toch zal het reizen langs de slingerlijn met zijn oneindig aantal halve cirkels wel geen onverdeeld genoeg zijn.

Tekenen we in fig. 8 niet halve cirkels op de delen van AB maar hele, zoals in fig. 9, dan wordt de grote cirkel daardoor weer verdeeld in drie delen, die gelijke oppervlakten en gelijke omtrekken hebben, als we de som der oppervlakten en omtrekken van alle kleine cirkels als één deel beschouwen.

De som van de oppervlakten van de ingetekende cirkels (het zijn er oneindig veel) nadert tot de limiet van:

$$\frac{1}{4}\pi r^2 + \frac{1}{16}\pi r^2 + \frac{1}{64}\pi r^2 + \dots \text{ en die is gelijk aan } \frac{1}{4}\pi r^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\pi r^2$$

In fig. 10 kan men langs vele wegen van A naar B komen. Wat is er te zeggen van al die wegen? En wat kun je zeggen van alle „vissen”, die je in deze figuur ziet?

Trekken we halve cirkels, die telkens $\frac{1}{3}$ AB tot middellijn hebben, dan krijgen we een verdeling, zoals in fig. 11, wanneer we daaruit even de

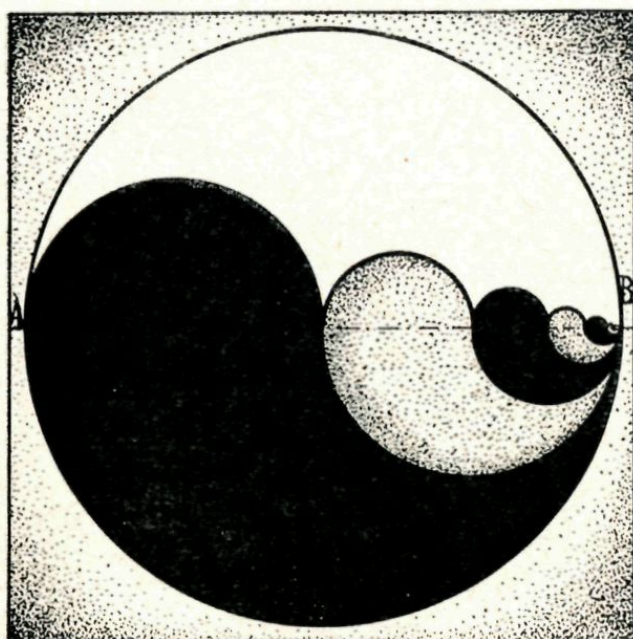


Fig. 10

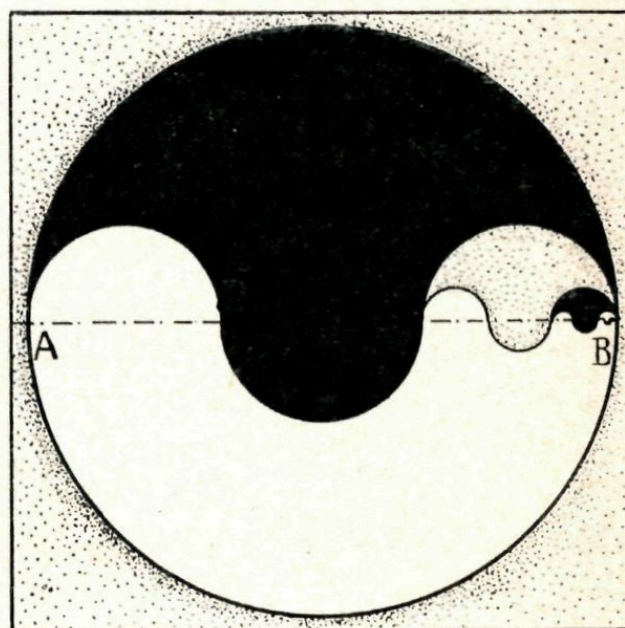


Fig. 11

verdere verdeling van het rechter derde deel wegdenken. Het onderste (witte) deel van de figuur werd door Archimedes naar zijn vorm „salinon” (= zoutvat) genoemd. Hebben de beide delen gelijke oppervlakten of omtrekken?

In fig. 11 is het rechterdeel weer in drieën verdeeld, het rechterdeel daarvan opnieuw, het rechterdeel daarvan nog eens, en zo voort. Er ontstaat nu weer een lijn, die zich slingert om AB (weliswaar niet als een gordel van smaragd).

Wanneer we daarmee werkelijk B zouden kunnen bereiken, dan zou deze de cirkel weer verdelen in twee delen met gelijke omtrekken en gelijke oppervlakten, hetgeen de liefhebbers dan maar eens moeten narekenen.

Tenslotte fig. 12. De grote cirkel is in deze figuur verdeeld in zes delen met gelijke oppervlakten en omtrekken. Stellen we voor het gemak de middellijn van de grote cirkel gelijk 12, dan is bijvoorbeeld de oppervlakte van het tweede deel van links: $\frac{1}{2}\pi(2^2 - 1^2 + 5^2 - 4^2) = 6\pi$.

Vergelijken we de zes oppervlakten, dan zien we, dat de volgende zes viertermen gelijk zijn:

$$\begin{aligned} 6^2 - 5^2 + 1^2 - 0^2 \\ 5^2 - 4^2 + 2^2 - 1^2 \\ 4^2 - 3^2 + 3^2 - 2^2 \\ 3^2 - 2^2 + 4^2 - 3^2 \\ 2^2 - 1^2 + 5^2 - 4^2 \\ 1^2 - 0^2 + 6^2 - 5^2 \end{aligned}$$

Kunnen we ook andere figuren dan cirkels vinden, die verdeeld kunnen worden in delen met gelijke omtrekken en oppervlakten? Wat is het gemeenschappelijk kenmerk van alle figuren, waarbij dit mogelijk is? Dit zijn enkele vragen, die zich nu aan ons opdringen. Zoals het zo dikwijls in de wiskunde het geval is. roept elk nieuw-gevonden resultaat weer vragen op. Zo ook hier. Er blijven meer vragen over dan opgelost zijn!

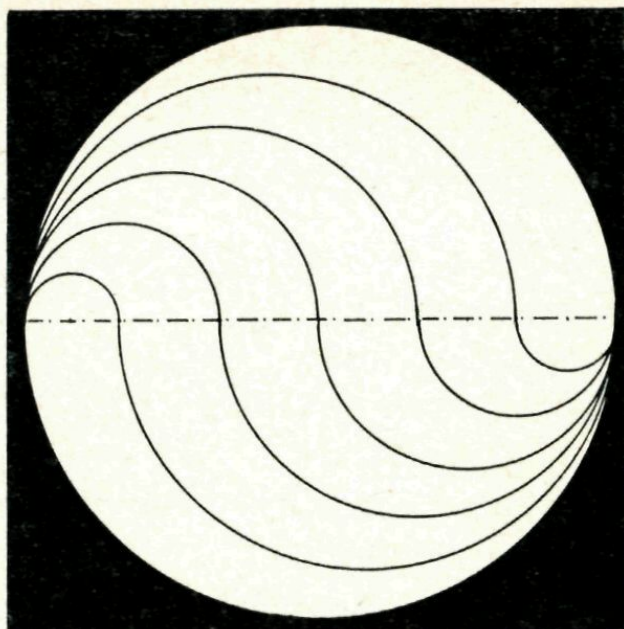


Fig. 12

°Computers III

Feed it back

(Ontleend aan een artikel in The Mathematics Teacher, april 1959).

In de vorige artikelen hebben we iets gezien van de opbouw en de werking van een computer. We zullen nu bekijken, hoe sommige rekenproblemen voor de computer geschikt gemaakt worden.

1. In de beide vorige nummers van deze jaargang werd gesproken over de rij van Fibonacci (blz. 12 en blz. 25). We zagen, dat de termen van deze rij gevonden kunnen worden met een *recurrente betrekking*, nl.

$$t_1 = 0; t_2 = 1; t_{n+2} = t_n + t_{n+1}$$

De getallen n , die de nummers der termen aangeven, zijn vanzelfsprekend natuurlijke getallen. Maar ook de termen zelf (behalve de eerste) behoren tot de natuurlijke getallen.

We beschouwen nu de getallen, die geleverd worden door de recurrente betrekking:

$$p_1 = 5; p_{n+1} = \frac{1}{2} \left[p_n + \frac{30}{p_n} \right].$$

De getallen n zijn hierin weer de opeenvolgende natuurlijke getallen. De getallen p behoren daar niet toe (behalve het eerste). Het is niet zo moeilijk deze getallen p te berekenen. Willen we ze echter in een vrij groot aantal decimalen nauwkeurig geven, dan is het rekenwerk wel tijdrovend. De hieronder vermelde resultaten (in 8 decimalen nauwkeurig) zijn dan ook met een rekenapparaat gevonden.

$$\begin{aligned} p_1 &= 5 \\ p_2 &= 5,5 \\ p_3 &= 5,47727273 \\ p_4 &= 5,47722557 \\ p_5 &= 5,47722557 \end{aligned}$$

We zien, dat p_4 en p_5 tot in acht decimalen overeenstemmen. Wanneer we de getallen p dus niet in een groter aantal decimalen nauwkeurig willen berekenen, dan heeft het geen zin om verder te rekenen.

2. Wat hebben we nu met deze recurrente betrekking berekend? Omdat de getallen p_4 en p_5 tot in acht decimalen overeenstemmen, zouden we ze in de praktijk gelijk kunnen stellen. Stellen we dus $p_4 = p_5 = x$, dan is:

$$x = \frac{1}{2} \left[x + \frac{30}{x} \right]$$

Hieruit volgt: $2x = x + \frac{30}{x}$ dus $x = \frac{30}{x}$, d.w.z. $x^2 = 30$, dus $x = \sqrt{30}$

Met deze recurrente betrekking is het dus mogelijk om in 4 stappen $\sqrt{30}$ te berekenen. De eerste stap is het kiezen van p_1 . Hadden we inplaats van 5 een ander getal voor p_1 gekozen, dan was het aantal stappen wat groter geweest.

Welke recurrente betrekking en welke p_1 zou je kiezen, als je $\sqrt{70}$ moest berekenen?

3. Het programma voor een computer kan zo opgesteld worden, dat deze, nadat de p_1 per ponsband aan het apparaat is „meegedeeld”, p_2 berekent en deze dadelijk weer gebruikt wordt voor de berekening van p_3 , enz. Wanneer er in het programma geen opdracht voor het stoppen van het apparaat na een zeker aantal stappen zou worden opgenomen, dan zou dit „tot in het oneindige” doorgaan met het berekenen van getallen p . Op welke manier zo'n opdracht tot stoppen in het programma kan worden opgenomen, zullen we in het volgende artikel zien.

Deze wijze van werken met een computer, waarbij het berekende resultaat opnieuw gebruikt wordt voor dezelfde bewerking, heet in de Amerikaanse literatuur „feed-back”. We zouden dat kunnen vertalen met terugkoppeling. Het verschijnsel van de terugkoppeling vinden we ook in de radiotechniek en verder bij allerlei automatiseringsprocessen. Ook bij het gebruik van onze zintuigen treden feed-backverschijnselen op.

Wanneer we een draad door het oog van een naald willen steken, worden de bewegingen van arm, hand en vingers geleid door de schattingen, die we met onze ogen maken van de afwijking van het doel. Deze schattingen worden als gegevens telkens aan onze „hersenaanwijzer” toegevoerd. Ook dit is een soort (negatieve-)feed-back verschijnsel. Wanneer we de draad en naald niet rechtstreeks bekijken, maar in een spiegel, worden er onjuiste schattingen omtrent de richting van de afwijking doorgegeven. Het gevolg is, dat onze bewegingen dan slecht op het doel gericht zijn.

3. De hierboven gegeven rekenwijze om de wortel uit een getal te berekenen is niet voor de computer ontworpen, maar berust op een principe, dat we al vinden bij de Babyloniërs. De redenering verloopt dan op de volgende manier:

Als we $\sqrt{a}$ moeten berekenen moeten we a ontbinden in twee gelijke factoren. Beginnen we met twee willekeurige factoren p_0 en q_0 , dan is een benadering van het gezochte getal x het gemiddelde van p_0 en q_0 , dus bijv. $p_1 = \frac{1}{2}(p_0 + q_0)$. Het hierbij behorende getal q_1 is gelijk aan $\frac{a}{p_1}$. De volgende benadering wordt weer gevonden als gemiddelde van

p_1 en q_1 . Dus $p_2 = \frac{1}{2}(p_1 + q_1)$. Zo kunnen we voortgaan met gemiddelden te bepalen, die steeds dichter komen te liggen bij het gevraagde getal x .

Omdat we alleen maar te maken hebben met positieve getallen, kunnen we gemakkelijk controleren, dat als $q_0 < p_0$:

$$q_0 < q_1 < q_2 < \dots < x < \dots < p_2 < p_1 < p_0$$

Het verschil $p_i - q_i$ is dan positief en nadert met toenemende i tot nul, want:

$$\begin{aligned} p_{i+1} - q_{i+1} &= \frac{1}{2}(p_i + q_i) - \frac{a}{p_{i+1}} = \frac{1}{2}(p_i + q_i) - \frac{2p_i q_i}{p_i + q_i} = \\ &= \frac{(p_i + q_i)^2 - 4p_i q_i}{2(p_i + q_i)} = \frac{(p_i - q_i)^2}{2(p_i + q_i)} = \frac{p_i - q_i}{2} \cdot \frac{p_i - q_i}{p_i + q_i} < \frac{p_i - q_i}{2}. \end{aligned}$$

De getallen p_i en q_i naderen beide dus tot het gezochte getal x .

4. *Vraag:* Wat kunnen we berekenen met de recurrente betrekking

$$p_{i+1} = \frac{1}{3} \left[2p_i + \frac{a}{(p_i)^2} \right]?$$

5. *Nog een feed-back geval.*

In 1225 berekende Leonardo van Pisa (Fibonacci) als wortel van de vergelijking

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

de waarde $x = 1,368808107$.

Niemand weet, hoe hij dit getal gevonden heeft en hoeveel tijd het hem heeft gekost om het te berekenen. In die tijd was een nauwkeurigheid tot in 9 decimalen nogal zeldzaam.

Wanneer we een wortel van de gegeven vergelijking met de computer willen berekenen, dan kunnen we gebruik maken van de volgende recurrente betrekking:

$$p_{i+1} = \frac{20}{(p_i)^2 + 2p_i + 10}$$

Controleer maar, dat er de gegeven vergelijking staat, als $p_{i+1} = p_i = x$ is. (De noemer is definitief positief!)

Beginnen we met $p_0 = 1$, dan vinden we de volgende lijst van resultaten:

1,000000000	1,368817874
1,538461538	1,368803773
1,295019157	1,368810031
1,401825309	1,368807254
1,354209390	1,368808486
1,375298092	1,368807940
1,365929788	1,368808181
1,370086003	1,368808075
1,368241023	1,368808122
1,369059812	1,368808101
1,368696397	1,368808110
1,368857688	1,368808107
1,368786102	1,368808107

We zien, dat de laatste twee getallen in negen decimalen overeenstemmen en dat het dus geen zin heeft verder te rekenen. Ook zien we, dat het laatst gevonden getal overeenstemt met dat van Leonardo van Pisa!

Er waren 25 berekeningen nodig voor dit resultaat werd bereikt. Nu is dat met een snelle computer niet zo heel erg, maar toch zoeken de wiskundigen steeds naar snellere methoden. Men heeft bijv. voor het oplossen van deze vergelijking een recurrente betrekking gevonden, die het resultaat in 9 decimalen al na de dertiende stap geeft.

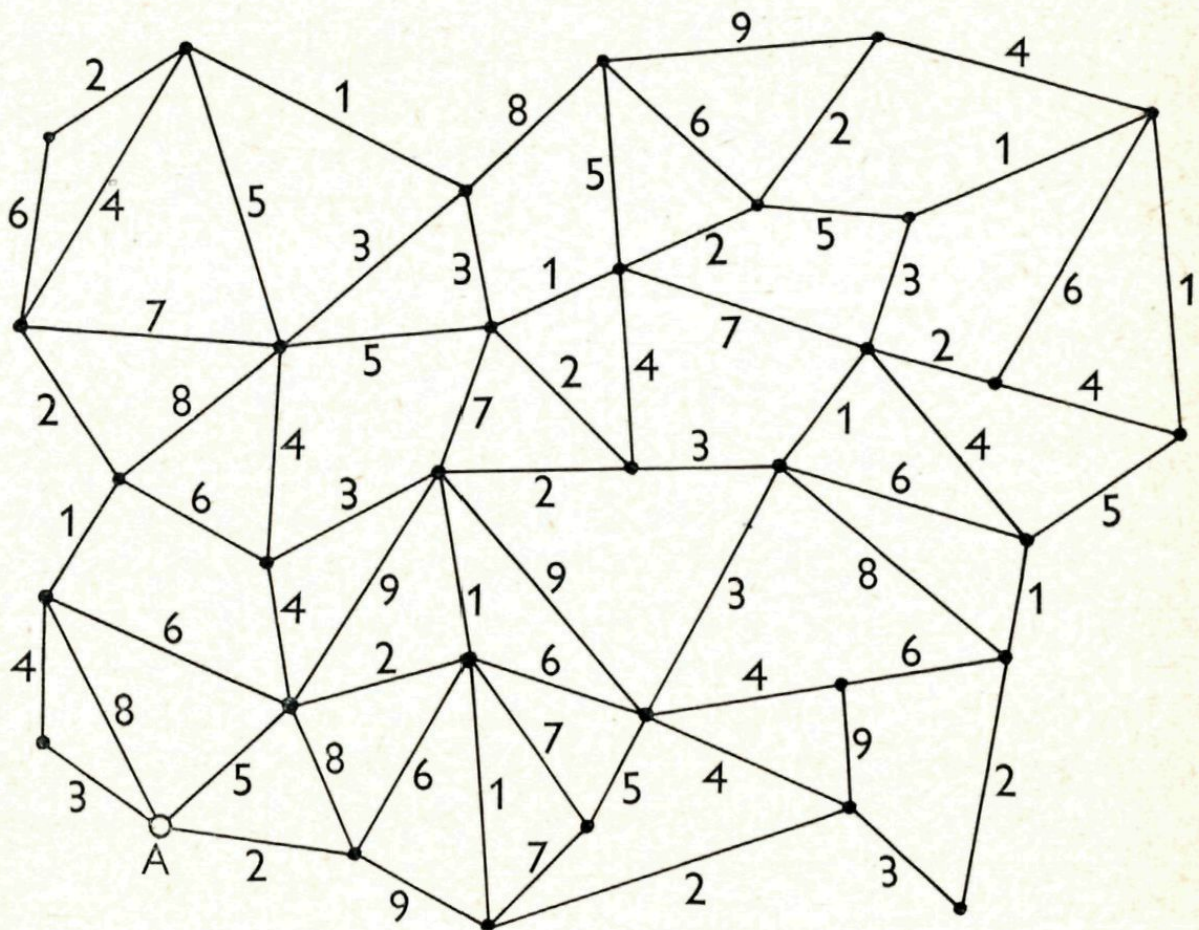


WIMECOS-PRIJSVRAAG

De vereniging van leraren in *Wiskunde*, *Mechanica* en *Cosmografie* „Wimecos” heeft evenals vorig jaar prijzen beschikbaar gesteld voor het oplossen van enkele puzzels. De eerste van die puzzels wordt hierbij opgegeven. In de loop van deze jaargang zullen er enkele Wimecos-prijsvragen verschijnen. Voor elk daarvan zijn er drie prijzen beschikbaar; het zijn boekenbonnen van $f\ 15,-$, $f\ 10,-$ en $f\ 5,-$. Bovendien is er een extra-prijs, een boekenbon van $f\ 10,-$, voor de oplosser die voor alle puzzels tezamen de hoogste score heeft.

Oplossingen van deze eerste puzzel kunnen tot uiterlijk 20 februari worden gezonden naar de Heer A. van Tooren, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Fig. 13



Beschouw bovenstaande figuur als een schematische tekening van een spoorwegnet. De spoorlijnen zijn door lijnstukken aangeduid en de stations zijn de stippen aan de uiteinden van die lijnstukken. Bij elke spoorlijn is een getal geplaatst. Beschouw dat als de prijs van het spoorkaartje voor dat traject.

We bekijken nu alle reizen, die in station A links onderaan beginnen en eindigen in een van de andere stations. Kiest men een bepaald eindstation uit, dan zijn er in het algemeen meerdere routes die naar dat doel leiden. Daarvan moet de „goedkoopste” bepaald worden.

Gevraagd wordt dus in de eerste plaats een *methode*, waarmee men de goedkoopste route kan bepalen van A naar elk van de andere stations. Deze methode moet zo scherp mogelijk onder woorden gebracht worden. In de tweede plaats dient men dan die methode natuurlijk ook toe te passen. Dit leidt tot een figuur, waarin al die goedkoopste routes zijn afgebeeld en waarin *bij elk station* de totale routeprijs vermeld is.

WIKKEN en WEGEN (III)

Onze lezers zullen wel begrepen hebben op welke manier er nog een kleinigheid afgeknabbeld kan worden van de laatste schatting van de „maximale grootte van de minimale weglengte”: we kunnen, evenals in het tweede artikel, het aantal stroken nog gaan variëren.

Er is nu wel enige algebraïsche vaardigheid nodig voor het uitvoeren van de berekeningen. Hij, die moed genoeg heeft, trachte ons te volgen. We verdelen het vierkante terrein in n stroken, die elk een breedte

$\frac{a}{n}$ bezitten.

Er worden twee plannen gemaakt. In plan 1 zijn er $(n + 1)$ zijwegen, die langs de randen van de stroken lopen; in plan 2 zijn er n zijwegen, die elk middenlijn van hun strook zijn. In beide plannen is er een hoofdweg, waar de zijwegen op uitkomen. We denken ons die hoofdweg (voorlopig) langs de rand van het terrein.

Voor de verbinding van een bungalow met de dichtstbijzijnde zijweg is een kort weggetje nodig, dat niet langer is dan een halve strook-

breedte, dus $\frac{a}{2n}$. De twee weggetjes, die in plan 1 en plan 2 aangelegd

moeten worden, hebben samen een lengte van precies een halve strookbreedte.

Voor die aansluitingen is in de beide plannen samen dus nodig een weglengte van

$$100 \cdot \frac{a}{2n} = \frac{50a}{n}.$$

Kiezen we de hoofdweg niet langs de rand van het terrein, maar laten we hem een afstand van een kwart strookbreedte tot die rand hebben en korten we de zijwegen dienovereenkomstig met een kwart strookbreedte in, dan moeten we deze redenering iets wijzigen.

Een bungalow, die aan de „overzijde” van de hoofdweg gebouwd moet worden, zal nu met die hoofdweg verbonden moeten worden in plaats van met een zijweg. Daarvoor is een weggetje nodig, dat hoogstens een kwart strookbreedte lang is. In plan 1 en plan 2 samen vereist dat dus een weglengte, die niet evenals hierboven *precies* een halve strookbreedte, maar *hoogstens* een halve strookbreedte bedraagt.

Nu vinden we dus als schatting van de weglengte in beide plannen samen

1°: hoogstens $\frac{50a}{n}$ voor de aansluitingen.

2°: $(n + n + 1) \cdot \left(a - \frac{a}{4n}\right) = (2n + 1) \cdot \left(a - \frac{a}{4n}\right) = a\left(2n - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2}\right)$
voor de zijwegen.

3°: $2a$ voor de beide hoofdwegen.

In totaal levert dit $a\left(2n + \frac{199}{4n} + \frac{5}{2}\right)$. Dit bedrag is minimaal, wanneer we kiezen $n = 5$. De grootte van het minimum is $22\frac{9}{20}a$.

Dit betekent, dat voor een van de beide plannen (en misschien voor allebei) een weglengte nodig is, die niet groter is dan de helft van het zoëven gevonden bedrag, namelijk

$$11\frac{9}{40}a.$$

En hierbij moeten we het dan laten, want een scherpere calculatie kennen wij niet. Wij komen er rond voor uit, dat wij vele uren aan het probleem besteed hebben zonder resultaat. En toch kunnen wij het gevoel niet van ons afzetten, dat het gevonden resultaat nog wel wat verbeterd kan worden. Misschien hebben wij ons te veel vastgebeten in de „stroken”. Misschien bestaat er een ander grondidee, dat in wezen even simpel is en dat ons in staat zou stellen de „maximale minimale weglengte” beter te benaderen. Misschien komt een van onze lezers wel op zulk een slimme gedachte.

Ach ja, die denkfout moeten we ook nog aan de kaak stellen.

Welnu, die is kortweg zo te beschrijven: *bestaat* er wel een meest ongunstige plaatsing van de bungalows en *bestaat* er wel een minimale weglengte bij een gegeven plaatsing?

Onze intuïtie zegt ons, dat deze beide vragen bevestigend beantwoord moeten worden. In de dagelijkse praktijk van onze wiskundige ervaringen ontmoeten we immers alleen maar „nette” functies, waarvan we met weinig moeite het verloop kunnen vaststellen en waarvan we dus al snel weten of ze extreme waarden bezitten of niet.

Maar hadden we in het nu bestudeerde probleem wel met een functie te maken? En zo ja, hoeveel onafhankelijke veranderlijken waren er dan hier in het spel? Ziedaar een paar vragen, die wellicht enige twijfel wakker kunnen maken.

Misschien is het wel zo dat, als we alle bungalow-plaatsingen en alle wegenstelsels konden overzien en wiskundig konden verwerken, we tot de conclusie zouden komen dat de lengten van die wegenstelsels alle waarden kunnen aannemen die groter zijn dan, zeg, $11a$ en dat de lengte $11a$ zelf niet aangenomen kan worden. In dat geval zou er geen wegenstelsel van minimale lengte bestaan.

Gelukkig echter zijn deze overwegingen voor een wegebouwer van geen enkel belang. Alleen een wiskundige zal er behoefte aan hebben om zijn critische denken zo scherp te slijpen. Wij hopen dus, dat onze lezers als wegebouwers in spe genoeg beleefd hebben of zullen beleven aan het gestelde probleem en als mathematici in spe met hun gedachten ook de slotopmerkingen nog eens af willen tasten.

OPLOSSINGEN *van de* DENKERTJES *in* Pythagoras 3-2

41. Van het derde getal af is elk getal gelijk aan de som van zijn twee voorgangers. Algemeen: $a + b + (a + b) + (a + 2b) + (2a + 3b) + (3a + 5b) = 8a + 12b = 4(2a + 3b)$. De som is dus steeds het viervoud van het vijfde getal.
42. Er zijn $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ verschillende volgorden. Op 20 december 1964 komt de laatste daarvan aan de beurt; denk er aan dat 1964 een schrikkeljaar is.
43. Construeer een driehoek, waarvan het gegeven lijnstuk zwaarteliijn is en bepaal dan het zwaartepunt van die driehoek.
44. De eerste bediende heeft f 60200 ontvangen en de tweede f 60550; de eerste bediende ontvangt in elk jaar f 50 minder dan zijn collega.

45. Kies een willekeurig punt uit het zeventiental en beschouw de zestien verbindingslijnstukken van dat punt met de zestien andere punten. Kies uit dit zestiental lijnstukken een zestal uit, die dezelfde kleur bezitten. Dit is beslist mogelijk; kwam namelijk elke kleur minder dan zes keren voor, dan konden we hoogstens $3 \cdot 5 = 15$ lijnstukken bekijken. Laten we aannemen dat de zes gekozen lijnstukken allemaal rood zijn; dit schaadt de algemeenheid niet.
- De zes rode lijnstukken verbinden het eerstgekozen punt met een zestal andere punten. We richten nu onze aandacht op dat zestal en in het bijzonder op hun verbindingslijnstukken.
- Vinden we bij die verbindingslijnstukken een rood exemplaar, dan vormt dit met de beide rode lijnstukken die van het eerstgekozen punt naar zijn uiteinden getrokken zijn al een rode driehoek en dan zijn we klaar. Het ergste, wat ons overkomen kan, is dus dat die zes punten alleen groene en blauwe verbindingslijnstukken hebben. Laten we dus aannemen, dat dit het geval is.
- Kies uit het zestal punten nu een willekeurig punt uit en beschouw de vijf verbindingslijnstukken van dit punt met de vijf andere punten van het zestal. Deze zijn dus allemaal groen of blauw. Kies er drie uit die dezelfde kleur hebben (dat dit mogelijk is, blijkt op dezelfde manier als hierboven). Laten we aannemen, dat ze alle drie groen zijn. Ze verbinden het uit het zestal gekozen punt met drie andere punten uit dat zestal.
- Tenslotte letten we op de verbindingslijnstukken van die drie andere punten. Deze zijn groen of blauw. Is er een van die verbindingslijnstukken groen, dan valt het ons niet moeilijk om een groene driehoek te ontdekken. En er is geen groene bij, dan vormen ze zelf een blauwe driehoek.
46. Van $50 + 8n$ ballen zijn er $49 + 7n$ rood. Dus $49 + 7n \geq 0,9(50 + 8n)$. Hieruit volgt $n \leq 20$; het aantal ballen is dus hoogstens 210.
47. De kleinste boog AC is $360^\circ - (120^\circ + 72^\circ) = 168^\circ$. Daarvan is E het midden, dus boog BAE $= 120^\circ + 84^\circ = 204^\circ$. Snijdt BO de cirkel nog eens in F, dan is boog BAF $= 180^\circ$. Hieruit blijkt, dat boog EF $= 204^\circ - 108^\circ = 24^\circ$ is. De gevraagde verhouding is dus $24 : 72 = 1 : 3$.
48. Niet drie vergelijkingen met drie onbekenden opstellen en die daarna oplossen, maar terugrekenen! Voor C ging smijten met zijn geld had A 8 centen, B ook en C dus $48 - 8 - 8 = 32$ centen. Voor B begon te delen had A 4 centen, C 16 centen en B dus 28 centen. En aanvankelijk had B dan ook 14 centen C, 8 centen en A 26 centen. Dit probleempje is immoreel, want je zou er de les uit kunnen trekken dat je met liefdadigheid beter kunt wachten tot iedereen aan de beurt is geweest.
49. De driehoeken CDF en CBE zijn congruent, zodat opp. AECF = opp. ABCD = 256. Daar opp. CEF = 200 en opp. AECF = 256, is opp. AEF = 56. Stel BE = x , dan is AE = $16 + x$ en AF = $16 - x$. We drukken de opp. van driehoek AEF in x uit en vinden zo de vergelijking $(16 + x)(16 - x) = 2 \cdot 56 = 112$. Zo blijkt, dat BE = 12 is.
50. Stel, dat er al $m - 1$ van die lijnen getekend zijn en dat we juist de m -de lijn er bij trekken. Die m -de lijn wordt door die $m - 1$ eerder getekende in $m - 1$ verschillende punten gesneden en dus in m stukken verdeeld. Dit betekent dat hij een verdeling tot stand brengt in m van de door die eerste $m - 1$ lijnen gevormde vlakdelen. Door het trekken van de m -de lijn komen er dus m delen bij. Het trekken van de eerste lijn veroorzaakt een verdeling van het vlak in twee stukken. De tweede lijn maakt daarvan $2 + 2$ stukken, de derde $2 + 2 + 3$ stukken, enzovoorts. Er ontstaan dus $2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 22$ delen.

Wiskunde-Olympiade - Nederland 1963

Op vrijdag 15 november 1963 werden in het gebouw van het Ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen te Den Haag door de directeur-generaal van dit ministerie Mr. J. G. M. Broekman aan de 10 winnaars van de wiskunde-olympiade 1963 de boeken en boekenbonnen uitgereikt. De uitreiking werd bijgewoond door de inspecteur-generaal van het onderwijs Mr. Ir. M. Goote, de inspecteurs van het V.H.M.O. Dr. H. A. Gribnau, Dr. D. N. van der Neut, Dr. J. M. van Buijtenen, Drs. J. Groen; verder door Prof. Dr. N. G. de Bruyn, Prof. Dr. H. Freudenthal, Dr. J. A. A. Verlinden, Dr. P. G. J. Vredenduin, Dr. Joh. H. Wansink en 50 ouders en leraren.

We geven aan ommezijde een overzicht van de prijswinnaars met de door hen behaalde puntenaantallen. Voor de eerste ronde konden maximaal 32 punten worden behaald, voor de tweede ronde maximaal 50, terwijl de einduitslag werd bepaald door de som te bepalen van het puntenaantal van de eerste ronde en tweemaal dat van de tweede ronde. Zo was dus het maximaal te behalen aantal punten voor de einduitslag 132.

Verder staat bij de namen de leeftijd der prijswinnaars vermeld. 16-2 betekent 16 jaar en 2 maanden op de datum van de tweede ronde.

NAAM	SCHOOL	PUNTEN	LEEFTIJD
1. Marc Roelant Best	Amsterdamse Lyc. (afd. HBS)	101 (76 + 25)	16-2
2. Gerard 't Hooft	Dalton Lyc. Den Haag (gym)	98 (72 + 26)	17-2
3. Willem Hendrik Hesselink	Eerste Chr. Lyc. Zeist (gym)	89 (63 + 26)	17-7
4. Hubertus Gerardus Marinus Willems	Lyc. voor jongens, Venray (gym)	80 (62 + 18)	17-7
5. Arthur Eduard Paul Veldman	Rijks HBS Groningen	79 (57 + 22)	15-0
6. Sikko van Beyeren	Zaanlands Lyc. Zaandam (HBS)	77½ (58 + 19½)	17-5
7. Johannus Leonardus Simons	Lodewijk Makeblijde College, Rijswijk (HBS)	77 (58 + 19)	17-7
8. Ilan M. Kisch	Vossius Gymnasium, Amsterdam	76 (50 + 26)	17-4
9. Georgius Nicolaas Jacobus Rolf	St. Nicolaas Lyc. Amsterdam (gym)	75½ (56 + 19½)	17-2
10. Willem Ewald van der Vliet	Cartesiuslyc. Amsterdam (gym)	75 (53 + 22)	17-0

commutatief

uit het Latijn: *commutare* = verwisselen.

limiet

uit het Latijn: *limes* = grens.

permutatie

uit het Latijn: *permutare* = verwisselen.

substitutie

uit het Latijn: *substituere* = in de plaats stellen van.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden.

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,— per jaargang. Voor anderen f 3,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J.B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan