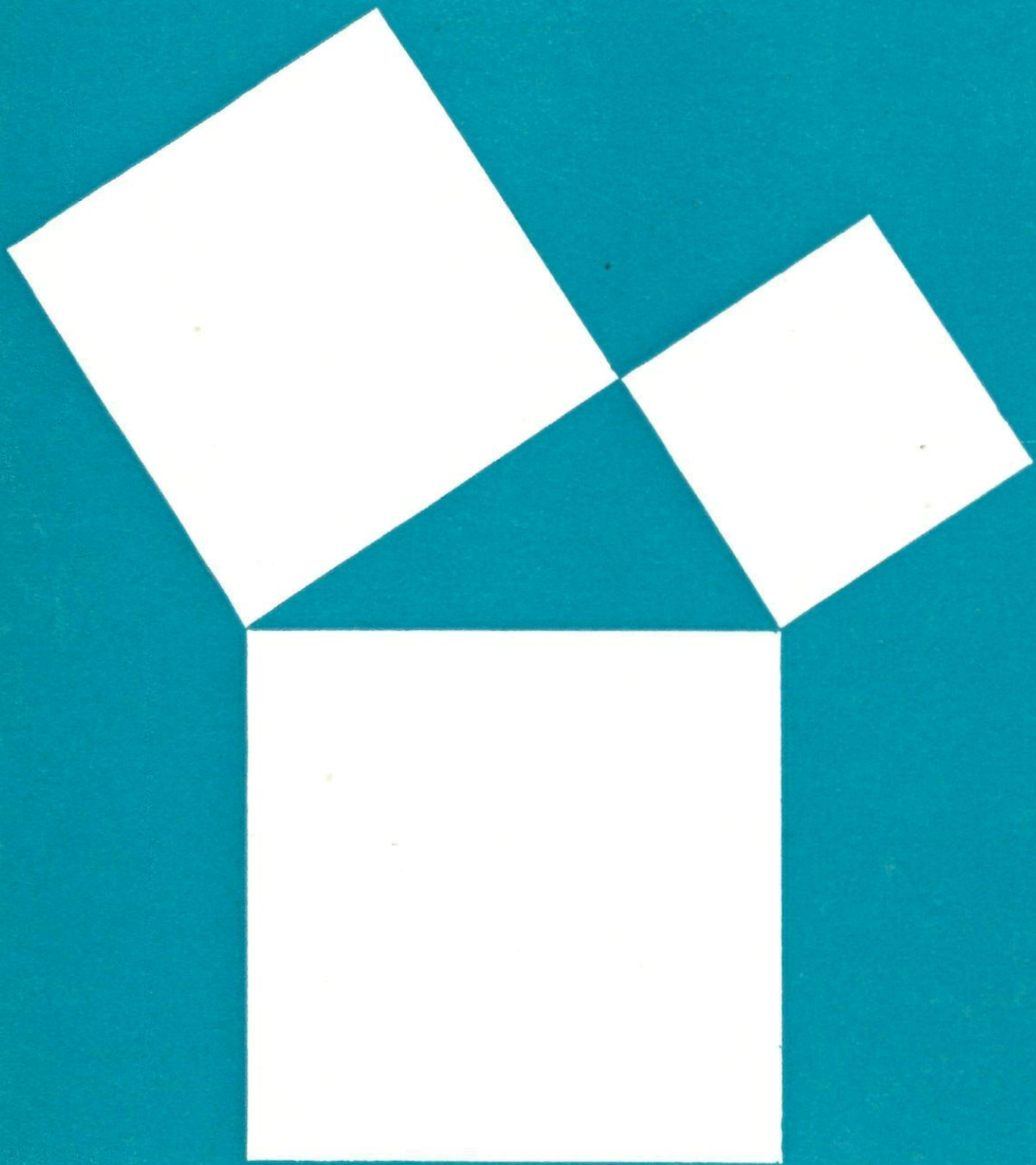


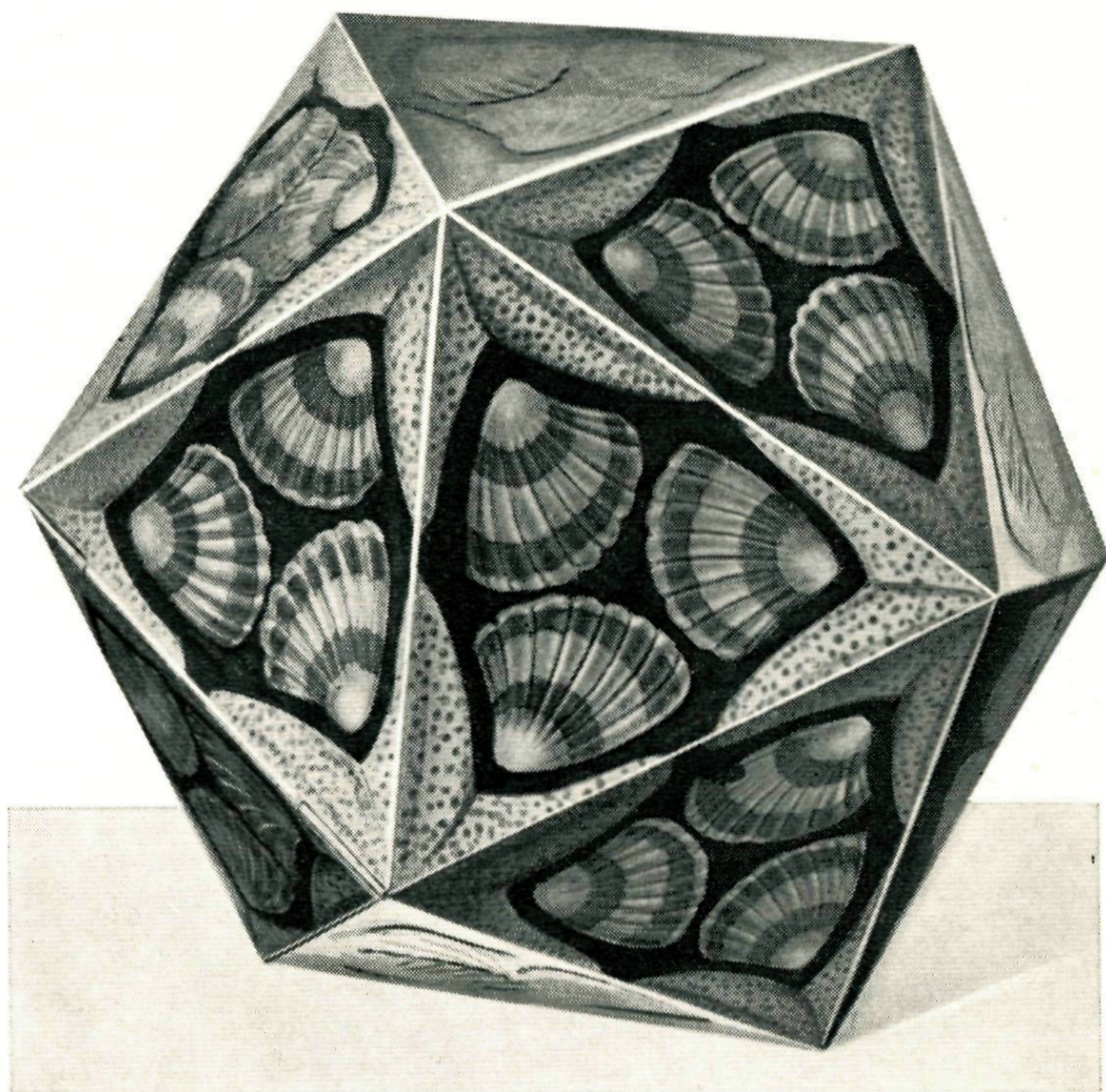
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

4

Derde jaargang



A thing of beauty is a joy for ever!

Icosaëder door M.C.ESCHER ontworpen voor de Verblifa (zie blz.75)

°Tunnelproblemen

De verkeerssituatie in de Rotterdamse Maastunnel is langzamerhand vrijwel hopeloos geworden. Het lijkt wel of er elke dag meer automobilisten zijn, die op de spitsuren zo snel mogelijk door die tunnel heen willen om thuis van hun vrije tijd te gaan genieten. Kilometerslange opstoppen zijn daar telkens weer het gevolg van. We kunnen ons alleen maar er over verwonderen dat er niet vaker ernstige ongelukken gebeuren.

Natuurlijk probeert de verkeerspolitie alle maatregelen te treffen, die de veiligheid kunnen bevorderen. Laten wij als amateur-wiskundigen eens een poging doen om hen terzijde te staan. Wij zouden bijvoorbeeld kunnen onderzoeken in welke mate een snelheidsbeperking de problemen kan oplossen.

Wanneer we in die tunnel een bepaalde snelheid willen voorschrijven, moeten we er rekening mee houden dat in een snel rijdende file de afstand tussen twee op elkaar volgende auto's groter dient te zijn dan in een langzaam rijdende file. Hoe de „veilige” afstand van de snelheid afhangt, kunnen we het beste beoordelen met behulp van de door de politie zelf gehanteerde keuringsmaatstaven voor remmen: rijdt een auto met een snelheid van 30 km/uur, dan moet hij binnen 9 meter tot stilstand gebracht kunnen worden; bij een snelheid van 60 km/uur mag de remweg niet meer dan 36 meter bedragen. In het algemeen gesteld: de maximale remweg bedraagt bij een snelheid van v km/uur volgens die norm $\frac{1}{100}v^2$ meter.

Maar, vóór een automobilist op de rem trapt, gaat er altijd nog een kleine tijd voorbij. Stellen we de duur van die „schrikseconde” op bijvoorbeeld 0,3 sec, dan legt de auto bij een snelheid van 30 km/uur nog $2\frac{1}{2}$ meter af en bij een snelheid van 60 km/uur nog 5 meter.

Daaruit blijkt, dat we in een file, die 30 km/uur rijdt, met tussenafstanden van $9 + 2\frac{1}{2} = 11\frac{1}{2}$ meter rekening moeten houden. En bij 60 km/uur dienen die afstanden zelfs $36 + 5 = 41$ meter te zijn.

We stellen ons nu een zeer lange file voor, die met een snelheid van 60 km/uur door de Maastunnel rijdt. Voor het gemak nemen we aan, dat alle auto's in die file een lengte van 4 meter hebben en dat elke automobilist zich keurig netjes aan die afstand van 41 meter houdt. In een uur tijd zien we dus een 60.000 meter lange slang uit de tunnel komen komen en in die slang wisselen 4 meter auto en 41 meter tussenafstand

elkaar telkens af. Het aantal auto's in die slang bedraagt dus $\frac{60.000}{45} = 1333$ ongeveer.

Voeren we de overeenkomstige berekening uit voor een file, die met een snelheid van 30 km/uur rijdt, dan zien we echter $\frac{30.000}{11,5} =$ onge-

veer 2608 auto's per uur uit de tunnel komen. Daarom geeft de verkeerspolitie aan een snelheid van 30 km/uur de voorkeur boven 60 km/uur.

Laat ons nu het rekenen vervangen door de algebra. Daarbij voeren we de volgende lettergrootheden in: de snelheid van de file stellen we v km/uur, de duur van de „schrikseconde” s seconden en de lengte van de auto's stellen we a meter. Op de hierboven beschreven manier komen we dan tot een „veilige” afstand van $(\frac{1}{100}v^2 + \frac{5}{18}sv)$ meter. En het aantal auto's, dat per uur de tunnel passeert, wordt dan

$$1000v: (\frac{1}{100}v^2 + \frac{5}{18}sv + a).$$

Het probleem is nu om die waarde van v te bepalen (uitgedrukt in s en a) waarbij er zoveel mogelijk auto's per uur de tunnel passeren. Natuurlijk is elke lezer van Pythagoras in staat om zelf een stel waarden van s en a te kiezen, bijvoorbeeld 0,3 en 4, en dan ijverig verschillende waarden van v in te vullen, teneinde die *optimale snelheid* te vinden. Maar alleen zij die de differentiaalrekening voldoende machtig zijn kunnen het probleem oplossen in de vorm, waarin het in het begin van deze alinea geformuleerd werd. Het resultaat is verrassend eenvoudig en wordt met zeer weinig moeite verkregen: de optimale snelheid bedraagt $10\sqrt{a}$ km/uur.

Twee dingen trekken onze aandacht in dit resultaat. Ten eerste blijkt de duur van de „schrikseconde” niet van belang te zijn. Wij geven elke lezer graag de gelegenheid om dit merkwaardige feit zelf te verklaren en zullen er dus verder over zwijgen. Ten tweede zien wij, dat de optimale snelheid bij auto's van 4 meter lengte slechts 20 km/uur bedraagt. En, de mentaliteit van de meeste automobilisten kennende, vervult ons dat met grote bezorgdheid



Een eenvoudige berekening doet ons zien, dat de automobilisten er goed aan zullen doen de Maastunnel te Rotterdam te passeren met een snelheid van 20 km per uur. Liefhebbers van het werk van M. C. Escher zullen met plezier opmerken, dat er weer een van zijn scheppingen in dit nummer staat afgebeeld; ditmaal heeft hij daarbij zelfs het platte vlak verlaten. In „STRALEN EN DRAAIEN” zien we hoe in de natuur de wiskunde ons op verschillende plaatsen toelacht. Dr. Groenman doet ons kennismaken met de rechte van WALLACE. „Wat bedoelen we met ‘of’?” vraagt ons Dr. Vredenduin. In een zevental voorbeelden laat hij ons zien hoe we dit woordje in de omgangstaal en in de wiskunde gebruiken. Programmeren is het onderwerp van het artikel, dat deze keer aan de computers gewijd is. Drs. van Schagen heeft de mozaïekdoos van een van zijn kinderen ingepakt en is daardoor aan het rekenen geraakt in „Legpuzzelproblemen”. De uitslag van de eerste Wimecosprijsvraag is nog niet bekend, een boekenbon voor de oplossingen van „Denkertjes” in nummer 2 is toegefallen aan *Joke Kraan* te Voorburg. *Elly v. d. Kerkhof*, leerlinge van klas 1 B van het Marialyceum te 's-Hertogenbosch verdient voor haar prestaties zeker een pluim. Zij zal eveneens een boekenbon ontvangen.

°° **Bouwschema van de Kosmos?**

Op de binnenzijde van de omslag is een foto van een blikken trommeltje gereproduceerd. Dit trommeltje werd door M. C. Escher ontworpen voor de VERBLIFA (Verenigde Blikfabrieken) ter gelegenheid van het 75-jarig jubileum van deze fabrieken. Het is een regelmatig twintigvlak, dat je, als je dat mooier vindt, ook *icosaëder* mag noemen.

Een regelmatig veelvlak is een lichaam, dat door congruente regelmatige veelhoeken wordt begrensd zo, dat er in elk hoekpunt evenveel samenkomen. Bij het regelmatig twintigvlak komen in elk hoekpunt vijf regelmatige driehoeken samen. Escher heeft ze versierd met schelpen en bij de hoekpunten de strakke lijnen „verzacht” door daar zee-sterren aan te brengen. Elke driehoek is nu gevuld met een versiering, die een rotatie om het middelpunt van de driehoek toelaat. Draaien we

het twintigvlak om de as van een der driehoeken over 120° , dan neemt niet alleen het twintigvlak zijn oude stand weer in, maar nemen ook de ornamenten nauwkeurig elkaars plaatsen in. Het twintigvlak heeft ook rotatieassen, die door telkens twee overstaande hoekpunten gaan. Draaien we om zo'n as over 72° , dan zien we weer alles in de oorspronkelijke stand terugkeren.

Door zijn versiering heeft Escher trouwens de spiegelsymmetrie, die een regelmatig veelvlak bezit, weggenomen.

Het is merkwaardig dat er slechts vijf regelmatige veelvlakken zijn. Dit is eenvoudig in te zien. De begrenzende vlakken moeten gelijkzijdige driehoeken zijn of vierkanten, of regelmatige vijfhoeken, of regelmatige zeshoeken etc.

Bekijken we eerst wat er mogelijk is met gelijkzijdige driehoeken: In één hoekpunt van het veelvlak kunnen er 3, 4 of 5 samenkomen. Méér niet, want als we er 6 bij elkaar laten komen, liggen ze in één plat vlak.

Nemen we vierhoeken, dan kunnen we er drie bij elkaar laten komen; vier niet meer. Ook bij regelmatige vijfhoeken kunnen we er drie bij elkaar laten komen.

De regelmatige zeshoek komt al niet meer in aanmerking, omdat drie van zulke zeshoeken, in één punt samenkomend, in een plat vlak liggen.

Met gelijkzijdige driehoeken krijgen we zo het regelmatige viervlak (tetraëder), het regelmatige achthoek (octaëder), en het regelmatige twintigvlak (icosaëder).

Met vierkanten krijgen we de kubus (hexaëder), en met vijfhoeken het regelmatige twaalfvlak (dodecaëder).

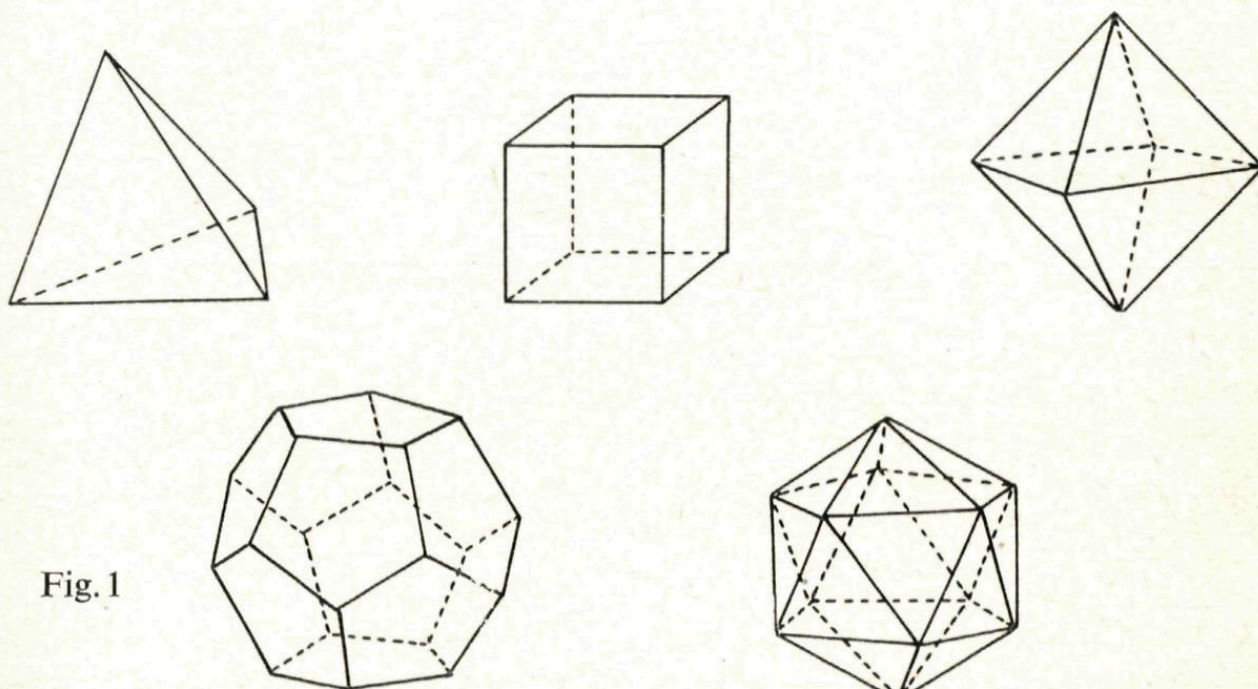


Fig. 1

Dit was reeds in de oudheid aan de Grieken bekend en men heeft zelfs wel eens beweerd dat Euclides zijn ELEMENTEN geschreven heeft als grondslag voor de behandeling van deze regelmatige lichamen. In ieder

geval begint hij de Elementen met de constructie van een gelijkzijdige driehoek en eindigt hij met de constructie van een dodecaëder. Vooral het regelmatige twaalfvlak en het regelmatige twintigvlak zijn bijzonder fraaie lichamen. Ze kunnen gemakkelijk van dik papier of karton gemaakt worden. Snijd het juiste aantal congruente driehoeken of vijfhoeken uit karton en maak ze (zoveel mogelijk van binnen) met sellotape vast. Je kunt ook het netwerk construeren (zie fig.2) en dan vouwen en plakken.

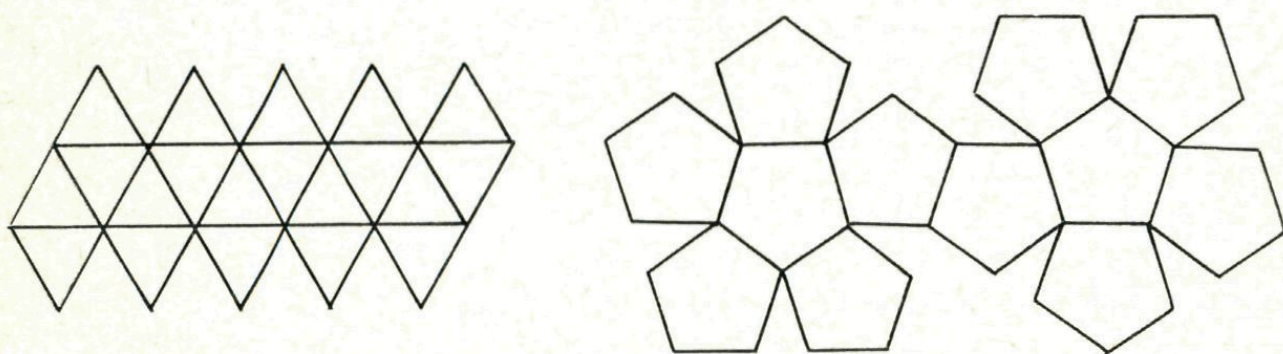
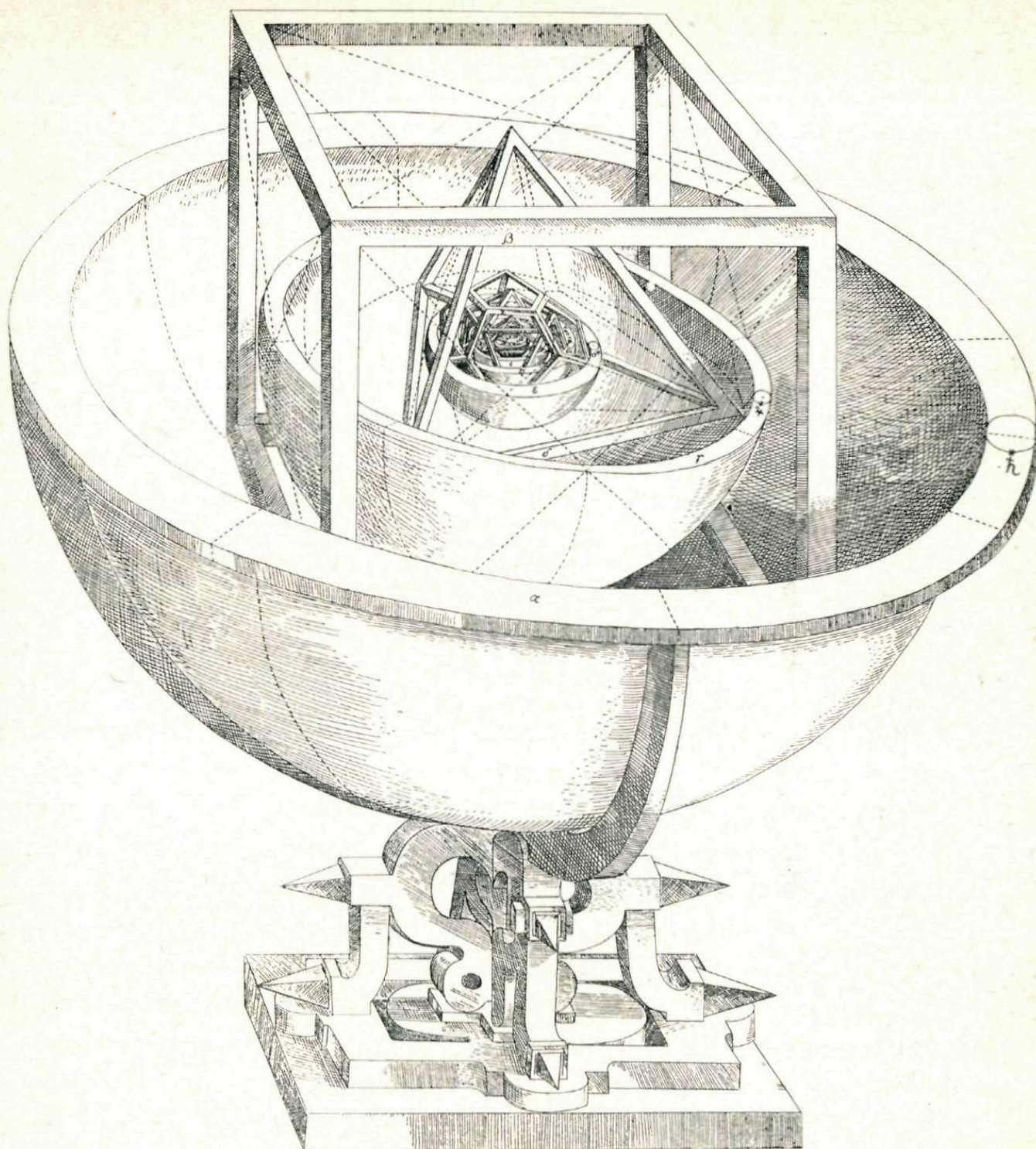


Fig.2

De regelmatige lichamen hebben een aantal interessante eigenschappen waarvan er hier enige volgen: In een kubus kan een bol worden beschreven, zodat deze alle ribben in het midden raakt. We denken ons nu in al die raakpunten raaklijnen aan de bol, loodrecht op de ribben van de kubus. Deze lijnen vormen de ribben van een regelmatig achthoekig vlak. Op dezelfde manier krijgen we uit een dodecaëder een icosaeëder, en uit een tetraëder weer een tetraëder.

Kepler, een groot astronoom uit het begin van de zeventiende eeuw, heeft een poging gedaan om de bouw van het heelal (in die tijd betekende dat het zonnestelsel met een achtergrond van sterren) te vatten in de vijf regelmatige lichamen. De zon stond in het centrum van zes concentrische bollen, die elk de baan bevatten van een van de zes planeten (de aarde en de vijf andere, toen bekende, planeten). Iedere twee opeenvolgende bollen waren de in- en omgeschreven bol van een regelmatig lichaam. (De ingeschreven bol raakt aan de vlakken van het regelmatige lichaam, en de omgeschreven bol gaat door de hoekpunten ervan.) Zo kreeg hij een grove benadering van de bouw van het zonnestelsel als hij tussen Mercurius en Venus een octaëder plaatste, tussen Venus en de Aarde een icosaeëder, een dodecaëder tussen de Aarde en Mars, een tetraëder tussen Mars en Jupiter en een kubus tussen Jupiter en Saturnus.



Excudebat Tubingae Georgius Gruppenbachius An. M. D. XCVII.

Fig. 3

In fig. 3 zien we een gravure uit Kepler's boek *Mysterium Cosmographicum*, die dit in beeld brengt. Het was te mooi om waar te zijn. Het is wonderlijk, dat Kepler, die zich met plezier op zulke fantastische dwaalwegen bewoog, toch uiteindelijk de bewegingswetten van de planeten gevonden heeft.

Uit „Het wondere onderzoekingsveld van de vlakke meetkunde” IV

Ir. A. E. Bosman heeft verschillende interessante samenhangen ontdekt in het gebied van de gewone vlakke meetkunde. Het zijn geen lastige onderzoeken, ook geen belangrijke dingen, maar toch verrast hij dikwijls door de bijzondere wijze, waarop hij de dingen ziet en weer nieuw weet te maken. Deze keer is het onderwerp, dat we aan zijn boek ontleen:

°STRALEN EN DRAAIEN

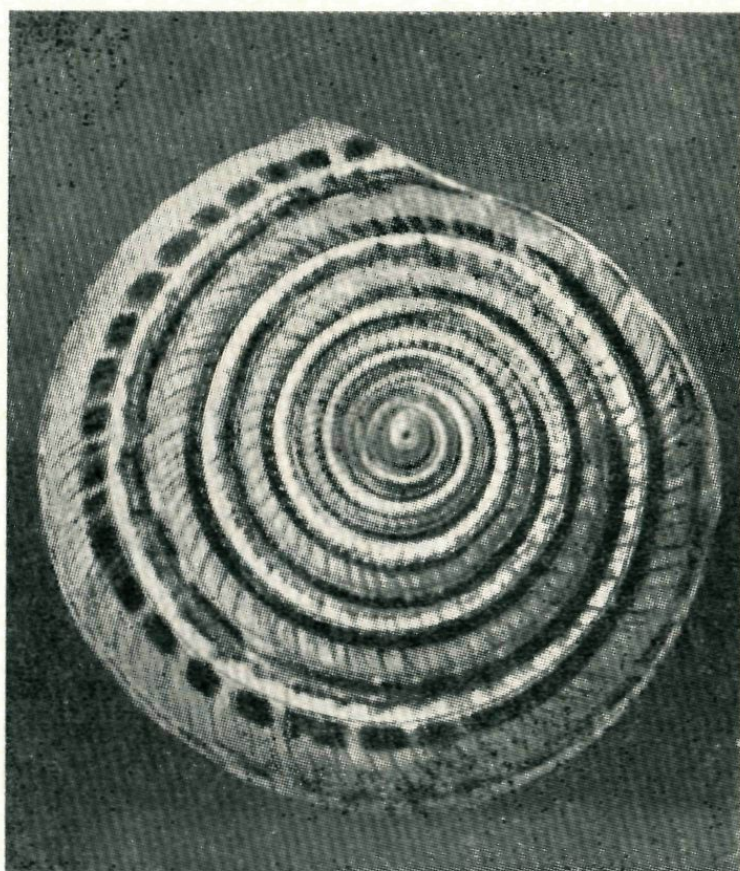
De prachtige schelp, die in fig.4 is afgebeeld, geeft ons een indruk, alsof er uit het middelpunt een stralende en tegelijk draaiende be-

Fig. 4

*Schelp van de *Solarium perspectivum* Linné. In de natuur ontmoeten wij overal wetmatigheid, ook in de vormen. Bij de oerdieren zien we de bolvorm, de straalsgewijze symmetrie, de straling en de draaiende straling.*

Elke vorm was eerst beweging.

Alfred Adler



weging is uitgegaan. We kunnen een dergelijke spiraalbeweging reconstrueren door een deeltje tegelijkertijd aan twee bewegingen te laten deelnemen: een eenparige rechtlijnige en een eenparige roterende. Hoe de weg, die het dan volgt, eruit zal zien, hangt af van de verhouding van de draaisnelheid en stralsnelheid. In fig. 5 zijn een aantal mogelijkheden getekend:

Is de draaisnelheid nul, dan doorloopt het deeltje de naar links getekende halve rechte. Gelijke afstanden worden hierop in gelijke tijden

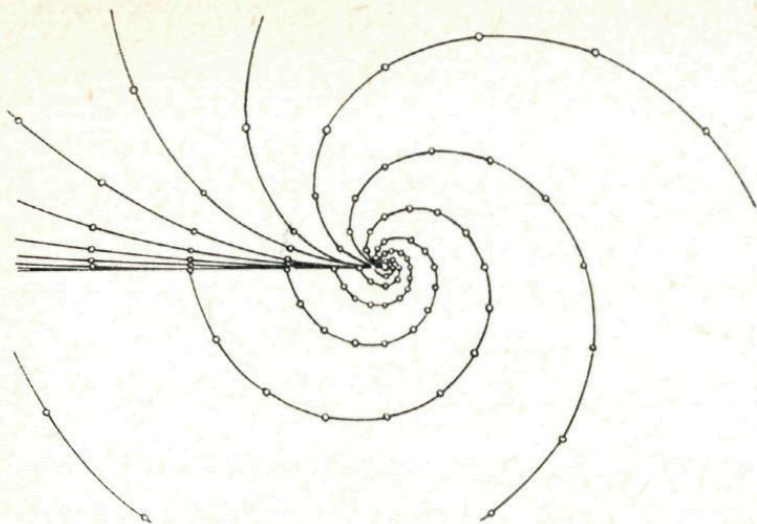


Fig. 5

afgelegd. Komt er bij de straaIsnelheid een kleine draaisnelheid, dan doorloopt het deeltje niet langer een halve rechte, maar een aanvankelijk licht gebogen spiraalvormige lijn. Bij een grotere draaisnelheid is de kromming van deze spiraal al dadelijk bij het begin groter.

In de natuur komen we veel vormen tegen, die ons

een straling gecombineerd met een draaiing suggereren. De schelp van fig. 6 met een vrij kleine draaisnelheid is er nog een voorbeeld van. Maar men vindt deze vormen ook op zo uiteenlopende terreinen als de sterrekunde (spiraalnevels) en atoomtheorie (de banen van deeltjes gefotografeerd in de nevelkamer).

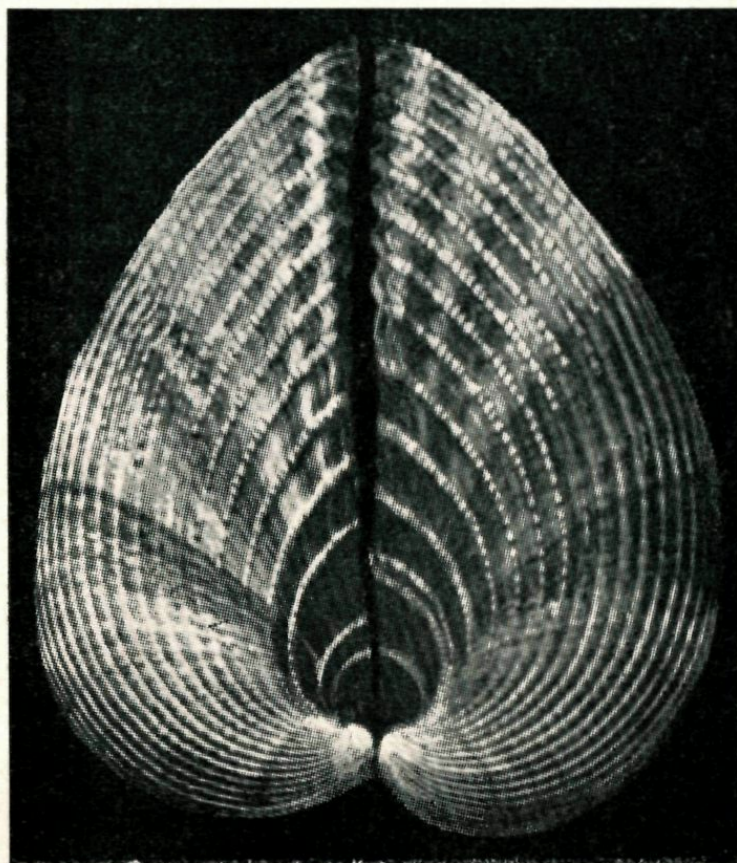


Fig. 6.

Hoe onopgemerkt van waarde voor wie deze schelp achteloos stuktrapt of de kalkoven ermee vult – hoe wonderschoon van vorm voor wie iets van de wiskundige lijnstructuur erin ontdekt en van de rijkdom der gebogen lijnen. Het is de Cardium pseudolima Lamarck.

(Oplossingen inzenden voor 1 april 1964)

61. Men heeft een onbeperkt aantal stangetjes ter beschikking die allemaal dezelfde lengte hebben en met hun uiteinden scharnierend aan elkaar verbonden kunnen worden. Ze mogen als lijnstukken beschouwd worden.

Men bouwt van zes van die stangetjes een regelmatige zeshoek. Deze kan nu nog vervormd worden, zelfs als we ons beperken tot vervormingen in een plat vlak (en dat doen we in deze opgave). Door er nog meer stangetjes aan te verbinden kunnen we die zeshoek echter onvervormbaar maken. Dit kan bijvoorbeeld door met behulp van zes extra stangetjes drie „lange” diagonalen in de zeshoek aan te brengen. Hoeveel extra stangetjes heeft men echter minstens nodig indien de eis gesteld wordt, dat ze zich allemaal in het buitengebied van de zeshoek moeten bevinden?

62. Schrijft men het gebroken getal $\frac{1}{7}$ als oneindige decimale breuk, dan komt er $0,142857142\dots$, waarin de groep 142857 repeteert. Nu wordt het eerste cijfer achter de komma geschrapt, waardoor $0,42857142\dots$ ontstaat, waarin de groep 428571 repeteert. Dit nieuw gevormde getal is nu in gesloten vorm (zonder stippeltjes) te schrijven als $\frac{3}{7}$. Handel je evenzo met $\sqrt{2} = 1,414213\dots$, dan ontstaat daaruit $1,14213\dots$. Gevraagd wordt ook dit nieuwe getal in gesloten vorm te schrijven.

63. De coëfficiënten a, b, c van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ zijn alle drie oneven (en dus gehele) getallen. Bewijs dat deze vierkantsvergelijking geen geheel getal en ook geen gebroken getal tot wortel heeft.

64. In figuur 7 hebben de vijf kleine cirkels allemaal een straal van de lengte van 1. Hoe groot is de lengte van de straal van de grote cirkel.

De middelpunten van de onderste vier zijn de hoekpunten van een vierkant, waarvan de zijden de lengte 2 hebben. De bovenste kleine cirkel raakt twee andere kleine cirkels. De grote cirkel raakt drie kleine cirkels.

65. Twee gelijke melkbekers hebben de vorm van een afgeknotte kegel. Hun afmetingen zijn: hoogte 99 mm, middellijn aan de bovenkant 80 mm en aan de onderzijde 40 mm. De dikte van het materiaal is 4 mm. Men stapelt deze twee bekera „in elkaar”. Hoever steekt de bovenste nu boven de onderste uit.

66. In een plat vlak tekent men een aantal cirkels. Daardoor wordt dat vlak verdeeld in gebieden, waarvan de grenzen bestaan uit cirkelbogen. Men wil elk van die gebieden een kleur geven en wel zo, dat elke twee volgens een cirkelboog

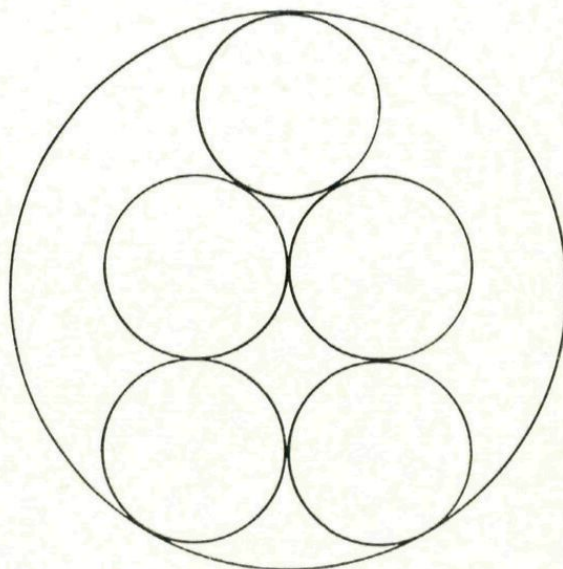


Fig. 7

aan elkaar grenzende gebieden verschillende kleuren krijgen. Bewijs dat men niet meer dan twee verschillende kleuren nodig heeft.

67. Een kubus is gemaakt uit zes vierkanten van karton, die langs de zijden met plakband aan elkaar verbonden zijn. Men kiest zeven ribben van de kubus uit en snijdt het plakband langs die ribben door. Op hoeveel verschillende manieren kan men die keuze van zeven ribben maken (de ribben van de kubus worden van 1 tot en met 12 genummerd; twee zeventallen ribben worden verschillend genoemd als ze door verschillende zeventallen nummers worden aangeduid). Hoeveel van die manieren hebben tot gevolg dat de kubus na het doorsnijden in twee stukken uiteenvalt?
68. De huizen van een denkbeeldige stad zijn gebouwd in 64 vierkante blokken, die allemaal even groot zijn en gerangschikt zijn in acht rijen van acht blokken elk. De plattegrond van deze stad ziet er dus uit als een schaakbord. Een taxi-chauffeur moet een rit maken van een hoekpunt van die vierkante stad naar het tegenoverliggende hoekpunt; hij wil de rit niet langer maken dan nodig is. Op hoeveel verschillende manieren kan hij zijn weg kiezen.

°° Over de RECHTE van WALLACE

door Dr. J. T. Groenman

Vrijwel alle stellingen die in een planimetrieboek voor schoolgebruik staan, vinden we reeds in de Elementen van Euclides. Het leek er lange tijd op, of

er op dit gebied niets nieuws meer te ontdekken viel. Toch zijn er later nog heel wat interessante stellingen gevonden. Een ervan zullen we hier bekijken.

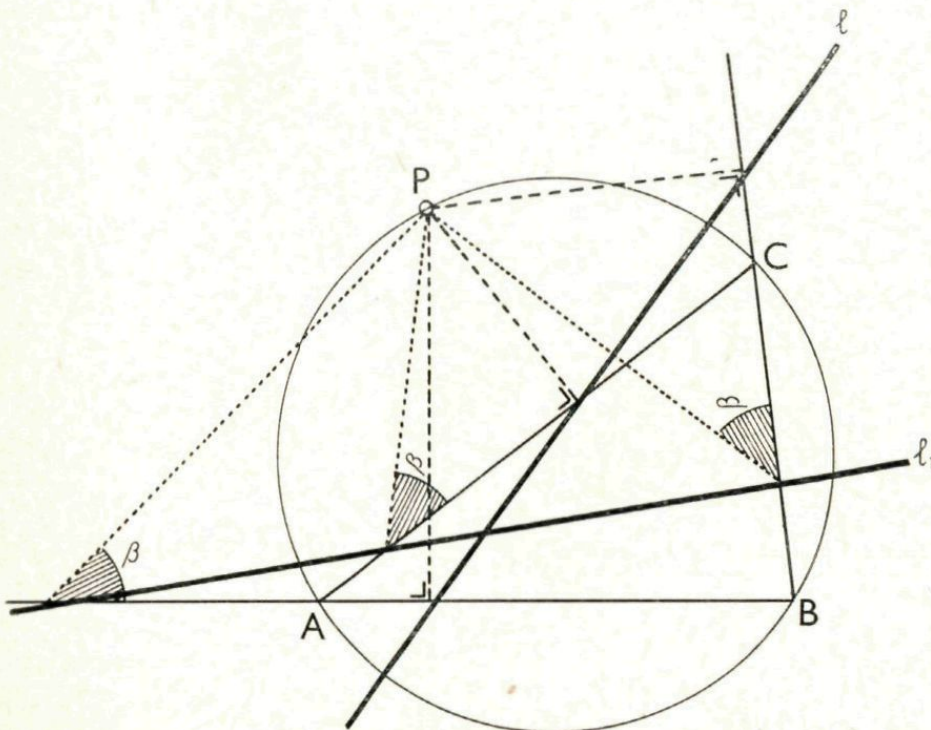


Fig. 8

1. $\triangle ABC$ is een willekeurige driehoek; op de omgeschreven cirkel daarvan ligt een punt P . Uit P laat men loodlijnen neer op de drie zijden van de driehoek.

Dan zijn de drie voetpunten van deze loodlijnen collineair, d.w.z. ze liggen op één lijn. Deze lijn noemt men de *rechte van Wallace* (zie lijn l in figuur 8). Wallace (1768–1843) was een Engels wiskundige.

2. Wij zullen deze bekende stelling bewijzen als bijzonder geval van een algemenere stelling, die als volgt luidt:

$\triangle ABC$ is een willekeurige driehoek; op de omschreven cirkel daarvan ligt een punt P . Uit P trekt men drie lijnen, die resp. met AB , CA en BC eenzelfde hoek β maken.

Dan zijn de „voetpunten” van deze lijnen collineair.

Het zal duidelijk zijn, dat de eerste stelling een bijzonder geval is van de tweede, waarbij $\beta = 90^\circ$ is gekozen. In figuur 8 is $\beta = 45^\circ$ genomen (zie lijn l_1).

3. Wij zullen de onder 2 genoemde stelling bewijzen met behulp van een draaiing en een vermenigvuldiging, d.w.z. met gebruik van „transformaties”. Dit bewijs is van de Franse wiskundige PONCELET (1788–1867) (fig. 9).

In figuur 9 zien we, dat $ABCP$ een koordenvierhoek is. Daarom zijn de hoeken PAB en PCC_2 gelijk. Stel hun grootte voor door α . Het is nu mogelijk op AC een punt D te construeren zo, dat ook $\angle PDC = \alpha$ is. (Maak daarvoor boog AQ gelijk aan boog AP en trek PQ). Nu is de zijde ADC een bijzonder geval van de rechte van WALLACE.

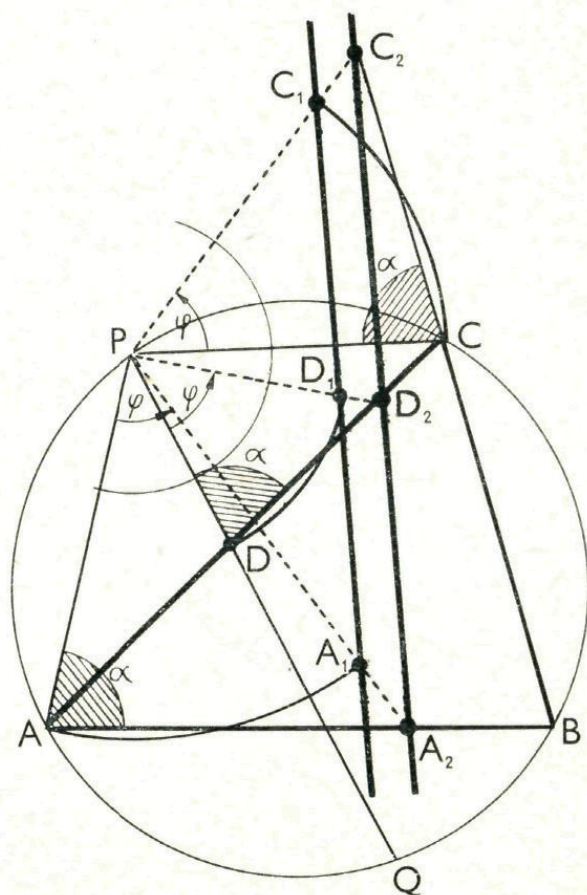


Fig. 9

We laten nu de punten van het vlak van $\triangle ABC$ twee transformaties ondergaan, nl. een draaiing en daarna een vermenigvuldiging. Zowel bij draaien als bij vermenigvuldigen is de beeldfiguur van een rechte weer een rechte. We onderzoeken welke de beeldfiguren zijn van de rechte ADC .

Om te beginnen laten we de punten van het vlak een draaiing over een hoek φ ondergaan om P als middelpunt. Daarbij is A_1 het beeldpunt van A , D_1 dat van D en C_1 dat van C . Ze liggen op de

rechte $A_1D_1C_1$, die de beeldfiguur is van de rechte ADC . We verlengen nu PA_1 , PD_1 en PC_1 tot A_2 , D_2 en C_2 . Deze drie punten liggen, zoals in fig. 9 blijkt op de zijlijnen van de driehoek.

De driehoeken PAA_2 , PDD_2 en PCC_2 hebben nu telkens twee hoeken gelijk (α en φ) en zijn daarom gelijkvormig. Daaruit volgt:

- (1) $\angle PA_2A = \angle PD_2D = \angle PC_2C = 180^\circ - \alpha - \varphi$.
- (2) $PA_2:PA = PD_2:PD = PC_2:PC$ en dus ook
- (3) $PA_2:PA_1 = PD_2:PD_1 = PC_2:PC_1$.

Hieruit blijkt, dat de punten A_2 , B_2 en C_2 verkregen kunnen worden door de punten van het vlak van $\triangle ABC$ te onderwerpen aan de vermenigvuldigingstransformatie met P als centrum en met de factor $\frac{PA_2}{PA_1}$.

PA_1

$A_2D_2C_2$ is dan beeldfiguur van $A_1D_1C_1$ en dus weer een rechte.

Hiermee is de in 2 genoemde stelling bewezen. Men kiese nl. $\beta = 180^\circ - \alpha - \varphi$, dus $\varphi = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

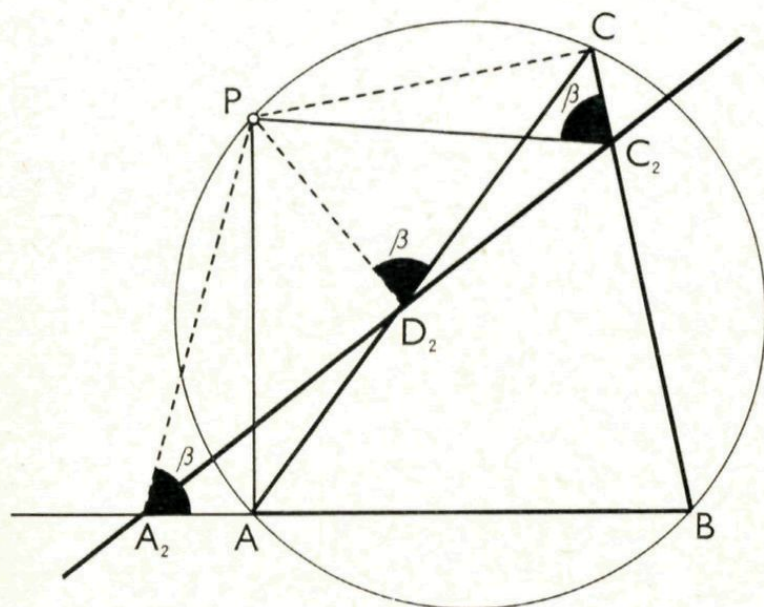


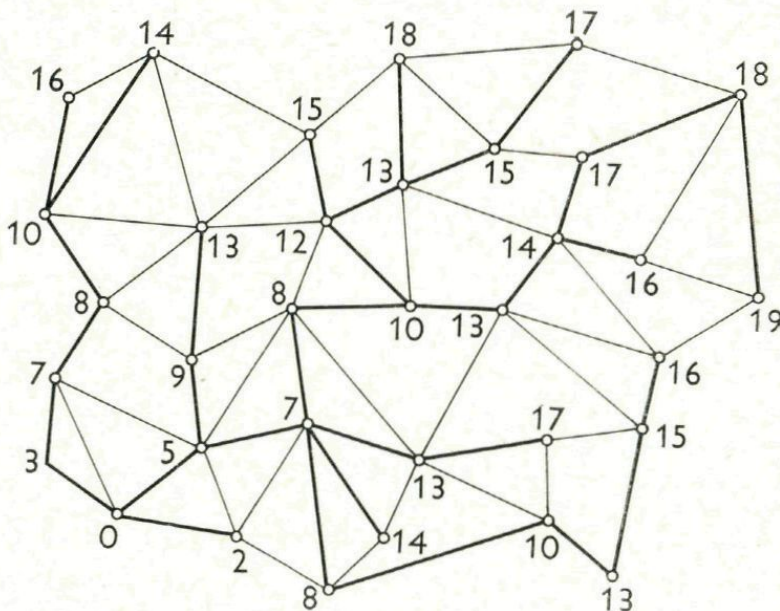
Fig. 10

4. Dat de punten A_2 , D_2 en C_2 collineair zijn, kan ook gemakkelijk bewezen worden door slechts gebruik te maken van koordenvierhoeken. Zie in fig. 10 bijvoorbeeld vierhoek PD_2C_2C . De lezer zal er wel in slagen met behulp van deze koordenvierhoeken te bewijzen, dat de hoeken A_2D_2A en C_2D_2C gelijk zijn, waaruit dan volgt, dat A_2D_2 en D_2C_2 in elkaars verlengde liggen.

WIMECOS-PRIJSVRAAG I, OPLOSSING

De methode om de gevraagde antwoorden te vinden kan als volgt beschreven worden: Kies een van de verbindingslijnstukken van de figuur uit. Zoek een veelhoek, waarvan het uitgekozen lijnstuk een zijde is. Vergelijk het getal bij de uitgekozen zijde met de som van de getallen bij de andere zijden. Vind je dat het eerste getal groter is dan het tweede, dan poets je de uitgekozen zijde uit. Dit proces wordt herhaald tot er geen veelhoeken meer in de figuur voorkomen.

Fig. 11



Het resultaat is figuur 10. De dik getrokken lijnen stellen de gevraagde routes voor. De dunne lijnen behoren eigenlijk uitgepoetst te zijn. Nu je de routes kent is het vinden van de prijzen niet moeilijk meer; ze zijn in de figuur bij de stippen geschreven.

WIMECOS-PRIJSVRAAG II

(Zie vooral Pyth. 3, blz. 68)

Ik heb zes letter-kubusjes. Elk daarvan heeft vijf blanco zijvlakken, maar op het zesde zijvlak is bij elk een letter geschilderd. Ze zijn allemaal even groot. Ze liggen keurig netjes op een rij van links naar rechts voor me, stevig tegen elkaar gedrukt met de letterzijvlakken naar boven. Die letters vormen nu het woord ORKEST.

Met die kubusjes ga ik spelen volgens regels, die ik mezelf stel. Ik wil ze namelijk een nieuw woord laten vormen op precies dezelfde manier, op een rij van links naar rechts liggende en stevig tegen elkaar gedrukt. Daarvoor zal ik ze moeten gaan bewegen. Mijn spelregels staan me niet toe om meer dan één kubus tegelijk een andere plaats te geven. Ik mag ze niet van de tafel tillen. Ik mag ze niet verschuiven. Ik mag ze alleen laten kantelen om een ribbe, tot ze weer op tafel rusten. Maar gelukkig mag ik die kantelhandeling net zo vaak uitvoeren als ik wil, met welke

kubus dan ook. En gelukkig behoef ik ook niet de kubussen een voor een naar hun nieuwe plaatsen te brengen, want ik heb mezelf toegestaan om een zojuist verplaatste kubus voorlopig even te laten liggen, tijdelijk met een of meer andere kubussen aan het werk te gaan, om dan later weer terug te komen op die eerste.

Van te voren heb ik overwogen, dat ik met de zes letters twee andere woorden moet kunnen maken: KROEST en STOKER. Het lukt mij nu na enig proberen om het woord KROEST te maken, maar STOKER wil maar niet lukken.

Wie helpt mij nu uit de onzekerheid. Probeer ik niet goed genoeg of is het echt onmogelijk om STOKER te maken?

Inzendingen vóór 1 april 1964 aan A. van Tooren, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

°OF

door Dr. P. G. J. Vredenduin.

Elke wetenschap heeft zijn eigen vaktaal en de wiskunde natuurlijk ook. Zoals jullie wel weten, is de wiskundige erg precies bij het ontwerpen van zijn vaktaal. Van elk woord, dat hij gebruikt, vertelt hij nauwkeurig, welke betekenis hij eraan wil hechten. Hij doet dit door van dit woord een definitie te geven. Het gevolg daarvan is, dat in de wiskunde vaak woorden gebruikt worden, die in de dagelijkse omgangstaal ook voorkomen, maar waarbij toch de wiskundige betekenis van het woord niet geheel dezelfde is als de betekenis, die men er in de dagelijkse omgang aan hecht. Zo hebben jullie allemaal het woord hoek allang gebruikt, voordat je het in de wiskunde tegenkwam. Maar in de wiskunde kan een hoek ook gestrekt zijn en niemand, die op straat loopt, zal het in zijn hoofd halen te zeggen, dat hij een gestrekte hoek omslaat, als hij rechtdoor loopt. Ook zal niemand van een vierkante tafel zeggen, dat het blad ervan een rechthoek is en zeker niet, dat het een parallellogram is. Maar voor de wiskundige is (ten gevolge van zijn definities) elk vierkant een rechthoek en ook een parallellogram.

In dit artikeltje willen we het hebben over één zo'n woord, dat zowel in de dagelijkse omgangstaal als in de wiskunde gebruikt wordt, maar dat niet in beide dezelfde betekenis heeft. Dit woord is het woord „of”. Jullie hebt het allemaal gebruikt zowel in de wiskunde als daarbuiten. Misschien is je daarbij verschil in betekenis opgevallen, misschien ook niet. Denk er, voordat je verder leest, eens even over na, of je ooit verschil gemerkt hebt.

Om te proberen het verschil op het spoor te komen, wil ik een paar voorbeelden geven, waarbij we nagaan, wat „of” in de omgangstaal betekent.

Eerste voorbeeld. Daar loopt een haas of een konijn. Wat bedoelt degene, die dit zegt? Hij bedoelt hiermee:

- a. dat het uitgesloten is, dat het beest, dat hij ziet lopen, geen haas en ook geen konijn is,
b. dat hij niet zeker weet, welk van de twee het is.
Zijn uitspraak houdt dus in een samengaan van onzekerheid (haas, konijn?) en van zekerheid (niets anders).

Tweede voorbeeld. Bij het dessert wordt door de gastvrouw fruit gepresenteerd. Tegen een van de jongste gasten zegt ze: „Je mag een appel of een peer nemen.” Zonder twijfel is haar bedoeling hiermee: je mag een appel nemen, je mag een peer nemen, maar je mag niet zowel een appel als een peer nemen. In de betekenis van „of” is hier begrepen „niet allebei”.

Derde voorbeeld. Heb je ook een dubbeltje of een kwartje in je portemonnee? De aangesprokene zal antwoorden, als hij een dubbeltje heeft: „ja, een dubbeltje” en als hij zowel een dubbeltje als een kwartje blijkt te hebben: „ja, allebei”. Hij zal alleen maar „neen” antwoorden, als hij geen dubbeltje en ook geen kwartje heeft. Neemt men in het vorige voorbeeld een peer en een appel, dan zal de gastvrouw zeggen, dat dit niet de bedoeling was. Maar als men in dit voorbeeld een kwartje en een dubbeltje heeft en de gestelde vraag met „neen” beantwoordt, dan zal de vrager zeggen, dat men hem slecht begrepen heeft.

Tracht men voorbeelden te vinden, waarin het „of” bedoeld wordt „een van beide”, dan blijkt dit gemakkelijker dan het vinden van voorbeelden, waarin „of” betekent „minstens een van beide”. Van het laatste wil ik hier nog twee voorbeelden geven, waarvan het eerste ontleend is aan een Amerikaans schoolboek.

Vierde voorbeeld. Twee dames wonen in Amsterdam en in Brussel. Ze hebben een gemeenschappelijke vriendin in New York, die over een week jarig is. Ze overleggen per telefoon, wat ze haar zullen zenden. De tijd is kort en daarom zegt de een tegen de ander: „Laten we ervoor zorgen, dat we vandaag onze pakjes verzenden, dan komt jouw of mijn pakje in elk geval nog wel op tijd.” Hiermee is kennelijk niet bedoeld uit te sluiten, dat beide pakjes op tijd aankomen.

Vijfde voorbeeld. De overheid wil bewerkstelligen, dat arbeidsonvolwaardigen ondersteuning krijgen. De overheid gaat er daarbij van uit, dat invaliden niet arbeidsvolwaardig zijn en dat personen boven de 65 jaar het ook niet zijn. Ze stelt daarom vast: personen, die invalide of ouder dan 65 jaar zijn, krijgen van staatswege ondersteuning.

Niemand zal hieruit lezen, dat een invalide, die bovendien ouder is dan 65 jaar geen recht heeft op ondersteuning.

Met „A of B” wordt dus soms bedoeld, dat A en B niet beide waar zijn, soms echter dat het waar zijn van beide niet uitgesloten is.

Verder bedoelt men soms met „A of B”, dat het onzeker is of A waar is en eveneens of B waar is, terwijl in andere gevallen deze onzekerheid geen rol speelt. Zo speelt in het vijfde voorbeeld de onzekerheid geen rol. Er is stellig niet bedoeld, dat iemand ondersteuning krijgt als men niet zeker weet, dat hij invalide is en ook niet dat hij ouder is dan 65 jaar, terwijl wel vaststaat, dat een van deze twee het geval is.

Als je op de middelbare school komt, ben je gewoon het woord „of” in deze verschillende betekenissen te gebruiken zonder je er ooit rekenschap van te geven, wat je precies bedoelt, als je „of” zegt. De gevolgen daarvan blijven uiteraard niet uit. Ik wil dit illustreren aan de hand van enige antwoorden, die ik elk jaar krijg bij het oplossen van vraagstukken over ongelijkheden in de tweede klas.

Zesde voorbeeld. Welke waarden van x voldoen aan de ongelijkheid

$$x^2 \geq -1 \text{ (dus } x^2 > -1 \text{ of } x^2 = -1)?$$

Vaak wordt als antwoord gegeven, dat de ongelijkheid $x^2 \geq -1$ vals is (d.w.z. dat er geen enkele waarde van x aan voldoet), omdat x^2 immers niet gelijk aan -1 kan zijn. Weliswaar voldoet elke waarde van x aan $x^2 > -1$, maar het is onmogelijk x zo te kiezen, dat $x^2 = -1$. En daardoor komt men in de verleiding te zeggen, dat $x^2 \geq -1$ vals is. Degene, die dit antwoord geeft, is helemaal niet dom. Hij redeneert als volgt:

Niemand haalt het in zijn hoofd om te zeggen: elke dag om 12 uur of om kwart over 12 slaat de torenklok twaalf. Zo iets zeg je niet, als je zeker weet, dat de torenklok altijd om 12 uur, maar nooit om kwart over 12, twaalf slaat. En even „idioot” is het om te zeggen, dat voor elke waarde van x $x^2 > -1$ of $x^2 = -1$ is, als je zeker weet, dat het eerste altijd en het tweede nooit het geval is. Dit is verkeerd taalgebruik en dus is het fout.

Daarom wordt $x^2 \geq -1$ voor vals gehouden.

De oorzaak van de moeilijkheid ligt hierin: In de dagelijkse omgang wordt met A of B soms bedoeld, dat het onzeker is of A juist is en eveneens onzeker of B juist is (eerste voorbeeld: haas, konijn?). Houdt men vast aan deze betekenis van „of”, dan moet men verwerpen, dat $x^2 \geq -1$, als men zeker weet, dat $x^2 = -1$ onmogelijk is.

Zevende voorbeeld. Welke waarden van x voldoen aan

$$x > 2 \text{ of } x < 6?$$

Op de vraag, of 1 voldoet, is altijd het antwoord: ja, want $1 < 6$. En op de vraag, of 8 voldoet: ja, want $8 > 2$. De moeilijkheid komt echter pas, als men vraagt, of 5 voldoet. Vaak wordt dan als antwoord gegeven: neen, want dan is $x > 2$ *en* $x < 6$, maar niet $x > 2$ *of* $x < 6$. En alweer lang geen dom antwoord.

Degene, die dit antwoord geeft, denkt aan gevallen, zoals in het tweede voorbeeld. Daar werd met „een appel of een peer” uitdrukkelijk bedoeld: niet allebei. Welnu, wie denkt, dat met „of” bedoeld wordt „niet allebei”, komt ertoe te zeggen, dat 5 niet voldoet aan $x > 2$ of $x < 6$.

Meningsverschillen zoals die zich bij het zesde en zevende voorbeeld kunnen voordoen, vonden hun oorsprong daarin, dat verschillende personen aan het woord „of” verschillende betekenissen hechtten. Men kan dergelijke meningsverschillen alleen maar uit de weg ruimen door zorgvuldig vast te stellen, wat men onder „of” wenst te verstaan. En zo is voor de wiskundigen de noodzaak gebleken precies te zeggen, wat ze met „of” bedoelen.

In de wiskunde heeft men de volgende afspraak gemaakt: als men zegt, dat „A of B” waar is, bedoelt men dat *minstens één van de beide uitspraken A en B waar is*. Van onzekerheid (haas, konijn?) behoeft dus geen sprake te zijn, terwijl het verder wel mogelijk is, dat A en B allebei waar zijn. En nu we deze afspraak gemaakt hebben, weten we dus, dat elk getal voldoet aan $x^2 \geq -1$ en dat 5 voldoet aan $x > 2$ of $x < 6$.

Er zijn altijd grapijassen, die denken, dat ze nu ook in het dagelijks leven „of” in deze binnen de wiskunde aanvaarde betekenis kunnen gaan gebruiken. Deze „leukerds” zeggen dan, b.v. „het gras is groen of paars”, „een paard is een ezel of het is een zoogdier”, enz. Dit is en blijft natuurlijk onzinnig taalgebruik. Of om een voorbeeld te noemen, dat beter aanspreekt: onderstel eens dat je volgende week een algebra- en een meetkunde proefwerk hebt en dat je om de een of andere onverklaarbare reden je ouders dit liever niet wilt vertellen. Helaas, je ouders informeren ernaar en je wilt toch ook niet liegen. En dus zeg je: we krijgen volgende week een algebra of een meetkunde proefwerk. Een week later zijn je ouders ervan op de hoogte gekomen, dat je beide proefwerken gekregen hebt. Wat dacht je: zullen ze zeggen, dat je de waarheid gesproken hebt, of zullen ze zeggen, dat je ze voor de gek gehouden hebt? Zonder twijfel het laatste, want in de omgangstaal betekent „een algebra of een meetkunde proefwerk” in het bovengenoemde zinsverband: een van beide, maar het is nog niet bekend welk van de twee. En dus heb je willens en wetens gelogen en kan je je niet erop beroepen, dat men afgesproken heeft *binnen de wiskunde* met „of” iets anders te bedoelen.

°Computers IV

Een computer is een informatieverwerkend apparaat, maar . . . die informatie moet aan de computer worden meegedeeld, evenals de manier, waarop deze moet worden verwerkt. Dat „mededelen” is de taak van de programmeur.

Om iets van deze taak van de programmeur te kunnen begrijpen, gaan we eerst nog eens kijken naar de werking van het geheugen van het apparaat. Men zou zich dit geheugen kunnen voorstellen als een ladenkast met een zeer groot aantal laadjes. Ieder laadje is voorzien van een nummer, dat het „adres” wordt genoemd.

In het laadje kan een „woord” liggen, dat bestaat uit een combinatie van letters, tekens en cijfers, bijvoorbeeld:

$\times .021.022.024.131.$

Wordt dit woord vanuit het geheugen naar het *rekenorgaan* gezonden, dan wordt het daar opgevat als getal, waarop verschillende rekenkundige bewerkingen moeten worden toegepast. Wordt het echter naar het *besturingsorgaan* gebracht, dan wordt het als een instructie beschouwd, bijvoorbeeld:

Breng het produkt van de getallen op de adressen 021 en 022 naar het adres 024, „lees” daarna de instructie op adres 131.

Stel, dat er zich in het geheugen de volgende gegevens bevinden:

<i>Adres</i>	<i>Inhoud</i>
021	het getal 5
022	het getal 3
023	het getal 17
130	het woord $\times .021.022.024.131$
131	het woord $- .024.023.025.132$

Wanneer men nu begint de inhoud van adres 130 in het besturingsorgaan te brengen, dan gebeurt het volgende:

Het produkt van 5 en 3 wordt berekend en de uitkomst 15 naar adres 024 gebracht. Het apparaat leest nu de inhoud van adres 131, die gaat naar het besturingsorgaan en dus wordt het verschil van de getallen 15 en 17 berekend en naar adres 025 gebracht. Dan leest het apparaat de inhoud van adres 132 enz. Op adres 025 zal dus het getal -2 genoteerd zijn.

Bij een ingewikkelde wiskundige berekening vergt het natuurlijk een uitgebreide boekhouding om te noteren op welke adressen er allemaal gegevens en instructies voorkomen, welke adressen het eerst moeten worden gebruikt, welke daarna volgen, enz. enz. Dit is dan ook haast

een onmenselijk werk, waarbij veel fouten en vergissingen worden gemaakt. Prof. Dr. A. van der Sluis zegt in zijn (bij J. B. Wolters uitgegeven) rede VAN ABACUS TOT COMPUTER:

Het gevalt namelijk dat vrijwel geen enkel programma, in om het even wat voor programmeertaal geschreven, foutloos is, zelfs in die mate, dat men U in een rekencentrum op welhaast eerbiedige toon verhaalt hoe een bepaalde medewerker toen en toen eens een programma heeft geschreven, dat zomaar goed was.

De nieuwste ontwikkelingen op het gebied van het programmeren bestaan o.a. hierin, dat men kans heeft gezien een groot gedeelte van het werk daarvan door de machine zelf te laten doen. Men geeft dan de opdrachten niet meer door moeizaam alle adressen op te sommen, maar instrueert de machine zodanig, dat deze, wanneer er bepaalde woorden per ponsband worden ingevoerd, daaruit de impulsen ontvangt om zelf de bijbehorende programmaonderdelen uit te zoeken en uit te voeren. Men kan de programma's dus nu schrijven in een taal, die door de machine „verstaan” wordt. Voor verschillende doeleinden zijn verschillende programmeertalen beschikbaar. Zo is er de ALGOL (Algorithmic language) voor wetenschappelijke doeleinden, de COBOL (Common Business Oriented Language) voor gebruik in bedrijven, terwijl de I.B.M. voor zijn apparaten een taal heeft ontwikkeld, die FORTRAN wordt genoemd.

Leerlingen ontwerpen programma's

De „Weston Junior Highschool” te Weston, Connecticut (USA) kreeg van de IBM een week lang een computer te leen. De leerlingen oefenden zich in het ontwerpen van programma's voor deze machine. Een daarvan was het volgende. Het werd opgeschreven in de voor dit apparaat „begrijpelijke” taal.

De machine kreeg de opdracht voor een aantal achtereenvolgende waarden van n de waarde van $n!$ te berekenen. [Zoals we weten betekent $n!$ het produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$].

Het programma bestaat uit zes stappen. Eerst een korte toelichting: $A \leftarrow 5$ betekent hierin: Vervang A door 5.

$B \leftarrow A \cdot B$ betekent: Vervang B door het produkt van A en B .

Print A, B betekent: Type op de schrijfmachine de waarden van de getallen A en B .

Hier zijn de zes stappen:

a. $A \leftarrow 1$

b. $B \leftarrow 1$

c. (1) $B \leftarrow A \cdot B$

d. Print A, B

e. $A \leftarrow A + 1$

f. Go to (1).

Het laatste commando geeft de computer opdracht om vanaf (1) het programma opnieuw te doorlopen. Wanneer dus niet op de een of andere manier een eind aan de werkzaamheden van de machine wordt gemaakt, dan zal deze voortdurend de laatste vier stappen van het programma herhalen.

Laten we nu even nagaan, wat de computer volgens dit programma doet:

- a. $A = 1$; b. $B = 1$; c. $B = 1 \times 1$; d. afgedrukt worden $A = 1$ en $B = 1$;
 - e. $A = 1 + 1 = 2$. Nu gaat het programma weer verder bij c dus:
 - c. $B = 2 \times 1 = 2$; d. afgedrukt worden $A = 2$ en $B = 2$; e. $A = 2 + 1 = 3$;
 - c. $B = 3 \times 2 = 6$; d. afgedrukt worden $A = 3$ en $B = 6$; e. $A = 3 + 1 = 4$;
 - c. $B = 4 \times 6 = 24$; d. afgedrukt worden $A = 4$ en $B = 24$; e. $A = 4 + 1 = 5$;
- en zo voort.

We zien, dat telkens afgedrukt worden $A = n$ en $B = n!$.

Maar nu mag de computer niet eindeloos doorrekenen. Er moet dus in het programma een opdracht worden opgenomen om op een gegeven ogenblik te stoppen. Stel, dat we willen eindigen met $8!$. Dan nemen we in het programma enkele stappen meer op, zodat het er als volgt komt uit te zien:

- a. $A \leftarrow 1$
- b. $B \leftarrow 1$
- c. (1) $B \leftarrow A \cdot B$
- d. Print A, B
- e. $A \leftarrow A + 1$ (tot hiertoe is het programma dus hetzelfde)
- f. $C \leftarrow A - 9$
- g. If C 1, 2, 2
- h. (2) Stop, End.

Stap g wordt door de computer begrepen als een opdracht om een beslissing te nemen, nl. Als $C < 0$ ga dan naar (1), als $C = 0$ ga dan naar (2), als $C > 0$ ga dan naar (2). Bij (2), dat is dus stap h, krijgt de machine de opdracht om te stoppen en af te drukken EINDE.

Je kunt nu wel nagaan, dat de machine verder rekent zolang bij stap e het getal, dat voor A gekozen wordt, kleiner dan of gelijk aan 8 is. Zodra bij e verschijnt $A = 9$, wordt $C = 0$ en gaat de computer naar (2), dus stopt hij. De mogelijkheid om zulke beslissingen te nemen door te kiezen uit een aantal gevallen, maakt een computer zo waardevol.

We geven nog een voorbeeld van een programma, dat door een leerling van de Weston High School werd ontworpen. Het probleem luidde: Als het mogelijk zou zijn een stuk papier met een dikte van 0,0035 inches 150 maal dubbel te vouwen, hoe dik zou dan de kolom papier wel zijn? Bij een schatting blijkt gemakkelijk, dat dit een heel grote dikte wordt. Daarom werd besloten het antwoord uit te drukken in veelvoud van de afstand aarde-zon. Deze bedraagt ongeveer 93.000.000 miles.

(1 mile = 1609 m; 1 mile = 5280 feet = 12×5280 inches).

Hier is het programma:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| a. $X \leftarrow 12 \times 5280$ | (aantal inches in 1 mile) |
| b. $A \leftarrow X \times (93E + 6)$ | (aantal inches in de afstand aarde-zon, $93E + 6$ betekent 93×10^6) |
| c. $B \leftarrow 35E - 4$ | (dikte van het papier, nl. 35×10^{-4}) |
| d. $C \leftarrow 1$ | (we beginnen met 1 vel papier) |
| e. $D \leftarrow 1$ | (we beginnen met 1 keer vouwen) |
| f. (1) $F \leftarrow C \times 2$ | (F is het aantal vellen na het vouwen) |
| g. $G \leftarrow F \times B$ | (G is de dikte van dit aantal vellen) |
| h. $H \leftarrow G : A$ | (H is de dikte uitgedrukt in afstanden aarde-zon) |
| i. Print D, F, H | |
| j. $C \leftarrow F$ | (hier wordt voor C het nieuwe aantal vellen gekozen) |
| k. $D \leftarrow D + 1$ | (we vouwen een keer vaker) |
| l. $Z \leftarrow D - 151$ | (we willen stoppen bij de 150ste keer) |
| m. If Z 1, 2, 2 | (hier maakt de computer weer een beslissing door te onderzoeken of $Z < 0$, $= 0$ of > 0 wordt.) |
| n. (2) Stop, End. | |

Het eindantwoord, dat ongeveer 8×10^{29} afstanden-aarde-zon bleek te zijn, werd door de computer in enkele minuten berekend.

°Legpuzzelproblemen

door Drs. C. van Schagen te Almelo.

In een speelgoedwinkel kan men legpuzzels kopen, waarvan de stukjes de vorm hebben van ruiten en rechthoekig-gelijkbenige driehoeken. De kinderen, waarvoor deze puzzels bestemd zijn, gebruiken ze meestal om er poppetjes en beestjes van te leggen. Aan vader of moeder komt na afloop de taak toe de stukjes weer in de doos op te bergen. En dit kan, omdat de stukjes mooi gekleurd zijn, op vele schone manieren. Maar ook uit wiskundig oogpunt valt er veel aan te beleven.

Als je de stukjes bekijkt (fig. 12), dan zie je dat de zijden maar twee verschillende lengten hebben. Als we de zijden van de ruiten en de rechthoekszijden van de driehoeken de lengte 1 geven, dan hebben de schuine zijden van de driehoeken de lengte $\sqrt{2}$. Je rekent ook wel even na, dat elke driehoek de oppervlakte $\frac{1}{2}$ heeft en elke ruit de oppervlakte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

In de figuur zie je, dat de doos, waarin de stukjes kunnen worden opgeborgen 'binnenwerks' de lengte $3 + 2\sqrt{2}$ en de breedte $2 + 2\sqrt{2}$, dus de oppervlakte $(3 + 2\sqrt{2})(2 + 2\sqrt{2}) = 14 + 10\sqrt{2}$ heeft. Je kunt dat gemakkelijk controleren door het aantal stukjes te tellen. Misschien kun je in je algebraboek het bewijs vinden, dat deze oppervlakte alleen maar verkregen kan worden met 28 driehoeken en

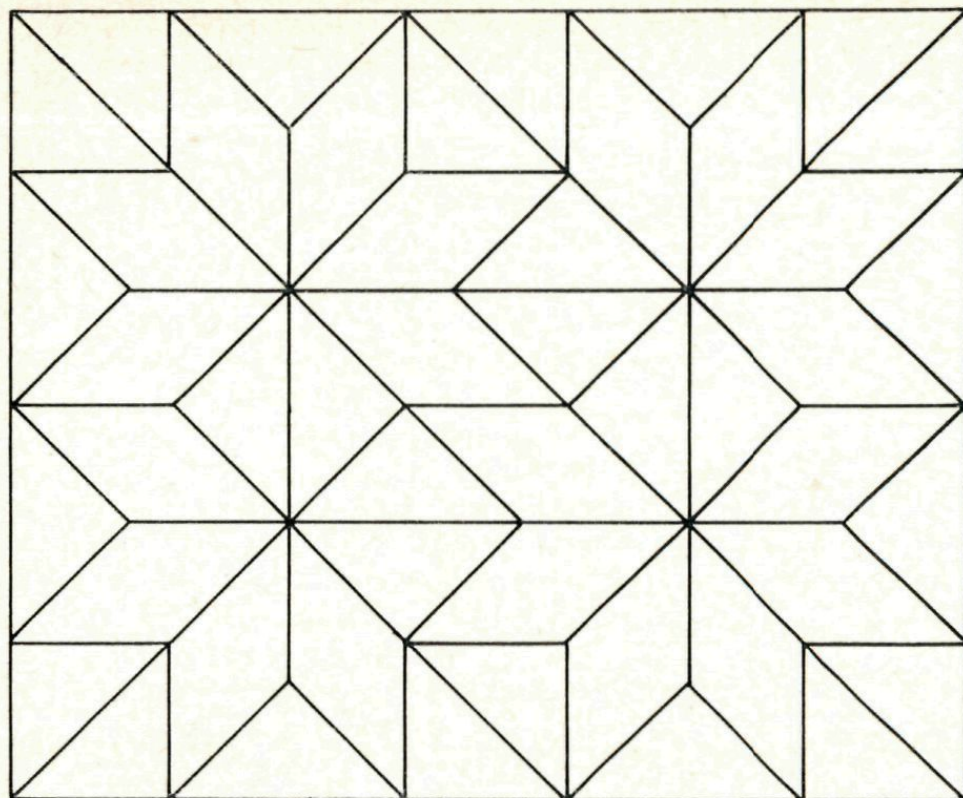


Fig. 12

20 ruiten en niet met andere aantallen van deze stukjes. Anders moet je zelf maar eens proberen dat te bewijzen. Het is eigenlijk wel merkwaardig, dat de indeling van de omtrek van de rechthoek zo beslissend is voor dat wat er zich binnenin bevindt.

Als de kartonnen doos, waarin de stukjes opgeborgen behoren te worden, versleten is, zodat je niet meer gedwongen bent juist deze ene rechthoek te leggen, kun je op het idee komen te onderzoeken of met dezelfde stukjes ook andere rechthoeken te leggen zijn. Om dat onderzoek in te leiden bekijken we eerst het eenvoudiger geval, dat we alleen maar vierkante stukjes hebben, bijvoorbeeld een aantal van 72. Alle mogelijke rechthoeken, die daarmee te leggen zijn, kunnen we vinden door 72 in factoren te ontbinden en dan deze factoren op alle mogelijke manieren in twee groepen samen te voegen:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 = 2 \cdot (2^2 \cdot 3^2) = 2^2 \cdot (2 \cdot 3^2) = (2 \cdot 3)(2^2 \cdot 3) = (2^3 \cdot 3)(3)$$

Dus $72 = 8 \cdot 9 = 2 \cdot 36 = 4 \cdot 18 = 6 \cdot 12 = 24 \cdot 3.$

In ons geval moeten we dus trachten $14 + 10\sqrt{2}$ verder in factoren te ontbinden. We weten al, dat $14 + 10\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})(2 + 2\sqrt{2})$. We proberen of $3 + 2\sqrt{2}$ verder te ontbinden is, dus of we natuurlijke getallen a, b, c en d kunnen vinden zo, dat $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$.

Dan moeten deze getallen zo gekozen worden, dat

$$ac + 2bd = 3 \text{ en } ad + bc = 2$$

Na enig proberen blijkt, dat hieraan voldaan wordt door $a = b = c = d = 1$. Dus $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$.

Gemakkelijk zie je, dat $2 + 2\sqrt{2} = 2(1 + \sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2(1 + \sqrt{2})$.

Voor $14 + 10\sqrt{2}$ vinden we dus de ontbinding $(\sqrt{2})^2(1 + \sqrt{2})^3$.

Als je deze factoren nu ook in twee groepen gaat verdelen, dan kun je bijv. rechthoeken vinden met zijden:

$$2 + \sqrt{2} \text{ en } 4 + 3\sqrt{2}$$

of $2 \text{ en } 7 + 5\sqrt{2}$

of $1 + \sqrt{2} \text{ en } 6 + 4\sqrt{2}$.

Maar of die rechthoeken nu ook allemaal met behulp van de 48 stukjes te leggen zijn, moet je zelf maar eens proberen.

OPLOSSINGEN van de DENKERTJES in *Pythagoras* 3-3

51. Hier was alleen een 10 te verdienen met een vlammend protest tegen zulk een foute opgave. Figuur 13 toont, dat een vierhoek geen parallellogram hoeft te zijn wanneer hij twee gelijke overstaande zijden en twee gelijke overstaande hoeken heeft.

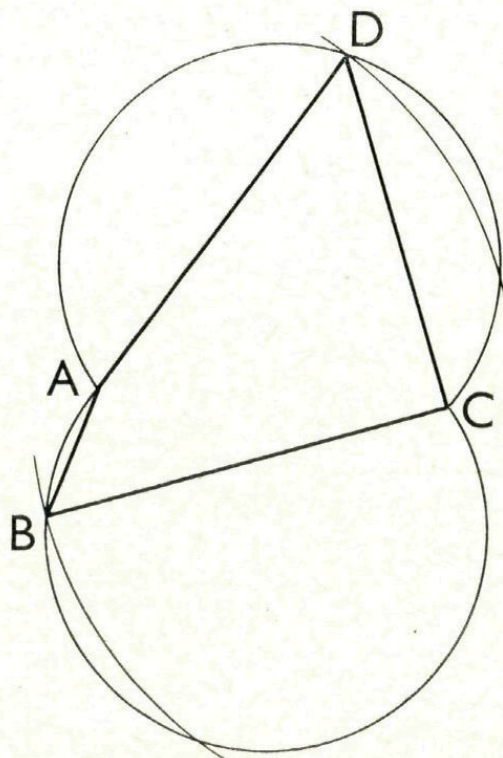


Fig 13

52. Een regelmatig twintigvlak kan men volledig fotograferen met twee opnamen. Men neemt ze vanuit twee punten, die liggen op een lijn door twee overstaande hoek-

punten. Die twee punten moeten dan aan weerszijden van het veelvlak liggen en zich niet te dicht daarbij bevinden. (Zie de foto op de binnenzijde van de omslag). Voor een bol heeft men echter meer foto's nodig. Drie is te weinig. (Noem de drie punten, van waaruit men fotograferen wil, A.B.C. Breng vlak ABC aan. Trek door het middelpunt van de bol een loodlijn op vlak ABC. Noem het snijpunt van deze loodlijn met de boloppervlakte, dat het verste van vlak ABC verwijderd is, P. Dan staat P op geen der foto's). Vier is voldoende. (Neem ze vanuit de hoekpunten van een willekeurig viervlak, waarvan de bol de ingeschreven bol is).

53. De hoeken DEA en DEC zijn elkaars supplement en komen in congruente driehoeken voor. Dat kan alleen als elk 90° is. De drie driehoekjes zijn dus rechthoekig, DC en DA zijn schuine zijden. Ook driehoek ABC is dus rechthoekig, en wel in B. Hieruit blijkt al, dat driehoek ABC gelijkvormig is met driehoek DEC. Men kan echter nog verder gaan en beredeneren dat driehoek ABC half-gelijkzijdig is.
54. Antwoord: 16 „flitsen” van 10 seconden en 9 filmpjes van 1 minuut.
55. Elke volgende laag sigaretten legt men in de „gleuven” van de vorige laag. Zo kan men 11 lagen maken; samen nemen die een hoogte in van $8 + 40\sqrt{3} = 77,3$ mm. Die lagen bevatten afwisselend 20 en 19 sigaretten. Men kan er dus $6 \cdot 20 + 5 \cdot 19 = 215$ sigaretten in opbergen.
56. Daar de oppervlakte van driehoek ABC gelijk is aan 24 en de hoogtelijn uit C gelijk is aan $b - 1$, is $c(b - 1) = 48$. Daar b en c positieve, gehele getallen zijn, levert dit slechts een eindig aantal mogelijkheden: $b = 49$ en $c = 1$, $b = 25$ en $c = 2$, enzovoorts. Na combineren met de andere gegevens blijken er slechts twee van die mogelijkheden de moeite van verder onderzoek waard te zijn: $a = 15$, $b = 13$, $c = 4$ en $a = 33$, $b = 9$, $c = 6$. De eerste van die twee is meetkundig realiseerbaar, de tweede niet. Bij controle blijkt $a = 15$, $b = 13$ en $c = 4$ te voldoen.
57. Beschrijf twee cirkels met een straal van 5 cm, die de uiteinden van het gegeven lijnstuk tot middelpunten hebben. Teken de gemeenschappelijke raaklijnen van die twee cirkels. Er zijn nu twee „driehoekige” gebieden ontstaan, waarvan de punten buiten elk der cirkels en tussen de beide raaklijnen liggen. De gevraagde verzameling bevat alle inwendige punten van die twee gebieden en ook de grenspunten ervan, die niet op een van de twee raaklijnen liggen.
58. Trek vanuit het hoekpunt van de gegeven hoek twee halve rechten, die loodrecht staan op een van de twee benen en een zo groot mogelijke hoek maken met het andere been. Deze halve rechten behoren tot de gevraagde verzameling, evenals het binnengebied van de door hen bepaalde uitspringende hoek. Verder behoort nog tot de gevraagde verzameling de halve rechte, die deellijn is van de gegeven uitspringende hoek.
59. Cirkel 1 om A en door B; cirkel 2 om B en door A snijdt cirkel 1 in D en E; rechte 1 verbindt D en E; rechte 2 verbindt A en B en snijdt rechte 1 in F; cirkel 3 om F en door A snijdt DE o.a. in G; cirkel 4 om G en door F snijdt DE in H en I; rechte 3 verbindt A en H en snijdt cirkel 3 in A en C; rechte 4 verbindt B en C. Totaal: 4 cirkels en 4 rechten.
60. Het voorschrift kan luiden: lees de cijfers van links naar rechts en zoek het eerste cijfer dat gevolgd wordt door een groter cijfer; vind je dat cijfer, schrap het dan en vind je het niet, schrap dan het laatste cijfer rechts; begin opnieuw en herhaal deze opdracht tot je vijf cijfers geschrapt hebt.
594605418279992 wordt eerst 94605418279992, dan 9605418279992, dan 965418279992, dan 96548279992, tenslotte 9658279992.

Abacus

Latijn, betekent *telraam*. Ook gebruikt voor gelinieerd rekenbord. Op de lijnen werden schijfjes geplaatst, die afhankelijk van de lijn, waarop ze lagen, eenheden, tientallen, enz. aanduiden.

Definitie

Uit het Latijn, *definitio* = *bepaling*, *definire* = *begrenzen*, *finis* = *grens*.

Dodecaëder
Hexaëder
Icosaëder
Octaëder
Tetraëder

Uit het Grieks, *hedra* = *vlak*, *dodeka* = *twaalf*, *hex* = *zes*, *eikosi* = *twintig*, *okto* = *acht*, *tetra* (in samenstellingen) = *vier*.

Transformatie

Uit het Latijn, *transformare* = van gedaante doen veranderen, *trans* = *over*, *forma* = *vorm*. Bij de transformaties in de meetkunde, zoals verschuiven of spiegelen, verandert soms de vorm niet, maar de ligging der figuren wel.

Translatie

Uit het Latijn, *translatio* = *verplaatsing*. In de meetkunde wordt het woord translatie gebruikt voor een verschuiving.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden.

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,— per jaargang. Voor anderen f 3,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J.B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.