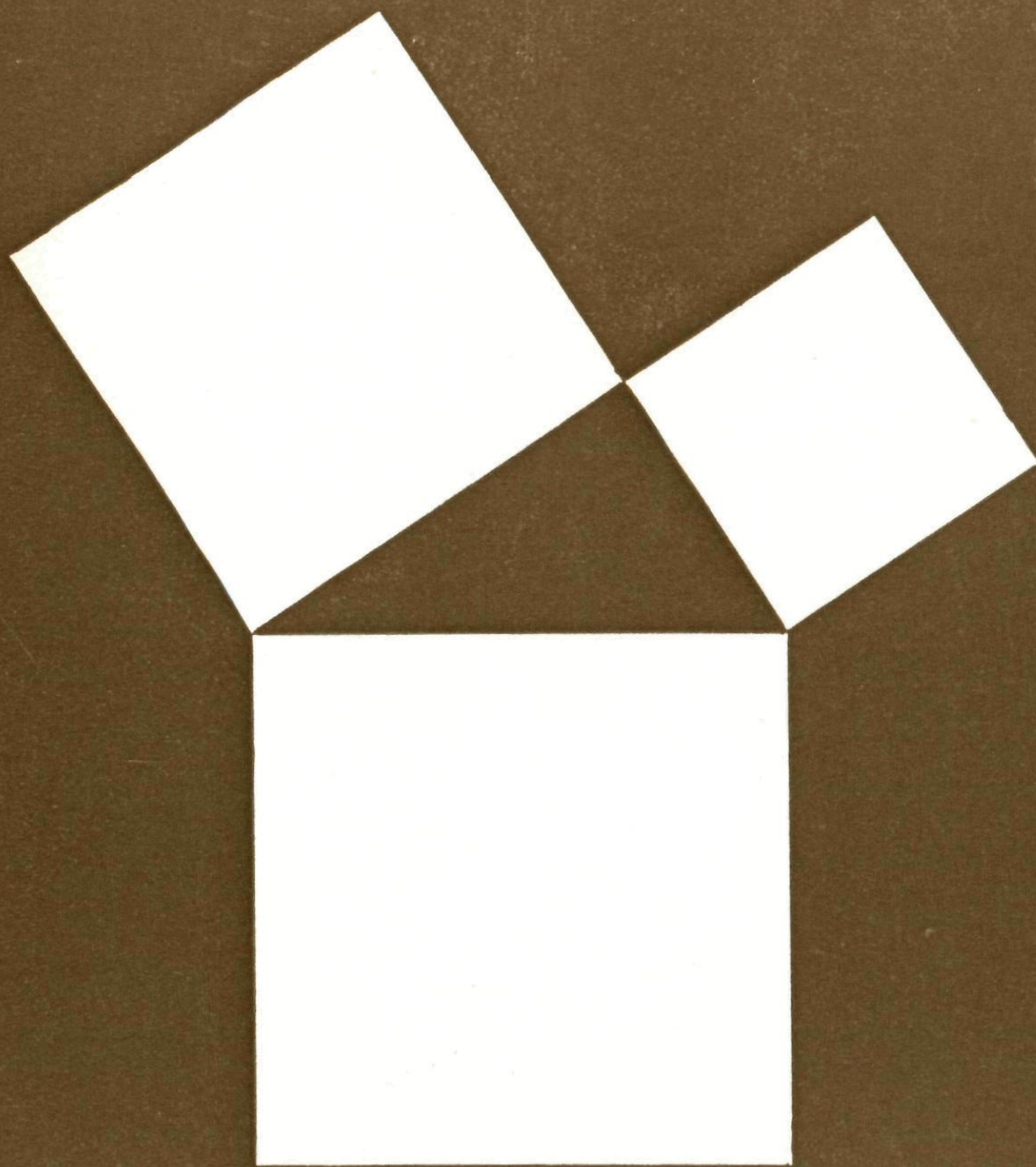


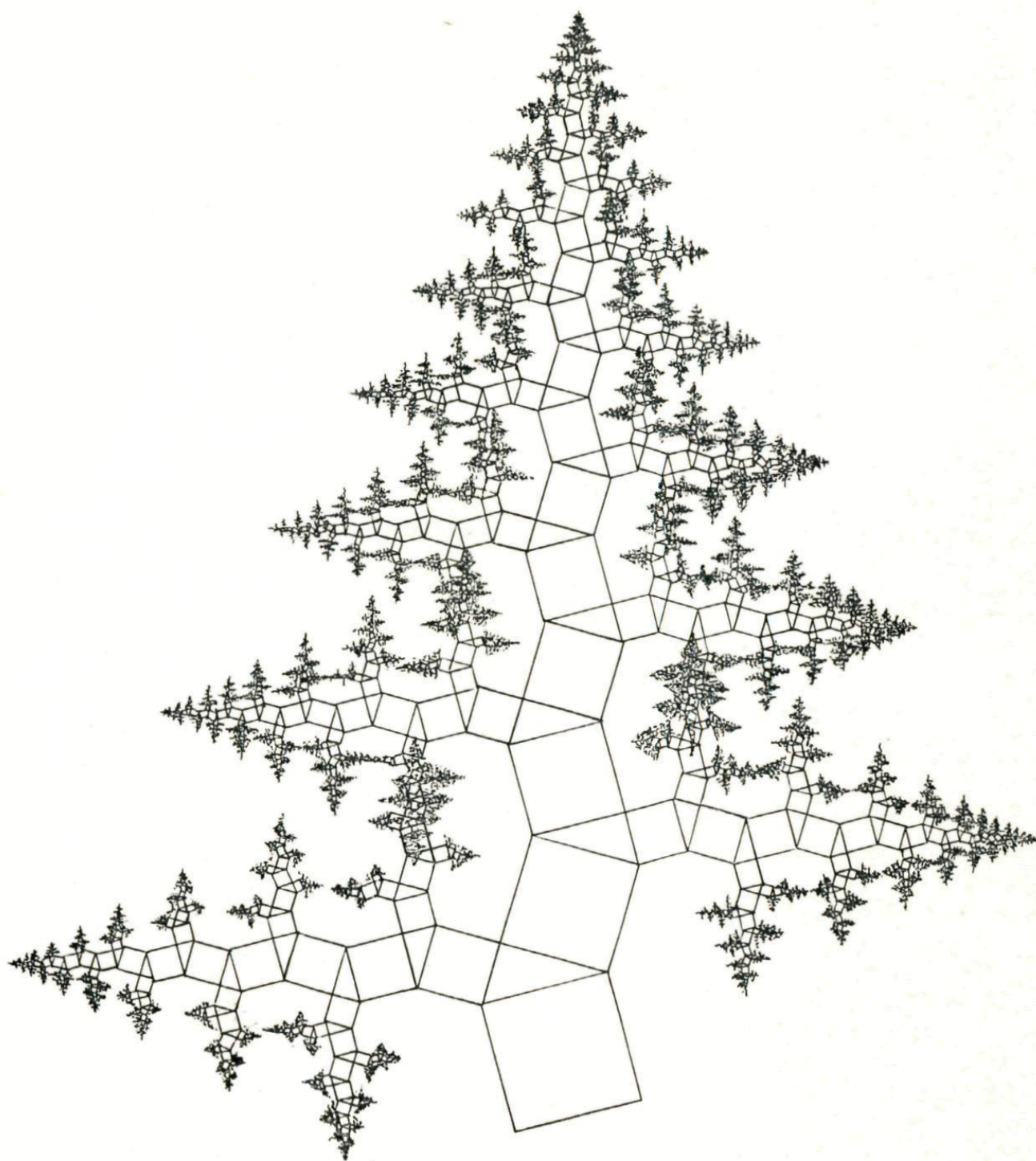
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

5

Derde jaargang



Boom van Pythagoras
(bladz. 110)

Aspirant-directeuren spelen assuradeurtje met computer

„Leermiddel” van Deense herkomst

UITHOORN, 9 okt. '63

Omstreeks dertig verzekeringsdeskundigen uit verscheidene West-europese landen zijn vandaag naar het I.B.M.-laboratorium te Uithoorn gekomen om verdeeld over acht voor deze gelegenheid geformeerde fictieve verzekeringsmaatschappijen elkaar te bestrijden en met elkaar samen te werken op een al even fictieve verzekeringsmarkt, gerepresenteerd door een programma in een elektronische rekenmachine.

Het spel is bedoeld om, als onderdeel van een uitgebreide cursus, aspirant-Bovenbazen op verzekeringsgebied een indruk te geven welke effecten beslissingen op basis van al hun theorieën in een gegeven praktijk (niet de hunne) zouden kunnen hebben.

Die praktijk is overigens niet zo vast gegeven. Er wordt aan het begin van het spel verondersteld, dat groepjes van vier tot vijf cursisten een bestaande verzekeringsmaatschappij moeten gaan leiden. Ze krijgen de beschikking over de resultaten van hun eigen bedrijf en die van de concurrenten, maar de marktvooruitzichten kennen ze niet.

Van het eigen bedrijf zijn bovendien bekend allerlei details als de resultaten per agent, de wijze en mate van herverzekering, de beleggingen, reclamekosten, administratiekosten enz.

Er wordt aangenomen dat het bedrijf gespecialiseerd is in schadeverzekeringen. Daarbij zijn drie klassen van verzekerden: de grote posten als bedrijven, middelgrote posten als winkels, woningen etc., en kleine posten als inboedels.

Bovendien werkt elke onderneming in drie geografische gebieden. Op de „thuismarkt” zijn twee concurrenten, op de beide andere markten speelt elk bedrijf een van de beide concurrenten van degene die daar zijn thuismarkt heeft.

Afwijkingen

Een duidelijke en misschien storende afwijking van de werkelijkheid is, dat de would-be directie niet weet wie haar concurrenten zijn. Zij kan dus haar beleid niet aan dat van haar concurrenten aanpassen.

Er zijn nog wel wat meer vereenvoudigingen in de veronderstellingen en de gegevens, die misschien de waarde van dit „beslissingsspel” als leermiddel ongunstig beïnvloeden. Aan de andere kant heeft de rekenmachine met het programma, zoals het nu is, al ruim tien minuten werk met het bepalen van de uitkomsten. *En dat bij een rekensnelheid in de orde van grootte van 100.000 elementaire handelingen per seconde.*

Van elke „directie” wordt nu verwacht, dat ze op basis van een analyse van alle gegevens gaat beslissen of en, zo ja, welke maatregelen er genomen moeten worden om de rentabiliteit van hun onderneming op de lange duur te verhogen.

De „directie” krijgt daarbij gelegenheid veranderingen aan te brengen in: het aantal agenten, de hoogte van de provisie, de salarissen, de vervanging van administratief personeel door machines, de beleggingen (waarbij ze de keuze hebben uit obligaties van twee verschillende instellingen en aandelen in twee verschillende ondernemingen, een koersoverzicht over de voorgaande vijftien jaar behoort tot de gegevens), het reclamebudget en drie soorten herverzekeringen.

Met name het laatstgenoemde punt geeft in de speelzaal een lawaai van belang, omdat de maatschappijen met de herverzekeraars (dat zijn de zeven andere) tot overeenstemming moeten komen over de premie, winstaandelen etc.

Rekenwerk

Zijn alle onderhandelingen binnen de directies en tussen de „bedrijven” afgesloten, dan worden de formulieren waarop de beslissingen zijn aangegeven per ponskaart aan de machine kenbaar gemaakt. Deze bergt, als gezegd, in haar programma een fictieve markt en een half uurtje nadat de „directies” hun beslissingen hebben doorgegeven, heeft de machine berekend wat er op die markt zou zijn gebeurd als gevolg van de aan het begin van het boekjaar genomen beslissingen.

Men ziet allerlei directe gevolgen: agenten die weglopen, omdat ze niet voldoende werden betaald, grote stijging van de produktie bij forse premieverhogingen – maar daarbij ook aanzienlijke stijging van de acquisitiekosten etc.

Men ziet, met dit „beslissingsspel” van Deense oorsprong – het programma is opgesteld aan de universiteit van Kopenhagen – wordt de cursist een practicum verschaft, waarin hij op korte termijn min of meer wijs kan worden zonder de schade en schande die hij in de werkelijkheid van het bedrijfsleven daartoe zou moeten ondervinden.

De computers krijgen in dit nummer dubbele aandacht, nl. in een krantenbericht (N.R.C.) en in een gesprek met een programmeuse. In het vorige nummer werden de regelmatige veelvlakken besproken. Ditmaal zien we opnieuw, dat Kepler er zich mee bezighield, maar wat minstens zo interessant is, we zien ook, dat deze regelmatige lichamen voorkomen bij de allerkleinste levende wezens, de virussen. Vreemde algebra's worden bekeken in het artikel van die naam en in het artikel „Verzamelingen en permutaties”. Prof. Bottema te Delft vestigde onze aandacht op een bijzondere slinger van Foucault, waarvan we een foto en een korte beschrijving in dit nummer aantreffen. De derde Wimecos-prijsvraag roept de trouwe puzzelaars op hun krachten nog eens te beproeven. Tenslotte noemen we nog de prijswinnaars. Wimecos prijsvraag I:

1e prijs, Jaap Meihuizen, Haren (Gr.); 2e prijs, Jan Burema, Haren (Gr.); 3e prijs George Rolf, Amsterdam.

Een boekenbon voor oplossingen van Denkertjes werd toegekend aan P. Naaykens, Eindhoven.

°° *Het grote en het kleine* **ster-twaalfvlak van Kepler**

Als we de zijden van een regelmatige vijfhoek verlengen tot ze elkaar snijden, dan ontstaat een vijfpuntige ster. We zouden deze tot de regelmatige veelhoeken kunnen rekenen: een regelmatige *stervijfhoek*. In figuur 1a is de vijfhoek, die het „bovenvlak” van een regelmatig twaalfvlak vormt, uitgebreid tot zo’n stervijfhoek. Als we dit bij elk der twaalf vlakken doen, ontstaat een zeer fraai lichaam waarop Kepler in 1619 de aandacht heeft gevestigd. In fig. 1a zien we rechts al een uitstekende punt

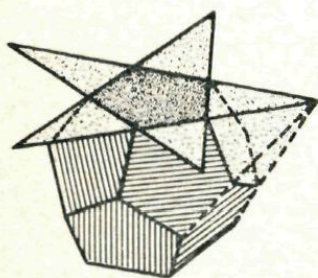


Fig. 1a

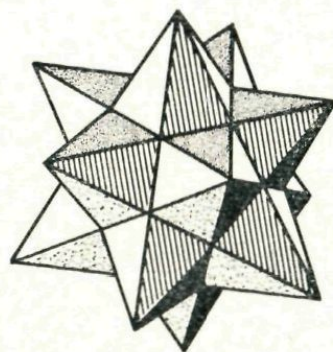


Fig. 1b

van dit lichaam ontstaan en in fig. 1b is dit (*kleine*) regelmatige ster-twaalfvlak helemaal getekend. De twaalf vlakken, die dit lichaam begrenzen, zijn alle congruente regelmatige stervijfhoeken. We zouden het dus zo kunnen beschouwen, dat dit lichaam voldoet aan de definitie van regelmatig lichaam, zoals die in het vorige nummer werd gegeven, zodat

Kepler een nieuw regelmatig veelvlak aan de vijf klassieke toegevoegd zou hebben. Wie dit ster-twaalfvlak van stijf papier of karton wil maken doet het beste eerst een regelmatig twaalfvlak te maken en daarop twaalf piramiden te plakken, waarvan de uitslag gemakkelijk te tekenen is.

Het *grote* ster-twaalfvlak van Kepler kan men zich het best ontstaan denken uit een regelmatig twintigvlak. We kunnen in de figuur of foto van een icosaeëder in het vorige nummer gemakkelijk controleren, dat de 5 bases van de in één hoekpunt samenkomende zijvlakken een regelmatige vijfhoek vormen. Deze kan weer tot een regelmatige stervijfhoek worden uitgebreid, zoals in fig. 2a te zien is. Er zijn 12 zulke regelmatige

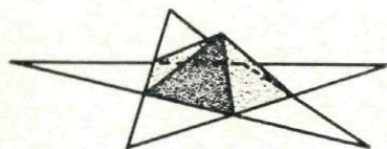
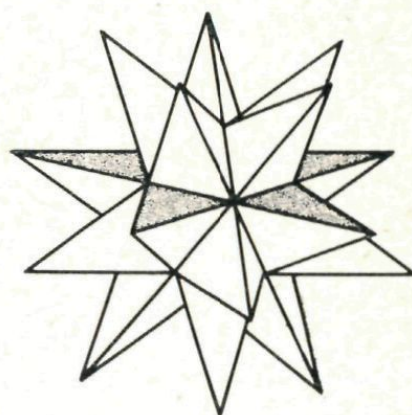


Fig. 2a

Fig. 2b



vijfhoeken te vinden aan een regelmatig twintigvlak. In fig. 2b zien we het lichaam, dat ontstaat als elk dezer vijfhoeken wordt uitgebreid tot een stervijfhoek. Men kan dit lichaam het gemakkelijkst maken door eerst een regelmatig twintigvlak te maken en daarop 20 piramiden te plakken.

Elk der beide figuren worden ster-*twaalf*vlakken genoemd. Ze hebben echter veel meer zijvlakken, de eerste telt er $12 \times 5 = 60$ en het tweede $20 \times 3 = 60$. Vat men echter elke vijfpuntige ster op als één begrenzend vlak, dan komt men inderdaad voor beide figuren op 12 vlakken.



°Vreemde algebra's (1)

Ja, je hebt de titel van dit artikel werkelijk goed gelezen. Er staat inderdaad ALGEBRA's, in het meervoud. Misschien heb je altijd gedacht dat er slechts één algebra bestaat, die dan ook het volste recht heeft op de titel DE ALGEBRA. Het is echter onze bedoeling jullie te laten zien dat er vele algebra's zijn; dat datgene wat je tot nu toe als DE ALGEBRA beschouwde slechts EEN ALGEBRA is.

Maar wat is dan een algebra? Het antwoord op die vraag is gemakkelijk en snel te geven, maar het zal je wel niet tevreden stellen. Bij het lezen van deze artikelen (zie ook blz. 108) zul je het geleidelijk gaan begrijpen, dus schrik er nu maar niet van: een algebra is een verzameling, waarin een aantal bewerkingen is gedefinieerd.

In de schoolalgebra hebben we te maken met verzamelingen, waarvan de elementen getallen zijn. En de in die verzamelingen gedefinieerde bewerkingen zijn bijvoorbeeld de optelling, de vermenigvuldiging, het tegengesteld maken, enzovoorts. Denk nu echter niet dat je precies weet wat een bewerking is. En denk evenmin dat in een algebra de verzameling er een moet zijn, waarvan de elementen getallen zijn.

Om je van eventuele verkeerde gedachten te bevrijden, zullen we meteen maar een bijzonder vreemde algebra gaan maken.

Als verzameling kiezen we de verzameling van de punten van een gegeven plat vlak. Die punten gaan dus dezelfde rol spelen als de getallen in de schoolalgebra en daarom zullen we ze ook maar aanduiden met kleine letters **a**, **b**, **c**.

Nu gaan we een bewerking definiëren in onze verzameling en daarbij gebruiken we als model de vermenigvuldiging uit de schoolalgebra. Het wezenlijke daarvan is, dat je de beschikking moet hebben over twee getallen voor je de bewerking kunt uitvoeren en dat je dan één getal als eindresultaat krijgt. Zulk een bewerking wordt *binair* genoemd (er zijn ook *unaire* bewerkingen waarbij je slechts één getal hoeft te hebben voor je aan de slag kunt gaan; voorbeeld: tegengesteld maken).

Goed, we gaan dus een binaire bewerking definiëren in onze puntverzameling. Aan elk willekeurig tweetal punten **a** en **b**, die eventueel ook samen kunnen vallen, moet dus één bepaald punt worden toegevoegd, dat we dan naar analogie met de schoolalgebra zullen aanduiden als **a · b**. Zijn **a** en **b** verschillend, dan kunnen we voor **a · b** kiezen het

midden van het lijnstuk dat a en b tot eindpunten heeft (zie figuur 3). Vallen a en b samen, dan definiëren we $a \cdot a = a$.

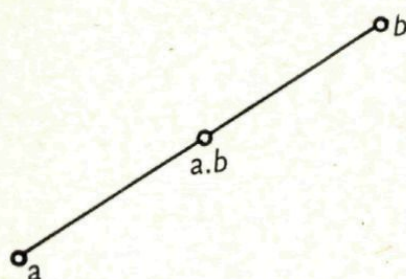
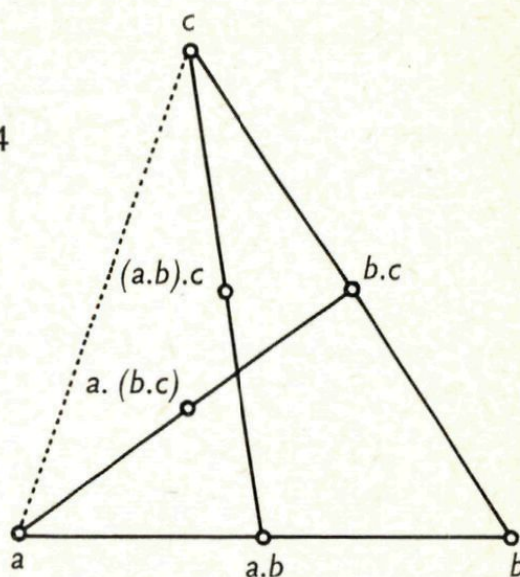


Fig. 3

Fig. 4



Ziezo, het kunststuk is volbracht. We hebben een algebra geschapen. Eerlijk gezegd is het maar een vrij primitief algebra'tje. Maar toch bezit het wel een enkele verrassende eigenschap. Laten we dus onze studie maar eens beginnen.

In de eerste plaats zal het duidelijk zijn dat de vermenigvuldiging in onze puntenalgebra *commutatief* is. Dit betekent dat voor elke a en elke b geldt $a \cdot b = b \cdot a$. Commuteren (verwisselen) van de factoren heeft geen invloed op het produkt.

Een klein onderzoek leert verder, dat de vermenigvuldiging in onze puntenalgebra helaas niet *associatief* is, dus dat niet voor elke a en elke b en elke c geldt dat $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Anders associëren (samenemen) van de factoren heeft soms wel invloed op het produkt. In figuur 4 is duidelijk te zien dat $(a \cdot b) \cdot c$ en $a \cdot (b \cdot c)$ verschillende punten kunnen zijn.

Een naar gevolg van het niet-associatief zijn van onze vermenigvuldiging is, dat we in uitdrukkingen zoals $(a \cdot b) \cdot c$ de haakjes niet kunnen missen. Niemand kan immers aan $a \cdot b \cdot c$ zien of er nu $(a \cdot b) \cdot c$ bedoeld wordt of $a \cdot (b \cdot c)$. Laten we dus nu even met dankbaarheid aan onze schoolalgebra denken, waar ons veel haakjesrompslomp bespaard blijft, doordat daar zowel de vermenigvuldiging als de optelling naar behoren associatief zijn.

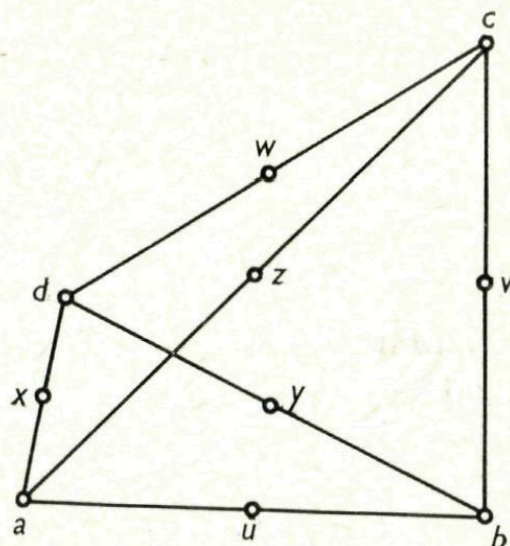
In figuur 5 vormen de punten a , b , c en d een vierhoek. Daarin zijn de middens van de zijden en de middens van de diagonalen aangetekend. Deze zes middens bepalen drie parallellogrammen: uwx en $uywz$ en $vyxz$. Nu wordt een parallellogram gekenmerkt door het feit dat zijn diagonalen elkaar halveren. Dat kan in onze algebra-taal zo opgeschreven worden:

$u \cdot w = y \cdot z = x \cdot v$. Drukken we nu u , v , w , x , y , z uit in a , b , c , d dan komt er te staan $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d) = (a \cdot d) \cdot (b \cdot c)$.

Het wonderlijke van deze eigenschap is dat hij volkomen algemeen geldig is. Laat gerust twee, drie of vier punten van het viertal a , b , c , d samenvallen, neem er drie of vier van op een rechte lijn, toch blijft de eigenschap $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d) = (a \cdot d) \cdot (b \cdot c)$ gelden.

Wij bewijzen dat hier niet. Elke lezer, die geduld genoeg heeft, kan dat zelf doen en zo de geldigheid van onze stelling onbetwistbaar maken.

Fig. 5



Kent onze algebra ook vergelijkingen? Ja, zeker! Zijn a en b gegeven punten, dan bezit de vergelijking $a \cdot x = b$ precies één wortel. Zie daarvoor figuur 6. Ook $a \cdot x = a$ bezit precies één wortel, namelijk a .

Een aardige toepassing hiervan is het onderzoek naar de speciale gevallen, waarin $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ toch geldt. Dit kan namelijk geheel algebraïsch gebeuren. Daartoe herleiden we met behulp van de bovenstaande stelling eerst $a \cdot (b \cdot c)$ als volgt: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot a) \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot (a \cdot c)$. Voor gelijkheid van $(a \cdot b) \cdot c$ en $a \cdot (b \cdot c)$ bijvoorbeeld aan d is dus nodig zowel $(a \cdot b) \cdot c = d$ als $(a \cdot b) \cdot (a \cdot c) = d$. Dit betekent dat zowel c als $a \cdot c$ wortel moeten zijn van $(a \cdot b) \cdot x = d$. Maar die vergelijking heeft slechts één wortel. Dus is nodig $c = a \cdot c$, waaruit volgt $a = c$. Inderdaad blijkt dit ook voldoende te zijn voor de gelijkheid van $(a \cdot b) \cdot c$ en $a \cdot (b \cdot c)$.

Veel belangrijker dan deze toepassing is echter de vraag: hoe zullen we de wortel van de vergelijking $a \cdot x = b$ noemen. Kom je nu uit jezelf met het voorstel om die wortel $\frac{b}{a}$ te noemen, dan heb je begrepen wat er

bedoeld wordt met de vaak gehoorde zin: delen is de omgekeerde bewerking van vermenigvuldigen. Je ziet dan in dat, zodra je op de een of andere manier een bewerking gedefinieerd hebt, meteen de vraag naar het bestaan van de omgekeerde of *inverse* bewerking zin krijgt.

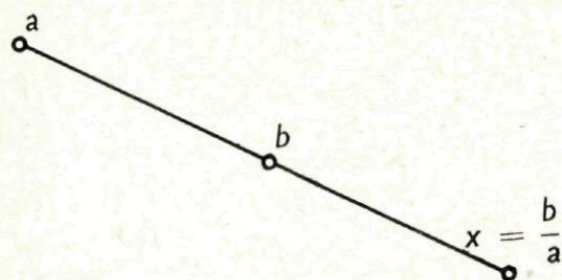


Fig. 6

Welnu, onze vermenigvuldiging heeft zulk een inverse bewerking en waarom zouden we die niet deling noemen. Dat sluit in dat we definiëren:

onder $\frac{b}{a}$ verstaan we de wortel van de vergelijking $a \cdot x = b$. (fig. 6).

En nu nemen we afscheid van onze eerste vreemde algebra met een paar probleempjes. De oplossing daarvan wordt niet gepubliceerd, maar er is wel correspondentie over mogelijk, mits postzegel voor antwoord wordt ingesloten. Brieven zenden aan de heer A.F.v.Tooren, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Opgave 1.

Druk in a en b uit de beide punten die het lijnstuk met a en b tot eindpunten inwendig in de verhouding 1 : 3 verdelen.

Opgave 2.

Laat zien dat in het algemeen $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$ onjuist is en dat wel geldt

$$a \cdot \frac{b}{c} = b \cdot \frac{a}{c}.$$

Opgave 3.

Laat zien dat in het algemeen $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$ onjuist is en dat wel geldt

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = b \cdot \frac{a}{c}.$$

Opgave 4.

Bewijs dat echter $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ wel een juiste stelling is.



De oplossingen van deze Denkertjes kunnen niet ingezonden worden. Ze zijn op bladzijde 119 van deze aflevering te vinden.

69. Is het mogelijk in een plat vlak vier punten A, B, C, D te kiezen zo, dat er vier scherphoekige driehoeken (BCD, ACD, ABD, ABC) ontstaan?
70. Bepaal alle gehele getallen x van twee cijfers met de eigenschap dat de cijfers van x , $2x$, $3x$, $4x$, $5x$, $6x$, $7x$, $8x$, $9x$ telkens dezelfde som hebben.
71. Teken een gesloten gebroken lijn, die de eigenschap heeft dat elk van zijn lijnstukken met precies één ander van zijn lijnstukken een punt gemeen heeft, dat van geen van beide lijnstukken eindpunt is.
72. Bewijs dat elke gesloten gebroken lijn, die de in no 71 beschreven eigenschap heeft, uit een even aantal lijnstukken bestaat.
73. Op een cirkel met een omtrek van 300 centimeter markeert men een n -tal punten zodanig dat er bij elk punt van dit n -tal precies één ander punt van dat n -tal te vinden is dat er (langs de cirkel gemeten) 1 cm van verwijderd is en ook precies één punt van dat n -tal te vinden is dat er (langs de cirkel gemeten) 2 cm van verwijderd is. Wat valt er nu omtrent n te concluderen?
74. ABCDEF is een regelmatige zeshoek. Op de zijlijn AB ligt een punt P. Uit P laat men een loodlijn neer op de rechte BC. Uit het voetpunt daarvan laat men een loodlijn neer op de rechte CD, enz. Het zesde voetpunt blijkt met P samen te vallen. Waar ligt P?
75. a, b, c, d, e, k zijn gehele getallen, k is een deler van $ae + b$ en ook van $ce + d$. Bewijs dat k ook een deler van $ad - bc$ is.
76. ABC is een scherphoekige driehoek. De punten van het lijnstuk BC worden geprojecteerd op alle rechten door A. Bepaal de verzameling van alle projecties.
77. Negen veelhoeken met een oppervlakte elk van 1 cm^2 liggen binnen een vierkant met een oppervlakte van 5 cm^2 . Bewijs dat er zich bij dat negental veelhoeken een paar bevindt met een gemeenschappelijke oppervlakte van minstens $\frac{1}{9} \text{ cm}^2$.

78. Binnen een kubus, waarvan de ribben 13 cm lang zijn, kiest men op willekeurige wijze 2000 punten. Is het nu zeker dat er binnen die kubus nog plaats te vinden is voor een kubusje met ribben van 1 cm, dat zo gelegen is dat geen van de 2000 gekozen punten zich binnen dat kubusje bevindt?



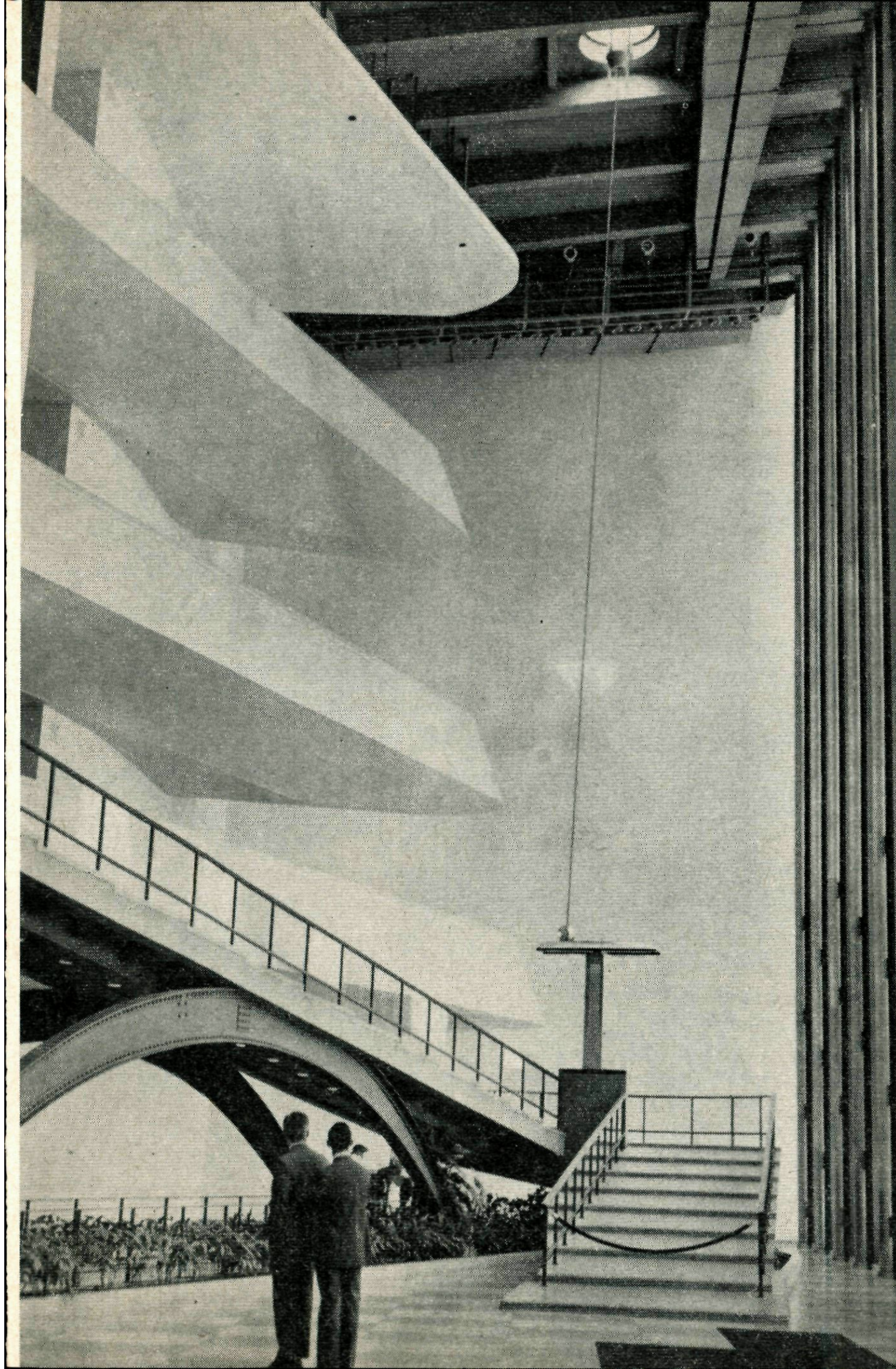
°°° **Nog eens de slingerproef van Foucault**

In nummer 3 van deze jaargang werd de slingerproef besproken, die in 1851 door Foucault in het Panthéon te Parijs werd gedemonstreerd, om daarmee de dagelijkse aswenteling van de aarde aan te tonen.

Prof. Dr. O. Bottema te Delft schreef ons hierover o.a.:

„... dat in het gebouw van de Verenigde Naties te New-York, als geschenk van de Nederlandse regering, een slinger van Foucault is geplaatst, die in de hal gemonteerd veel aandacht trekt. Het geschenk, van het land van Huygens, is in 1955 door minister Luns aangeboden. Het technisch ontwerp is van Prof. Haringx te Eindhoven”.

De foto hiernaast toont ons hoe de slinger in de grote hal is opgehangen. Hij bestaat uit een 90 kg zware bol, die aan een $17\frac{1}{2}$ m lange staaldraad hangt. Vanzelfsprekend wil men deze slinger ononderbroken in beweging houden, zodat de bezoekers van het gebouw steeds de proef van Foucault kunnen aanschouwen. Daarvoor waren bijzondere voorzieningen nodig. Door geringe afwijkingen in het materiaal zou de bol zich op den duur niet langer in een verticaal vlak bewegen, zodat deze een ellips zou gaan beschrijven. Verder zou door de luchtweerstand en andere remmende factoren de slinger na zekere tijd tot stilstand komen. Door een bijzondere wijze van ophangen heeft men het slingeren in een elliptische baan voorkomen. Door op een vernuftige wijze gebruik te maken van Foucault-stromen in een koperen plaat, die in de bol is ondergebracht, wordt de slinger in beweging gehouden. Ieder keer nl. als deze het krachtenveld van een verticale spoel passeert, die in het voetstuk is aangebracht, krijgt de plaat een kleine energietoevoer, die juist voldoende is om de amplitude ongeveer 80 cm te doen blijven. Een uitvoerige bespreking van deze slinger van Foucault vindt men in Philips Technisch Tijdschrift, jaargang 19, no. 718, 1957, pag. 236-241.



°°Vreemde algebra's (2)

Verzamelingen en permutaties

Een klas van 20 leerlingen ging op 5 december het Sinterklaasfeest vieren op het laatste lesuur van de morgen. Ieder van de leerlingen zorgde voor een geschenkje en een gedicht voor elk der anderen. Door loting werd vastgesteld wie wat voor wie zou maken. Stellen we de leerlingen even voor door hoofdletters, dan zal de loting bijvoorbeeld hebben aangewezen: A maakt iets voor P, P voor K; K voor B; B voor E, enz. Zo hoorde er bij elke leerling van de klas een andere. Het kan bij zo'n loting natuurlijk gebeuren, dat iemand zichzelf trekt. In de klas wordt daar meestal wel iets op gevonden, bijvoorbeeld door de loting over te doen. In onze onderstaande bespreking zullen we dit ongewenste geval toelaten, zodat de zaak daardoor overzichtelijker wordt.

Nu is de toevoeging door loting in een klas van 20 leerlingen nog niet zo gemakkelijk te overzien. We gaan ons daarom beperken tot een klasje van drie leerlingen A, B en C. Hoeveel mogelijkheden doen zich daarin voor de loting voor? We zien gemakkelijk in, dat dit aantal overeenstemt met het aantal rangschikkingen van de drie leerlingen, dat zijn er 6. We zullen het resultaat van een loting opschrijven op de volgende manier:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$$

We bedoelen daarmee dan:

Aan A is B toegevoegd, aan B de leerling C, aan C de leerling A. Hier zijn de zes mogelijkheden (genummerd 1 tot en met 6):

$$1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}; \quad 2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}; \quad 3 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix};$$

$$4 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}; \quad 5 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}; \quad 6 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}.$$

Deze toevoeging komt overeen met het op alle mogelijke manieren rangschikken van de leerlingen. Het zijn dus *permutaties*. (Zie Pyth. 3-3, bldz. 49).

Permutatie 1 is een merkwaardige. Daarbij „trekt ieder zichzelf”. Merk trouwens op, dat er slechts twee van de zes permutaties zijn, waarbij niemand zichzelf trekt.

De manier, waarop de loting plaats vindt, garandeert, dat aan elke leerling juist één andere wordt toegewezen en dat ook elke leerling juist aan één andere wordt toegevoegd. Een voorschrift, waarbij aan elk lid van een verzameling A juist één lid van verzameling B wordt toegevoegd en omgekeerd, heet een één-éénduidige afbeelding van A op B (en van B op A). *Een permutatie is een één-éénduidige afbeelding van een verzameling op zichzelf.*

Een algebra met permutaties

In de algebra, die beschreven wordt in de bladzijden 101 t.e.m. 104, werd een binaire operatie gedefinieerd in de oneindig veel leden tellende verzameling van de punten van een vlak. Nu krijgen we een algebra te zien, die wordt toegepast op de slechts zes leden tellende verzameling van de hierboven genoemde permutaties. Ook nu definiëren we een *binaire* operatie, nl. het achter elkaar uitvoeren van twee der permutaties. Bijvoorbeeld:

Permutatie 2 voegt aan A toe A, daaraan voegt permutatie 3 toe B.

„	2	„	„	B	„	C,	„	„	„	3	„	C.
„	2	„	„	C	„	B,	„	„	„	3	„	A.

Het resultaat is hetzelfde, als wanneer we rechtstreeks permutatie 4 hadden toegepast. 2 en daarna 3 is hetzelfde als 4. We zullen dat kort opschrijven op de volgende manier: $2 * 3 = 4$.

(lees: 2 ster 3 = 4).

Is nu $3 * 2$ ook gelijk aan 4? We controleren het:

Aan A wordt door 3 toegevoegd B, daar voegt 2 aan toe C.

„	B	„	„	3	„	A,	„	„	2	„	„	A.
„	C	„	„	3	„	C,	„	„	2	„	„	B.

We zien, dat $3 * 2 = 5$.

Dat verrast je misschien. We zijn zo gewend bij het rekenen met getallen, dat voor onze operaties *de commutatieve wet* geldt, (bijv. $a + b = b + a$ en $a \times b = b \times a$), dat we haast vanzelf verwachten,

dat deze wet ook geldt voor onze steroperatie. Toch is dat niet zo, hoewel bijvoorbeeld wel $4 * 5 = 5 * 4 = 1$. Controleer het maar. Omdat we maar 6 permutaties beschouwen, is het gemakkelijk een tabel te maken, waarin de resultaten van alle steroperaties op telkens twee van de permutaties zijn samengevat:

*	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	4	3	6	5
3	3	4	1	6	2	4
4	4	6	2	5	1	3
5	5	3	5	1	4	2
6	6	4	5	2	3	1

Ga nog eens even de volgende bijzonderheden na:

- Permutatie 1 heeft dezelfde eigenschap als het getal nul bij het optellen van getallen, (daarvoor geldt nl. $a + 0 = 0 + a = a$). Zo is $1 * 5 = 5 * 1 = 5$.
- Bij elke permutatie p behoort een andere x zo, dat $p * x = 1$. Zoek maar op, welke x bij ieder der zes permutaties hoort. Is dit ook te vergelijken met een verschijnsel, dat zich bij het optellen voordoet?
- Is de steroperatie associatief? (Zie bldz. 102).

Uit „Het wondere onderzoekingsveld van de vlakke meetkunde” V

Ir. A. E. Bosman heeft verschillende interessante samenhangen ontdekt in het gebied van de gewone vlakke meetkunde. Het zijn geen lastige onderzoeken, ook geen belangrijke dingen, maar toch verrast hij dikwijls door de bijzondere wijze, waarop hij de dingen ziet en weer nieuw weet te maken. Deze keer is het onderwerp, dat we aan zijn boek ontleen:

PYTHAGOREISCHE BOMEN

In het laatste nummer van Pythagoras jaargang 2 is de grote boom van Pythagoras afgebeeld. Deze „groeide” uit een rechthoekige gelijkbenige driehoek. We kunnen ons afvragen wat er van de boom terecht komt, als we uitgaan van een rechthoekige driehoek die niet gelijkbenig is. Er

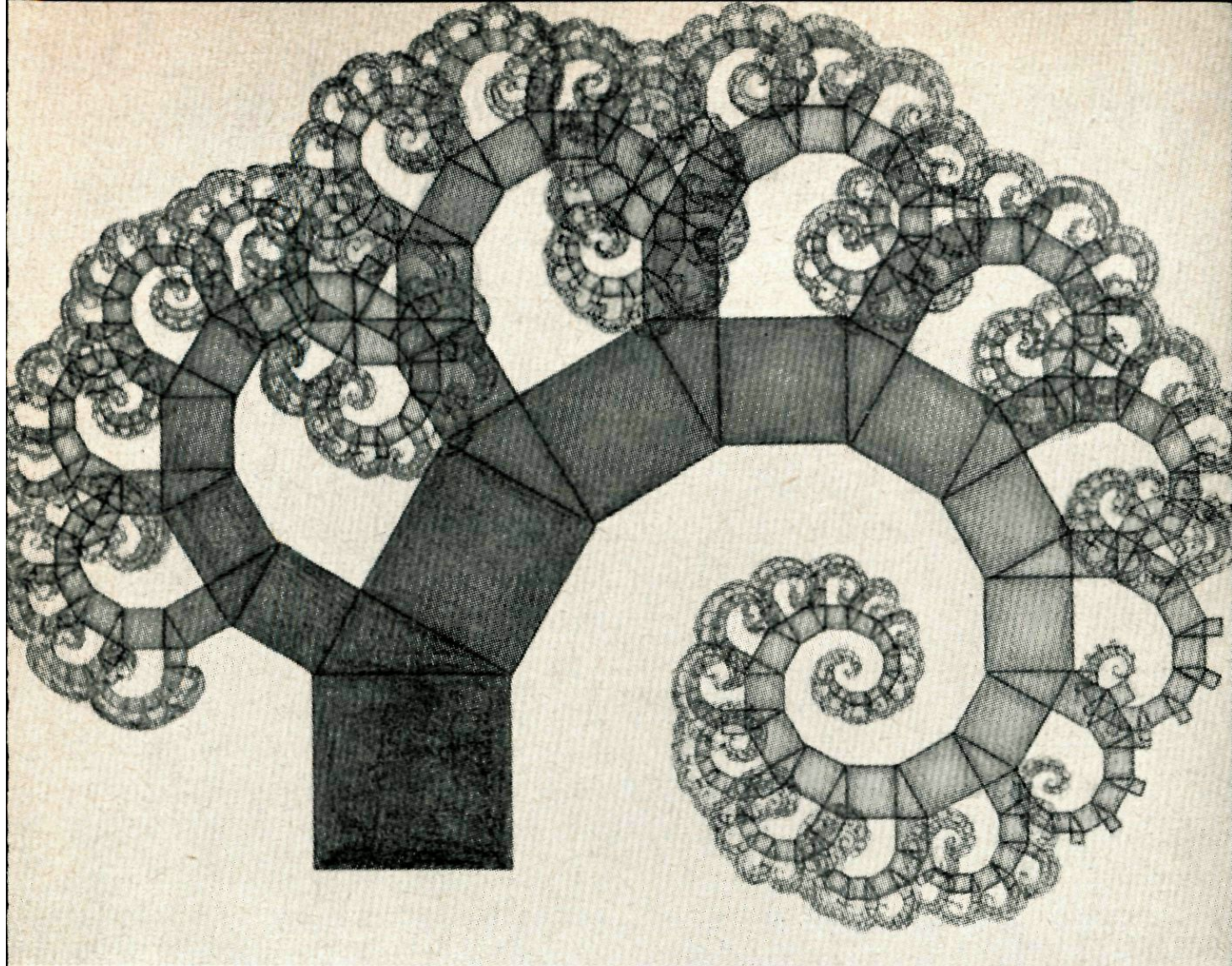


Fig. 7

zijn dan twee mogelijkheden. De eerste is het luchtige bouwsel, dat op de binnenkant van de omslag is gereproduceerd en de tweede staat op deze pagina. (Fig. 7).

Het constructievoorschrift, dat voor beide bomen precies hetzelfde is, geven we hier nog eens: teken een vierkant; op een der zijden een rechthoekige driehoek, waarvan de schuine zijde samenvalt met de zijde van het vierkant. Op elk van de rechthoekszijden van deze driehoek weer vierkanten. Op elk vierkant weer driehoeken etc.

Hoe komt het, dat toch beide figuren zo heel verschillend worden?

Dit is een vraag die je beslist moet oplossen; het antwoord is eenvoudig. Moeilijker is de volgende vraag: hoe hoog en hoe breed worden beide bomen, als het vierkant waarvan we uitgaan zijden van 1 dm heeft? Je mag de eenvoudigste interpretatie nemen van wat we bij de bomen onder hoogte en breedte zullen verstaan.

Leyende **ICOSAÉDERS** en **DODECAÉDERS**

Virussen zijn de kleinste biologische structuren, die zich kunnen voortplanten. Ze zijn veel kleiner dan cellen. De grootste zijn nauwelijks groter dan de halve golflengte van violet licht. Met een gewone microscoop zijn ze dus onzichtbaar: de lichtgolven buigen er gewoon omheen.

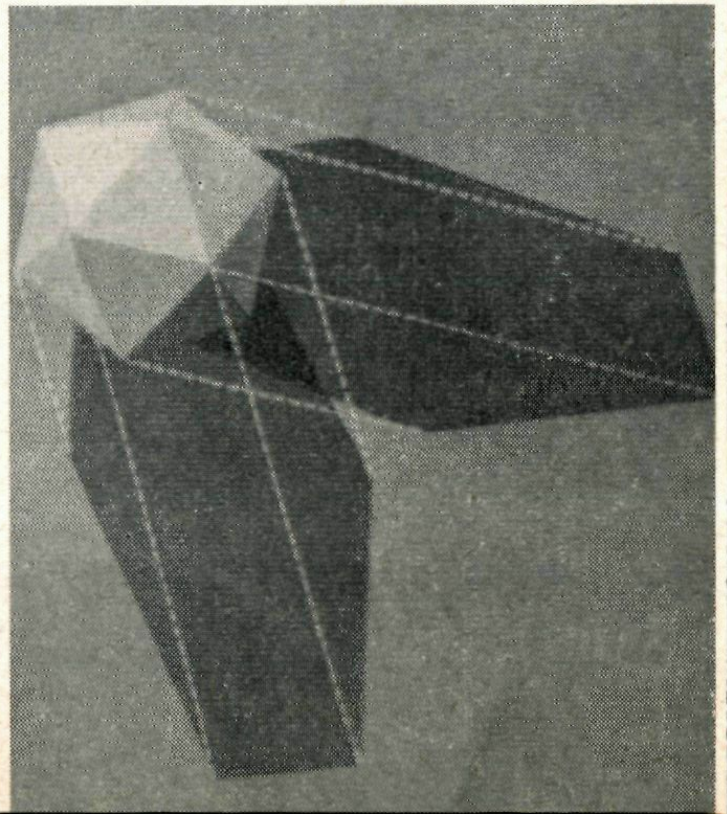
Men kent reeds een groot aantal verschillende virussen, waarvan er verschillende schadelijk zijn voor planten en dieren (tabaksmozaïekvirus, pokkenvirus, kinderverlamningsvirus).

Het is merkwaardig dat vele virussen, vooral de kleinste (ca. $1/40$ van de golflengte van violet licht), de vorm hebben van icoesaëders en dodecaëders. (Zie Pyth. no. 4 pag. 76). De foto linksonder (fig. 8) laat een aantal Tipula-virussen zien (een virus dat zich in de cellen van verschillende insecten voortplant). De opname is gemaakt met een electronenmicroscoop, vergroting ca. 40000 maal. De twee schaduwen bij elk virusdeeltje zijn ontstaan door uit twee richtingen atomen van een zwaar metaal erop te dampen. Hierdoor wordt het deeltje goed te fotograferen in de electronenmicroscoop en men kan de vorm van het deeltje bepalen uit de beide schaduwen (zie figuur 9). In figuur 10 zien we een electronenmicrofoto van het adenovirus, vergroting ca. 10^6 maal (het adenovirus is waarschijnlijk de oorzaak van een ziekte van de ademhalingsorganen bij de mens). We zien hier hoe de buitenkant van

Fig. 8



Fig. 9



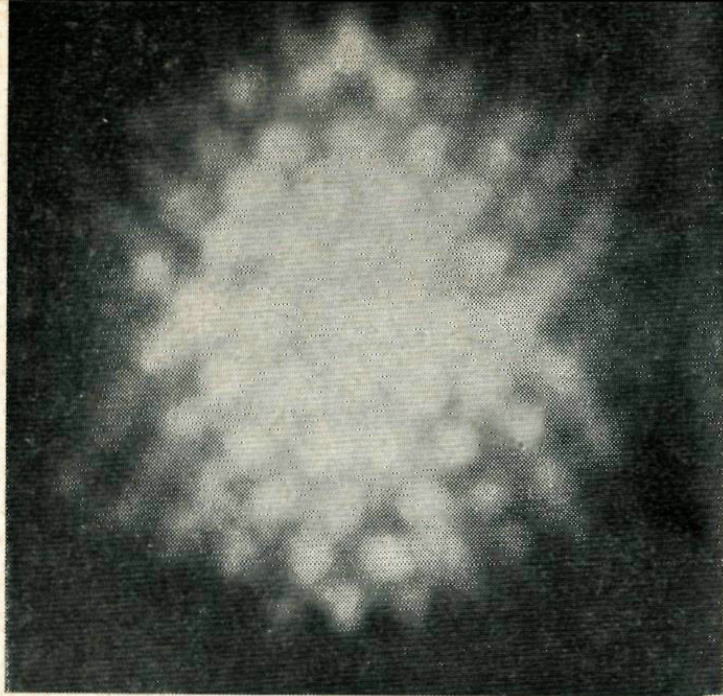


Fig. 10

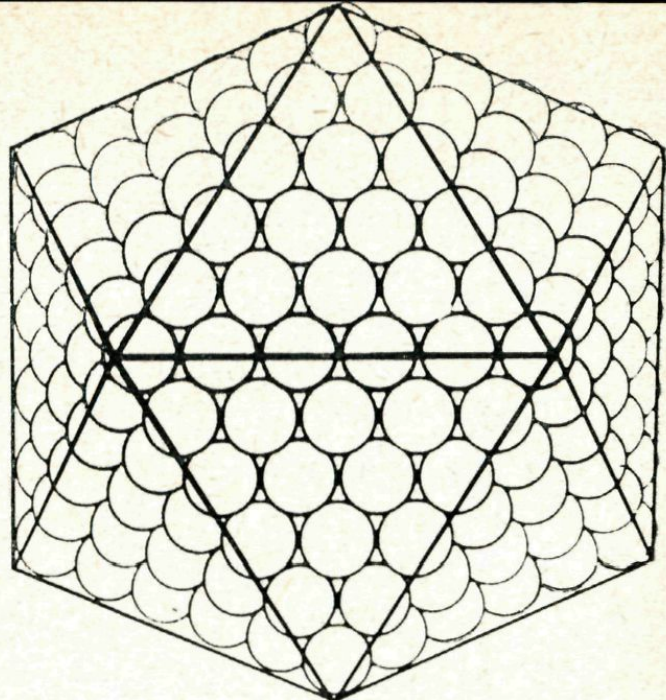


Fig. 11

het virus opgebouwd is uit kleinere elementen. Fig. 11 laat zien, dat deze structuur de vorm heeft van een icoesaëder. De buitenkant wordt gevormd door 252 eenheden. Hoeveel eenheden op deze manier de oppervlakte van een icoesaëder kunnen vormen, vinden we met de volgende formule, die je zelf eenvoudig kunt afleiden: $10(n-1)^2 + 2$, waarin n het aantal eenheden is dat een ribbe vormt.

De electronenmicrofoto van een andere virussoort (fig. 12) laat zien, dat het virus opgebouwd schijnt te zijn als een dodecaëder (vergelijk met figuur 13).

De foto's zijn ontleend aan een artikel in Scientific American, jan 1963: The structure of viruses, door R.W.Horne.

Fig. 12

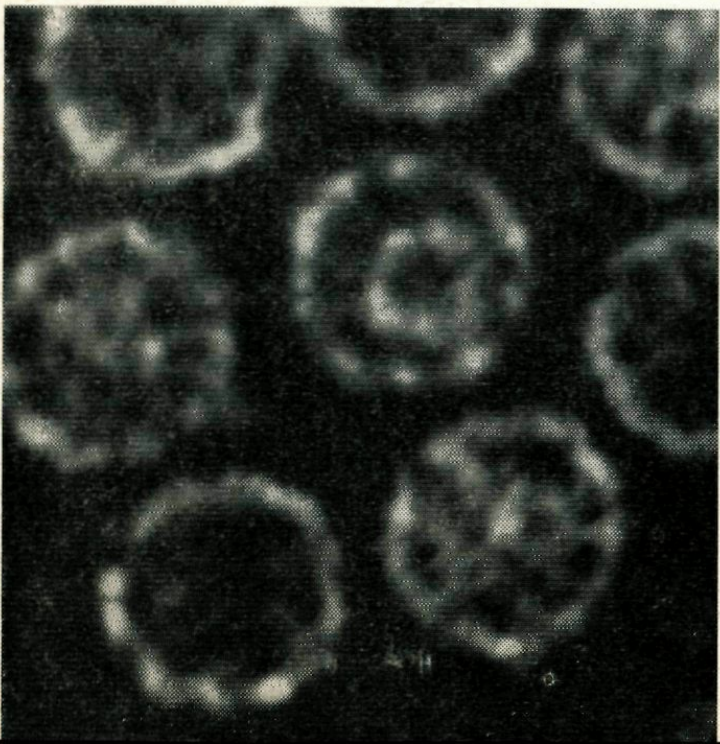
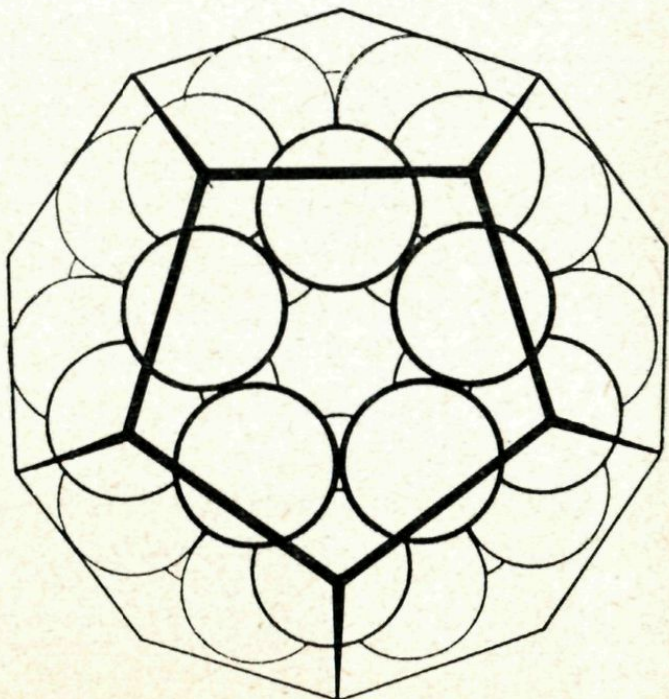


Fig. 13



WIMECOS-PRIJSVRAAG III

- a. In figuur 14 zijn de rechten m_1, m_2, m_3 evenwijdig en de rechten n_1, n_2, n_3 ook. De rechten van het tweede drietal staan loodrecht op die van het eerste drietal.

Laat P een willekeurig punt zijn op een van die zes rechten (P mag ook een snijpunt van een m -rechte met een n -rechte zijn). Onder de afstand van P tot A verstaan we nu de lengte van de kortste (eventueel) gebroken lijn, die A en P tot eindpunten heeft en geheel uit lijnstukken van de gegeven rechten is opgebouwd. De afstanden van P tot B en van P tot C worden op analoge wijze gedefinieerd.

Bewijs dat er een punt P bestaat welks afstanden tot A , tot B en tot C een minimale som hebben. Bepaal dat punt.

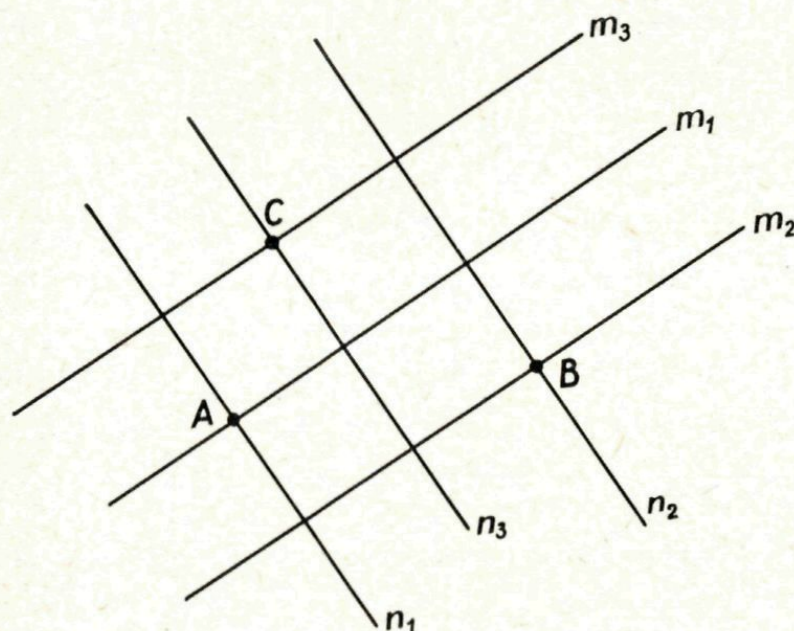


Fig. 14

- b. Door de drie gegeven punten A, B, C kan men vele lijnenstelsels brengen met de eigenschappen: m_1 en n_1 gaan door A , m_2 en n_2 gaan door B , m_3 en n_3 gaan door C , $m_1 \parallel m_2 \parallel m_3$, $n_1 \parallel n_2 \parallel n_3$, m_1 staat loodrecht op n_1 . Op elk van die lijnenstelsels denkt men zich het punt bepaald, welks afstanden tot A , tot B en tot C een minimale som hebben. Welke verzameling vormen die punten?
- c. Stel een onderzoek in naar het uiterlijk van de in vraag b bedoelde verzameling, wanneer de ligging van de drie gegeven punten A, B, C gevarieerd wordt.

Oplossingen voor 15 mei 1964 inzenden aan de heer A. van Tooren, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Computers V

Een onzer redacteuren had een gesprek met een programmeuse (Nienke Schmidt). Ze heeft haar werkzaamheden in het mathematisch Instituut van één onzer Universiteiten.

Ze deed in 1961 eindexamen H.B.S.-B en werkte daarna eerst bij een computer van een instelling in Den Haag.

RED. *Nienke, laat ik maar met de deur in huis vallen. Wat doet een programmeur eigenlijk?*

N. Wel, programma's voor electronische rekenmachines maken.

RED. *Dat snap ik, maar vertel eens, wat dat zo ongeveer inhoudt.*

N. Het probleem, dat door de rekenmachine moet worden opgelost, wordt meestal gegeven in een wiskundige vorm. Ik krijg b.v. de formule en moet die dan zodanig uitéénrafelen, dat elke stap, die de machine moet doen, door mij genoteerd wordt. Deze stappen vormen samen het programma, dat ik schrijven moet. Soms moet ik de formules nog iets omwerken om ze geschikt te maken voor het programmeren.

Nadat ik deze stappen dus allemaal uitgewerkt heb in een soort blokschema (stroomdiagram), moet ik ze nog in de voor de machine begrijpelijke taal veranderen.

Is het probleem erg ingewikkeld, zodat ik het niet dadelijk kan overzien, dan gaat er aan het programmeren een gesprek vooraf met iemand die èn bedreven is in het programmeren èn in de wiskunde.

RED. *Je had het over de taal, die de machine verstaat, wat voor taal is dat?*

N. Iedere machine heeft zijn eigen interne code: de machinecode. Naast deze machinecode bestaan dan nog programmeertalen, bijv. de Algol.

Algol is een soort esperanto voor rekenmachines.

Men streeft ernaar, dat men in de toekomst ieder Algol programma op elke rekenmachine kan draaien.

Men programmeert voor de rekenmachines van tegenwoordig een zogenaamde compiler. Een compiler is een enorm groot programma, dat de Algol vertaalt in de machinecode.

De ZEBRA (deze naam is een afkorting van: Zeer Eenvoudige Binaire Rekenautomaat), waarbij ik op 't ogenblik werk, heeft twee codes. De normale code of machine code en de simple code of zoals het woord al zegt: eenvoudige code.

Toen deze machine gebouwd werd bestond de Algol n.l. nog niet. Binnenkort krijgen we hier een veel grotere en snellere machine van Duits fabrikaat, de TR₄.

Ook deze machine heeft een eigen machinecode, die gebruikt wordt voor alle grote en veel gebruikte programma's. De oudere programma's worden geschreven in Algol.

RED. *Kun je nog verschillen noemen tussen de Zebra en de TR₄?*

N. In de eerste plaats heeft de TR₄ een veel groter geheugen en kan dus grotere programma's en grotere opdrachten verwerken. De TR₄ is in staat om tijdens de uitvoer (het ponsen of typen van de resultaten) intussen verder te rekenen met een ander programma. De zebra kan slechts één ding tegelijk. Verder rekent de TR₄ veel sneller en voert deze de resultaten ontzettend snel uit, wat natuurlijk erg veel tijd bespaart. Hij typt 15 regels (van 120 symbolen per regel) in 1 sec.

RED. *Heb je ook iets te maken met het klaarmaken van de ponsband voor de machine?*

N. Nee, dit wordt gedaan door iemand die daar speciaal voor aangesteld is. Ik geef hem het programma en krijg dan kant en klaar het ponsbandje terug.

Hierna begint voor ons nog een van de moeilijkste taken n.l. het opsporen van je eigen fouten in het programma.

Programmeren is nl. zo'n precisiewerk, dat er in elk programma wel enige fouten zitten. Het zoeken naar deze fouten is een enorm geduldwerkje, waar je soms dagen mee bezig bent. We noemen dit speuren naar fouten het testen van het programma.

Je doet het door het programma op de machine te draaien met een heel eenvoudig voorbeeld, dat je dan zelf te voren al uitgewerkt hebt.

RED. *Je had het net over het zoeken naar fouten; vind je het niet vervelend worden als dat zolang duurt?*

N. Ach, alle werk heeft zijn minder prettige zijden. Natuurlijk heb ik ook wel eens de neiging om alles in een hoek te gooien, maar omdat ik van m'n werk houd, vind ik het ook fijn als ik weer een programma af heb en bovendien leer je enorm veel van je eigen fouten.

Ik vind het werk ontzettend leuk, omdat ik van de wiskunde houd, maar ook van puzzelen, want dat is ook echt nodig.

RED. *Daar hield je, geloof ik, op school ook al van.*

N. Ja zeker, vóór mijn eindexamen was ik al van plan „iets” op het gebied van de wiskunde te gaan doen.

Op deze manier kom je met alle facetten van de wiskunde in aanraking. Problemen van allerlei aard (sterrenkunde, chemie, psychologie, neurologie enz. enz.) worden hier behandeld. Ik denk bijvoorbeeld aan een programma, dat de afstanden tussen de vlakken door atomen in kristallen berekende. Mijn opdrachtgever had me een beetje uitgelegd waarover het ging, wat bijzonder interessant is, want aan de formules kan ik het probleem natuurlijk niet herkennen.

Je vindt het dan erg leuk, als de resultaten, die door de machine berekend zijn aan alle verwachtingen voldoen of nieuwe bijzonderheden aan het licht brengen.

RED. *Vind je, dat een programmeur beslist een opleiding H.B.S.-B of Gymnasium- β moet hebben? Of kun je met minder toe?*

N. Ik geloof dat deze vooropleiding beslist noodzakelijk is. Het is trouwens voor een programmeur wel wenselijk een opleiding te volgen, die zijn wiskundekennis nog uitbreidt.

Ik ben zelf bezig met MO-A. De studie die echter bij uitstek geschikt is voor een programmeur, is die van wetenschappelijk rekenaar. Deze opleiding is nog weer gesplitst in twee delen A en B. Voor A moet je o.a. bestuderen: Elementaire Analyse, dat houdt onder meer in Hogere Algebra, Differentiaal- en Integraalrekening, Analytische Meetkunde, Lineaire Algebra, Numerieke Wiskunde (het praktisch rekenen in de wiskunde) en Algol. Deze opleiding kan men op 't ogenblik volgen in Amsterdam, Eindhoven en Delft.

RED. *Welke onderwerpen uit de schoolwiskunde zou je kunnen noemen, die je in je dagelijks werk van pas komen?*

N. De algebra en de goniometrie zijn veel voorkomende onderwerpen. Verder moet je als programmeur goed kunnen rekenen, omdat je, zoals ik al verteld heb, voor het testen zelf een voorbeeld moet uitrekenen. Je moet vlot kunnen werken met een tafelrekenmachine en met logaritmen – en goniometrische tafels. Een veel voorkomend probleem is b.v. het uitrekenen van functiewaarden voor verschillende waarden van het argument. Om dit programma te testen moet de programmeur zelf in staat zijn de functiewaarden uit te rekenen voor één of meer waarden van het argument. Het oplossen van stelsels vergelijkingen is ook een veel voorkomend probleem. Een programma, dat een functie numeriek integreert, zal getest worden met een functie die exact te integreren is. Hiervoor moet je dus zelf differentiaal- en integraalrekening kennen.

RED. *Tenslotte de vraag: Hoe zit het met de toekomstmogelijkheden voor een programmeur?*

N. Deze zijn zonder meer goed te noemen. Nu al is er een gebrek aan goede programmeurs en omdat men steeds meer gebieden vindt, waar het gebruik van een computer van nut kan zijn, zullen er in de toekomst nog heel veel programmeurs geplaatst moeten worden.

OPLOSSINGEN *van de DENKERTJES uit nummer 4*

61. 17 stangetjes.

62. $10\sqrt{2} - 13$.

63. Is x geheel, dan zijn ook ax^2 , bx en c geheel. Deze drie getallen zijn alle oneven (als x oneven is) of er zijn twee even getallen en een oneven getal bij (als x even is). In elk geval is hun som oneven en dus niet gelijk aan 0. Is x gebroken, stel dan $x = \frac{m}{n}$, waarin m en n geheel zijn, en pas een soortgelijke redenering toe op $am^2 + bmn + cn^2$.

64. 3.

65. 20,2 mm.

66. Tekent men slechts één cirkel, dan zijn er twee gebieden en dan kan men dus met twee kleuren volstaan.

Stel, dat men in alle figuren met n cirkels evenzo met twee kleuren kan volstaan. Neem nu een figuur met $n + 1$ cirkels. Denk een van die $n + 1$ cirkels weg, zodat een figuur met n cirkels ontstaat. Kleur die met twee verschillende kleuren. Zet de $n + 1$ -ste cirkel weer op zijn plaats terug en verwissel alle kleuren van de gebieden die binnen die $n + 1$ -ste cirkel liggen. Zo is dan een figuur ontstaan die aan de eisen voldoet.

Met volledige inductie naar n wordt het bewijs nu voltooid.

67. 792 manieren; 396 manieren.

68. 12870 manieren.

OPLOSSINGEN van de DENKERTJES uit dit nummer

69. Nee.

70. 18, 45, 90, 99.

71. Zie fig. 15.

72. Het aantal lijnstukken is het dubbele van het aantal snijpunten.

73. n is een veelvoud van 200.

74. Zie fig. 16.

75. k is een deler van $a(ce + d) - c(ae + b) = ad - bc$.

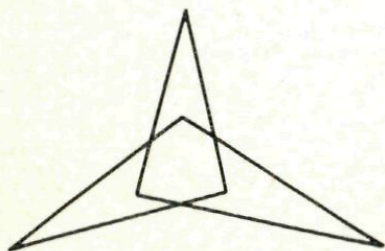
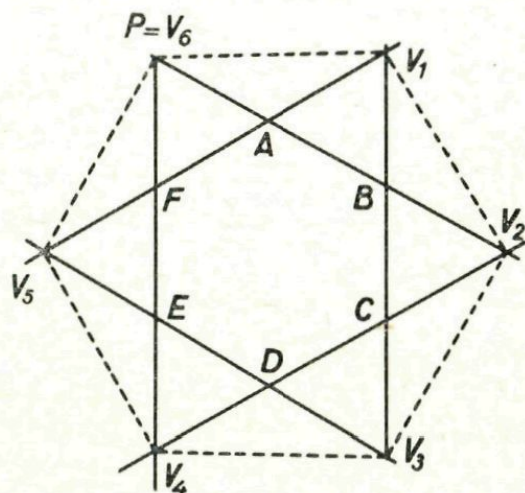


Fig. 15

Fig. 16



76. Beschrijf de cirkels, die AC en AB tot middellijnen hebben. De gevraagde verzameling bevat alle punten, die op deze cirkels of binnen één van deze cirkels, maar niet binnen beide, liggen.

77. Er zijn hoogstens 36 gemeenschappelijke oppervlakten. Was elke gemeenschappelijke oppervlakte kleiner dan $\frac{1}{9} \text{ cm}^2$, dan zou de in totaal bedekte oppervlakte meer zijn dan $9 - \frac{36}{9} = 5 \text{ cm}^2$.

78. Men kan de kubus verdelen in $13^3 = 2197$ kleine kubusjes. Deze kunnen niet allemaal „bezet” zijn. Het antwoord is dus: ja.

WIMECOS-PRIJSVRAAG II, OPLOSSING

Wij denken ons een veld dat in vierkantjes verdeeld is. En op dat veld denken wij ons een letterkubusje dat precies op zo'n vierkantje past. Dat kubusje gaat nu al kantelend naar links, rechts, voor of achter bewegen over dat veld. Na elke kanteling komt het op een ander vierkantje van het veld te staan en neemt het ook een andere stand in.

Nu willen wij dat de eindstand van het kubusje dezelfde is als de beginstand. Daar volgt uit, dat we het een *even* aantal malen zullen moeten laten kantelen. Dit wil niet zeggen dat de eindstand na een even aantal kantelingen altijd dezelfde is als de beginstand; dat het aantal kantelingen even moet zijn is een voorwaarde, die wel nodig maar niet voldoende is.

Bij elke kanteling komt het kubusje één vierkantje dichterbij zijn beginplaats of verwijderd het zich één vierkantje van zijn beginplaats. Na een even aantal kantelingen bevindt het zich dus ook op een even aantal vierkantjes verwijderd van zijn beginplaats. Voorbeeld: voert men achtereenvolgens de kantelingen *arvvrrralarvllla* uit (*r* staat voor kantelen naar rechts, enzoverder), dan is het blokje vijf keer naar rechts en viermaal naar links gegaan en ook driemaal naar voor en viermaal naar achter. De eindplaats is dus één vierkantje rechts van de beginplaats en één vierkantje verder naar achter. In die 16 kantelingen is het dus 2 vierkantjes van zijn plaats gekomen.

De eindconclusie is dus: komen alle letterkubusjes weer in de oude stand terug dan is ook elk van hen een even aantal vierkantjes van zijn beginplaats verwijderd geraakt.

Vergelijken wij nu de woorden ORKEST en STOKER maar eens. Die twee O's kunnen natuurlijk best een even aantal vakjes tot afstand hebben. Laten wij eens aannemen, dat dit het geval is. Nu de R's. In ORKEST staat de R één vierkantje rechts van de O, in STOKER staat de R drie vierkantjes rechts van de O. Hebben de O's een even afstand, dan hebben de R's dat dus ook. Met de K's gaat het echter mis: in ORKEST staat de K twee plaatsen rechts van de O, in STOKER één plaats. Hebben de O's een even afstand, dan hebben de K's een oneven afstand.

Ziezo, dat maakt een eind aan de onzekerheid. Het is kennelijk onmogelijk om het woord STOKER te vormen; we kunnen natuurlijk de K wel op de goede plaats brengen, maar dan komt hij daar zeker in de verkeerde stand aan.

Inmiddels is het een open vraag gebleven of we zo'n letterblokje op elke even afstand van zijn beginplaats weer in de goede stand kunnen laten aankomen. Indien een van de puzzelaars belang stelt in het antwoord op die vraag, dan raden wij hem aan de serie *ralvla* eens te bestuderen.

ERRATA:

In nummer 4 zijn tot onze spijt enkele kleine fouten blijven staan.

1. Op bldz. 74 regel 2 en 3 van boven moet staan:

$$\frac{30.000}{15.5} = \text{ongeveer } 1935 \text{ auto's.}$$

2. Op bldz. 83 regel 13 en volgende van onderen moet staan:
(Maak daarvoor boog AQ gelijk aan boog BC en trek PQ).

Acquisitie

Het werven. (In dit geval van verzekeren).

Analyse

Uit het Grieks, *analysis* = *het oplossen*.

In navolging van de titel van een werk van de wiskundige Euler (1707–1783) over de analyse van de oneindige grootheden, wordt het woord „analyse” thans gebruikt voor dat deel van de wiskunde, waar oneindige processen, zoals limietprocessen, een voorname rol spelen. Tot de analyse rekent men onder meer de differentiaal- en integraalrekening.

Binair

Uit het Latijn, *bini* = *telkens twee*.

Commutatief

Uit het Latijn, *commutare* = *verwisselen*. Een bewerking R is commutatief, als $aRb = bRa$.

Fictief

Uit het Latijn, *fictio* = *fantasie*.

Infinitesimaal

Uit het Latijn, *infinitum* = *oneindig*. Infinitesimum is een kunstmatig rangtelwoord gevormd bij infinitum; dus het „oneindigste” (zoals twintigste, dertigste, enz.) Onder een infinitesimale grootheid verstaat men een veranderlijke grootheid, die de limiet nul heeft.

Inverse

Uit het Latijn, *invertere* = *omkeren*.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden.

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,— per jaargang. Voor anderen f 3,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J.B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.