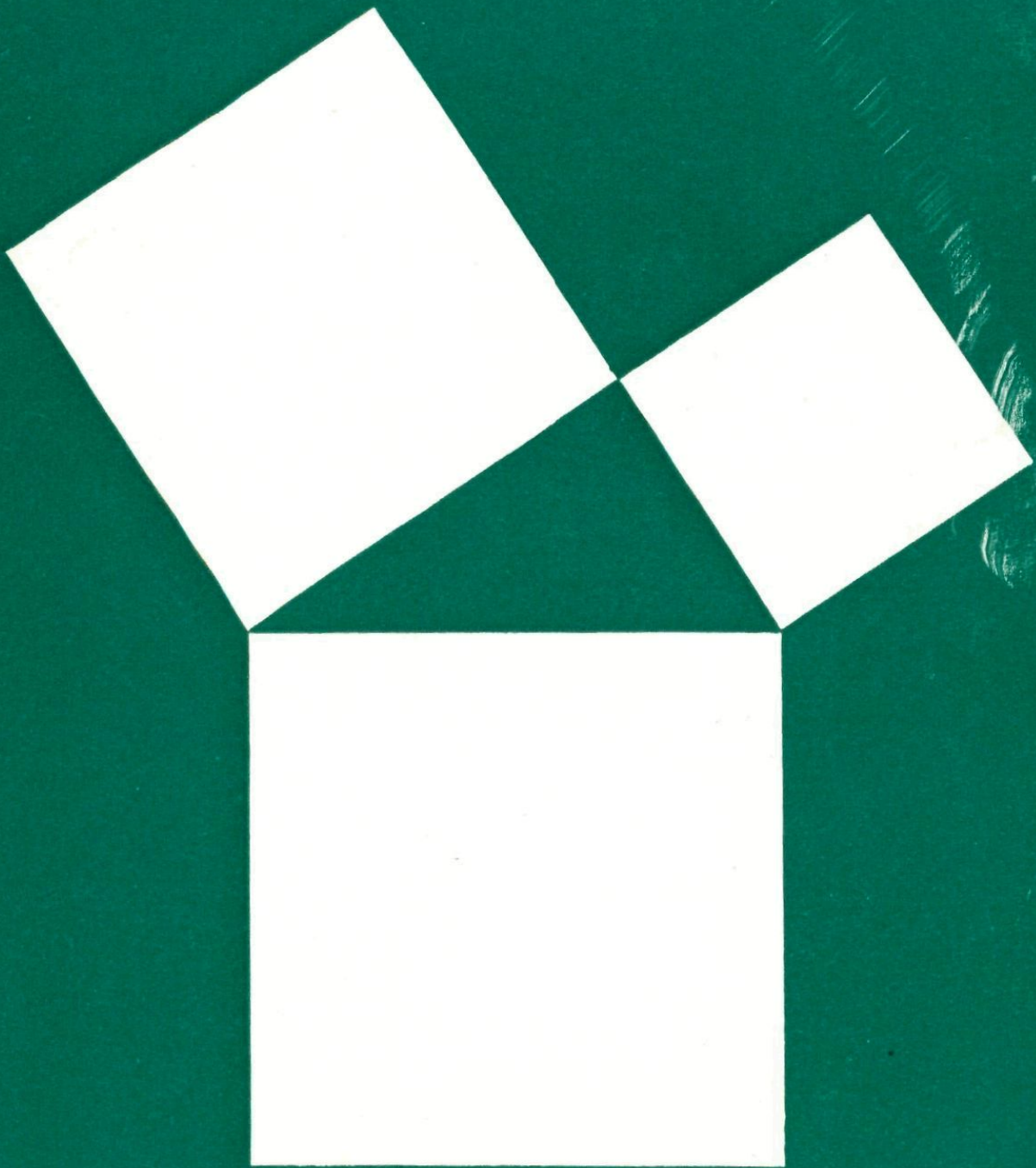


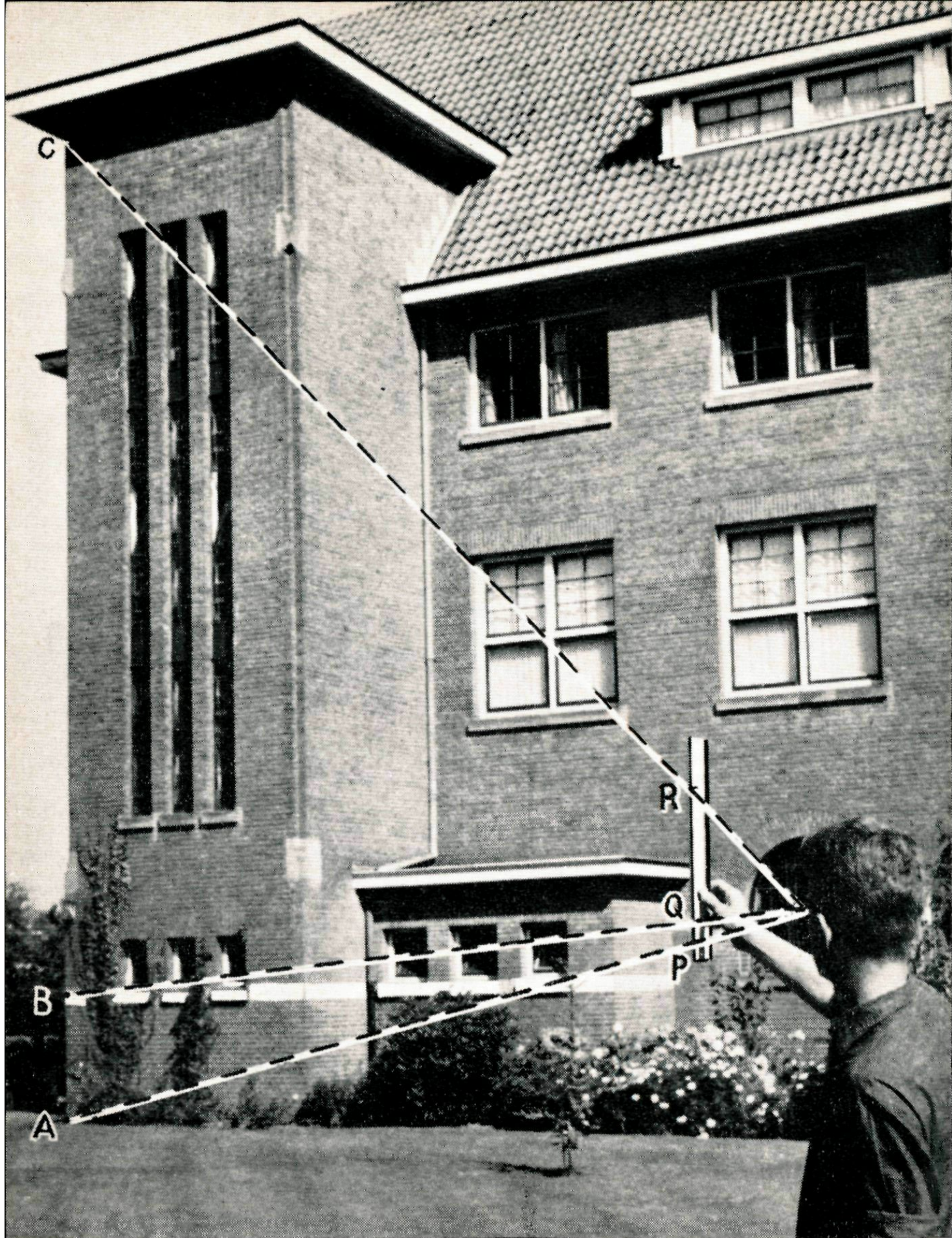
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

1

Vierde jaargang

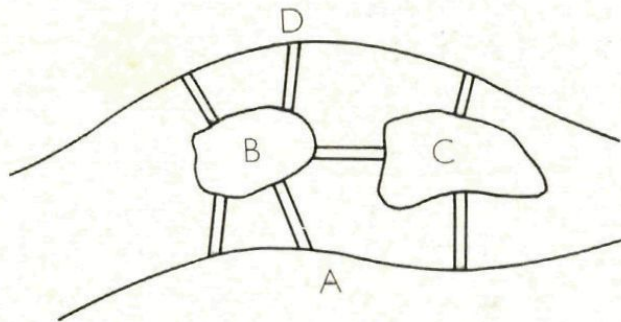


*Hoe hoog is dat gebouw?
(bldz.3)*

°Het Koningsberger bruggenprobleem I

De grote wis- en natuurkundige Leonhard Euler (1707–1783) publiceerde in 1736 het zg. Koningsberger bruggenprobleem. De stad Koningsbergen nl., die sinds 1945 Kaliningrad heet, ligt aan de oevers van en op twee eilanden in de rivier de Pregel. De oevers en de eilanden waren in Eulers tijd verbonden door zeven bruggen, zoals men ziet in het schetsje van fig. 1.

Fig. 1



De Koningsbergers waren gewend 's zondags een lange wandeling door en om de stad te maken en Euler vroeg zich nu af of hij voor een der inwoners een wandeling zo zou kunnen ontwerpen, dat deze daarbij elk der bruggen juist eenmaal zou passeren.

Het is de moeite waard je gedachten eens over dit probleem te laten gaan. Mocht je er niet uit komen, lees dan het vervolg van dit artikel op bladz. 22.

We bladeren dit nummer even door

Met dit nummer begint Pythagoras zijn vierde jaargang. Er zullen dus lezers zijn, die het tijdschrift al kennen. Maar voor hen, die het voor het eerst inkijken, geven we eerst enkele toelichtingen. Trouwens ook de „oude” abonnees zullen enkele wijzigingen opmerken, waar we het even over moeten hebben.

Vanzelfsprekend kan niet elk artikel in een tijdschrift, dat voor leerlingen van verschillende klassen bedoeld is, even pittig of even gemakkelijk zijn. We hebben daarom getracht de moeilijkheidsgraad van de artikelen door een seintje bij de titel aan te geven. Die met $^{\circ}$ zijn het gemakkelijkst, je hebt daar meer je gezonde verstand dan veel wiskundekennis bij nodig. Het Koningsberger bruggenprobleem is bijv. een vraagstuk, waar maar heel weinig algebra- of meetkundekennis voor nodig is. Ook de matrix-malligheid, die we op bladz. 16 vinden vraagt niet veel voorkennis. Wie kan vermenigvuldigen en optellen kan alles doen van de wiskunde in dit artikel. Toch vergt het wel wat van je. Goed uitkijken, nog eens rustig overlezen en proberen de berekeningen te volgen, dat zijn dingen, die je kunnen inwijden in een moderne manier van geheimschriftfabricage. In een derde artikel, voorzien van $^{\circ}$ worden knutselaars aangemoedigd om op eens een andere manier regelmatige lichamen te vervaardigen. Het artikel „Sprongbewijzen” is voorzien van $^{\circ\circ}$ en is dus tamelijk moeilijk.

Op verschillende bladzijden van dit nummer treft men puzzels en problemen aan, die „*Denkertjes*” genoemd worden. (Vroeger stonden ze altijd met elkaar op één bladzijde). Voor goede oplossters van zulke *Denkertjes* wordt elke keer een boekebon beschikbaar gesteld. Het adres, waaraan men de oplossingen moet inzenden, staat vermeld op de achterzijde van de omslag. Dit jaar willen we beginnen alle inzenders voor hun oplossingen punten toe te kennen (maximaal 10 punten per vraagstuk), zodat er een ladderwedstrijd ontstaat. Wie op een zeker ogenblik 300 punten heeft behaald komt voor een extra prijs in aanmerking. Het is dus helemaal niet nodig van alle tien puzzels de oplossingen in te zenden. Puzzels of vraagstukken, die niet bij de *Denkertjes* zijn vermeld, tellen niet mee voor de puntentelling. Oplossingen moeten dit keer uiterlijk 15 november binnen zijn.

En dan zouden we graag willen, dat onze lezers ook op de artikelen reageerden. Vind je ze te saai, te moeilijk, te interessant, wil je zeggen, dat je het er roerend of juist helemaal niet mee eens bent, schrijf de redactie en er zal aandacht aan geschonken worden. Pythagoras is jullie tijdschrift en niet slechts een tijdpassering van de redactie. We hopen overigens dat je aan dit en de volgende nummers veel plezier zult beleven.



°Hoe hoog is dat gebouw?

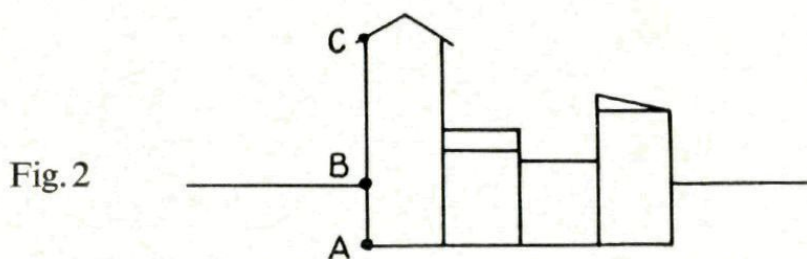
Misschien heb je je dat in je vakantie wel eens afgevraagd, als je in een vreemde stad was.

Landmeters hebben enige geijkte methoden om hoogten te meten. Daarbij komt een zg, theodoliet te pas om hoeken te meten en na de metingen is nog een berekening nodig, die je moeilijk uit het hoofd kunt doen.

Als we echter geen grote nauwkeurigheid eisen (en wie doet dat, als in de vakantie even de nieuwsgierigheid naar de hoogte van een gebouw in hem opkomt?), dan is er een bijzonder handige methode, die vrijwel geen rekenwerk vraagt:

Je houdt een liniaal verticaal (zie de foto op de binnenkant van de omslag). Houd de liniaal zo, dat je de onderkant van het gebouw (A) ziet samenvallen met het nulpunt (P) van de schaalverdeling. C is het hoogste punt van het gebouw en B is een punt, dat opvalt (op de foto een stuk natuursteen tussen de bakstenen). Je kiest er een punt voor, dat zo hoog ligt, dat je AB gemakkelijk kunt meten. Kijk nu met welke punten P en Q van de schaalverdeling op de liniaal B en C samenvallen. Het

zal duidelijk zijn, dat nu $\frac{PQ}{PR} = \frac{AB}{AC}$. Als we dus naar het gebouw toe gaan en AB meten, kunnen we direkt de hoogte AC van het gebouw berekenen. De jongen, die op de foto langs zijn liniaal kijkt, leest bij het punt Q af 4 en bij R 32. Hij meet $AB = 1,65$ m. De hoogte van het gebouw is dus $8 \times 1,65 \text{ m} = 13,2 \text{ m}$.

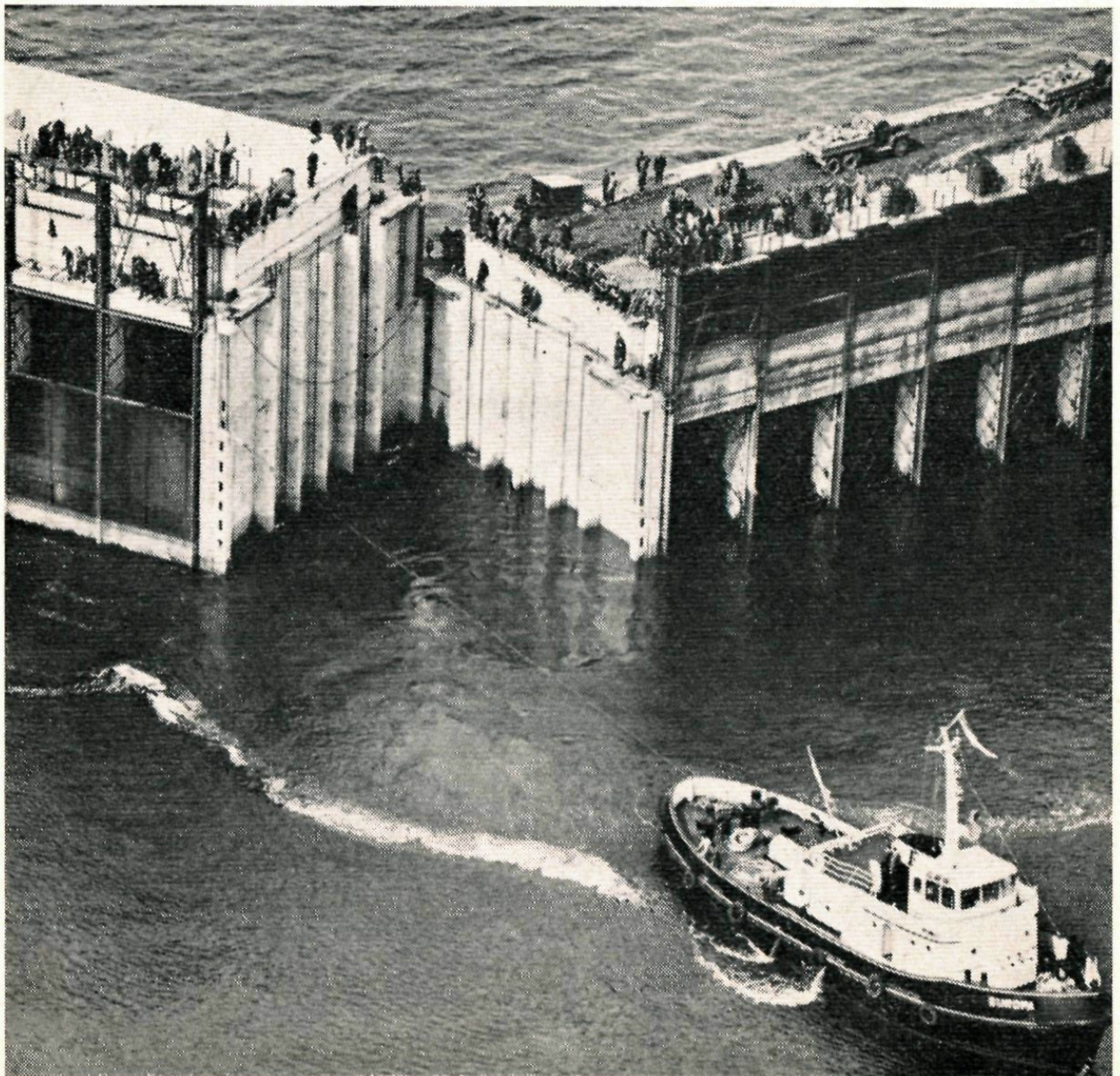


Als je op een vlak terrein bent en de horizon is zichtbaar (fig. 2), is het zelfs niet nodig om naar het gebouw toe te gaan en een bepaald stuk AB op te meten. AB is, als je B kiest op de „hoogte” van de horizon, nl. gelijk aan de hoogte van je oog boven de grond.

Het is eveneens niet nodig om iets te meten, als er zich op of aan het

gebouw iets bevindt, waarvan je de lengte kent. Je ziet bijvoorbeeld op een toren mensen staan en weet, dat de gemiddelde lengte van een mens 1,70 m is. Kijk je nu langs de liniaal en zie je, dat daarop de lengte van een mens overeenkomt met 0,5 cm en de hele toren met 12 cm, dan bereken je gemakkelijk, dat de hoogte van de toren ongeveer 41 m is. Zo is het ook meestal mogelijk de hoogte van gebouwen enz. op een foto te meten. Probeer eens op onderstaande foto te meten hoe hoog de linkse caisson boven het water uitsteekt.

Fig. 3





1. Een uit papier geknipte rechthoek, waarvan de lengte 16 cm en de breedte 12 cm is, wordt zo gevouwen dat twee overstaande hoekpunten op elkaar komen te liggen. Bereken de lengte van de vouw.

2. Langs een weg van 99 km lengte staan 100 kilometerpalen. Op elk daarvan is de afstand tot het begin van de weg en eveneens die tot het eind van de weg vermeld op de volgende manier:

0-99, 1-98, 2-97, enz.

Op hoeveel van die palen staan slechts twee verschillende soorten cijfers? Beantwoord dezelfde vraag ook voor een weg van 999 km lengte.

3. In een wedloop over 10 km heeft de winnaar bij de finish een voorsprong van 2 km op nummer twee en een voorsprong van 4 km op nummer drie. Welke voorsprong zal nummer twee bij de finish op nummer drie hebben, als we veronderstellen, dat de snelheden van de drie renners constant zijn?

° Ons vignetje en de omslagtekening



Een trouwe lezer van ons blad heeft ons gevraagd of het niet wenselijk zou zijn het vignetje, dat we gebruiken om een klein stukje bladzijde op te vullen, te verklaren. Misschien, zo zei hij, weet niet elke lezer, wat het met *Pythagoras* te maken heeft. Als we deze verklaring hieronder geven, willen we niet nalaten meteen de omslagtekening te bekijken, want ook deze is een illustratie bij de *stelling* van *Pythagoras*.

De stelling van Pythagoras, genoemd naar de Griekse wiskundige, die omstreeks 580 tot 500 voor Christus leefde, is niet door hem het eerst gevonden. We weten zeker, dat oudere volken (o.a. de Babyloniers) deze al kenden. De stelling is dus al zeer oud. Toch is hij wel een der bekendste van de meetkunde. Zoals menigeen zich van de geschiedenislessen alleen nog herinnert: „1600 – Slag bij Nieuwpoort”, zo blijft ook bij velen, die na hun schooltijd nog maar weinig aan wiskunde deden, de naam Stelling van Pythagoras hangen en meestal weten ze ook nog wel wat deze zegt: $c^2 = a^2 + b^2$.

Weten ze ook nog, wat deze kwadraten voorstellen? We zullen dat nu bekijken:

Wanneer we een rechthoekige driehoek willen construeren, kunnen we beginnen de rechte hoek (C) af te passen en op de benen daarvan de rechthoekszijden (CA en CB). De lengten van deze rechthoekszijden kunnen we willekeurig kiezen. Echter . . . hebben we ze eenmaal ge-

kozen, dan hebben we over de lengte van de schuine zijde niets meer te zeggen. Die ligt dan vast. *Hoe* die vast ligt, zegt ons nu de stelling van Pythagoras: Stellen we de lengten van de rechthoekszijden voor door a en b en de lengte van de schuine zijde door c , dan is in elke rechthoekige driehoek

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

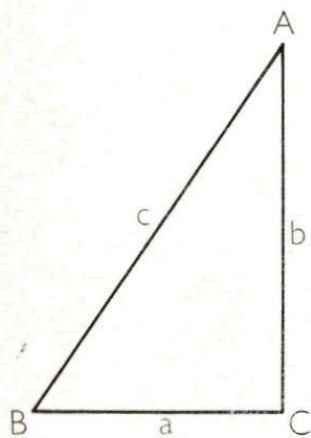


Fig. 4

Dit verrassend eenvoudig verband tussen de drie zijden van elke rechthoekige driehoek heeft velen telkens weer getroffen en dat verklaart wel de belangstelling voor deze stelling. Die belangstelling blijkt ook uit het enorm grote aantal bewijzen, dat ervoor gegeven is. In 1914 verscheen in Amsterdam een boekje van J. Versluys, getiteld: Zesennegentig bewijzen voor het theorema van Pythagoras. Maar er zijn er nog veel meer. Verscheidene van deze bewijzen worden gegeven door oppervlakten te gebruiken. Wanneer a de lengte van een lijnstuk

voorstelt, stelt a^2 nl. de oppervlakte van het vierkant voor met a als zijde. Wie de stelling van Pythagoras wil bewijzen kan dus trachten te laten zien, dat het vierkant, dat men op de schuine zijde van een rechthoekige driehoek kan tekenen een oppervlakte heeft, die gelijk is aan de som der oppervlakten van de vierkanten, die men op de rechthoekszijden kan tekenen. Kijk nu maar eens naar de tekening op de buitenkant van het omslag. Daar staan dan de drie vierkanten, die we zojuist noemden. Het bewijs met deze vierkanten kun je wel in een of ander meetkundeboek vinden. Dat geven we dus nu niet. Wel gaan we zien hoe we ons vignetje voor zo'n bewijs kunnen gebruiken.

In de omslagtekening zijn de vierkanten op de zijden van de rechthoekige driehoek aan de buitenkant daarvan getekend. In fig. 5 ligt $\triangle ABC$ binnen het vierkant met c als zijde. In dat vierkant kunnen nog drie andere driehoeken getekend worden, congruent met $\triangle ABC$. Het is eenvoudig in te zien, dat in de meeste gevallen de vier rechthoekige driehoeken een

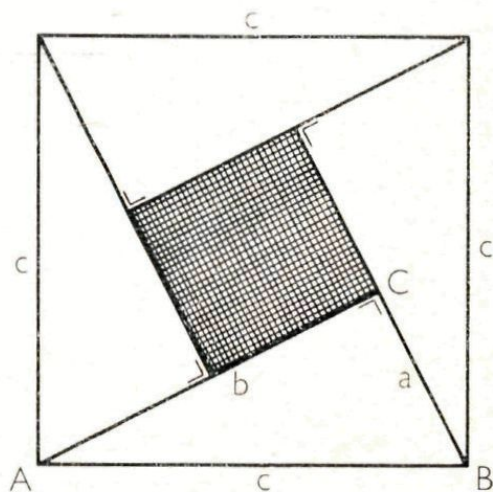


Fig. 5

kleiner vierkant binnen het grote insluiten. Dat is in ons vignetje het zwarte vierkantje. (Wanneer is dat niet het geval?) De zijde van dat zwarte vierkantje heeft in figuur 5 de lengte $(b - a)$.

Elk der rechthoekige driehoeken in fig. 5 heeft de oppervlakte $\frac{1}{2} ab$. (Zo'n driehoek is de helft van een rechthoek met zijden a en b .)

Tellen we de oppervlakten van het kleine vierkant en de vier driehoeken op, dan vinden die van het vierkant met zijde c . Dus:

$$c^2 = (b - a)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} ab$$

Hieruit blijkt:

$$c^2 = b^2 - 2ab + a^2 + 2ab$$

d.w.z.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

En zo hebben we dan de stelling van Pythagoras bewezen. Aan dat bewijs herinnert ons dus telkens ons vignetje:



°° Sprongbewijzen

1. In een plat vlak tekent men een willekeurig aantal cirkels. Zo wordt dat vlak in een aantal gebieden verdeeld (waarvan er een zich tot in het oneindige uitstrekt). Twee naburige gebieden grenzen aan elkaar volgens een of meer cirkelbogen. (Of misschien zelfs volgens een hele cirkel). Nu wil men al die gebieden een kleur geven en wel zo, dat elk tweetal naburige gebieden verschillend gekleurd worden.

Bewijs, dat men dat kan doen door slechts van twee verschillende kleuren gebruik te maken.

2. In de uitdrukking $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ substitueert men voor n een willekeurig getal.

Bewijs, dat het getal, waarin de uitdrukking door deze substitutie overgaat, een zevenvoud is.

3. In de rij van Fibonacci (Zie Pyth. 3-2, bldz. 25), die gekenmerkt wordt door $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_{n+2} = t_{n+1} + t_n$ voor elk natuurlijk getal n , geldt (eveneens voor elk natuurlijk getal n) de betrekking:

$$(t_{n+1})^2 - t_n \cdot t_{n+2} = (-1)^n$$

Bewijs dat.

Hierboven staan drie stellingen, die heel verschillend zijn, maar die ook iets vergelijkbaars hebben. In elk van die stellingen speelt nl. de verzameling van de natuurlijke getallen een belangrijke rol. En je kunt elk van hen formuleren in de vorm: De bewering „...” is voor elk natuurlijk getal n waar. Bijvoorbeeld:

De bewering „ $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ is een zevenvoud” is voor elk natuurlijk getal n waar.

De juistheid van zo’n stelling kan dikwijls met behulp van een sprongbewijs worden aangetoond. In het artikel *Jos gaf te weinig* in Pyth. 3-1 is zulk een sprongbewijs gebruikt. Alleen wordt het daar aangeduid met zijn officiële naam:

bewijs met behulp van het principe van de volledige inductie.

Een sprongbewijs bestaat altijd uit drie delen:

1. In het eerste deel wordt gecontroleerd of de in de stelling voorkomende bewering waar is, indien voor n het getal 1 gekozen wordt.
2. Het tweede deel bevat de „sprong” en is het moeilijkste. Je toont daar nl. in aan:
Is de bewering waar voor de een of andere waarde van n , dan is deze ook waar voor het volgende natuurlijke getal, dus voor $n + 1$.
3. In het derde deel tenslotte wordt het principe van de volledige inductie gebruikt. We zeggen dan bijv.:
Omdat in het eerste deel de waarheid van de bewering is gebleken voor $n = 1$, is deze volgens het tweede deel ook waar voor $n = 2$. Maar dan is de waarheid voor $n = 3$ volgens het tweede deel ook weer bewezen. Daaruit volgt dan weer de waarheid voor $n = 4$, enzovoorts. Zo verkrijgt men dus het recht om te zeggen, dat de bewering voor *elk* natuurlijk getal waar is.

Aan de hand van de bovenstaande voorbeelden zullen we dit nu toelichten.

Voorbeeld 1: Tekent men slechts één cirkel, dan wordt het platte vlak daardoor in twee gebieden verdeeld, namelijk het binnengebied van die cirkel en zijn buitengebied. Het is vanzelfsprekend, dat men nu aan twee kleuren genoeg heeft.

Stel nu, dat de bewering waar is voor $n = k$, dus dat men elke figuur met k cirkels op de gewenste manier kan kleuren met bijvoorbeeld rood en groen. Neem nu een figuur, waarin $k + 1$ cirkels staan. Kies een

van die $k + 1$ cirkels uit en denk hem weg. Nu zijn er k cirkels over en kan volgens de veronderstelling de figuur dus met rood en groen gekleurd worden. Je hoeft dat niet echt te doen, het zou wel eens erg moeilijk kunnen zijn en zelfs wel kunnen mislukken; dat het met k cirkels beslist mogelijk is, is immers maar een veronderstelling waarvan we nog niet weten of hij inderdaad juist is. Denk nu die uitgekozen $k + 1$ de cirkel weer terug. De figuur is dan zeker fout geworden, want langs die zojuist teruggekeerde cirkel grenzen nu gebieden aan elkaar, die allebei rood of allebei groen zijn. Maar dat is gemakkelijk te verhelpen door alle rode gebieden binnen de teruggekeerde cirkel groen te maken en alle groene gebieden binnen die cirkel rood te maken. Alle fouten *langs* de teruggekeerde cirkel zijn zo hersteld, *binnen* die cirkel zijn door het verwisselen van de kleuren geen nieuwe fouten ontstaan, *buiten* hem is alles bij het oude gebleven en voldoet de kleuring dus nog steeds aan de gestelde eisen. Daarmee is het tweede deel van het bewijs klaar. De sprong is gemaakt. We weten nu zeker: als de bewering waar is voor $n = k$, dan is hij ook waar voor $n = k + 1$. Het bewijs wordt nu voltooid door toepassing van het principe van de volledige inductie.

Voorbeeld 2: De bewering „ $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ is deelbaar door 7” is een waarheid voor $n = 1$. Want $3^3 + 2^0 = 27 + 1 = 28 = 4 \cdot 7$.

Nu veronderstellen we, dat de bewering waar is voor $n = k$, dus dat $3^{2k+1} + 2^{k-1}$ een zevenvoud is. En we proberen te bewijzen dat daaruit volgt de waarheid voor $n = k + 1$, dat wil zeggen dat $3^{2k+3} + 2^k$ een zevenvoud is. Welnu:

$$\begin{aligned} 3^{2k+3} + 2^k &= 3^2 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k-1} = (7 + 2) \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k-1} \\ &= 7 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot (3^{2k+1} + 2^{k-1}) \end{aligned}$$

De eerste term is een zevenvoud en op grond van de veronderstelling is de tweede term ook een zevenvoud; hun som is dan natuurlijk ook een zevenvoud. Tenminste als de veronderstelling juist is.

Het bewijs wordt nu voltooid door toepassing van het principe van de volledige inductie.

Voorbeeld 3 zullen we nu verder niet bespreken om de lezers zelf ook eens een kans te geven.

° Altijd weer een vierkant

Als we de middens van de op elkaar volgende zijden van een willekeurige vierhoek met elkaar verbinden ontstaat er een parallellogram. De deellijnen van de hoeken van dit parallellogram zijn de zijden van een rechthoek (tenzij het parallellogram een ruit is) en de deellijnen van de hoeken van deze rechthoek zijn de zijden van een *vierkant* (tenzij de rechthoek al een vierkant is). Het is niet moeilijk deze beweringen te bewijzen.

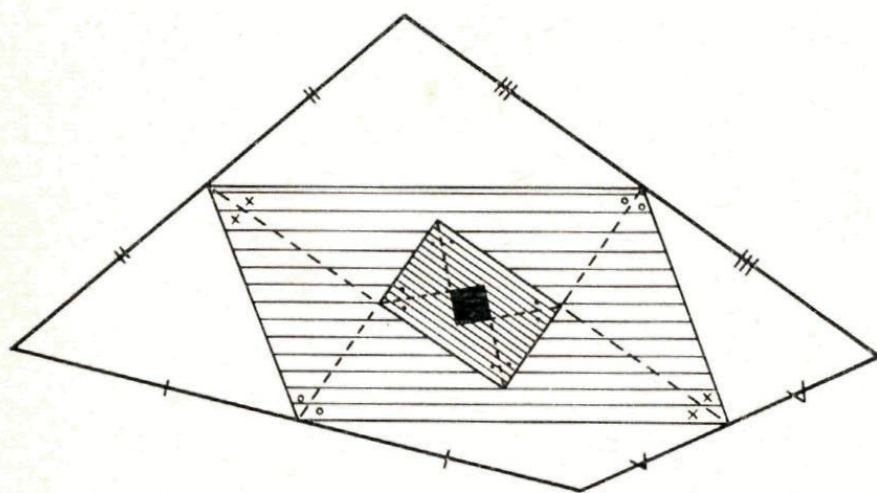


Fig. 6

Zijn er nog andere manieren om op een soortgelijke wijze (verbinden van middens van zijden, het trekken van deellijnen, hoogtelijnen, zwaartelijnen, middelloodlijnen) van een willekeurige vierhoek naar een vierkant te komen?



Denkertjes

4. Construeer het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een gegeven driehoek ABC met zo weinig mogelijk hulplijnen en hulpbogen, maar . . . zonder de middelloodlijnen van de zijden te gebruiken.

5. Punt P ligt binnen een rechthoek $ABCD$ en heeft tot A , B en C opvolgend de afstanden 3, 4 en 5. Bereken de afstand van P tot D .

6. In de ruimte wordt een gebroken gesloten lijn geconstrueerd met de volgende twee eigenschappen: alle segmenten hebben gelijke lengte, bij het doorlopen van de lijn blijkt elk segment loodrecht op zijn twee voorgangers te staan. Fig. 7 toont een voorbeeld met zes segmenten.

Kan zulk een lijn uit een willekeurig aantal segmenten opgebouwd worden? Teken een voorbeeld met 12 segmenten.

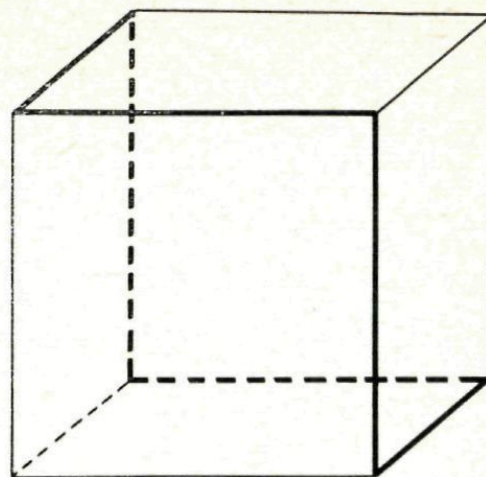


Fig. 7

° Voor knutselaars¹

Het vervaardigen van regelmatige en halfregelmatige lichamen geeft de knutselaars altijd veel plezier. In dit artikel worden de wegen aangewezen om het weer eens heel anders te doen.

De zijvlaksdagonalen AC, AH, AF, CH, CF en FH van een kubus EFGH zijn de ribben van een regelmatig viervlak ACFH (fig. 8). Dit regelmatig viervlak wordt omgeven door vier andere onderling congruente viervlakken. Een daarvan is bijv. B · ACF. Het werk van de knutselaars begint nu met het vervaardigen van deze vier congruente

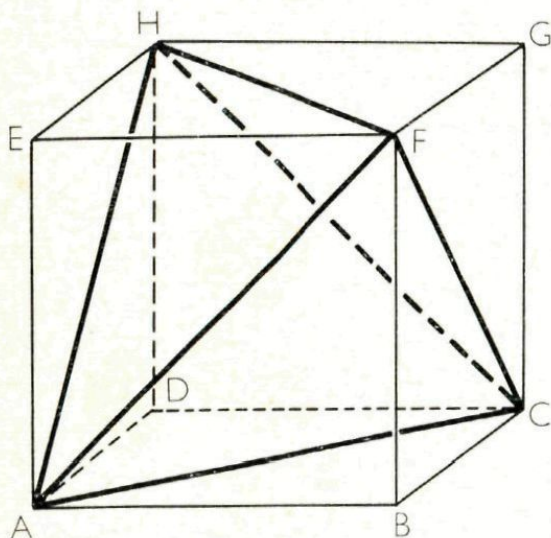


Fig. 8

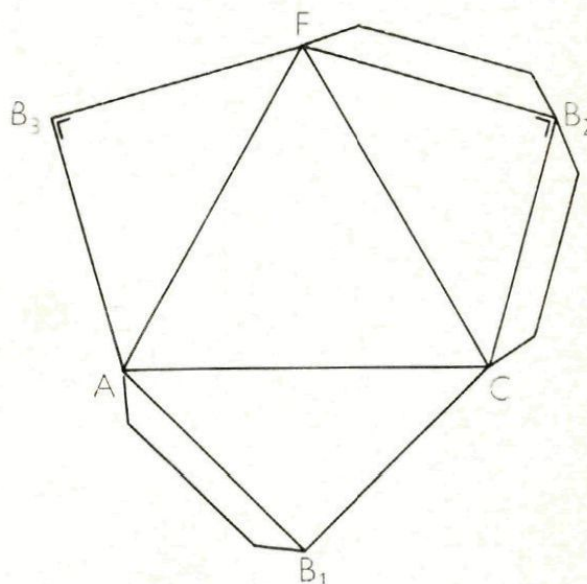


Fig. 9

viervlakken. Het netwerk van B · ACF is afgebeeld in fig. 9. Wanneer men de lengte van AC gekozen heeft, kan begonnen worden met de

¹ Naar een artikel in The Mathematics Teacher (april 1956).

gelijkzijdige driehoek ACF , waarna men de rechthoekige gelijkbenige driehoeken ACB_1 , CFB_2 en AFB_3 kan tekenen. Nog even drie plakrandjes er aan en het netwerk van een der viervlakken is gereed. Zijn ze alle vier klaar plak ze dan naast elkaar op een gelijkzijdige driehoek, waarvan de zijden dubbel zo lang zijn als AC . Je krijgt dan iets, dat er van boven bekeken uit ziet als fig. 10.

Door omvouwen om AC , AF en CF ontstaat de kubus. Maar wacht nog even met deze te maken. Een aardige puzzel is het van te voren te bedenken, welke letters er in fig. 10 nog bijgeplaatst moeten worden, wanneer we daarin de hoekpunten van de kubus terug willen vinden. Je kunt ook proberen elk der driehoekjes van je model zo te kleuren, dat telkens

twee overstaande zijvlakken van de kubus eenzelfde kleur krijgen. Zelfs wie niet de tijd of de lust heeft het knutselwerk uit te voeren, kan in fig. 10 gaan opzoeken, welke driehoeken daarin dan dezelfde kleur moeten krijgen.

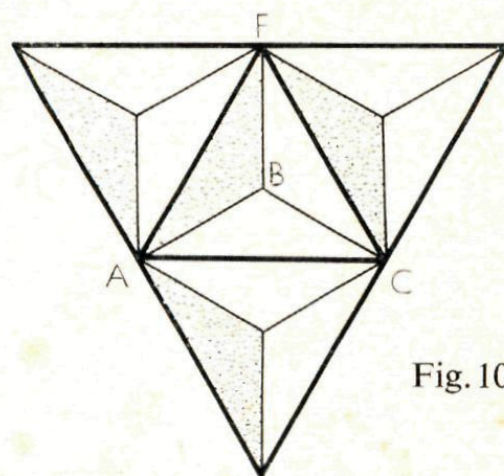


Fig. 10

Is het beschreven knutselwerkje goed uitgevallen, dan kunnen we ons aan iets moeilijkers wagen. We willen nl. op twee manieren een *ruitentwaalfvlak* maken. Zo'n ruitentwaalfvlak is afgebeeld in fig. 12. We gaan eerst eens zien hoe het in elkaar zit. In fig. 11 is K het middelpunt van het bovenvlak $EFGH$ van een kubus. In K is de loodlijn $KP = \frac{1}{2}AB$ op dat bovenvlak opgericht. P kan dan beschouwd worden als de top van een regelmatige vierzijdige

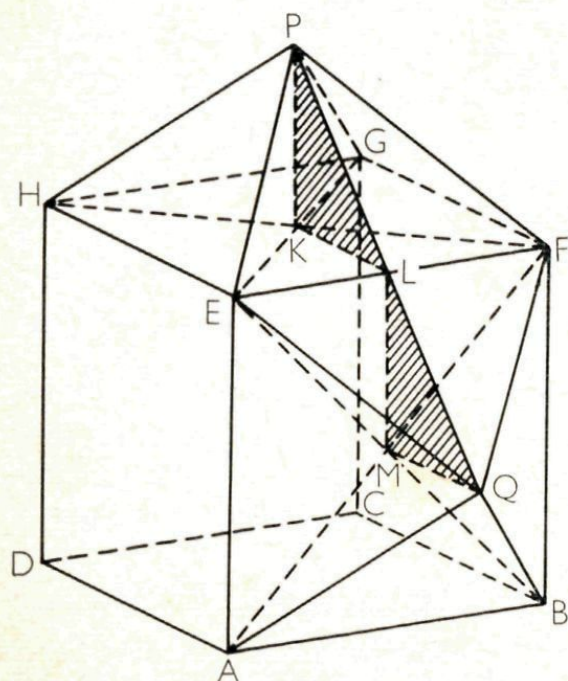


Fig. 11

piramide $\begin{smallmatrix} P \\ EFGH \end{smallmatrix}$. Zo is Q de top van een piramide $\begin{smallmatrix} Q \\ ABFE \end{smallmatrix}$, die met $\begin{smallmatrix} P \\ EFGH \end{smallmatrix}$ congruent is. Dus is $MQ = PK$. De driehoeken PKL en MQL zijn nu congruente rechthoekige en gelijkbenige driehoeken, waaruit volgt dat de hoeken KLP en MLQ beide 45° zijn. Daaruit leiden we af, dat LP en LQ in elkaars verlengde liggen en de beide driehoeken PEF en QEF samen een ruit vormen.

In fig. 12 is deze ruit PFQE duidelijk te zien. Het ruitentwaalfvlak kan dus opgebouwd worden door op elk der zijvlakken van een kubus een vierzijdige piramide te plakken, waarvan de hoogte gelijk is aan de helft van de ribbe van de kubus. De zes toppen zijn de punten P, Q, R, S, T en U, die men in fig. 12 als hoekpunten van het ruitentwaalfvlak kan vinden. In elk dezer hoekpunten komen vier der ruiten samen. De zes andere hoekpunten van het twaalfvlak zijn tevens de hoekpunten van de kubus. In elk van deze punten komen drie ruiten samen. Het ruitentwaalfvlak voldoet dus niet aan een der eisen, die men aan de regelmatige lichamen stelt, nl. dat er in elk hoekpunt evenveel zijvlakken moeten samenkomen. Het is dan ook geen regelmatig twaalfvlak.

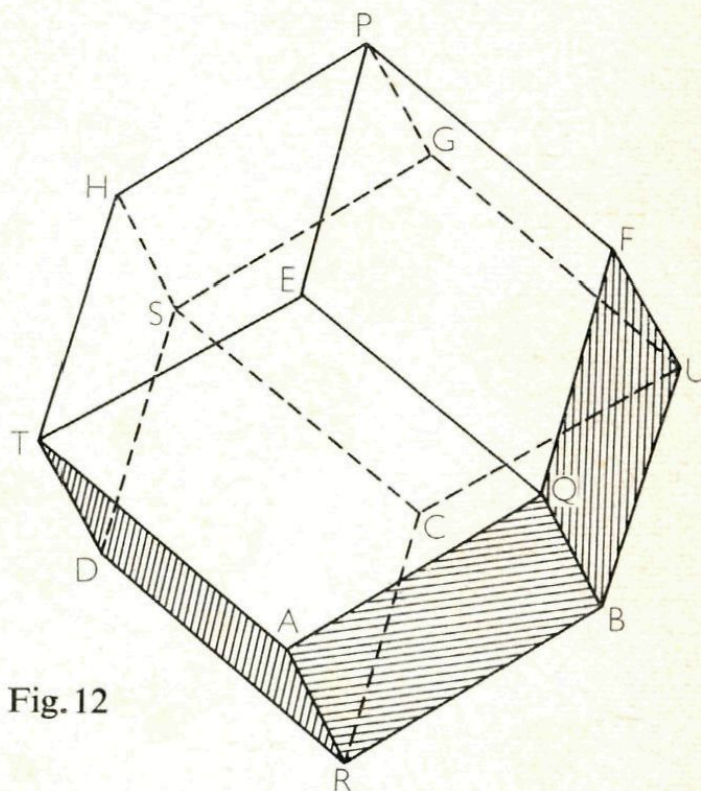
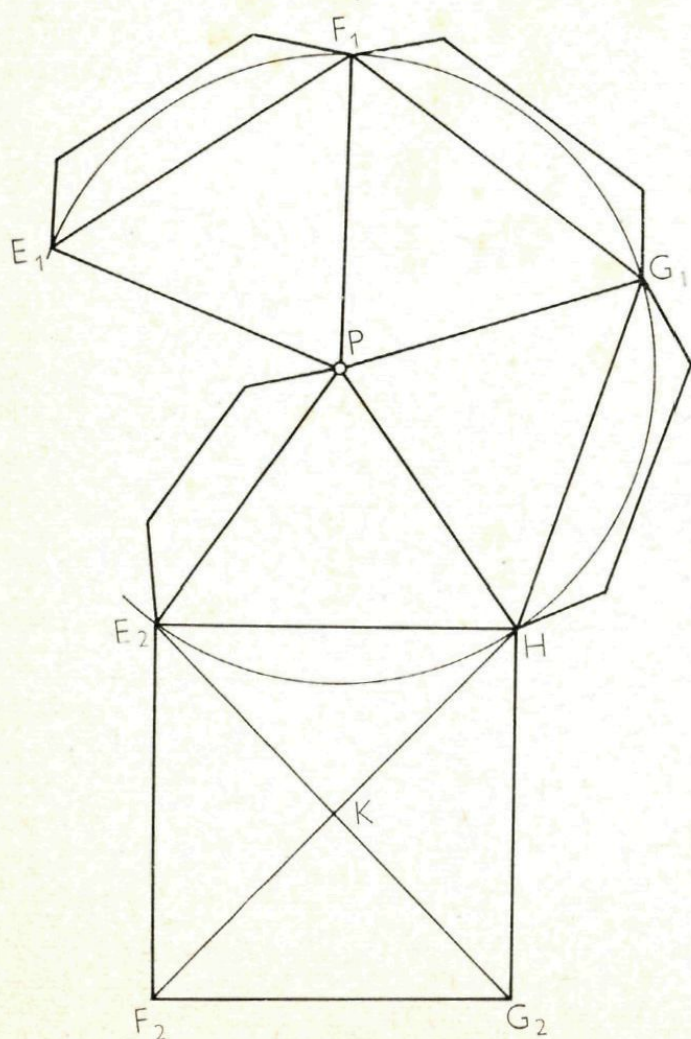


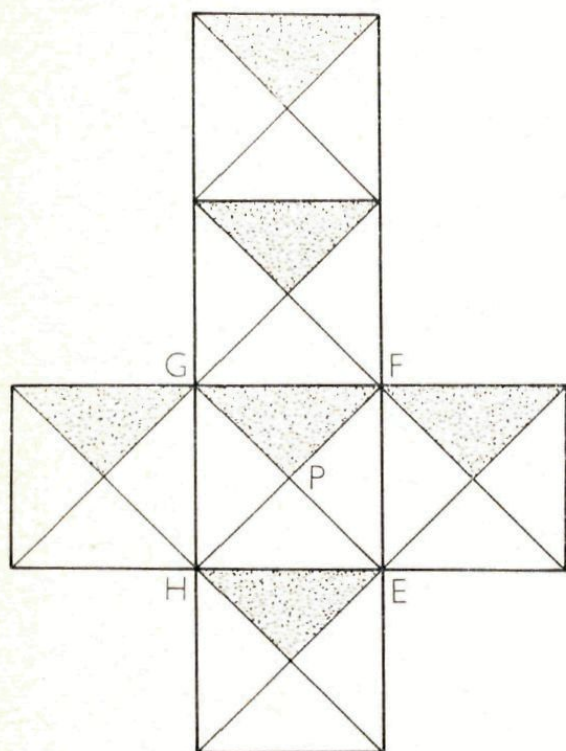
Fig. 12



Onze knutselaar maakt nu eerst zes congruente piramides. Van $\begin{matrix} P \\ EFGH \end{matrix}$ is in fig. 13 het netwerk getekend. Voor dit getekend kan worden moet eerst de lengte van de ribbe van de kubus gekozen worden en dan de ruit geconstrueerd. Dit kan gemakkelijk, daar de korte diagonaal van de ruit gelijk is aan de ribbe van de kubus en de lange gelijk aan een der zij-

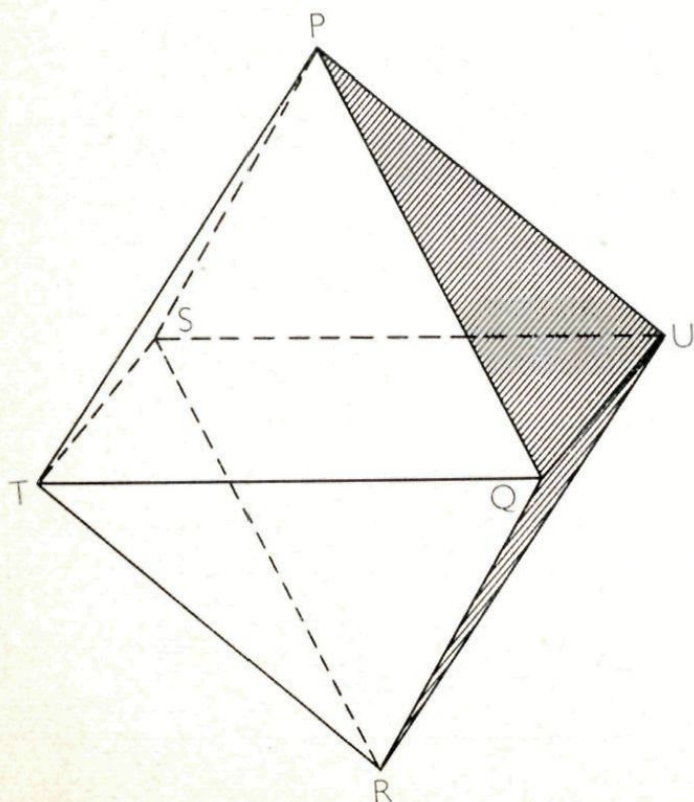
Fig. 13

vlakdiagonalen van de kubus. Dit is met de congruentie van de driehoeken EKL en PKL in fig. 11 gemakkelijk te bewijzen. Plakken we nu



de zes piramiden op het netwerk van een kubus, zoals dat in fig. 14 getekend is, dan kan door omvouwten het ruitentwaalfvlak gevormd worden. Ook hier kan men in fig. 14 eerst weer trachten te vinden, welke letters er bij elk der punten moeten staan.

Fig. 14



De zes punten P, Q, R, S, T en U van het ruitentwaalfvlak zijn hoekpunten van een regelmatig achthvlak, dat is afgebeeld in fig. 15. Probeer dit in fig. 12 terug te vinden en je daarbij voor te stellen, wat er op de zijvlakken van dit achthvlak geplakt moet worden om het ruitentwaalfvlak te verkrijgen. Juist, dat zijn driezijdige piramides, zoals $\begin{smallmatrix} E \\ PQT \end{smallmatrix}$. Deze piramides hebben een netwerk, dat is afgebeeld in fig. 16.

Fig. 15

De knutselaar plakt acht van deze piramides op het netwerk van het achthoek en krijgt dan iets, dat er van boven als fig. 17 uitziet. Dan kan hij opnieuw het ruitentwaalfvlak in elkaar vouwen.

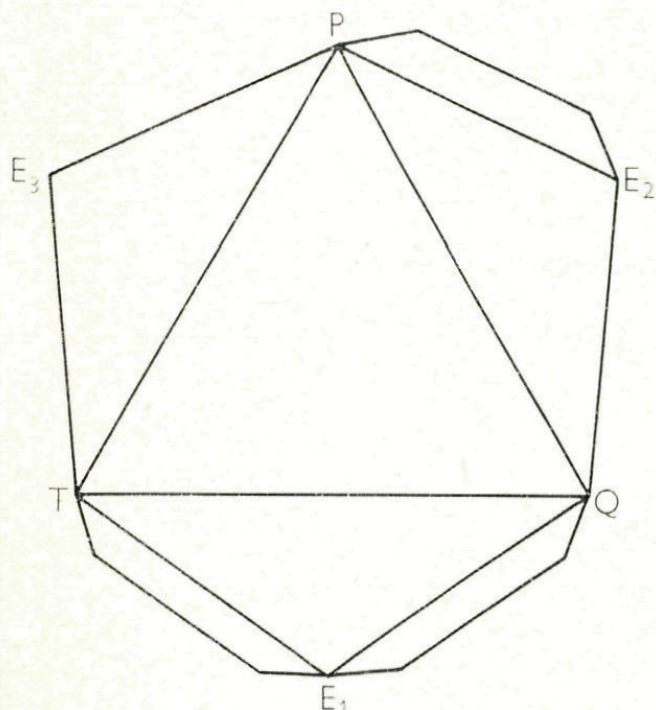


Fig. 16

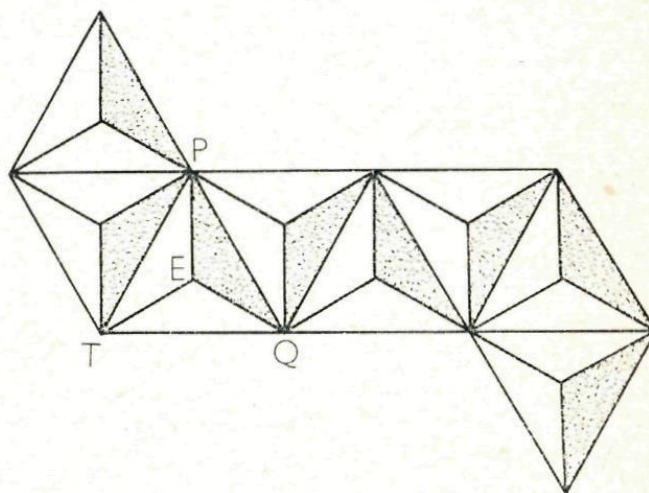
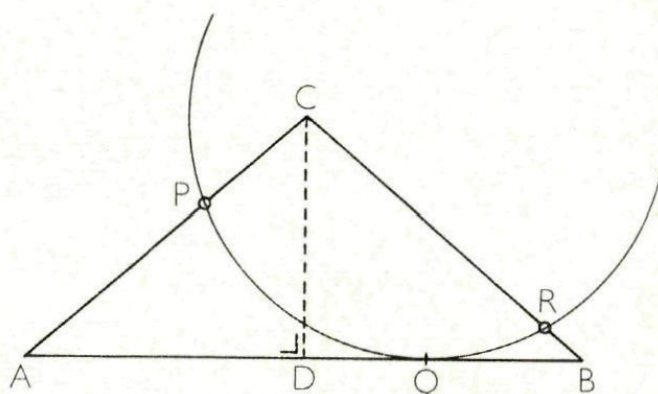


Fig. 17

Veel succes knutselaars. Als je er teamwork van maakt ben je gauw klaar en je kunt eventuele moeilijkheden ook nog samen bespreken.



Fig. 18



7. In fig. 18 is $\triangle ABC$ gelijkbenig; de grootte van $\angle C$ is 100° . De cirkel raakt in Q aan AB ; zijn straal is even lang als de hoogtelijn CD . Bereken het aantal booggraden van boog PQR .

°Matrix-Malligheid

Kinderen van de lagere school vermaken zichzelf en hun vriendjes soms door in de klas briefjes rond te zenden, die in geheimschrift geschreven zijn. Natuurlijk is dat een volkomen misplaatst tijdverdrijf, dat door de redactie van dit achtenswaardige blad niet genoeg gelaakt kan worden.

Dat diezelfde redactie nu aan de lezers een bijzonder geraffineerd geheimschrift presenteert, dat lijkt natuurlijk in de eerste plaats malligheid te zijn. Maar er steekt toch een diepe ernst achter, een wiskundige ernst zelfs. Men kan nl. in dit artikel kennis maken met een zeer merkwaardig soort wiskundige „dingen”, de matrices.

Wie ons geheimschrift wil fabriceren moet over een lijst beschikken (een substitutielijst), waarmee men aan de letters van het alfabet getallen toevoegt. Hier is de lijst, die in dit artikel gebruikt zal worden:

a = 26	f = 30	k = 17	p = 3	u = 6	z = 29
b = 5	g = 7	l = 19	q = 12	v = 22	• = 14
c = 16	h = 25	m = 8	r = 13	w = 24	= 18
d = 1	i = 10	n = 4	s = 27	x = 28	, = 23
e = 15	j = 11	o = 2	t = 9	y = 21	! = 20

Omdat men met het getal 30 gemakkelijker rekt dan met het getal 26, hebben we de lijst met vier leestekens uitgebreid, die straks ook vertaald zullen worden. Een van die leestekens is de open plaats tussen twee woorden. Daaraan is, zoals je ziet, het getal 18 toegevoegd. De gebruikte getallen zijn die van 1 tot en met 30.

Met behulp van deze substitutielijst wordt een te vertalen tekst in een (ononderbroken) rij getallen omgezet. De voorbeeldzin, die we hieronder zullen gebruiken, is de zin:

Hoepel op! Die wordt dus omgezet in de rij

25-2-15-3-15-19-18-2-3-20

We gaan nu deze getallenrij in mootjes van vier hakken. Gaat die verdeling niet precies op, dan zetten we er een paar malen het getal 18 achter (waardoor er immers toch alleen maar open plaatsen aan de zin worden toegevoegd). In ons voorbeeld krijgen we dan dus

25-2-15-3 15-19-18-2 3-20-18-18

Tenslotte wordt elk mootje in de vorm van een *matrix* geschreven, d.w.z. in een rechthoekig (in dit geval vierkant) schema tussen twee

grote haken. De eerste twee getallen leveren de bovenste rij van de matrix en de andere twee de onderste rij. De drie matrices zien er dan zo uit:

$$\begin{pmatrix} 25 & 2 \\ 15 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 15 & 19 \\ 18 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 20 \\ 18 & 18 \end{pmatrix}$$

Na deze voorbereidende schermutselingen zijn we nu tot aan de codering gekomen. Het gegeven schrift moet nl. onherkenbaar worden en de gegeven matrices moeten we daarvoor veranderen in andere, die door de tegenpartij niet direct te begrijpen zijn. We maken daarvoor gebruik van een extra matrix, de zg. *coderingsmatrix*. Voor ons voorbeeld kiezen we als coderingsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Met behulp hiervan wordt nu elke matrix omgezet in een andere. De nieuwe matrices worden weer omgezet in mootjes van vier getallen en deze weer in een groep van vier letters of tekens. Er ontstaat daardoor een geheel andere zin dan de oorspronkelijke. Meestal is de nieuwe „zin” er een zonder enige betekenis. Je zult zien, dat in ons voorbeeld alles zo listig gekozen is, dat de gecodeerde zin ook weer zinvol is. Maar dat is natuurlijk maar een malligheidje.

We geven nu eerst de berekening en laten daarna de toelichting volgen:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 25 & 2 \\ 15 & 3 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 125 & 19 \\ 70 & 11 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow 5-19-10-11 \rightarrow \mathbf{Blij}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 15 & 19 \\ 18 & 2 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 120 & 48 \\ 69 & 25 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 30 & 18 \\ 9 & 25 \end{pmatrix} \rightarrow 30-18-9-25 \rightarrow \mathbf{f th}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 3 & 20 \\ 18 & 18 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 96 & 130 \\ 57 & 74 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 27 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow 6-10-27-14 \rightarrow \mathbf{uis.}$$

Het eindresultaat is dus, dat **Hoepel op!** vertaald wordt in **Blijf thuis.**

En nu de toelichting op de berekeningen:

De horizontale en de verticale lijn in elk der berekeningen vormen vier kwadranten. In de rechterbovenhoek staat de gegeven matrix, links onder staat steeds de coderingsmatrix en rechts onder het resultaat van de berekening. Deze geschiedt volgens het volgende voorschrift:

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ & c & d \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2a + 5c & 2b + 5d \\ 1a + 3c & 1b + 3d \end{pmatrix} \end{array}$$

Elk getal van de nieuwe matrix wordt dus gevonden door de rij van de coderingsmatrix te nemen, die naast dat getal staat en de kolom van de gegeven matrix, die erboven staat. De getallen van die rij worden dan (van links naar rechts) vermenigvuldigd met de getallen van die kolom (van boven naar beneden), waarna de gevonden produkten worden opgeteld.

Controleer het maar aan de getallen van de **Blij**-matrix:

$$125 = 2 \cdot 25 + 5 \cdot 15$$

$$19 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 3$$

$$70 = 1 \cdot 25 + 3 \cdot 15$$

$$11 = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3$$

Van elk der gevonden getallen wordt zonodig nog een dertigvoud afgetrokken om het geschikt te maken voor omzetting in een letter. Van 125 werd dus 5 gemaakt en van 70 maakten we 10.

Het lijkt allemaal nogal ingewikkeld, maar na enige oefening gaat het toch vrij snel. Bovendien zijn er nog wel een paar bekortingen in de berekeningen aan te brengen, die je wellicht zelf kunt vinden.

Nu is dat alles wel erg mooi bedacht, maar wat doe je nu, als je het codebericht **!trbcauaaylsxumq** ontvangt? Hoe moet dat weer *gedecodeerd* worden? Wel, daarvoor moet je natuurlijk in de eerste plaats de substitutielijst kennen, die je met de afzender van het bericht hebt afgesproken. Daarmee kun je het bericht al vast in getallen omzetten en in mootjes hakken, nl.:

$$20-9-13-5 \quad 16-26-6-26 \quad 6-21-19-27 \quad 28-6-8-12$$

Daarvan maak je dan weer matrices. Verder moet je nu een *decoderingsmatrix* kennen, waarmee je volgens het voorschrift van zoëven dezelfde

berekeningen uitvoert, die de afzender met de coderingsmatrix heeft verricht. De *decoderingsmatrix* moet als het ware het werk van de *coderingsmatrix* weer ongedaan maken. In ons voorbeeld is die decoderingsmatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 25 \\ 29 & 2 \end{pmatrix}$$

En hier is alvast het begin van het decoderingswerk, dat je dan zelf wel verder kunt voltooien:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 20 & 9 \\ 13 & 5 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 3 & 25 \\ 29 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 385 & 152 \\ 606 & 271 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 25 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 25-2-6-1 \leftarrow \text{houd}$$

Er is één ding, waar je zowel bij het coderen als bij het decoderen goed op moet letten: de te behandelen matrix dient rechtsboven in het kruis te staan en de coderings- of decoderingsmatrix links onder. Ga maar eens na, wat voor rampen er gebeuren, als bij het coderen van het woord **snik** tegen deze regel gezondigd wordt. Je vindt dan als resultaat **xsgj**. En de ontvanger decodeert braaf volgens de regels en ziet zonder zich van een fout bewust te zijn inplaats van een **snik** een **lach** verschijnen.

Voor ditmaal is het genoeg. Je weet nu „hoe het werkt”. Een rechtgeaard lezer van Pythagoras is daar natuurlijk niet mee tevreden. Hij wil weten „waarom het werkt”. En hij zal zich afvragen of je zomaar elke matrix als coderingsmatrix kunt gebruiken, hoe je bij een gegeven coderingsmatrix aan de decoderingsmatrix komt, enzovoorts. In een volgend nummer komen we op deze zaken terug. Voorlopig volstaan we met een goede raad: **Rz.,yppaicwuvj!xeun**



8. In een rechthoekige tabel van positieve getallen is elk getal gelijk aan het produkt van de som van de getallen van zijn rij en de som van de getallen van zijn kolom. Bewijs dat de som van alle getallen van de tabel gelijk is aan 1. Maak zulk een tabel met drie rijen en twee kolommen.

9. De eerste vergelijking van een stelsel van 100 vergelijkingen luidt

$$x_1 = 1 - 3x_{100}$$

De andere 99 vergelijkingen vindt men door in

$$x_{k+1} = 1 - 3x_k$$

voor k de natuurlijke getallen tot en met 99 te substitueren. Bereken de waarde van $S = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{100}$.

10. Iemand schrijft een willekeurige rij van 75 niet-negatieve getallen op. Daaruit vormt hij een nieuwe rij door onder elk getal (de absolute waarde van) het verschil van dat getal met zijn opvolger te schrijven; als opvolger van het laatste getal van de rij wordt het eerste getal van de rij beschouwd. Dit proces wordt herhaald door elke neergeschreven rij op dezelfde manier te behandelen als de eerste rij. Wat kun je nu bewijzen omtrent de grootste getallen in twee opvolgende rijen? Bewijs dat men eens op een rij terecht moet komen, die men al eerder opgeschreven heeft. Bewijs, dat dat niet een rij is, die alleen maar nullen bevat.

°Uit een zeventiende-eeuws Japans meetkundeboek

door A.J. Poelman te Bennekom

Het berekenen van de oppervlakte van een cirkel is een moeilijke zaak. Eeuwen lang heeft men getracht zo nauwkeurig mogelijke benaderingen te vinden. In dit artikel zien we hoe men dat in de zeventiende eeuw in Japan deed.

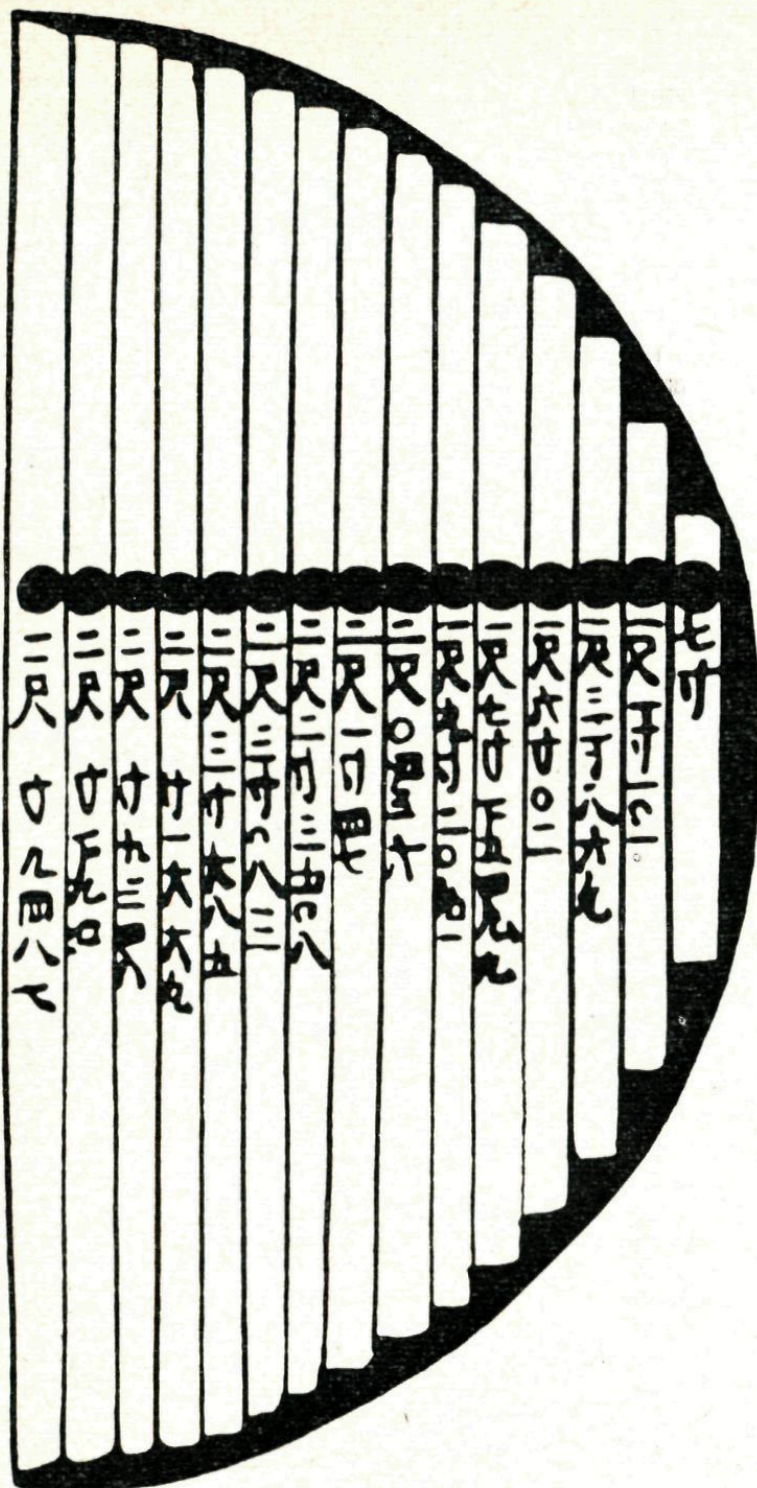
In het boek Kaison-ki Kōmoku (1687 na Chr.), geschreven door Mochinaga Toyotsugu en Ōhashi Takusei vinden we de volgende figuur (fig. 19). Je ziet, dat de schrijvers de oppervlakte van een halve cirkel trachten te benaderen door daarin smalle rechthoeken te tekenen en de oppervlakten daarvan op te tellen.

Om zelf in deze figuur te kunnen lezen moet je enkele Japanse cijfer- en woordtekens kennen, o.a.:

尺 = voet	寸 = duim	〇 = 0	一 = 1
二 = 2	三 = 3	四 = 4	五 = 5
六 = 6	七 = 7	八 = 8	九 = 9

Je vindt nu in elk der rechthoeken, te beginnen bij de kleinste; de woorden lezend van boven naar beneden:

任二尺五寸



7 duim
 1 voet 1 duim 101
 1 voet 3 duim 869
 1 voet 6 duim 02
 1 voet 7 duim 75499
 1 voet 9 duim 2091
 enz.

Fig. 19

1 voet 1 duim 101
 wil zeggen:
 1 voet en 1,101 duim

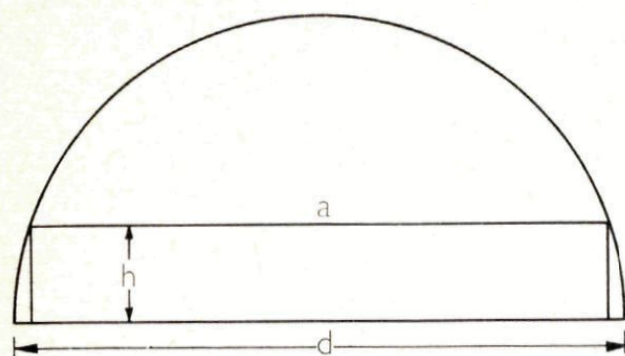
In de vier rechthoeken aan de linkerkant is het aantal duimen niet vermeld. Zo staat in de meest linkse rechthoek

2 voet duim 9487

Dit aantal duimen moet 4 zijn.

De vermelde getallen zijn de lengten van de rechthoeken. Naast de halve cirkel staat nog vermeld, dat de middellijn 2 voet 5 duim is. Het is niet moeilijk al de gegeven lengten uit te drukken in duimen omdat 1 voet voor deze Japanners gelijk was aan 10 duimen. De middellijn is dus bijv. 25 duim lang.

Met behulp van de gegeven lengten kunnen we nu ook de hoogten van de rechthoeken berekenen. In fig. 20 is volgens een bekende stelling



$$h^2 = \frac{d-a}{2} \cdot \frac{d+a}{2} = \frac{d^2 - a^2}{4}$$

Fig. 20

Vullen we hierin in $d = 25$ duim en $a = 24,95$ duim, dan vinden we $h = 0,8$ duim. De som der oppervlakten van alle rechthoeken kunnen we nu gemakkelijk berekenen door de som der lengten met 0,8 te vermenigvuldigen. We vinden dan 235,3616 vierkante duim.

Zouden we de oppervlakte van de halve cirkel berekend hebben met behulp van de formule πr^2 voor de oppervlakte van de cirkel, waarin $\pi = 3,1416$ gekozen kan worden en $r = 12\frac{1}{2}$ duim is, dan zouden we gevonden hebben 245,4406 vierkante duim. Dat maakt een verschil van ruim 10 vierkante duim met de som der rechthoeken, die dus een heel aardige benadering is.

° Het Koningsberger bruggenprobleem II

We vereenvoudigen de plattegrond van Koningsbergen door elk der vier stadsdelen A, B, C en D (zie bladz. 1, fig. 1) door een punt voor te stellen en elk der zeven bruggen door een (recht of gebogen) verbindingslijnstuk. We krijgen dan fig. 21.

Een dergelijke figuur heeft in de wiskunde de Engelse naam *graph*. (Een goede Nederlandse naam is er helaas niet voor. Men zou „grafiek” kunnen zeggen, maar dat woord betekent in de wiskunde iets anders.)

De graph van fig. 21 heeft vier *hoekpunten* en zeven *kanten*.

We kunnen het bruggenprobleem nu zo formuleren: Is het mogelijk

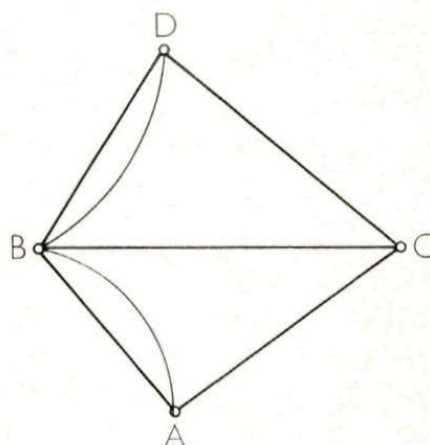


Fig. 21

de graph zo te doorlopen, dat daarbij elk der kanten slechts éénmaal gepasseerd wordt? Beginnen we bijv. bij het hoekpunt A, dan moet daar een „uitgaande kant”, maar ook een „inkomende kant” zijn. Telkens als we via een der kanten in een hoekpunt aankomen, moet daar weer behalve de „inkomende” ook een „uitgaande kant” zijn. Hieruit blijkt, dat als we de graph zo willen doorlopen, dat we elk der kanten slechts eenmaal gebruiken, er bij elk hoekpunt een *even* aantal kanten moeten samenkomen. Aangezien dat niet het geval is, is het onmogelijk een wandeling door Koningsbergen te organiseren, waarbij elk der bruggen slechts éénmaal doorlopen wordt.

Stel je nu eens voor, dat je vier voetbalclubs hebt, A, B, C en D genaamd, die een onderlinge competitie spelen zo, dat elk der clubs tegen elk der andere een thuiswedstrijd en een uitwedstrijd moet spelen. Stel je verder voor, dat de volgende wedstrijden al hebben plaats gevonden: AB, BA, BD, DB, BC, AC en DC. Er zijn dus zeven wedstrijden van de 12 al gespeeld. We kunnen dat schematisch weergeven met de graph van fig.21. We zien dus, dat één graph een beeld kan zijn voor heel verschillende situaties of problemen.

Bij het tekenen van een graph hebben we nogal wat vrijheid. De kanten kunnen we recht of gebogen tekenen. De ligging van de hoekpunten in het vlak kunnen we willekeurig kiezen. Zo kan de situatie van de

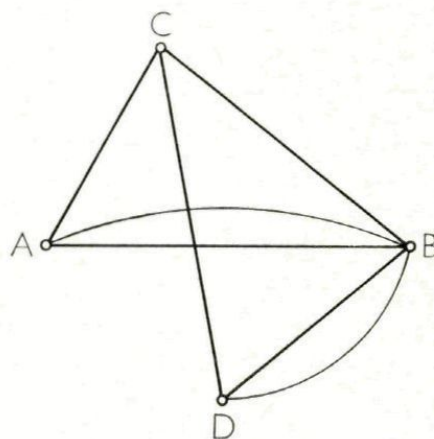


Fig.22

reeds gespeelde wedstrijden van de competitie ook weergegeven worden door de graph van fig.22. Ga maar na, dat de zeven gespeelde wedstrijden weer door zeven kanten worden voorgesteld. De kanten kunnen, zoals we zien elkaar wel snijden, zonder dat de snijpunten hoekpunten van de graph zijn. In fig.22 zijn alleen A, B, C en D hoekpunten van de graph.

De beide graphen van de figuren 21 en 22 zien er heel verschillend uit, als we ze als gewone meetkundige figuren zouden bekijken. Maar toch zijn ze precies gelijk, als we letten op het aantal hoekpunten en kanten en de onderlinge ligging daarvan. In het algemeen kunnen we zeggen, dat twee graphen dezelfde situatie kunnen voor stellen, als ze een gelijk aantal hoekpunten en een gelijk aantal kanten hebben en *als telkens wanneer twee hoekpunten in de eerste graph door een kant zijn verbonden, de daarbij passende hoekpunten in de tweede graph ook door een kant zijn verbonden*. We noemen ze dan *isomorf*. Twee graphen, die een gelijk aantal hoekpunten en een gelijk aantal kanten hebben, hoeven daarom nog niet isomorf te zijn, want dan hoeft nog niet aan de cursief gedrukte voorwaarde voldaan te zijn. Vergelijk maar de beide graphen van fig. 23.

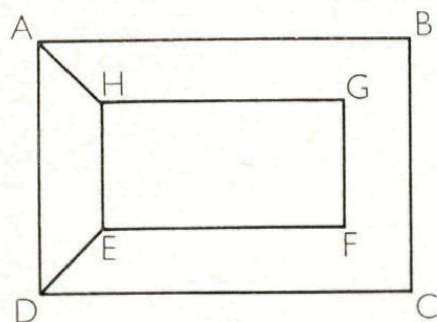


Fig. 23a

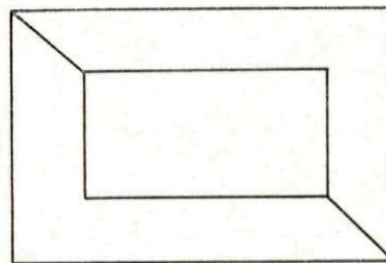


Fig. 23b

Je kunt bij de tweede graph van deze figuur de letters A tot en met H niet zo plaatsen, dat ze op dezelfde wijze door kanten zijn verbonden als in de eerste. Je kunt dat bijvoorbeeld hieraan zien, dat in de eerste der beide graphen een rondgang ABCDEFGHA mogelijk is en in de tweede niet.



graph

uit het Grieks: *graphein* = *tekenen, schrijven*.

inductie

uit het Latijn: *inducere* = *heenleiden*. In de logica is inductie de redeneermethode, waarbij men uit een aantal bijzondere gevallen tot een algemene stelling besluit. Tegenover inductie staat deductie, *deducere* = *afleiden*.

isomorf

uit het Grieks: *isos* = *gelijk*, *morphe* = *vorm*. Twee verzamelingen M_1 en M_2 , waarin zekere relaties tussen de elementen gedefinieerd zijn, heten isomorf, wanneer er een zodanige 1-1 toevoeging tussen de elementen $a_1, b_1, \dots$ van M_1 en $a_2, b_2, \dots$ van M_2 mogelijk is, dat dezelfde relaties, die tussen $a_1, b_1, \dots$ bestaan, ook tussen $a_2, b_2, \dots$ gelden en omgekeerd. In zekere zin hebben M_1 en M_2 dan dezelfde vorm.

matrix

uit het Latijn: *matrix* = *stam*, het woord is afgeleid van *mater* = *moeder*. Het woord werd door Sylvester (1814-1897) in de wiskunde ingevoerd in de betekenis van rechthoekig lettertableau.

segment

uit het Latijn: *secare* = *snijden*.

substitutie

uit het Latijn: *substituere* = *in de plaats stellen van*.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden. *Oplossingen inzenden uiterlijk 15 nov.*

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,— per jaargang. Voor anderen f 3,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J.B.Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B.Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan