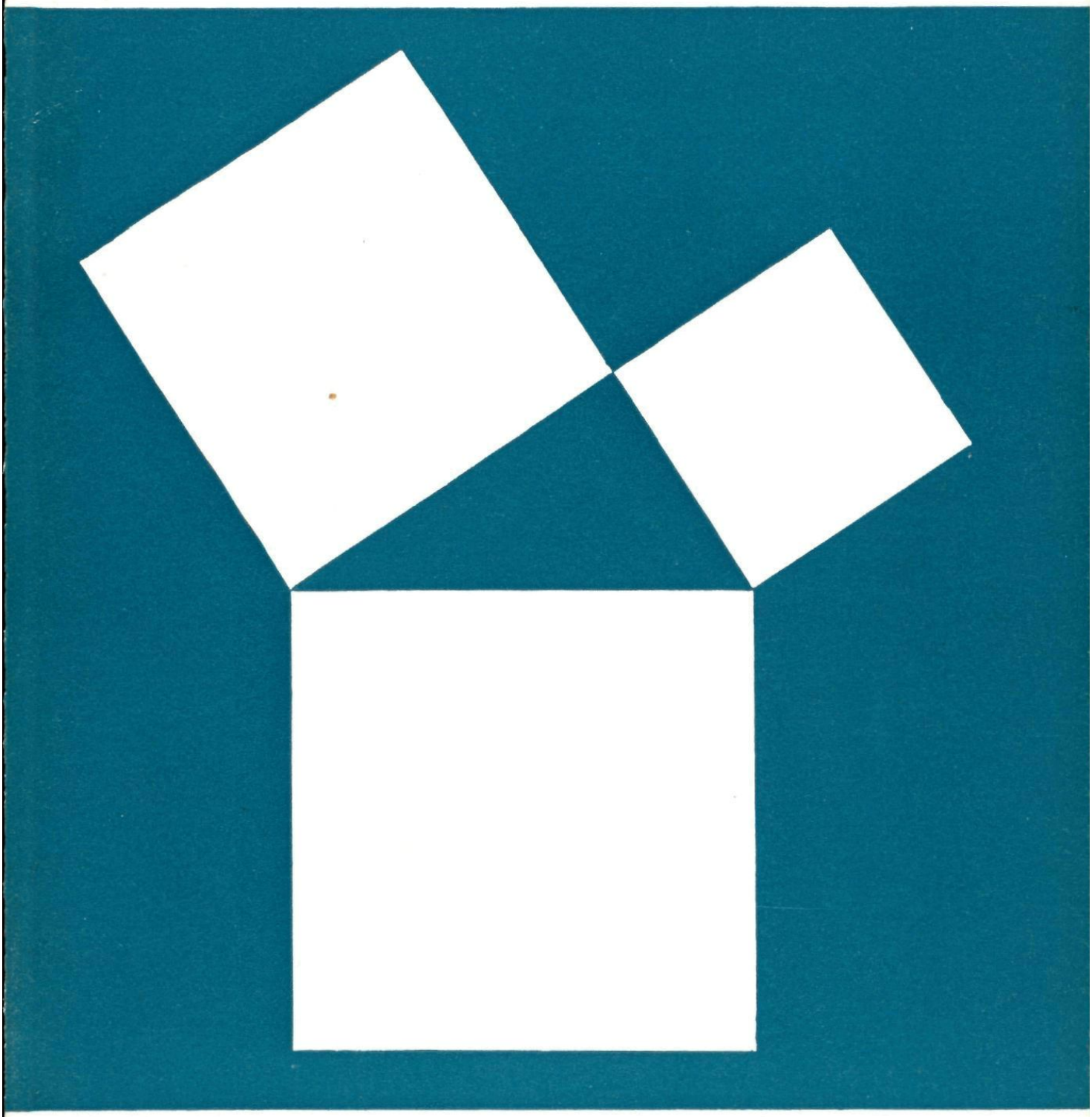
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

2

Vierde jaargang

Verkeersdeskundigen komen dikwijls voor een zelfde moeilijkheid te staan als de eigenaars der woningen in het „Driebronnenprobleem". Ze willen hun verkeerswegen zo ontwerpen, dat men elkaar niet meer ontmoeten kan.
Om in de taal van de graphen te spreken: Ze vragen zich telkens af: Kan dit wegennet als een vlakke graph ontworpen worden? In Los Angelos treft men het hierboven afgebeelde verkeersknooppunt aan, dat kennelijk niet tot een vlakke graph behoort. *(Zie ook blz. 25).*

pythagoras

jaargang 4 no 2

°Het driebronnen-probleem I

Een zeer oude puzzel, die dikwijls ook in een andere „aankleding" wordt gegeven, is de volgende:
Op een stuk land zijn drie huizen A, B en C gebouwd en drie bronnen X, Y en Z gegraven. De bronnen geven niet altijd evenveel water, zodat de drie bewoners van de huizen van elk der bronnen gebruik moeten kunnen maken. Ze leggen daarom paden aan op de meest voor de hand liggende manier, nl. van elk der huizen rechtstreeks naar elk der bronnen. Zie de schets in fig. 1.

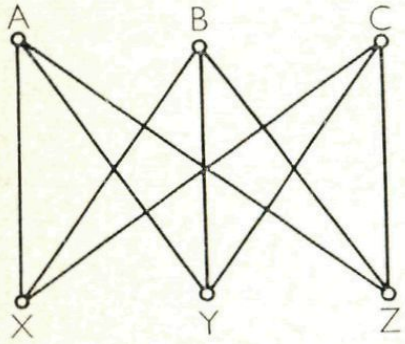


Fig. 1

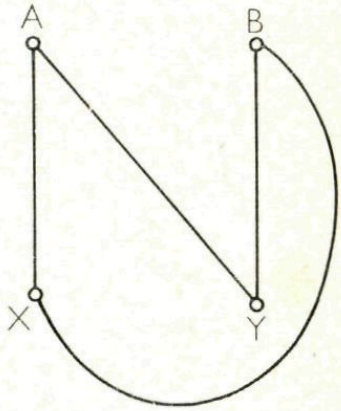


Fig. 2

Fig. 1 is een graph met 6 hoekpunten en 9 kanten. (De punten, waarin de kanten elkaar snijden zijn geen hoekpunten van de graph).

Na verloop van tijd echter krijgen de bewoners van de huizen ruzie met elkaar, zodat ze willen voorkomen, dat ze elkaar op een der paden zouden ontmoeten en ze willen die paden nu zo aanleggen, dat deze elkaar niet meer „snijden". Waren er twee huizen en twee bronnen geweest, dan zou de graph getekend kunnen worden als in fig. 2.

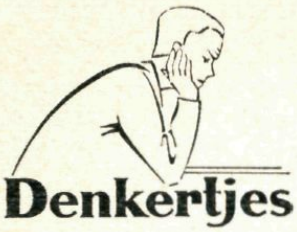
Probeer nu het geval voor de drie huizen en drie bronnen te tekenen. Op blz. 45 wordt dit geval verder besproken.

We bladeren dit nummer even door

Evenals het vorige nummer begint dit met een probleem, dat samenhangt met het tekenen van *graphen*. Van twee series artikelen vindt men in dit nummer het eerste, nl. dat met de titel *Een vreemde algebra- en meetkundeles* en het artikel betreffende *relaties*. In het vorige nummer zagen we hoe eeuwen geleden de Japanners de oppervlakte van een cirkel benaderden. In dit nummer wordt een bladzijde uit *een oud Chinees wiskundeboek* bekeken. Bij het maken van vraagstukken, waarin de stelling van Pythagoras gebruikt wordt, zal menige leerling zich wel eens afvragen, hoe de „opgavenfabrikanten" er telkens in slagen de sommen „mooi te laten uitkomen". In het artikel van de Heer Kramp wordt een der keukengeheimen onthuld. De vereniging WIMECOS heeft weer een prijsvraag uitgeschreven. De eerste opdracht vinden we op blz. 35. Het is een probleem, dat met handig tellen en rustig redeneren zonder veel wiskundekennis opgelost kan worden. Echt iets voor een natte zondagmiddag. Succes er mee, liefhebbers!

En nu de uitslag van de „Denkertjes"-wedstrijd:

207 lezers hebben samen 1395 oplossingen ingezonden. Daarvan waren er 638, die met het cijfer 10 gewaardeerd konden worden (dat waren inzendingen, waarin niet alleen het goede antwoord vermeld stond, maar ook een juiste redenering was opgenomen, die tot dat antwoord leidde). Alle behaalde punten, zelfs de „onvoldoenden", blijven tellen in de ladderwedstrijd. Voor de lootprijs komen alleen de tienen in aanmerking.
De top van de ladder ziet er nu als volgt uit: *Thijs Michels*, Amsterdam (97); *L. Beijen*, Kamerik (93); *Albert Verbeek*, Blaricum (92); *A. C. van Dongen*, Den Haag (90); *B. Gerard*, Ootmarsum (90); *Christiaan Peters*, Hillegom (87).
De lootprijs is gewonnen door *Lies van Schaick*, Strandvliet 25, Amstelveen, die in de derde klas van het Keizer Karel College zit. Lies had de opgaven 1, 3 en 5 opgelost. Alle drie de oplossingen waren goed. Met opgave 1 heeft zij de prijs gewonnen.



11. Bij de figuren 3 en 4 letten we op de daarin voorkomende lijnstukken en hun eindpunten. Beide figuren hebben de eigenschap, dat in elk eindpunt evenveel lijnstukken samenkomen; dit aantal bedraagt twee in de linkerfiguur en drie bij de rechterfiguur. Teken nu zelf een dergelijke figuur, uit eindig veel lijnstukken bestaande en waarbij in elk eindpunt vier lijnstukken samenkomen.

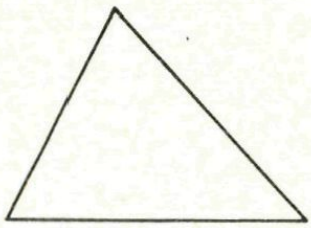


Fig. 3

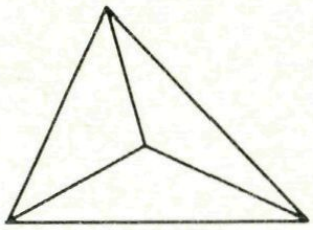


Fig. 4

12. Is de som van alle tussen 0 en 1 gelegen onvereenvoudigbare breuken, waarvan de noemer hoogstens gelijk is aan 100, een geheel getal of een gebroken getal?

13. De drie rechten a, b, c van figuur 5 zijn opv. bisectrices van de hoeken A, B, C van een driehoek ABC en P is een punt van de rechte AB. Driehoek ABC moet met passer en liniaal geconstrueerd worden. De liniaal mag slechts gebruikt worden voor het trekken van de zijlijnen van driehoek ABC. Er mogen slechts *vier* cirkelbogen getekend worden. Hoe moet deze opdracht uitgevoerd worden?

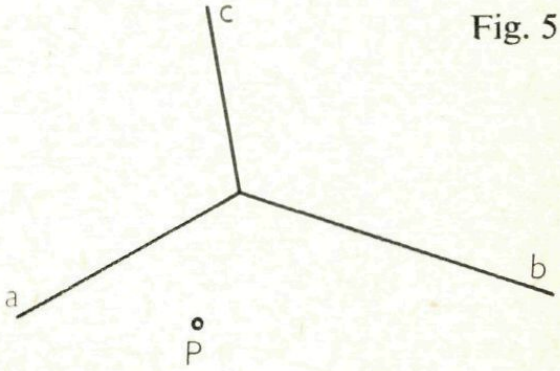


Fig. 5

°De driehoek der coëfficiënten

door A. J. Poelman te Bennekom

Tussen de coëfficiënten van de machten van tweetermen, zoals van $(a + b)^1$, $(a + b)^2$, $(a + b)^3$, enz. is een verband, dat we duidelijk zien, als we ze rangschikken in de vorm van een driehoek en wel aldus:

Machten	*Coëfficiënten*
$(a+b)^1 = 1a + 1b$	1 1
$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1
$(a+b)^7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$(a+b)^8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1
enz.	enz.

Deze driehoek staat bekend als de Driehoek van Pascal. Pascal was een Franse filosoof en wis- en natuurkundige, die leefde van 1623 tot 1662. De driehoek der coëfficiënten was ook al voor Pascals tijd bekend. Dat

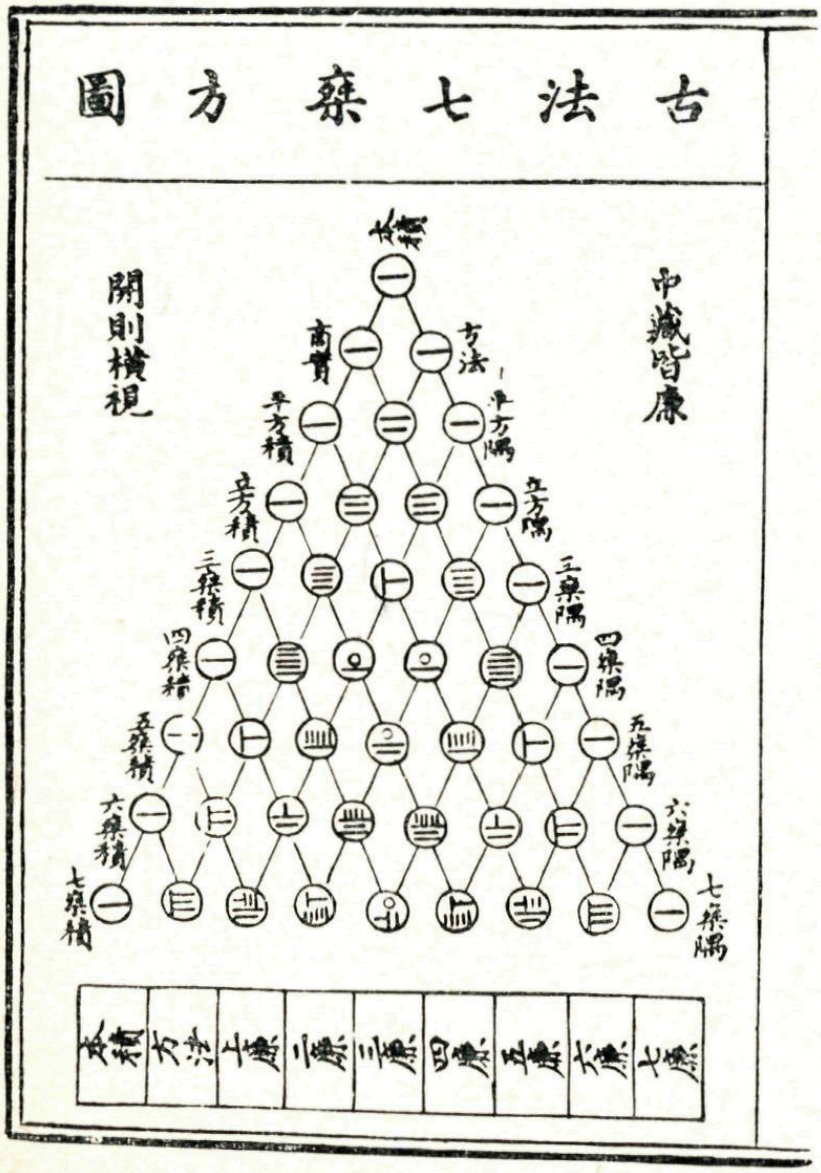


Fig. 6

blijkt o.a. uit de afbeelding van de voorkant van een Chinees wiskunde boek uit 1303 n. C. (fig. 6).

Het is het boek Ssu Yuan Yu door Chuh Shih-Chieh. Er staat bij: „Dit is de Tabel van de Oude Methode van de Zeven Vermenigvuldigings-Vierkanten." Hieruit blijkt, dat de Chinezen het verband tussen de coëfficiënten al vóór 1303 kenden. Hoe ze aan deze kennis kwamen is niet bekend. De Chinezen schreven op zijde en perkament en daardoor zijn heel wat oude geschriften niet bewaard gebleven. Ze waren echter betrouwbare kopiisten, zodat we er wel op kunnen vertrouwen, dat de coëfficiëntendriehoek al voor 1303 in China bekend was.
Door de Chinese „Driehoek van Pascal" te vergelijken met de daarboven afgedrukte, is het niet moeilijk de tekens te herkennen, die de Chinezen toentertijd gebruikten voor het noteren der getallen. (Bij nauwkeurig bekijken kun je zelfs een schrijffout opmerken in een der getallen 35).

°Relaties

In de omgangstaal gebruiken we wel de woorden „familierelatie" of „zakenrelatie". Het woord relatie speelt ook in de wiskunde een belangrijke rol. In enkele artikelen bekijken we de eigenschappen van relaties.

Je hebt in de wiskunde natuurlijk wel zinnen ontmoet als:

.... is een deler van .... is evenwijdig met ....
.... is congruent met .... is kleiner dan ....
.... is het kwadraat van .... staat loodrecht op ....

Op de plaats van de .... moeten de namen van wiskundige „dingen" worden ingevuld: getallen, driehoeken, lijnen enz. Bij iedere zin hoort een *paar* van deze dingen. Soms is de volgorde van dat paar niet belangrijk (bijv. bij de relatie evenwijdig zijn). In andere gevallen moeten we wel op de volgorde letten (We kunnen wel zeggen „16 is het kwadraat van 4" maar niet „4 is het kwadraat van 16"). Als er op de volgorde gelet moet worden, hebben we te maken met een *geordend paar*.
Ook in de omgangstaal komen we zinnen als deze tegen, bijvoorbeeld:

.... werd geboren te .... is evenlang als ....
.... is de hoofdstad van .... is het eigendom van ....
.... is verboden in .... is duurder dan ....

Wat voor soort „dingen" kunnen hier telkens ingevuld worden? Het is duidelijk, dat in de zin „.... werd geboren te ...." op de eerste open plaats alleen maar de naam van een mens (of dier) ingevuld kan worden

en op de tweede open plaats de naam van een dorp of stad. Nemen we bijv. de *verzameling* der leerlingen van je klas om daaruit iemand voor de eerste open plaats te kiezen en de *verzameling* der Nederlandse gemeenten om daaruit de bij elke leerling behorende geboorteplaats te kiezen, dan zal er bij elk der leerlingen juist één gemeente behoren (alleen bij een leerling, die in het buitenland geboren werd, niet). Het is dikwijls zo, dat een aantal der leerlingen in éénzelfde gemeente geboren is. Bij elk van die leerlingen hoort dan dus deze gemeente.
We kunnen nu geordende paren vormen, bijv.:

Jan K.	– Apeldoorn	Marie S.	– Winschoten
Piet A.	– Bedum	Jan Vr.	– Winschoten
Jet P.	– Utrecht	Sietske T.	– Amsterdam

Deze paren kunnen we ook aangeven in een figuur als de volgende:

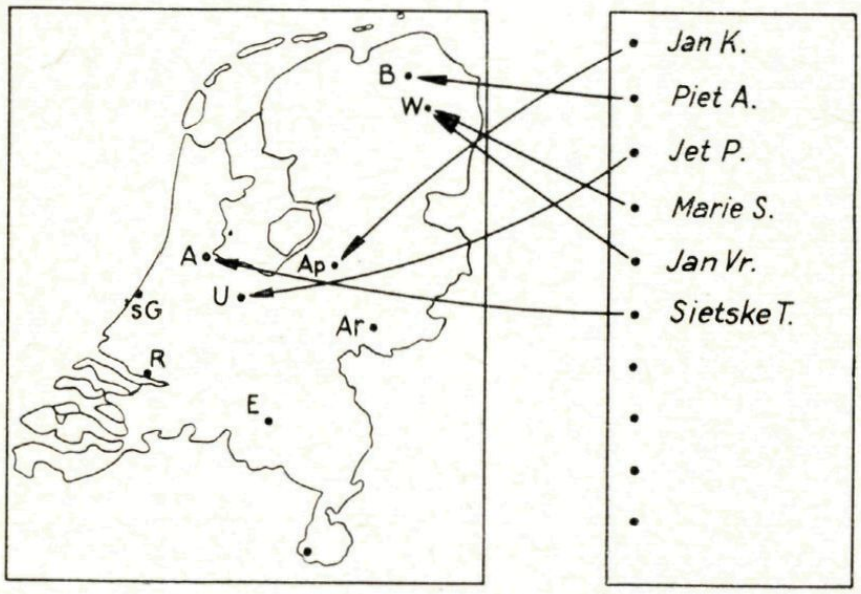


Fig. 7

De leden van de verzameling der leerlingen kunnen worden opgesomd in het rechts geplaatste kader, terwijl de leden van de verzameling der Nederlandse gemeenten op het kaartje aangegeven kunnen worden. Een pijl laat dan telkens zien welke gemeente is *toegevoegd* aan elk der leerlingen door de relatie „werd geboren te". Je ziet, dat van elke leerling één en slechts één pijl vertrekt, terwijl bij veel plaatsnamen geen pijl aankomt en bij sommige meer dan een.
In dit voorbeeld hadden we te maken met twee geheel verschillende verzamelingen. In de volgende voorbeelden zullen we relaties aantreffen, die aan leden van een gegeven verzameling leden van dezelfde verzameling toevoegen.

We nemen bijvoorbeeld de verzameling der mensen, die we op een zeker ogenblik op een marktplein aantreffen. Zie fig. 8*a*, waarin een aantal van deze mensen met stippen zijn aangegeven.

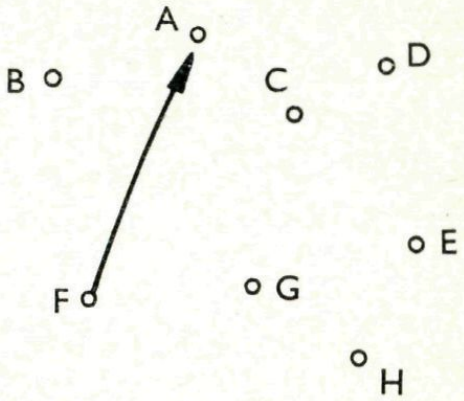


Fig. 8*a*

We zien F zijn arm uitsteken en naar A wijzen en horen hem roepen: „Ik ben A's broer". De uitgestoken arm wordt gesymboliseerd door de pijl. Deze pijl zegt dus: A heeft F tot broer. In deze verzameling mensen kunnen we zo beschouwen de relatie: *y* heeft *x* tot broer. Onder broer zullen we in dit artikel verstaan volle broer en niet „halfbroer". Stel je nu voor dat in fig. 8*a* de pijl van F naar A de enige is die deze relatie tussen twee van deze mensen aanduidt en dat er verder niet meer zulke pijlen in deze figuur bijgetekend kunnen worden. Wat weten we dan van A? Wel, A moet een vrouw zijn, want was A een man, dan zou F ook A tot broer hebben en waren we verplicht ook een pijl van A naar F te tekenen. Kijk nu naar fig. 8*b*. Als de daarin getekende pijlen

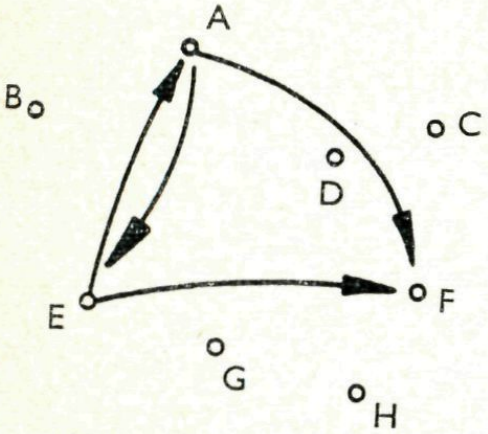
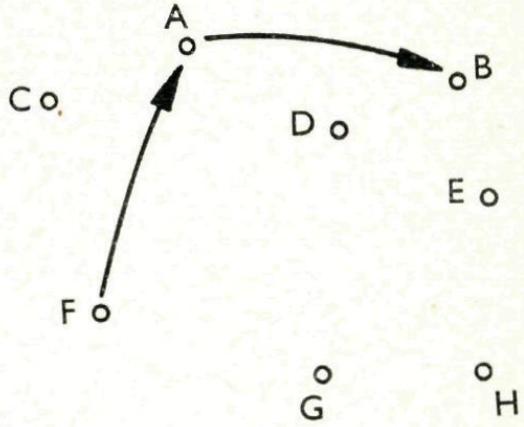


Fig. 8*b*

Fig. 8*c*



weer de enig mogelijke zijn, wat is er dan te zeggen over A, E en F? Antwoord: Twee broers en een zuster. En nu nog fig. 8*c*. Daarin zijn twee pijlen getekend, maar als je er even over nadenkt, zul je begrijpen, dat er beslist nog enkele bij getekend moeten worden. Zie je welke? Omtrent de relatie *y* heeft *x* tot broer, kunnen we een drietal bijzonderheden opmerken, nl.:

1. Bij elk „punt" *kan* meer dan één pijl vertrekken of aankomen.
2. Als er een pijl gaat van E naar A *kan* er ook een pijl van A naar E gaan.
3. Als er een pijl gaat van F naar A en ook een van A naar B, dan *moet* er ook een gaan van F naar B (en van A naar F).

We bestuderen nu de relatie y heeft x tot vader. We denken ons maar weer een aantal mensen op een marktplein samen gebracht. In de volgende figuur zien we dan:

A heeft B tot vader. D, E en F hebben C tot vader.

Wat is G van K? En wat is G van L? (De pijl van K naar L moet een punt bij L hebben.) Wat zijn N en O van K?

Wat is H van L? Wat kun je zeggen van D, E en F?

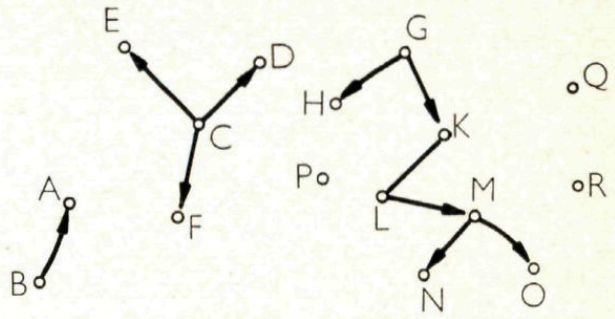


Fig. 9

(Antwoorden: vader, grootvader, achterkleinkinderen, oom of tante, broers of zusters).

Je kunt nu opmerken, dat deze relatie een ander karakter heeft dan de vorige. Vergelijk maar:

1. Bij ieder punt kan hoogstens één pijl aankomen.
2. Als er van B naar A een pijl gaat, dan kan er niet een gaan van A naar B.
3. Als er een pijl gaat van K naar L en een van L naar M, dan kan er niet een gaan van K naar M.

In een volgend artikel zullen we ons verder bezig houden met de verschillende „karakters" van relaties.

---

14. Uit de rij van de natuurlijke getallen (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...) verwijdert men de getallen 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... (voor $n \geqslant 2$ geldt: het n-de verwijderde getal is n groter dan het $(n-1)$-ste verwijderde getal). Bereken het duizendste getal van de rij, die nu overblijft.

15. Wat is het eerstvolgende jaar na 1964, waarin alle data weer op dezelfde dag vallen als in 1964?

16. Het punt P kan willekeurig gekozen worden op de omgeschreven cirkel van het vierkant ABCD. Bewijs, dat $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$ niet van de keuze van P afhangt.

17. Op een vel roosterpapier (het rooster bestaat uit vierkanten met zijden van 1 centimeter) tekent men een scherphoekige driehoek, waar-

van de drie hoekpunten roosterpunten zijn en waarbinnen slechts één roosterpunt ligt. Bereken de kleinste oppervlakte die deze driehoek kan hebben. Opmerking: roosterpunten zijn snijpunten van de op het roosterpapier staande lijnen.

°°Pythagoreïsche driehoeken

naar een inzending van J. Kramp te Kampen.

Teken eens een rechthoek ABCD zo, dat AB = 8 en BC = 4. Spiegel deze rechthoek in de diagonaal BD. Zie fig. 10, waarin DEBF de gespiegelde rechthoek is.

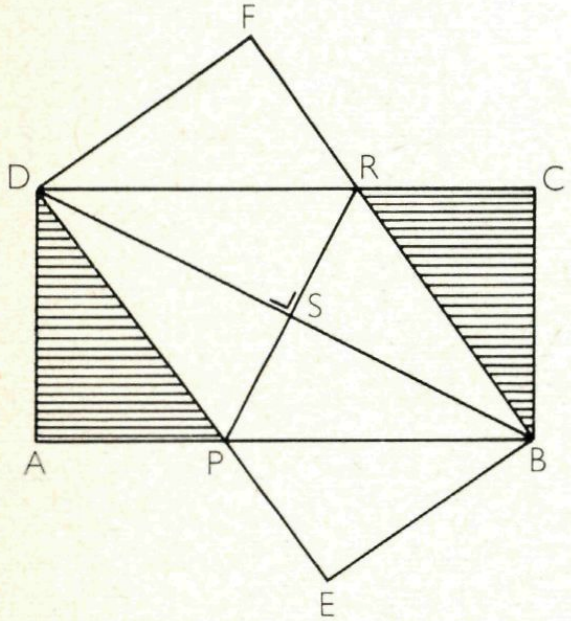


Fig. 10

Tengevolge van het spiegelen zijn de driehoeken APD, FRD, CRB en EPB congruent. Daarom is PBRD een ruit en is PR de middelloodlijn van BD. Stellen we AP = x, dan is DP = PB = $8 - x$, terwijl AD = 4 is. Volgens de stelling van Pythagoras is nu:

$$(8 - x)^2 = 4^2 + x^2$$

Hieruit vinden we $x = 3$ en dus zijn de zijden van △ APD 3, 4 en 5 lang.

Van lang niet elke rechthoekige driehoek kunnen de lengten der zijden met gehele getallen geschreven worden. Als dat wel het geval is, noemen we deze driehoeken *Pythagoreïsche driehoeken*. De driehoek met zijden 3, 4 en 5 is wel een heel bekende, maar er zijn oneindig veel meer van zulke driehoeken. In dit artikel zullen we formules voor hun zijden opsporen.

We gaan weer uit van een rechthoek, die we spiegelen in een van zijn diagonalen. Van de figuur, die dan ontstaat is in fig. 11 een deel getekend. Vergelijk hem maar met fig. 10.

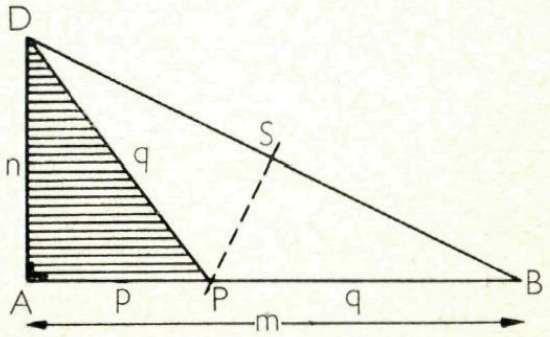


Fig. 11

We veronderstellen dat de lengte van AD = n is en van AB = m. We wil-

len nu de zijden van $\triangle$ APD berekenen. Stel daarvoor AP $= p$ en DP $=$ PB $= q$ ($\triangle$ DPB is immers de helft van een ruit).
Nu is $q = m - p$. Dus volgens de stelling van Pythagoras:

$$(m - p)^2 = p^2 + n^2,$$

waaruit volgt

$$m^2 - 2mp = n^2.$$

En dus

$$p = \frac{m^2 - n^2}{2m}$$

Daaruit volgt weer, wegens $q = m - p$

$$q = \frac{m^2 + n^2}{2m}$$

We vinden dus voor de zijden van $\triangle$ APD:

$$\text{AP} = \frac{m^2 - n^2}{2m}; \quad \text{AD} = n; \quad \text{PD} = \frac{m^2 + n^2}{2m}.$$

Deze zijden zullen in het algemeen geen gehele lengten hebben, maar we kunnen gemakkelijk een driehoek maken, die gelijkvormig is met $\triangle$ APD en die wel zijden met gehele lengten heeft, nl. door de driehoek met de factor $2m$ te vermenigvuldigen. We vinden als lengten der zijden

$$a = m^2 - n^2; \quad b = 2mn; \quad c = m^2 + n^2.$$

Kiezen we voor m en n natuurlijke getallen ($m > n$), dan zijn a, b en c geheel.
Hier volgt een tabel voor een aantal van deze driehoeken:

m	n	$a = m^2 - n^2$	$b = 2mn$	$c = m^2 + n^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61

Voor m zijn, zoals je ziet, de waarden 2, 3, 4, enz. gekozen. Voor n echter zijn verschillende waarden overgeslagen. We wilden nl. in onze tabel geen driehoeken opnemen, die gelijkvormig zouden zijn met reeds genoemde driehoeken. Zo krijgen we voor $m = 4$ en $n = 2$ de driehoek met zijden 12, 16 en 20, die gelijkvormig is met de (3, 4, 5)-driehoek.
Uit de tabel zijn daarom weggelaten die combinaties van m en n, waarbij ze onderling deelbaar zijn, zoals $m = 6$, $n = 2$ of $m = 6$, $n = 3$ of $m = 6$, $n = 4$. Maar ook die combinaties zijn uit de tabel weggelaten, waarbij de som van m en n even is. Is nl. $m + n$ even, dan is a, die gelijk is aan $(m + n)(m - n)$, dat ook. We zien, dat in alle gevallen b een even getal is en wanneer a en b beide even zijn is, volgens de stelling van Pythagoras, dat ook met c het geval. De drie zijden kunnen dan dus door 2 gedeeld worden en we hebben dan te maken met een driehoek, die gelijkvormig is met een reeds genoemde driehoek. Ga dat maar na aan het volgende voorbeeld:

$m = 3$, $n = 1$ (som 4, dus even) $a = 8$, $b = 6$, $c = 10$.

Deze driehoek is gelijkvormig met de (3, 4, 5)-driehoek.

Wimecos-prijsvraag I

Evenals in de vorige jaren schrijft de Vereniging van Leraren in Wiskunde, Mechanica en Cosmografie (WIMECOS) een drietal prijsvragen uit voor de lezers van Pythagoras. De eerste daarvan treft men hieronder aan.
Voor elke prijsvraag stelt WIMECOS een drietal boekenbonnen beschikbaar (van *f* 15,—, *f* 10,— en *f* 5,—). Bovendien is er een extra boekenbon van *f* 10,—, die na afloop van de wedstrijd uitgereikt mag worden aan een inzender, die een bijzondere prestatie heeft verricht.
Oplossingen van deze eerste WIMECOS-prijsvraag moeten voor 7 januari 1965 ontvangen zijn door A. van Tooren, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Deze eerste prijsvraag bestaat uit vier delen:

1. In nevenstaande figuur 12 mag een willekeurig aantal vakjes zwartgekleurd worden. Zo kan men een groot aantal verschillende figuren laten ontstaan (16 met één zwart vakje, 120 met twee zwarte vakjes, enzovoorts). *Hoe groot is dat aantal*?

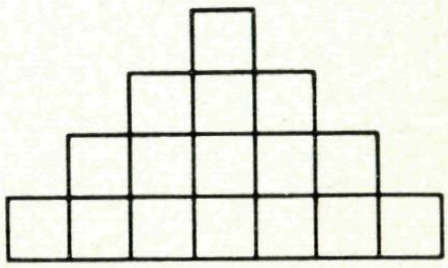


Fig. 12

2. Uit dat grote aantal wordt nu een willekeurige figuur uitgekozen.

Volgens een bepaald voorschrift wordt daaruit dan een tweede dergelijke figuur afgeleid. Dat voorschrift wordt hieronder beschreven. Kijk maar naar de figuren 13*a* en 13*b*, die als voorbeeld zijn bedoeld. Het

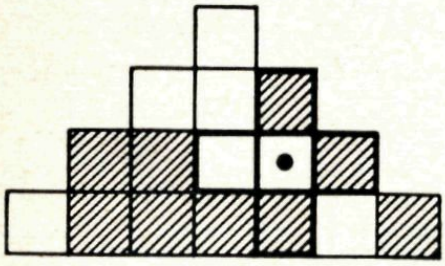


Fig. 13*a*

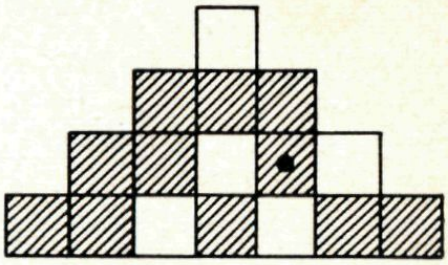


Fig. 13*b*

„trapje" in fig. 13*a* is daar de uitgekozen figuur en het daarnaast getekende trapje is de eruit afgeleide figuur. Dit is het voorschrift:
Men beschouwt telkens twee overeenkomstige vakjes in de twee trapjes. In het voorbeeld is zo'n paar overeenkomstige vakjes door stippen aangeduid. Twee overeenkomstige vakjes kunnen eenzelfde kleur of tegengestelde kleur hebben. Eenzelfde kleur moeten ze hebben wanneer het vakje uit het linker trapje met zijn vier zijden aan een *even* aantal zwarte vakjes grenst. Een verschillende kleur moeten ze dus hebben, wanneer het vakje in het linker trapje met zijn vier zijden aan een *oneven* aantal zwarte vakjes grenst.
Bij de door stippen aangeduide vakjes grenst het linker aan twee zwarte en is wit. Twee is een even aantal. Het rechter vakje moet dus zwart gemaakt worden.
Deze regel stelt je in staat om van elk vakje van het rechter trapje de kleur te bepalen.
Nu kan men dit proces onbegrensd voortzetten. Uit de afgeleide figuur kan men ook weer een nieuwe derde figuur afleiden. Daaruit weer een vierde, enzovoorts.

Bewijs, dat dit proces repetent is, van welk uitgekozen trapje men ook uitgaat.

3. Dit betekent, dat men bij onbeperkt herhalen van het afleidingsproces op een serie figuren zal stuiten, die zonder onderbrekingen telkens opnieuw ontstaat. Zo'n serie noemen we „periode". Experimenteer er maar eens wat mee om het antwoord op de derde vraag te vinden:

Teken een periode, die uit zes verschillende symmetrische figuren bestaat.

4. Er zijn ook perioden, die uit één enkele figuur bestaan (zulk een figuur is dan gelijk aan de daaruit afgeleide). Al experimenterende kun je er wel een paar vinden. Maar natuurlijk kun je pas zekerheid bereiken omtrent de volledigheid van je collectie, wanneer je ze volgens een slim bedacht systeem zoekt. Niet iedereen zal er in slagen zulk een systeem te vinden. Misschien komt er geen enkele lezer op de reddende gedachte. Daarom formuleren we de vierde opdracht wat voorzichtig:

Teken een zo volledig mogelijke collectie perioden, die elk uit één figuur bestaan.

°°Matrix-ernst

Dit artikel is het vervolg op de MATRIX-MALLIGHEID uit het vorige nummer. Hierin bestuderen we enkele wiskundige achtergronden van het rekenen met matrices. Daarbij maken we kennis met de matrix-algebra, die op bepaalde punten een treffende overeenkomst vertoont met de ons zo vertrouwde algebra, maar er toch ook weer zo grondig van verschilt.

We hebben ons in het vorige artikel bezig gehouden met het coderen van gegeven matrices. Zo hebben we toen bijvoorbeeld uit de matrix $\begin{pmatrix} 25 & 2 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$ met behulp van de coderingsmatrix $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ een nieuwe matrix verkregen, namelijk $\begin{pmatrix} 125 & 19 \\ 70 & 11 \end{pmatrix}$. Op dit procédé richten we nu onze aandacht; we kijken niet naar het ontstaan van $\begin{pmatrix} 25 & 2 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$ uit de letters van een in geheimschrift over te brengen boodschap en we letten ook niet meer op de handelingen, die van $\begin{pmatrix} 125 & 19 \\ 70 & 11 \end{pmatrix}$ weer een lettergroep maken. We zullen dit procédé in het vervolg noemen „het vermenigvuldigen van matrices". En in overeenstemming daarmee zullen we onze schrijfwijze veranderen. In bovenstaand voorbeeld wordt dat nu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 2 \\ 15 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 19 \\ 70 & 11 \end{pmatrix}$$

Het is bijzonder moedig om het woord „vermenigvuldigen" te gebruiken voor het ingewikkelde stelsel handelingen, dat we bij de codering gebruikten. Want daarmee hebben we meteen dodelijke ernst gemaakt van alle voorgaande malligheid: we hebben te kennen gegeven, dat we onze manier om geheimschrift te vervaardigen zuiver wiskundig zullen gaan bestuderen, we hebben de deur open gezet voor de matrix-algebra.

> In de algebra die je op school leert, beschik je over een verzameling getallen. Op die getallen worden bewerkingen toegepast. De eigenschappen van die bewerkingen, de daarbij optredende wetmatigheden, vormen het onderwerp van je algebra-studie. Nu beschik je over een verzameling matrices. Op die matrices passen we de „vermenigvuldig-bewerking" toe. Ook daarbij zullen bepaalde wetmatigheden optreden. Het opzoeken en bestuderen daarvan is niets anders dan .... het bedrijven van matrix-algebra.

Een van de wetmatigheden uit de schoolalgebra is de zogenaamde commutativiteit van de vermenigvuldiging. Hiermee wordt bedoeld dat voor alle getallenparen a, b geldt $a \cdot b = b \cdot a$. We hebben in het vorige artikel al gezien, dat de matrix-vermenigvuldiging niet commutatief is: het is niet waar, dat voor alle matrix-paren A, B geldt $A \cdot B = B \cdot A$. Het onderstaande toont dit nog eens aan:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 25 & 2 \\ 15 & 3 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 125 & 19 \\ 70 & 11 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 25 & 2 \\ 15 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 52 & 131 \\ 33 & 84 \end{pmatrix} \end{array}$$

Anders geschreven:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 2 \\ 15 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 19 \\ 70 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 25 & 2 \\ 15 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & 131 \\ 53 & 84 \end{pmatrix}$$

Denk er dus goed aan bij het berekenen van een matrix-produkt $A \cdot B$, dat de matrix A linksonder in het kruis geschreven wordt en de matrix B rechtsboven.
Bedenk bovendien, dat door het bovenstaande niet uitgesloten wordt dat voor speciale, handig gekozen matrices A en B toch geldt $A \cdot B = B \cdot A$. Bereken bijvoorbeeld maar eens

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 14 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 14 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Nu verwacht je wellicht, dat de tweede grondregel van de vermenigvuldiging, de associatieve eigenschap, ook niet zal gelden in de matrix-algebra. Dan staat je echter een verrassing te wachten, want voor elk drietal matrices A, B, C geldt toch $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$. Reken dat eerst maar eens na met een paar getallenvoorbeelden en probeer dan algemeen te bewijzen, dat dit heus waar is.

In de vorige jaargang van Pythagoras tref je op bladzijde 101 een artikel aan over een „puntenalgebra", waarin de vermenigvuldiging wel commutatief en niet associatief is. Bij de matrix-algebra is het omgekeerde het geval. Daar is namelijk de vermenigvuldiging niet commutatief, maar wel associatief. En hoe zit dat bij de dozenalgebra in dit nummer? (bldz. 42).

In de schoolalgebra bevat de getallenverzameling een uitermate prettig getal, namelijk het getal *1*. Dit heeft de eigenschap, dat voor elk getal a geldt $1 \cdot a = a$. Zulk een „eenheid" is er ook in onze matrixverzameling te vinden. De matrix $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ heeft de eigenschap, dat voor elke matrix A geldt $I \cdot A = A \cdot I = A$. Het zal je niet moeilijk vallen je van de waarheid van deze bewering te overtuigen. Het valt immers gemakkelijk na te te rekenen, dat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 0 \cdot a + 1 \cdot c & 0 \cdot b + 1 \cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

en evenzo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Moeilijker wordt het al, wanneer je gaat onderzoeken of er nog meer matrices zijn met deze eigenschap. Misschien is er nog wel een andere matrix I' die de eigenschap heeft dat voor elke matrix A geldt $I' \cdot A = A \cdot I' = A$. Dat dit niet het geval is, wordt aangetoond door de volgende redenering. Neems eens aan, dat er zulk een I' is. Daar $I \cdot A = A$ voor elke matrix A geldt, mogen we ook I' kiezen voor A. Er staat dan $I \cdot I' = I'$. En evenzo mogen we in $A \cdot I' = A$ ook I kiezen voor A, zodat er

$I \cdot I' = I$ komt. We vinden dus, dat $I \cdot I'$ zowel gelijk is aan I als aan I', dus dat $I = I'$. Hiermee is aangetoond, dat er behalve $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ geen andere eenheidsmatrix meer is.

Na al deze voorbereidingen kunnen we nu een tipje van de sluier van het geheimschrift gaan oplichten. Daarbij blijft nog steeds buiten beschouwing, dat de getallen van de produktmatrices eventueel met een veelvoud van 30 verminderd worden (om er weer lettergroepen van te kunnen maken).
We beschouwen dus de volgende, iets vereenvoudigde situatie. De verzender van het bericht heeft een bepaalde matrix X. Met behulp van de coderingsmatrix C maakt hij daarvan de matrix $C \cdot X$ en die wordt naar de ontvanger gezonden. Deze vermenigvuldigt de ontvangen matrix $C \cdot X$ met de decoderingsmatrix D en berekent dus $D \cdot (C \cdot X)$. Nu behoort hij als resultaat de matrix X terug te vinden. Dus dient $D \cdot (C \cdot X) = X$ te zijn. Omdat de vermenigvuldiging van matrices associatief is, mogen we ook schrijven dat $(D \cdot C) \cdot X = X$ dient te zijn. En dat moet voor elke willekeurige te verzenden matrix X gelden. Dit gelukt, wanneer we de coderingsmatrix C en de decoderingsmatrix D zo kiezen, dat $D \cdot C$ gelijk is aan de eenheidsmatrix I. Bovendien kan er bewezen worden (maar dat doen we hier niet) dat die keuze niet alleen voldoende is maar ook nodig is om het gestelde doel te bereiken.
In het voorgaande artikel was $D = \begin{pmatrix} 3 & 25 \\ 29 & 2 \end{pmatrix}$ en $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Daar geldt niet $D \cdot C = I$ maar $\mathrm{D} \cdot \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 31 & 90 \\ 60 & 151 \end{pmatrix}$. En nu zal het welicht opvallen: als we de getallen van deze matrix met dertigvouden verminderen, dan krijgen we .... I.
Een lezer, die het artikel EEN VREEMDE ALGEBRA- EN MEETKUNDELES I in dit nummer aandachtig bestudeerd heeft, is nu zeker wel in staat om de sluier nog wat verder op te lichten. De „getallen" waarmee wij onze matrices gebouwd hebben in het geheimschrift-artikel waren namelijk geen gewone getallen, maar „dozen".

Tot slot van dit artikel willen we nog even tonen, dat we ons bij de matrixvermenigvuldiging niet behoeven te beperken tot de zogenaamde „twee-bij-twee"-matrices (die uit twee rijen en twee kolommen bestaan). Eerst een voorbeeld:

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 4 & 8 & 2 \\ & & & 2 & 1 & 4 \\ & & & 7 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 5 & 43 & 25 & 35 \\ 3 & 1 & 0 & 14 & 25 & 10 \end{array} \quad \text{of} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 25 & 35 \\ 14 & 25 & 10 \end{pmatrix}$$

Hierin is elk getal x van de produktmatrix weer gevonden uit de getallen die in het kruisschema in de coderingsmatrix op dezelfde hoogte als x staan en uit de getallen, die in de tweede factor boven x staan. Het getal 35 is dus gevonden uit de rij 1, 2, 5 en de kolom $\begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$ en wel op de volgende wijze: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 35$.

Evenzo $3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 7 = 14$.

Bij dergelijke produkten moet de breedte van de coderingsmatrix gelijk zijn aan de hoogte van de tweede factor.

---

18. Gegeven is, dat de bisectrices van de hoeken A en C van vierhoek ABCD elkaar op de diagonaal BD snijden. Bewijs, dat de bisectrices van de hoeken B en D een punt van AC gemeen hebben. (Ingezonden door Dr. J. T. Groenman).

19. Onder een oud document staan de handtekeningen van acht burgers van Amsterdam. Wellicht zijn er onder de nu levende Nederlanders enkele, die naar waarheid kunnen verklaren: „Minstens de helft van de ondertekenaars zijn voorouders van mij". Misschien zijn er ook wel, die naar waarheid kunnen verklaren: „Welk vijftal je ook kiest uit die ondertekenaars, er bevindt zich altijd wel een van mijn voorouders bij". Valt er met zekerheid te zeggen, welke van deze twee categorieën het omvangrijkste is?

20. De som van een aantal natuurlijke getallen (waaronder ook wel gelijke mogen voorkomen) is 20; hun produkt is maximaal. Welke getallen zijn dat?

°Een vreemde Algebra- en Meetkundeles I

door F. van der Blij, Bilthoven.

We rekenen al sedert de eerste klas van de lagere school. De tijd, dat we er trots op waren te kunnen berekenen hoeveel 3 + 5 is, ligt al lang achter ons. Zonder enige moeite en met volkomen zekerheid beweren we, dat 3 + 5 = 8 is. Dat is voor ons zo zeker als 2 keer 2 vier is. Moet het dan niet een vreemde gewaarwording zijn te ontdekken, dat in de volgende algebrales blijkt, dat daarin **3** + **5** = **1** is? En hoe zou het dan zijn met **2** keer **2**?

Rekenen met weinig „getallen"

We gaan uit van de *gehele* getallen . . ., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ... Bij het rekenen met deze getallen hebben we opgemerkt, dat steeds de som, het verschil of het produkt van twee gehele getallen weer een geheel getal is. Delen we echter twee gehele getallen op elkaar, dan behoeft het quotiënt niet weer geheel te zijn. Daarom zullen we straks extra voorzichtig met het delen zijn.

We beginnen nu met uit de gehele getallen eerst de zevenvouden te zoeken, dus . . ., −14, −7, 0, 7, 14, ... Deze zevenvouden stoppen we met elkaar in een doos. Dan zoeken we de zevenvouden plus 1 uit, dus . . ., −13, −6, 1, 8, 15, ... Deze stoppen we in een tweede doos. In een derde doos doen we de zevenvouden plus 2, en zo voort. Op die manier krijgen we zeven dozen, waarin *samen* alle gehele getallen zitten.

Om deze dozen uit elkaar te kunnen houden geven we ze „namen". De eerste doos, dus die waar de zevenvouden in zitten, noemen we de doos **0**, de tweede noemen we doos **1**, de volgende doos **2**, enz.

We hebben dan de volgende situatie:

Doos **0**, hierin zitten . . ., −7, 0, 7, . . .
Doos **1**, hierin zitten . . ., −6, 1, 8, . . .
Doos **2**, hierin zitten . . ., −5, 2, 9, . . .
Doos **3**, hierin zitten . . ., −4, 3, 10, . . .
- -
Doos **6**, hierin zitten . . ., −1, 6, 13, . . .

Met deze *dozen* willen we nu gaan rekenen. Laten we beginnen met optellen. Hoe zullen we afspreken wat de som van twee *dozen* is? Bijvoorbeeld de som van doos **3** en doos **5**? We kiezen daarvoor een getal uit doos **3**, bijvoorbeeld 10 en een getal uit doos **5**, bijvoorbeeld −2. De som van deze twee getallen is 10 + (−2) = 8 en dit antwoord zit in doos **1**. We spreken nu af, dat de som van de dozen **3** en **5** zal zijn doos **1**. Dus in formule: **3** + **5** = **1**.

Natuurlijk vraag je je af: Als ik nu eens andere getallen uit de dozen **3** en **5** had gekozen, zou dan de som weer in doos **1** gelegen hebben? Je kunt dat gemakkelijk met een aantal voorbeelden proberen en daarna trachten een bewijs te vinden, dat de som van elk willekeurig getal uit doos **3** met een willekeurig getal uit doos **5** in doos **1** ligt.

Er zijn met de zeven dozen 49 optellingen te maken, waarvan de antwoorden verzameld kunnen worden in de volgende tabel:

+	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3						1	
4							
5				1			
6							

We hebben al ingevuld **3** + **5** = **1** en **5** + **3** = **1**. Vul zelf de andere hokjes in. Je kunt de ingevulde tabel achter in dit tijdschrift vinden. (Maar je mag niet „afkijken").
Voor het optellen van gewone getallen geldt de commutatieve wet, die uitgedrukt wordt door de formule $a + b = b + a$. Geldt deze wet ook voor het optellen van dozen?
We stappen nu over op aftrekkingen. Omdat **3** + **5** = **1** is, is **1** − **3** = **5** en **1** − **5** = **3**. We moeten immers **5** bij **3** optellen om **1** te krijgen. Alle aftrekkingen kunnen dus met behulp van de tabel gemakkelijk uitgevoerd worden.

We kunnen ook het aftrekken van dozen invoeren door getallen uit deze dozen te kiezen, deze af te trekken en de doos te zoeken, waarin het verschil ligt. Ga na, dat dit tot het zelfde resultaat voert.

Uit de tabel kun je aflezen, dat er bij elk tweetal dozen $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{b}$ juist één doos $\boldsymbol{x}$ is zo, dat $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$.

Kunnen we ook dozen vermenigvuldigen?

Hoe zullen we **5**·**3** definiëren? Natuurlijk door een getal uit doos 5 te kiezen (bijv. 12) en een uit doos **3** (bijv. 10) en te onderzoeken in welke doos het produkt (hier 120) ligt. Het blijkt, dat 120 in doos **1** zit. Dus

zeggen we **5**·**3** = **1**. Het spreekt vanzelf, dat we moeten bewijzen, dat bij elke keuze van een getal uit doos **5** en elke keuze van een getal uit doos **3** het produkt in doos **1** ligt.

Hier volgt dat bewijs: Elk getal uit doos **5** is voor te stellen door $7a + 5$, elk getal uit doos **3** door $7b + 3$, als a en b gekozen worden uit de gehele getallen. Hun produkt is dan $49ab + 21a + 35b + 15$. We kunnen daarvoor schrijven $7(7ab + 3a + 5b + 2) + 1$. De vierterm tussen haken is hierin weer een geheel getal. Stel het voor door c. Dan is voor het produkt te schrijven $7c + 1$. En dat is juist, wat voor elk getal uit doos **1** geschreven kan worden.

Het zal wenselijk zijn, dat je evenals voor de optellingen ook een tabel maakt voor de 49 vermenigvuldigingen, die met deze dozen mogelijk zijn. We hebben die tabel dadelijk nodig. Heb je hem klaar vergelijk hem dan maar met die op blz. 48 van dit nummer. Heb je opgemerkt, dat de vermenigvuldiging commutatief is?

En nu het delen

De vraag: „Hoeveel is **5** : **3**?" is eigenlijk niets anders dan de vraag of er een doos $\boldsymbol{x}$ is aan te wijzen zo, dat **3**·$\boldsymbol{x}$ gelijk is aan **5**. In de tabel kan dat worden opgezocht. We kijken bijvoorbeeld in de kolom, waar **3** boven staat. In deze kolom vinden we ergens **5**. We zien, dat deze **5** zich bevindt in de rij, waar **4** voor staat. Dus is **3**·**4** = **5**. Of anders gezegd **5** : **3** = **4**. Is er een $\boldsymbol{x}$ te vinden zo, dat $\boldsymbol{x}$ · **0** = **5**? We zien dadelijk in de tabel, dat deze $\boldsymbol{x}$ niet bestaat. Evenals bij het gewone rekenen blijkt in deze „dozenalgebra" het delen door **0** niet mogelijk te zijn.

Een moeilijkheid

De deling **5** : **3** = **4** hadden we ook kunnen uitvoeren door uit doos **5** het getal 12 te pakken, uit doos **3** het getal 3 en deze op elkaar te delen. Het quotiënt 4 blijkt dan in doos **4** te liggen. Zouden we echter uit doos **5** het getal 26 en uit doos **3** het getal 10 gekozen hebben, dan zou het quotiënt geen geheel getal geweest zijn en daarom niet in een der dozen hebben gelegen. Wel is bij iedere keuze van een getal b uit doos **3** een getal a in doos **5** te vinden zo, dat b een deler van a is. Het getal $a : b$ ligt dan steeds in doos **4**. Terloops merken we op, dat $5b^2$ een goede keuze voor a is, maar meestal zijn er wel kleinere getallen voor a te kiezen. In de volgende aflevering zullen we nog wat meer met de dozen rekenen. We zullen dan ook kunnen bewijzen, dat $5b^2$ een goede keuze is.

°Het driebronnen-probleem II

Een graph, zoals in fig. 2, waarin de kanten elkaar niet snijden, heet een *vlakke graph*. Ook een graph echter, die isomorf is met een graph, waarin de kanten elkaar niet snijden, is een vlakke graph. Zo is de graph van fig. 14 een vlakke graph, omdat deze isomorf is met die van fig. 2. Beide kunnen we beschouwen als het beeld van de situatie van twee huizen, die door paden met twee bronnen zijn verbonden. We kunnen het driebronnenprobleem dus kort zo formuleren: *Is de graph van fig. 1 (blz. 25) een vlakke graph?*

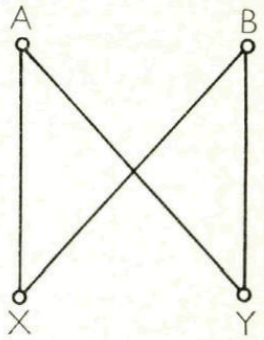


Fig. 14

Dit blijkt niet het geval te zijn. Het bewijs daarvan is helemaal niet eenvoudig. In welke richting dit bewijs gaat willen we in het volgende nagaan.

In de figuren 15*a*, *b* en *c* zijn drie graphen getekend, elk met de vier hoekpunten A, B, X en Y. Het zal duidelijk zijn, dat deze graphen isomorf zijn. We zeggen nu, dat elke graph, die isomorf is met een cirkel (het aantal hoekpunten doet er dan niet toe) een enkelvoudige gesloten graph is.

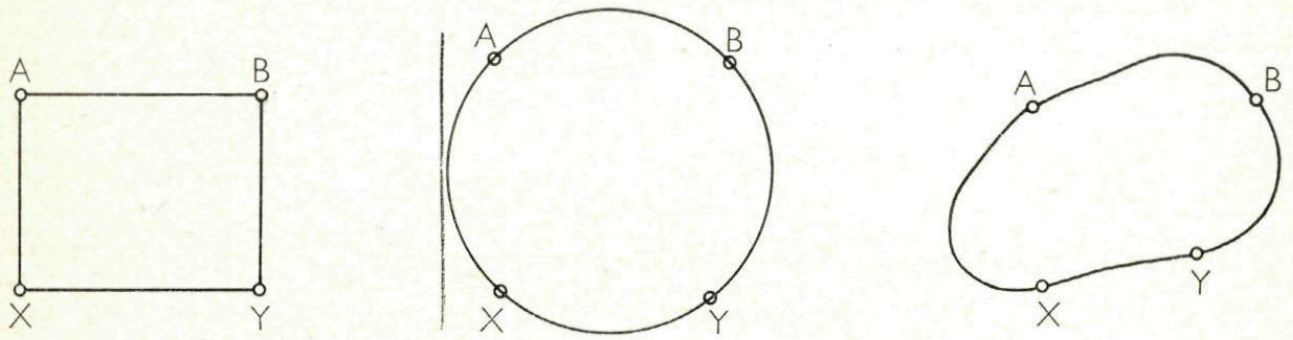


Fig. 15*abc*

Een willekeurige enkelvoudige gesloten graph zou je kunnen maken door een touwtje eerst in de vorm van een cirkel te leggen, de uiteinden vast te knopen en het dan in een heel willekeurige vorm door trekken of duwen of zelfs uitrekken neer te leggen. Je moet er alleen voor zorgen, dat het daarbij zichzelf niet snijdt. Het kan dan een rechtlijnige figuur vormen

(rechthoek of vierkant of trapezium, enz.) maar ook een kromlijnige (ellips, eivorm, enz.) Al de gesloten „krommen", die je dan krijgt, zijn isomorf met de cirkel. Dat is ook het geval met de „kromme" in fig. 16. Ga het maar na.

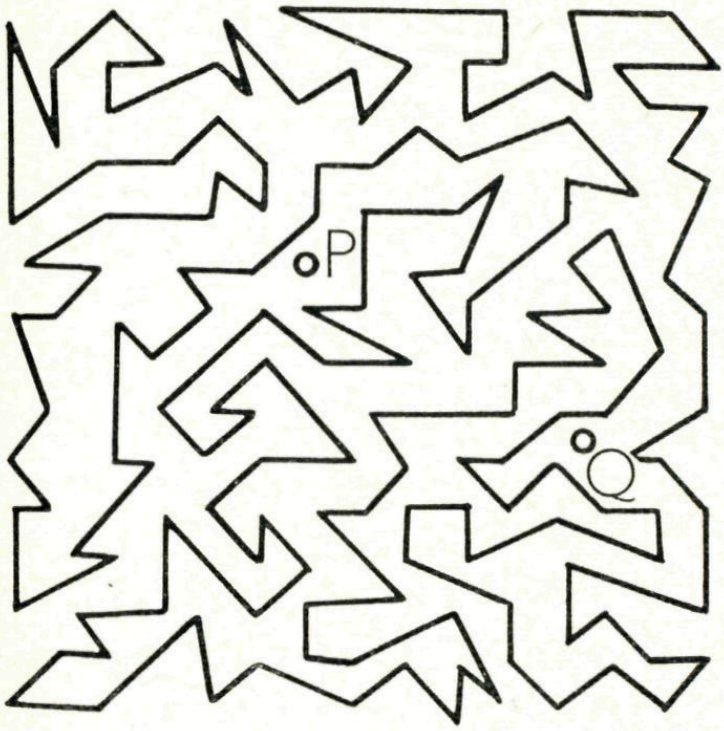


Fig. 16

Nu heeft de cirkel en elke daarmee isomorfe kromme de eigenschap, dat deze het vlak, waarin hij ligt, verdeelt in twee gebieden, een binnengebied en een buitengebied. Het is niet altijd even eenvoudig vast te stellen of een punt in het binnen- of buitengebied ligt. Kijk maar naar de punten P en Q in fig. 16. Punten, die beide in het binnengebied liggen, kunnen door een kant van een graph verbonden worden zo, dat deze met de gegeven kromme geen punt gemeen heeft. Met andere woorden: Je kunt van elk punt in het binnengebied naar elk ander punt daarvan komen, zonder de gegeven kromme te passeren. Voor twee punten van het buitengebied geldt ook zo'n eigenschap. Bovendien kun je in het buitengebied een rechte lijn *l* trekken, waarvan elk punt in dat buitengebied ligt. Zie fig. 17.

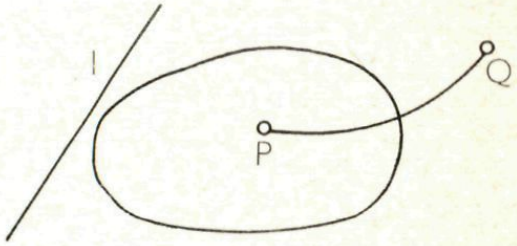


Fig. 17

Liggen echter twee punten P en Q in verschillende gebieden, dan kan men ze alleen maar verbinden door een lijn, die de gegeven kromme snijdt. Dit lijkt allemaal erg eenvoudig. Er zijn echter krommen in de wiskunde ontdekt, waarbij het onderscheiden van binnen- en buitengebied helemaal niet eenvoudig is. In fig. 16 gaat dat nog wel. Welk van de beide punten P en Q ligt in het buitengebied? Zonodig ga je het binnengebied, dat je bij een der hoeken gemakkelijk kunt herkennen, even arceren.

Bij ons driebronnenprobleem kunnen we in de graph acht van de negen

kanten wel zo tekenen, dat ze elkaar niet snijden. Zie fig. 18 waarin A en B elk met de drie bronnen zijn verbonden, maar C nog slechts met twee. We zien nu, dat het gearceerde gebied in deze graph het binnengebied is van een gesloten graph, waar X in ligt, maar C niet. De kant CX moet daarom wel een der andere kanten snijden.

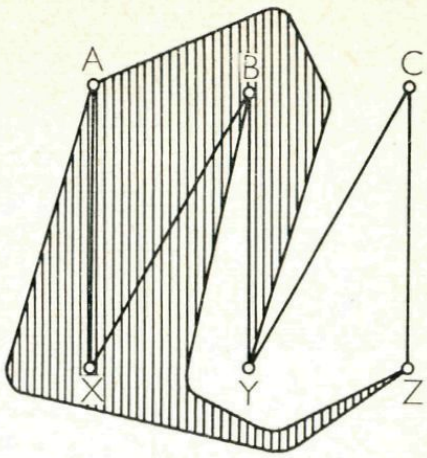


Fig. 18

Oplossingen van de Denkertjes uit no. 1

1. De vouw valt langs de middelloodlijn van een diagonaal; lengte diagonaal is 20 cm (Pythagoras), lengte halve vouw is 7,5 cm (gelijkvormigheid) dus lengte vouw is 15 cm.

2. De cijfercombinatie 2,7 komt vier malen voor (22–77, 77–22, 27–72, 72–27). Dit geldt ook voor de cijfercombinaties 0,9 en 1,8 en 3,6 en 4,5. Het antwoord is dus 20. Het tweede antwoord is 40.

3. Op het ogenblik, waarop nummer een over de finish gaat, heeft nummer twee 8 km gelopen en 2 km voorsprong op nummer drie gekregen. Nummer twee heeft dus bij de finish een voorsprong van $10 \cdot 2 : 8 = 2{,}5$ km.

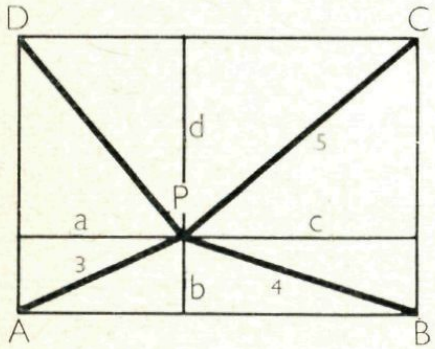


Fig. 19

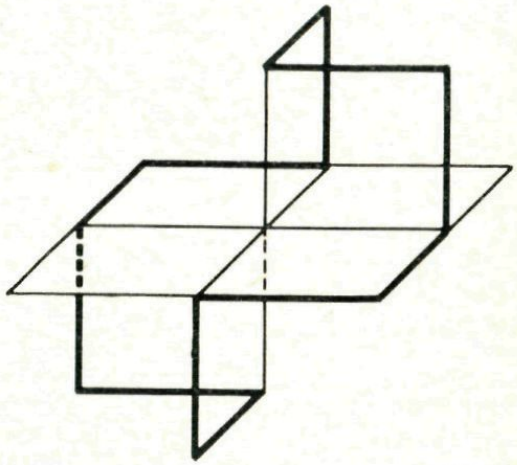


Fig. 20

4. Richt in A en B loodlijnen op de zijden AC en BC op, noem hun snijpunt S. Het gezochte punt is dan het midden van CS.

5. Zie figuur 19. Hieruit blijkt $a^2 + b^2 = 9$, $b^2 + c^2 = 16$, $c^2 + d^2 = 25$. Dus $9 - 16 + 25 = a^2 + d^2$, zodat $PD = 3\sqrt{2}$.

6. Het aantal segmenten moet een zesvoud zijn. Zie figuur 20.

7. De rechten AC en BC liggen symmetrisch ten opzichte van de middellijn van de cirkel die door C gaat. Zij snijden dus ook even grote bogen uit de cirkel. Elk daarvan telt 100 booggraden.

8. Noem de rij-sommen opvolgend r_1 tot en met r_n. Beschouw een kolom, wiens som k is. De getallen van die kolom zijn de getallen $k \cdot r_1$ tot en met $k \cdot r_n$. Hieruit volgt $k = k(r_1 + \ldots + r_n)$. Daar k positief is levert dit dat de rijsommen samen gelijk aan 1 zijn. Dit wil zeggen dat alle getallen van de tabel samen gelijk aan 1 zijn.
Een voorbeeld is de tabel hieronder (de rijsommen zijn $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{2}$; de kolomsommen zijn $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$):

$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

9. De linkerleden zijn samen S, de rechterleden zijn samen $100-3S$. Uit $S = 100-3S$ volgt $S = 25$.

10. Het grootste getal van een rij is minstens gelijk aan het grootste getal van de volgende rij. Noemt men het grootste getal van de eerste rij M, dan behoort elk der rijen tot de verzameling van alle rijen, waarvan het grootste getal hoogstens gelijk aan M is. Deze verzameling is eindig, maar men kan niettemin steeds weer nieuwe rijen maken. Daarom moet het proces herhalingen geven.
Een rij van louter nullen wordt voorafgegaan door een rij gelijke getallen (zeg, dat ze allemaal gelijk aan a zijn). Op zijn beurt wordt deze rij weer voorafgegaan door een rij, waarin elk paar buren een verschil van a heeft; dit is onmogelijk bij een rij, waarin een oneven aantal getallen staat.

Opteltabel

(behoort bij blz. 43)

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Vermenigvuldigtabel

(behoort bij blz. 44)

×	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.
G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.
A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.
Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden. *Oplossingen inzenden vóór 7 januari 1965.*
Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.
Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, *f* 2,— per jaargang. Voor anderen *f* 3,—.
Abonnementen kan men opgeven bij J. B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J. B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan