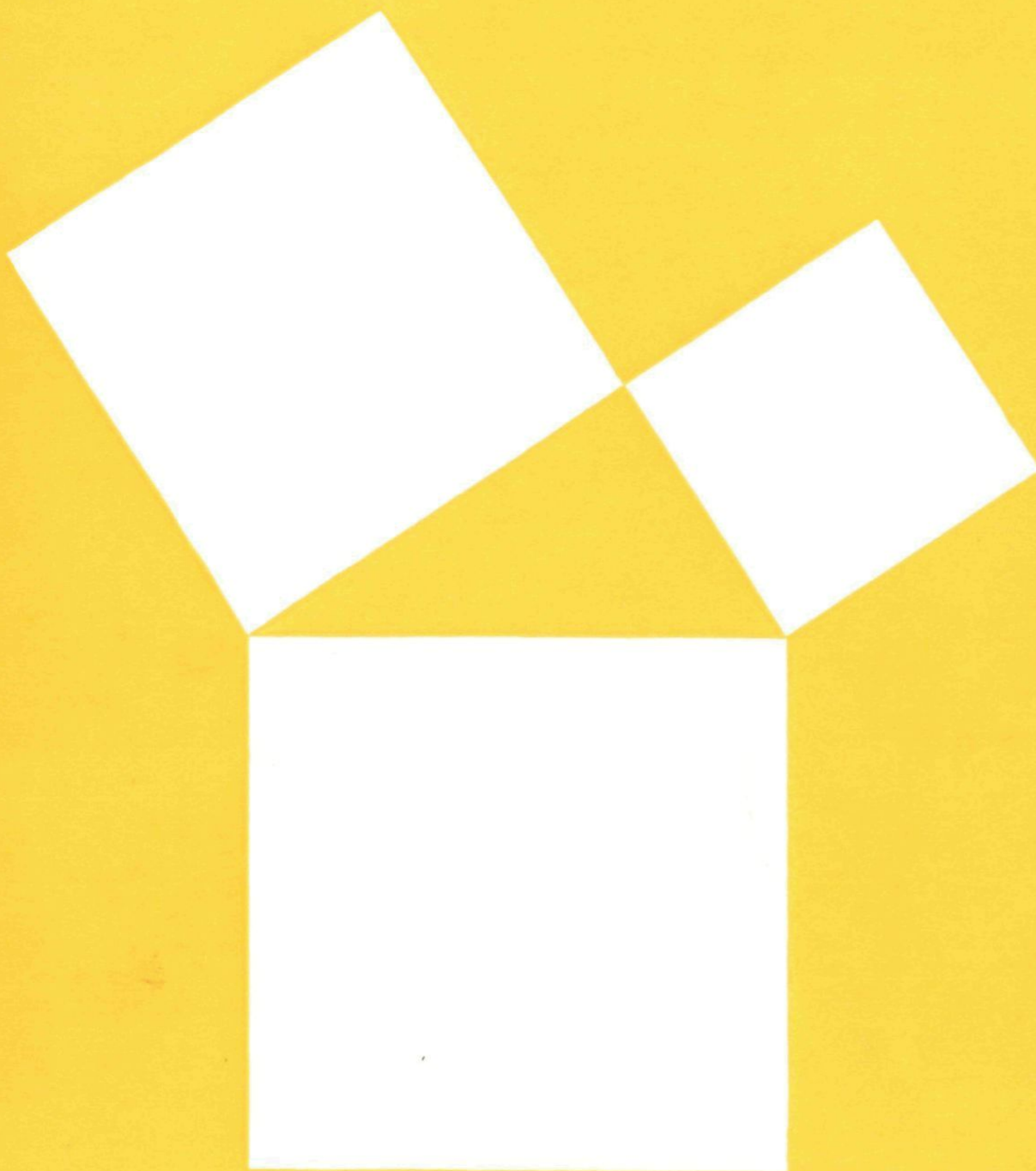


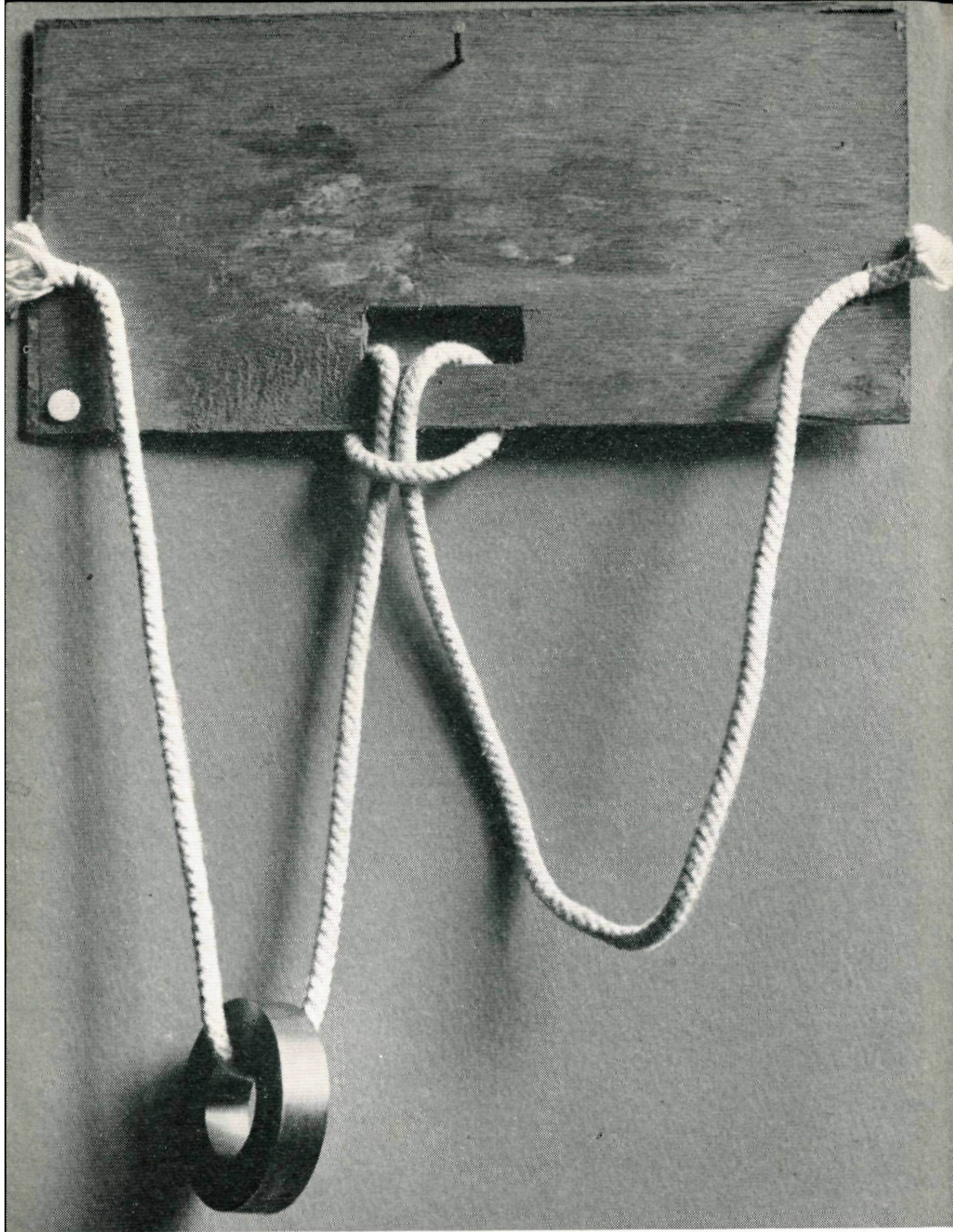
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

3

Vierde jaargang



*De wiskunde in de knoop
(bldz. 53)*

°Een probleem van Hamilton I

De beroemde Ierse wiskundige Sir William Rowan Hamilton (1805–1865) publiceerde in 1859 een probleem, dat we „de reis over het twaalfvlak” zouden kunnen noemen. Hij liet een houten regelmatig twaalfvlak vervaardigen. Het heeft, zoals men in fig. 1 ziet, als zijvlakken twaalf regelmatige vijfhoeken. Het heeft 30 ribben en 20 hoekpunten. Elk van die hoekpunten gaf hij de naam van een wereldstad, zoals A = Amsterdam, B = Brussel, C = Calcutta, enz. De puzzel bestond nu uit de vraag of men langs deze steden een wereldreis zou kunnen maken, bijvoorbeeld beginnend in Amsterdam en daar weer eindigend, waarbij ieder der steden juist eenmaal zou worden bezocht. Om het de puzzelaars gemakkelijker te maken zich de reis voor te stellen en te onthouden welke steden reeds bezocht waren, liet hij in elk hoekpunt een kopspijker slaan en werd er een koord bijgeleverd, dat in A vastgemaakt kon worden en dan langs de spijkers gelegd. Het probleem doet wel een beetje denken aan het Koningsberger bruggenprobleem. Daar nl. mocht iedere brug slechts eenmaal gepasseerd worden en hier iedere stad slechts eenmaal bezocht. Toch is het wezenlijk verschillend. Ieder der bruggen in het probleem van Euler nl. konden we voorstellen door een *kant* van een graph. In het probleem van Hamilton is iedere stad een *hoekpunt* van een graph. We kunnen nl. de figuur bestaande uit de dertig ribben en twintig hoekpunten van het twaalfvlak opvatten als kanten en hoekpunten van een graph. Wil je voor je zelf het probleem van Hamilton trachten op te lossen, zonder daarvoor een regelmatig twaalfvlak te maken, dan zou je kunnen proberen een graph te tekenen, die met die van het regelmatig twaalfvlak isomorf is. Een bespreking daarvan vind je op bladzijde 62. Maar probeer het eerst eens zelf.

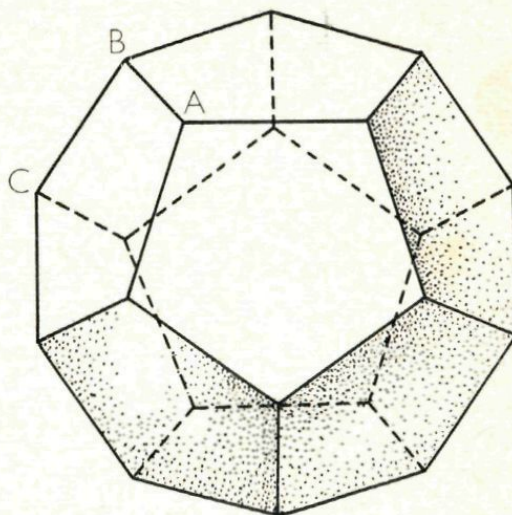


Fig. 1

We bladeren dit nummer even door

In de serie artikelen over graphen (of „knoopsels”, zie onze nieuwe rubriek, waarin we brieven van lezers beantwoorden) bespreken we dit keer een probleem van *Hamilton*.

Karaktertrekken van relaties worden bekeken in het tweede artikel over dit onderwerp. Aan de omslagfoto was al te merken, dat we met de wiskunde in de knoop raakten. De foto's op bladz. 56 en 57 zullen ons misschien uit de knoop helpen. De „Vreemde Algebrales” wordt dit keer voortgezet met o.a. vierkantsvergelijkingen, waarvan er sommige zelfs vier wortels blijken te bezitten. En dan is er naast de Denkertjes weer de Wimecosprijsvraag.

Uitslag van de Denkertjes-wedstrijd:

Het aantal inzendingen was deze maal 125. De kwaliteit was zeer goed. De lootprijs is voor

H.J. Thomassen, St. Christoffelstraat 10, Roermond.

Aan de top van de ladder bevinden zich nu:

Th. Michels (197), Alb. Verbeek (192), J. Heringa (184), Chr. Peters (178), P. Brascamp (175), D. Dieks (167) en J. Hulst (167). De uitslag van de Wimecos-prijsvraag kan pas in het volgend nummer bekend gemaakt worden.

°Relaties II

In ons vorige artikel zagen we reeds, dat relaties verschillende karakters kunnen hebben. We zullen nu op drie karaktertrekken het licht laten vallen.

A. Symmetrische relaties

We begeven ons maar eens weer naar het marktplein, waar we in ons eerste artikel een verzameling personen aantreffen. Ze zijn in fig. 2 aangeduid door stippen.

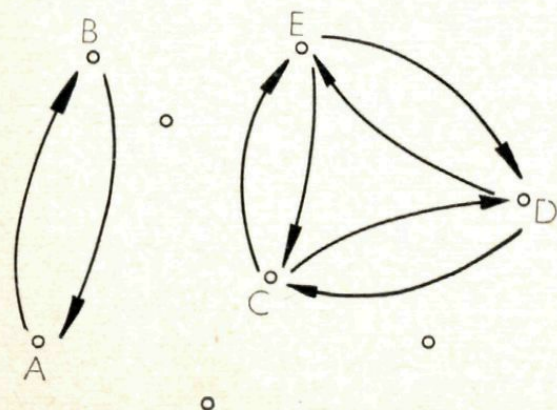


Fig. 2

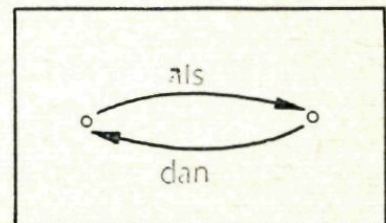
Terwijl we met *A* in gesprek zijn wijst deze plotseling op *B* en zegt: „Hij is even oud als ik”. „Nogal wiesdes”, reageert *B*, „*A* is nl. even oud als ik”. In onze figuur plaatsten we dan ook pijlen wijzend van *A* naar *B* en van *B* naar *A*. Blijkbaar zijn *C*, *D* en *E* in

fig. 2 ook even oud. We waren verplicht tussen elke twee van dit drietal de pijlen „heen en weer” te laten wijzen.

Een relatie R , die de karaktertrek heeft, dat uit xRy volgt yRx voor elk paar x en y (behorend tot de verzameling, waarin R gedefinieerd is) noemen we *symmetrisch*. De relatie x is even oud als y is dus symmetrisch.

In de verzameling der mannen zijn de relaties y is de broer van x en y is de buurman van x symmetrisch. In de verzameling der mensen zijn ze dat niet. De relatie y is de vader van x is niet symmetrisch, de relatie y is gelijkvormig met x (nee, dit keer niet in de verzameling der mensen, maar in die der meetkundige figuren) is het wel. Ook de relatie $y \perp x$ heeft deze karaktertrek.

We zouden op symmetrische relaties het nevenstaande etiket als herkenningsteken kunnen plakken.



B. Transitieve relaties

Op het marktplaatsje teruggekeerd, kijken we eens rond en merken een drietal personen op, die in een hevige discussie zijn gewikkeld. Dat moeten familieleden zijn, denken we. Inderdaad: P zegt: „ Q is mijn broer”, terwijl Q dadelijk voortgaat met de opmerking „en R is mijn broer”.

Op onze conclusie: „Dus R is uw broer, me-juffrouw P .” antwoordt deze nogal vinnig: „Hoe raadt u het zo!” Waarop wij, ook niet op ons mondje gevallen, reageren met: „de relatie y heeft x tot broer is immers transitief!”

Transitief is een relatie R namelijk, als uit de gegevens: xRy en yRz volgt xRz voor elke x , y en z van de verzameling, waarin R gedefinieerd is.

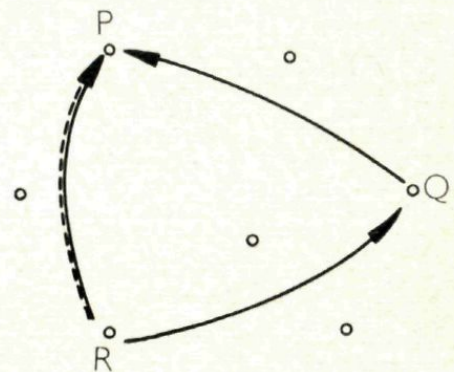
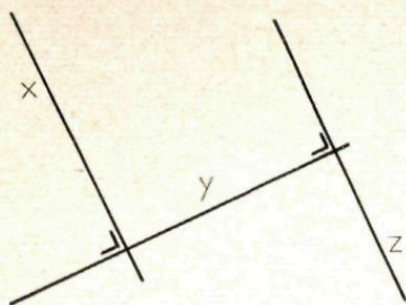


Fig. 3

A is bevriend met B en B is bevriend met C kan wel samengaan met A is bevriend met C , maar dat is niet noodzakelijk. Dus is de relatie y is bevriend met x niet transitief. Wel is dit het geval met y is ouder dan x . Enkele wiskundige relaties, die transitief zijn, zijn o.a.: $y \parallel x$; $y \subseteq x$; $y > x$.



Daarentegen is de relatie $y \perp x$ weer niet transitief, hetgeen je in fig. 4 kunt controleren.

Fig. 4

Op [transitieve] relaties kunnen we het nevenstaande etiket plakken:

C. Reflexieve relaties

Iemand, die fig. 3 kritisch bekijkt, zal al spoedig opmerken, dat niet alle mogelijke pijlen getekend zijn. Uit de tekst blijkt, dat P een dame is en dus niet een broer van Q en R , maar aangezien Q en R broers van elkaar zijn, moet er nog een pijl van Q naar R wijzen. Voor de duidelijkheid hebben we deze pijl achterwege gelaten. Maar nu fig. 2. Die is ook

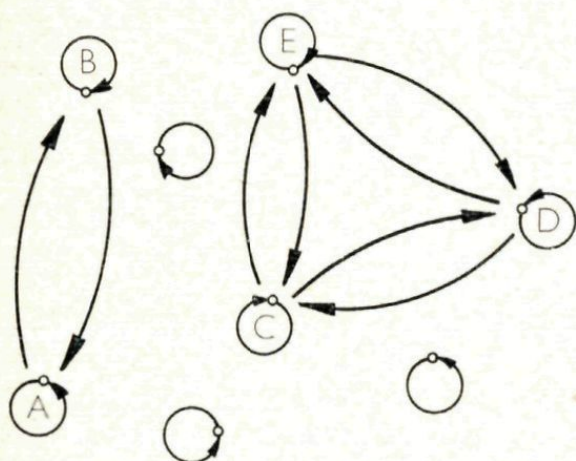
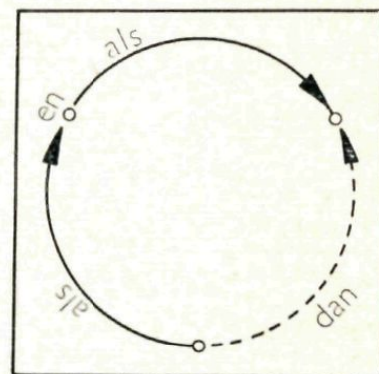
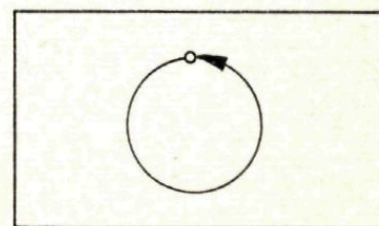


Fig. 5

niet volledig. Je weet, dat deze de relatie y is even oud als x in een verzameling van personen uitbeeldt. Wat is er nu vergeten? Je zult het misschien op het eerste gezicht een flauwe opmerking vinden en overbodig om te vermelden, maar we mogen niet vergeten, dat ieder even oud is als zich zelf. Dus x is even oud als x voor iedere x . Daarom hoort fig. 2 er uit te zien als fig. 5. Dan pas is deze volledig.

Een relatie R , die de eigenschap heeft, dat xRx juist is voor elke x van de verzameling, waarin de relatie gedefinieerd is, noemen we reflexief. De volgende relaties zijn reflexief: $y \sim x$, $y = x$, $y \parallel x$. Bij deze laatste relatie moeten we twee samenvallende lijnen evenwijdig noemen. Dat doen we dan ook meestal. De relaties $y \perp x$, y is de broer van x , y is de vader van x , y is ouder dan x zijn niet reflexief. Op reflexieve relaties zetten we het nevenstaande etiket.



We geven nu nog een overzicht van een aantal relaties en van de drie karaktertrekken, die ze wel of niet hebben. In het volgende artikel komen we dan op die relaties terug, die ze alle drie bezitten.

Relatie	Symm.	Trans.	Refl.
y is de broer van x	—	ja	—
y is de vader van x	—	—	—
y is even oud als x	ja	ja	ja
y is even rijk als x	ja	ja	ja
$y \perp x$	—	—	—
$y \parallel x$	ja	ja	ja
$y < x$	—	ja	—



21. De punten A, B, C, D, E liggen in een plat vlak. Gegeven zijn de afstanden $AB = 311$, $BC = 78$, $CD = 121$, $DE = 523$, $EA = 13$. Bereken de afstand AD.

22. Aan een cirkel zijn twee verschillende raaklijnen m en n getrokken, waarvan de raakpunten opvolgend A en B heten. Op m ligt het punt P en op n ligt het punt Q. De lijnstukken AP en BQ zijn gelijk aan een straal van de cirkel, het lijnstuk PQ is gelijk aan een middellijn van de cirkel. Wat volgt er uit deze gegevens met betrekking tot de richtingen van m en n .
23. Bepaal alle paren natuurlijke getallen, waarvan het produkt gelijk is aan het tienvoud van de som.

°De wiskunde in de knoop

Eigenlijk zou de titel van dit artikel beter kunnen luiden 'Knopen in de wiskunde', zoals we straks zullen zien. Voor we ons echter met deze knopen gaan bezighouden eerst een korte inleiding.

In onze schoolmeetkunde houden we ons gewoonlijk bezig met de *grootte* van figuren. We vergelijken ze om te onderzoeken of ze congruent of gelijkvormig zijn. We meten lengten en oppervlakten. Er is echter een tak van de wiskunde, waarin lengten, breedten, oppervlakten, gelijkvormigheid enz. geen rol spelen. Belangrijke begrippen in dit onderdeel van de meetkunde zijn o.a. „tussen”, „binnen”, „buiten”, enz. Als iemand in een onbekend gebied rijdt en de weg wil vragen, bijvoorbeeld naar Amsterdam, dan zal hij er in de eerste plaats geen belang bij

hebben hoeveel km Amsterdam nog verwijderd is, maar wel of hij bij het eerstvolgende kruispunt van wegen links af moet slaan. Het zal daarbij ook onbelangrijk zijn of de weg na het kruispunt een lange rechte of gekronkelde weg is. Hij zal moeten weten waar het dan volgende kruispunt is en hoe hij dan weer moet kiezen uit de mogelijke wegen. Hij interesseert zich dus niet voor maten, maar voor de ligging der wegen. Het onderdeel van de wiskunde, dat zich alleen met ligging, dus met het „tussen, buiten en binnen” bezig houdt, noemt men *topologie*. In enkele artikelen hebben we ons, zonder deze naam te noemen, al met de topologie bezig gehouden. Dat was nl. in de artikelen, die handelen over de graphen. Bij een graph immers doet recht of gebogen, lang of kort enz. er niets toe. Alleen de onderlinge ligging van de hoekpunten en de kanten interesseert ons. Daarom kunnen twee graphen er heel verschillend uitzien en toch isomorf zijn.

En dan nu de knopen

In het dagelijks leven passen we knopen dikwijls toe. In de veters van onze schoenen, als een schip aan de kade gemeerd wordt, enz. We kennen de platte knoop, de paalsteek en nog meer van die behendigheden, waar jonge padvindders hun bekwaamheid in moeten tonen.

Ook de topologie houdt zich met knopen bezig. Men verstaat daarin onder een knoop een enkelvoudig gesloten kromme in de driedimensionale ruimte. Eenvoudiger gezegd: Een touwtje, dat eerst op de een of andere manier dooreen gestrengeld is en waarvan daarna de uiteinden met elkaar zijn verbonden. Op de een of andere manier dooreenstrengelen kan heel eenvoudig zijn en heel ingewikkeld. In het algemeen hoeven

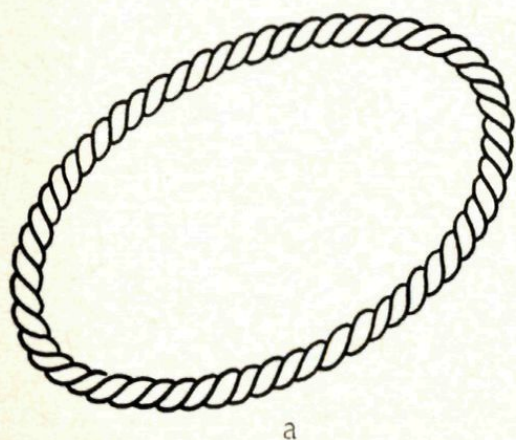


Fig. 6a

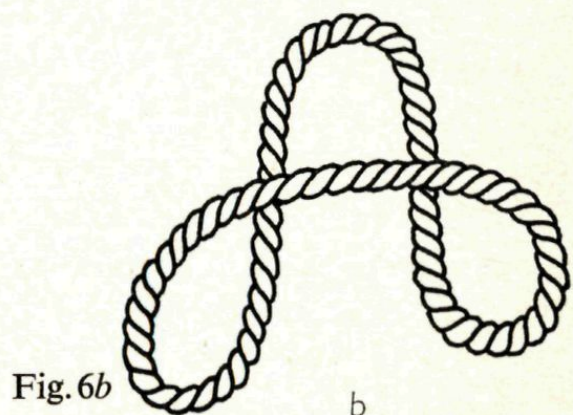


Fig. 6b

knopen niet zo erg ingewikkeld gemaakt te zijn om wiskundig toch al grote moeilijkheden op te leveren. In de figuren 6a, b, c, d vinden we enkele voorbeelden van knopen.

In fig. 6a zien we iets, dat in het dagelijks leven niet een knoop genoemd zou worden, maar dat we toch wel moeten laten vallen onder de topologische definitie. Fig. 6b stelt een knoop voor, die met die van a isomorf is. Zonder het touwtje bij *a* stuk te maken, kan er nl. *b* van gemaakt worden. De knopen van de figuren *c* en *d* zijn niet isomorf. De rechterknoop kan niet van de linker gemaakt worden zonder het touwtje eerst door te knippen.

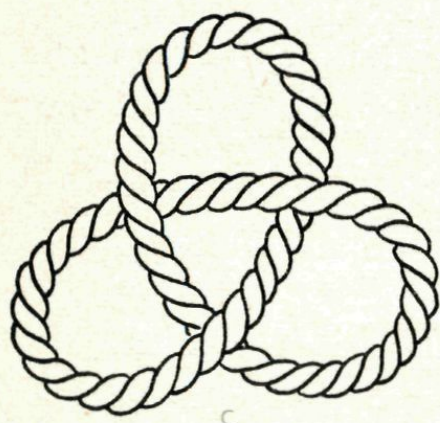


Fig. 6c

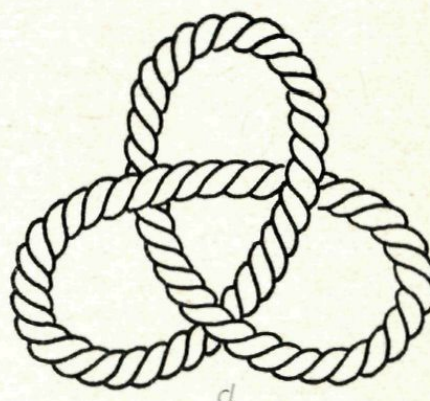


Fig. 6d

De beide knopen van fig. 7 in het ene touwtje gemaakt, zijn evenals die van fig. 6c en *d* elkaars spiegelbeeld. Ze heffen elkaar echter niet op. Wanneer je de knopen goed ruim maakt, kun je de linkerknoop door de rechterknoop heen schuiven (of de rechter door de linker). Daarbij blijven ze hun eigen vorm houden. De wiskundige verklaring hiervan is buitengewoon moeilijk.

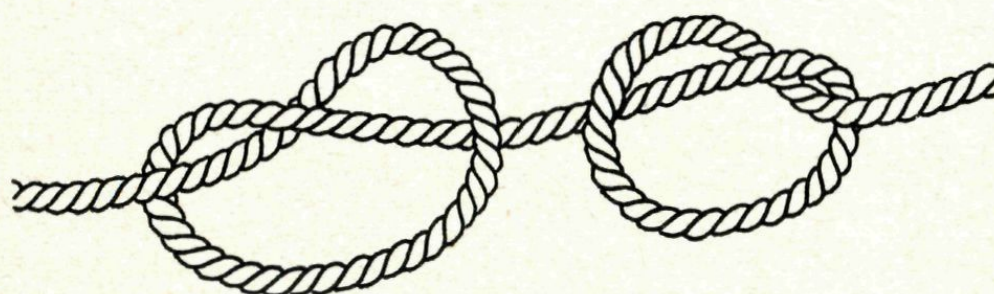


Fig. 7

Op de binnenzijde van de omslag is een bijzondere knoop afgebeeld, want een deel van deze knoop bestaat uit een plankje met een opening daarin. Je ziet, dat de knoop symmetrisch is (niet op de lengten van de delen letten). In de linkerlus hangt een ring. Je kunt nu aan iemand als puzzel opgeven deze ring (die niet door de opening in het plankje kan) naar de rechterlus te brengen. Probeer het eerst eens zelf voor je de oplossing op de foto's bekijkt. De situatie in foto 2 krijg je uit die van

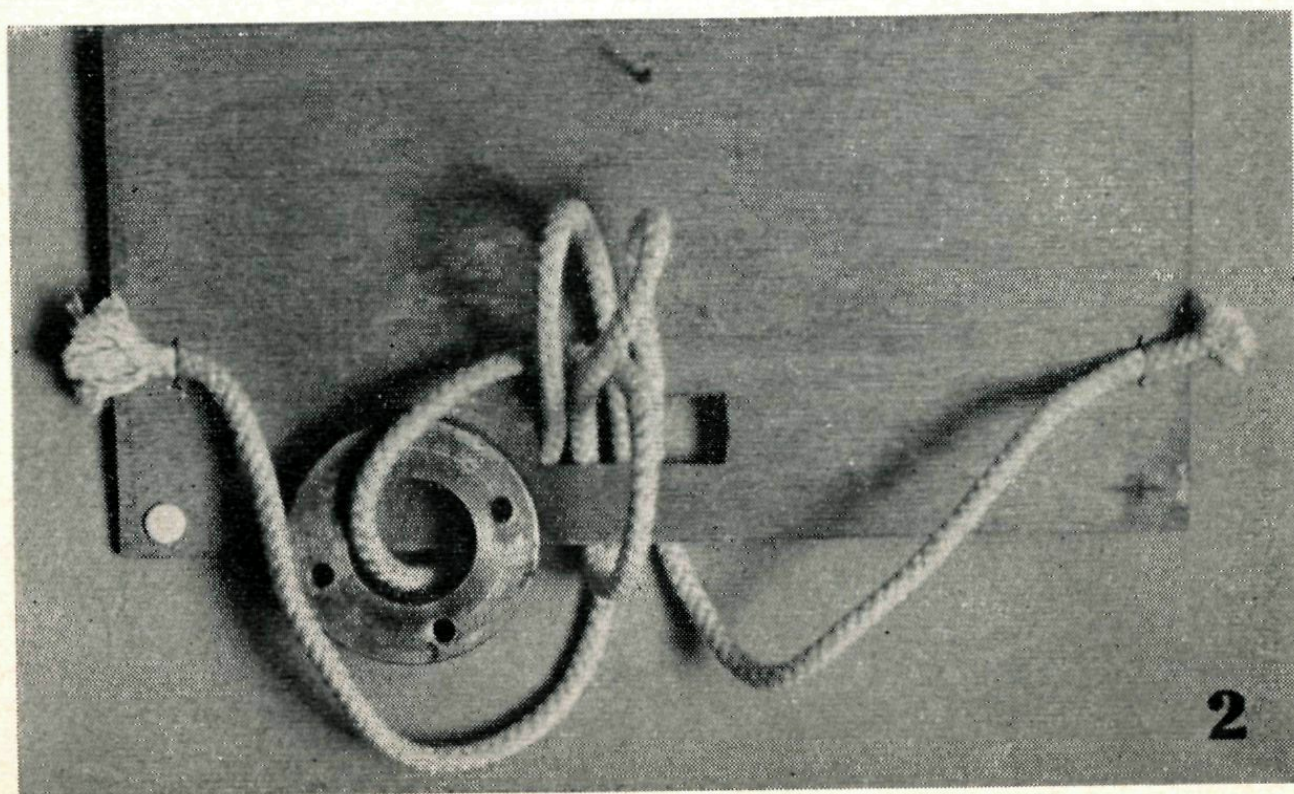
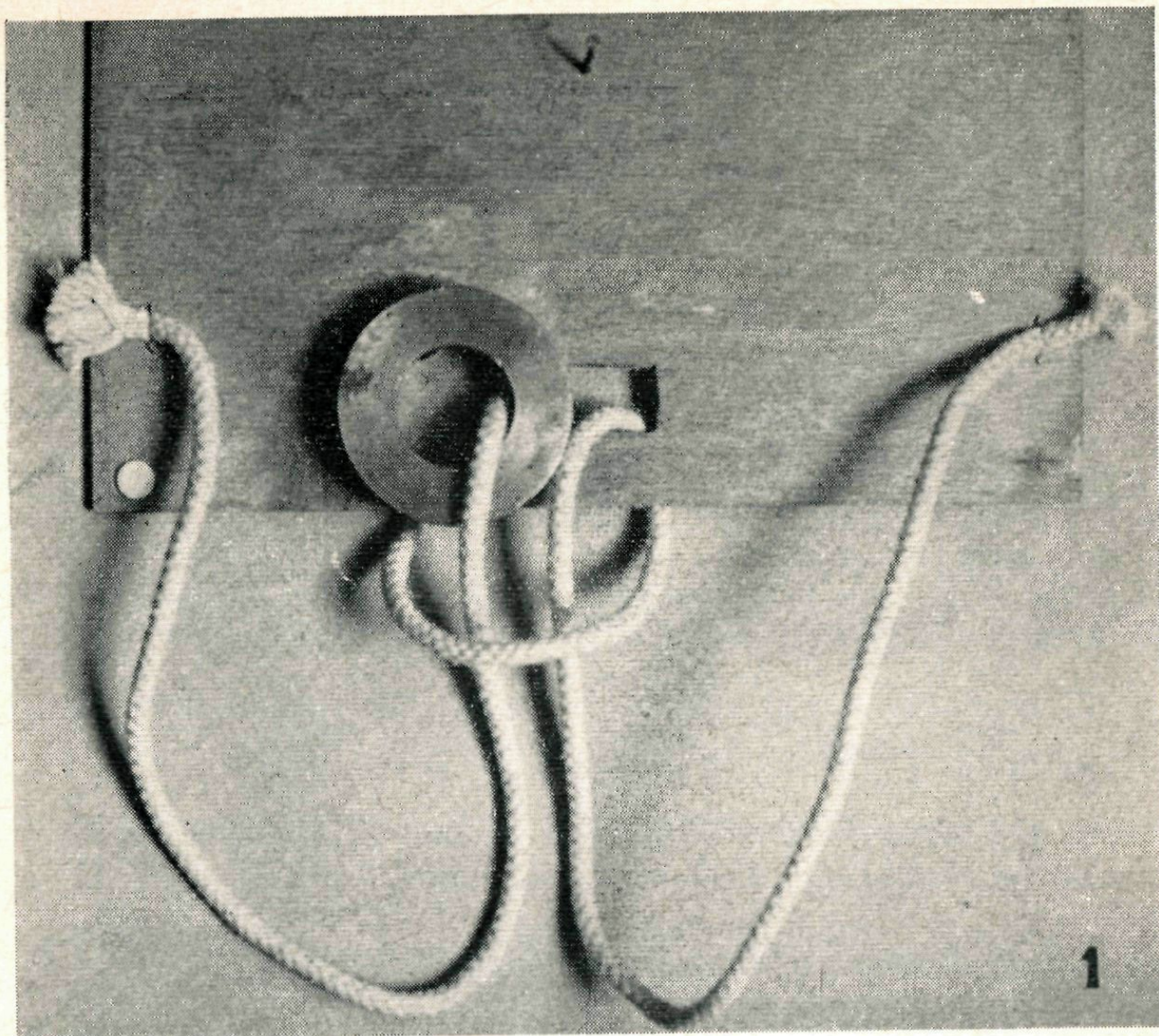
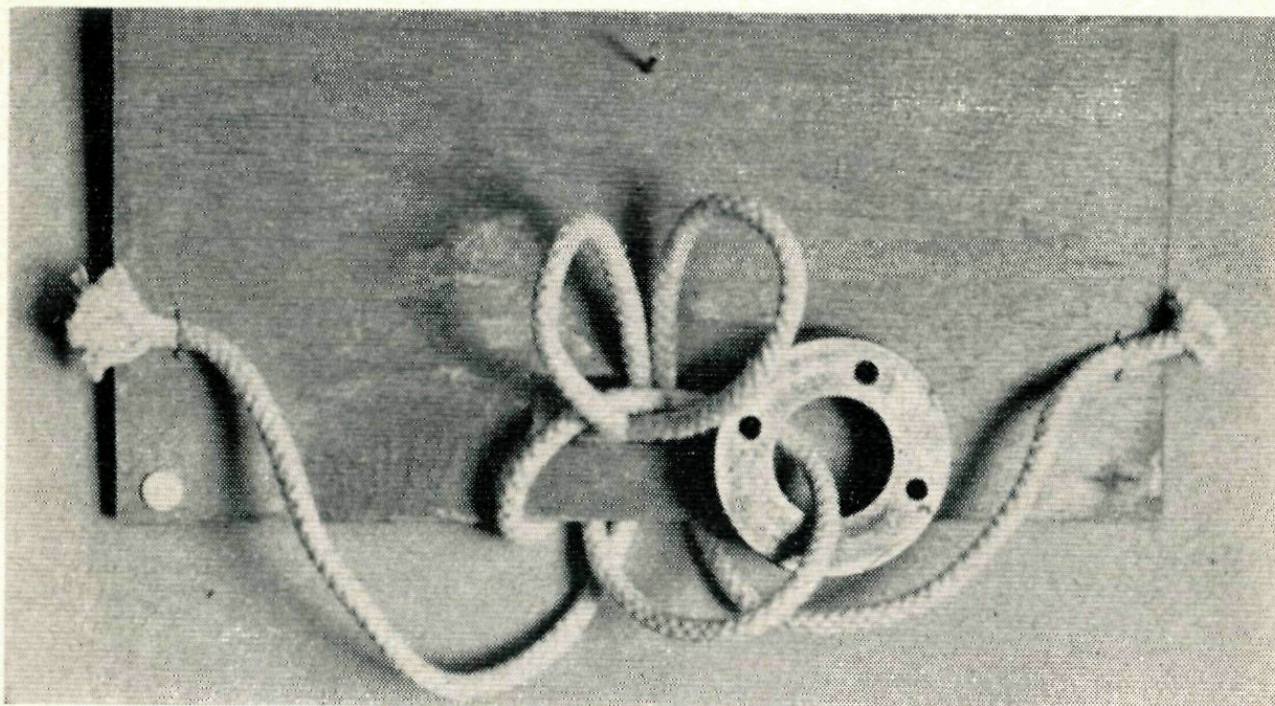
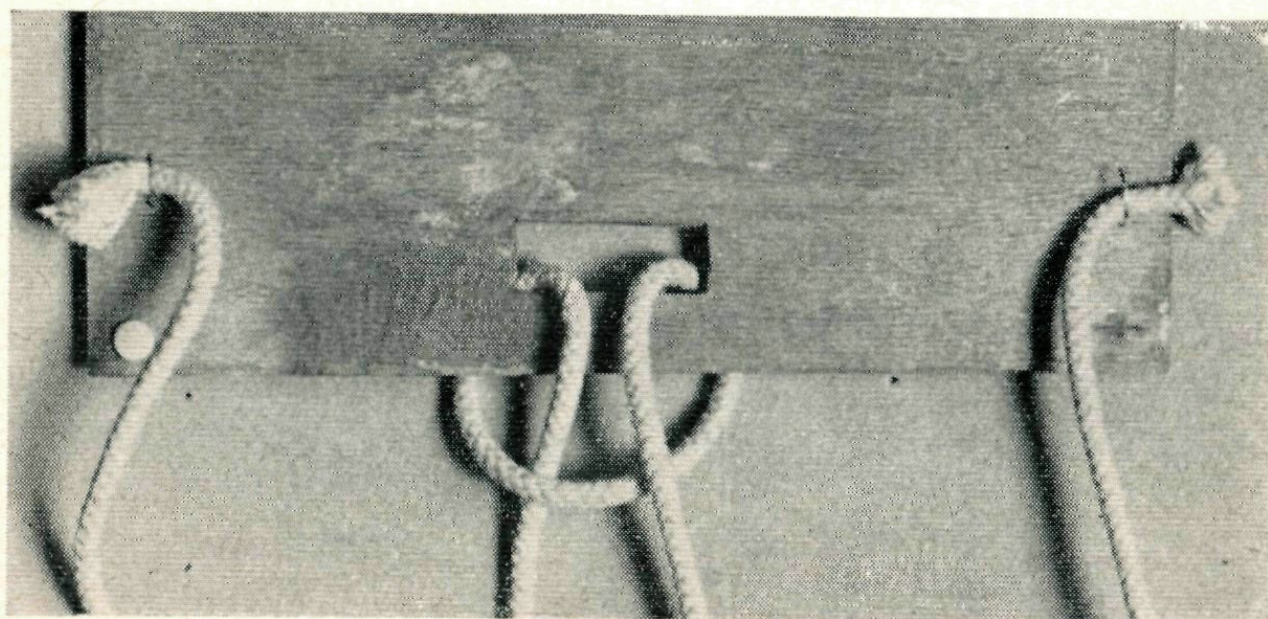


foto 1 door de dubbele lus door de opening heen naar je toe te trekken. Je kunt dan de ring daar onderdoor naar de rechterkant brengen, waardoor je de situatie van foto 3 krijgt. De rest is dan niet moeilijk meer.



In foto 4 hieronder zie je een beginsituatie, die wel wat lijkt op die van de omslagfoto, maar die topologisch heel anders is. In deze situatie is het dan ook niet mogelijk de ring van links naar rechts te brengen.





24. De rechten k, l, m sluiten een gelijkzijdige driehoek in. Bepaal de verzameling van de punten, die tot k een kleinere afstand hebben dan tot l en tot m .

25. Bepaal het kleinste natuurlijke getal x met de eigenschap, dat er tussen $\frac{x}{20}$ en $\frac{x}{19}$ precies één natuurlijk getal ligt. Bepaal ook het grootste natuurlijke getal x met die eigenschap. Bepaal het kleinste natuurlijke getal x met de eigenschap, dat er tussen $\frac{x}{20}$ en $\frac{x}{19}$ precies twee natuurlijke getallen liggen.
26. Elke zeshoek heeft zes zijden en negen diagonalen. Teken een zeshoek, waarin er onder die vijftien lijnstukken zes gelijke voorkomen die elk langer zijn dan de negen andere.
27. Hoeveel scherpe hoeken kan een vijfhoek hoogstens hebben?

°Een vreemde algebra- en meetkundeles II

door F. van der Blij, Bilthoven

In het vorige artikel werd met „dozen” **0** tot en met **6** gerekend. Er werden optel- en vermenigvuldigtabellen opgesteld en zo kregen we een rekensysteem met slechts 7 „getallen”

We gaan nu iets verder en gaan op dezelfde manier te werk als bij de gewone algebra. In dit artikel zal een letter, bijv. **a** of **x** in de plaats staan van één van de dozen **0, 1, ..., 6**.

Machten

Wat betekent bijvoorbeeld x^2 ? We bedoelen hiermee, net als in de gewone algebra, $x \cdot x$. We maken even een tabel van alle kwadraten:

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

We merken op, dat x^2 niet de waarden **3, 5** of **6** kan aannemen. Daarentegen komen de waarden **1, 2** en **4** tweemaal als kwadraat voor. We kunnen dus zeggen, dat de vergelijking $x^2 = a$ voor $a = 1, 2, 4$ twee en voor $a = 3, 5, 6$ geen wortels heeft. Voor $a = 0$ is er één wortel.

Dat **2** en **5** hetzelfde kwadraat hebben kunnen we wel begrijpen. Immers, omdat $2 + 5 = 0$, zijn **2** en **5** elkaars tegengestelde. En „getallen”, die elkaars tegengestelde zijn, hebben hetzelfde kwadraat. We kunnen het ook verklaren door in de dozen te kijken, want in de doos **5** zit het getal -2 .

Je kunt nu zelf wel een tabel van de derdemachten maken. Als voorbeeld geven we nog de tabel van de zesdemachten. Probeer die maar na te rekenen.

x	0	1	2	3	4	5	6
x^6	0	1	1	1	1	1	1

De vergelijking $x^6 = a$ heeft dus voor $a = 0$ één wortel, voor $a = 1$ zes wortels en voor elke andere waarde van a geen wortels.

Aan het einde van het vorige artikel merkten we zonder bewijs op, dat $5b^6$ voor alle getallen b uit doos **3** in doos **5** ligt. We zien nu, dat $5b^6$ zelfs voor alle getallen, die niet in doos **0** liggen, een getal uit doos **5** is.

Ontbinding in factoren en vierkantsvergelijkingen

Het vermenigvuldigen van twee tweetermen zal ons niet veel moeilijkheden geven. Laten we een paar voorbeelden behandelen:

$$(x + 3)(x + 6) = x^2 + 2x + 4$$

want $3 + 6 = 2$ en $3 \cdot 6 = 4$.

We zouden in ons systeem alle vermenigvuldigingen $(x + a)(x + b)$ gemakkelijk kunnen opschrijven (het zijn er nl. maar weinig), maar dat willen we aan je zelf overlaten. We volstaan met nog twee voorbeelden:

$$(x + 2)(x + 5) = x^2 + 3$$

$$(x + 4)^2 = x^2 + x + 2$$

Wanneer nu een drieterm gegeven is, kunnen we die dan in factoren ontbinden? We kiezen als voorbeeld $x^2 + 6x + 1$.

We proberen dit te schrijven als $(x + p)(x + q)$. Dan moet dus gelden $p + q = 6$ en $pq = 1$. We kijken nu in onze tabel van vermenigvuldigingen in het vorige nummer (bldz. 48) naar alle vermenigvuldigingen met de uitkomst **1**. Kunnen we er daaronder een vinden, waarvan de

som der factoren **6** is? Dit lukt inderdaad nl. **2 · 4**. Onze conclusie is, dat

$$x^2 + 6x + 1 = (x + 2)(x + 4)$$

Wanneer we een vierkantsvergelijking willen oplossen, dan zullen we eerst proberen het linkerlid in factoren te ontbinden. Willen we bijvoorbeeld $x^2 + 6x + 1 = 0$ oplossen, dan beschouwen we $(x + 2)(x + 4) = 0$. Nu zien we in onze vermenigvuldigingstabel, dat een produkt alleen maar **0** is, wanneer tenminste één der factoren **0** is. Om een wortel van $x^2 + 6x + 1 = 0$ te vinden moeten we dus $x + 2 = 0$ en $x + 4 = 0$ onderzoeken. De wortels blijken **5** en **3** te zijn.

Kunnen we ook zoiets als een formule voor het oplossen van vierkantsvergelijkingen vinden? We geven een kleine aanwijzing. Laten we de vergelijking schrijven als $x^2 + 2px + q = 0$ (kan dit altijd?) Dan mogen we ook schrijven $(x + p)^2 = p^2 - q$. Wanneer nu $p^2 - q$ geen kwadraat is, dan zijn er geen wortels. Wanneer $p^2 = q$ dan is er één wortel en wanneer $p^2 - q$ een van de kwadraten **1, 2, 4** is, dan zijn er twee wortels.

Een blik over de horizon

Bij het rekenen met dozen, zoals we tot nu toe gedaan hebben, werden de gehele getallen zo in dozen verdeeld, dat in doos **a** kwamen te liggen de zevenvouden $+ a$. Een verdeling van de gehele getallen op deze manier noemen we een verdeling in *restklassen modulo 7*. Het spreekt van zelf, dat men ook restklassen naar een andere modulus kan vormen. Bijvoorbeeld naar de modulus 6. Dan vormen we dus dozen **0** tot en met **5** zo, dat in doos **0** alle zesvouden liggen, in doos **1** de zesvouden $+ 1$, enz.

Hier is een vermenigvuldigtabel voor het rekenen modulo 6:

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Delen van restklassen modulo 6

In de vermenigvuldigtabel voor het rekenen modulo 7 (bldz. 48) zagen we, dat voor iedere a en iedere $b \neq 0$ één en wel precies één x te vinden was met $b \cdot x = a$. Deze x noemen we het quotiënt van a en b . We schrijven dan ook wel $a : b = x$.

De vermenigvuldigtabel voor het rekenen modulo 6, die hierboven staat, is geheel anders. Kies bijv. $a = 4$ en $b = 2$. We zien in de tabel, dat zowel $x = 2$ als $x = 5$ voldoen, omdat $2 \cdot 2 = 4$ en $2 \cdot 5 = 4$. We kunnen hier dus niet over *het* quotiënt spreken. En de notatie $4 : 2$ kan niet worden ingevoerd. Een andere bijzonderheid is, dat een produkt nul kan zijn, zonder dat een der factoren nul is, immers $2 \cdot 3 = 0$.

Wanneer we in dit systeem een vergelijking hebben moeten we voorzichtig te werk gaan. Voorbeeld $x^2 + 3x + 2 = 0$

We schrijven hiervoor $(x + 1)(x + 2) = 0$

Nu zijn zowel 5 en 4 als ook 1 en 2 wortels. In dit systeem zijn dus vierkantsvergelijkingen met 4 wortels.

Wimecos-prijsvraag II (Zie Pyth. 4-2, bldz. 35)

De strijd om de Wimecos-prijs wordt ditmaal op het schaakbord gestreden. De schaakstukken komen er echter niet aan te pas. Het gaat alleen maar om de velden van het schaakbord. Die velden vormen een uit 64 elementen bestaande verzameling, die we V noemen.

Kiest men uit die 64 velden een n -tal velden uit ($1 \leq n \leq 63$), dan vormen die n velden een deelverzameling van V . Het aantal zulke deelverzamelingen van V bedraagt $2^4 - 2 = 18446728073709551614$. Je hoeft dit niet te bewijzen en ook niet na te rekenen (er zou best eens een cijferfout of zetfout in kunnen zitten).

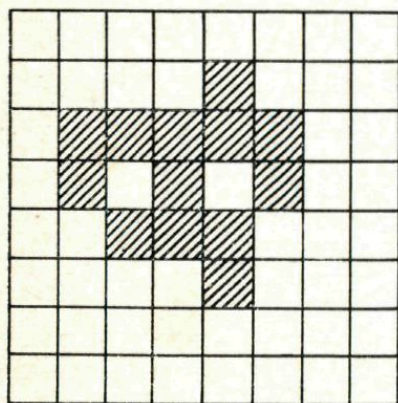
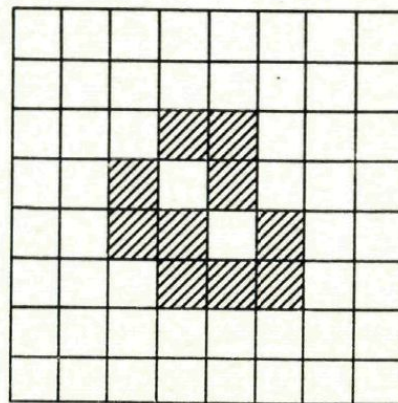


Fig. 8 en 9



We onderscheiden twee soorten deelverzamelingen: de samenhangende en de niet-samenhangende. We noemen een deelverzameling samenhangend, indien hij uit één stuk zou bestaan wanneer hij uit het schaakbord gezaagd werd. Deze omschrijving

is niet scherp genoeg voor wat volgen gaat. We vervangen hem daarom door deze: een deelverzameling heet samenhangend in elk van de volgende twee gevallen

a. wanneer hij uit slechts één veld bestaat

b. wanneer hij uit n velden bestaat ($2 \leq n \leq 63$) en het mogelijk is die velden zo te nummeren van 1 tot en met n , dat voor $2 \leq k \leq n$ geldt dat veld nummer k een zijde gemeen heeft met een veld dat een lager nummer draagt dan k .

In figuur 8 en figuur 9 duiden de zwarte velden opvolgend een samenhangende en een niet-samenhangende deelverzameling aan.

Vraag 1: Hoeveel samenhangende deelverzamelingen zijn er, die uit drie velden bestaan?

Het zal duidelijk zijn, wat we moeten verstaan onder „de omtrek van een samenhangende deelverzameling van V ”. Noemen we de lengte van een zijde van een veld a , dan is de maximale waarde van de omtrek van een uit n velden bestaande samenhangende deelverzameling gelijk aan $2(n+1)a$, mits $\dots n$ niet al te groot is. Zo is bijvoorbeeld de maximale waarde van de omtrek van een uit 63 velden bestaande samenhangende deelverzameling niet $128a$, maar $36a$.

Vraag 2: Splits de verzameling V in vier congruente samenhangende deelverzamelingen, die maximale omtrek hebben (elk moet uit 16 velden bestaan en dus een omtrek hebben van $34a$).

Vraag 3: Voor welke waarden van n geldt de hierboven vermelde formule voor de maximale omtrek?

°Een probleem van Hamilton II

We beginnen het probleem van Hamilton op te lossen door een graph te tekenen, die isomorf is met het regelmatig twaalfvlak. Je ziet die hieronder naast het twaalfvlak afgebeeld.

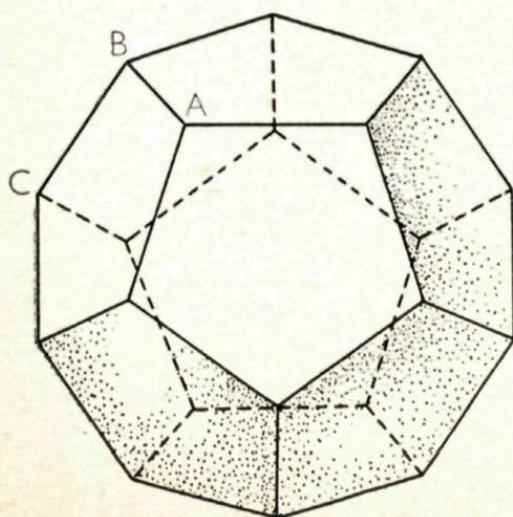
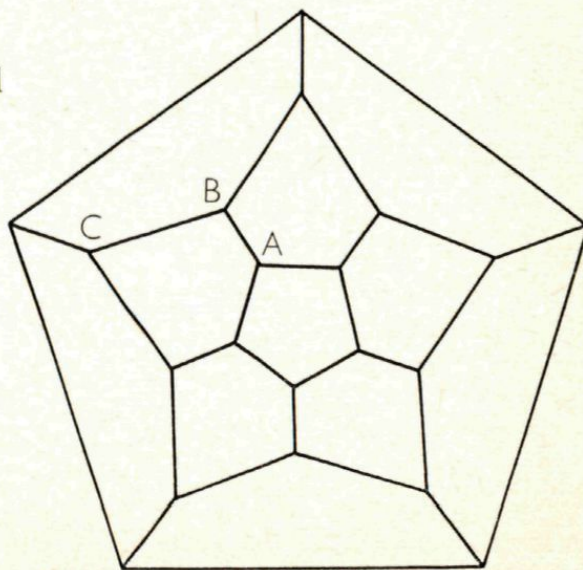


Fig. 10

Fig. 11



Je zou je kunnen voorstellen, dat deze graph uit het twaalfvlak kan worden verkregen door dit te maken van rubber, dan het achterste zijvlak er uit te knippen, zodat je dus een soort open doos krijgt en deze dan zo te vervormen, dat alle vlakken naast elkaar in één plat vlak komen te liggen. De ribben van het achtervlak moeten dan wel erg uitgerekt worden. Zij veranderen in de buitenste kanten van de graph. De rest moet hier en daar in elkaar worden gedrukt. De veelhoeken, die het twaalfvlak begrenzen, houden daarbij natuurlijk niet hun mooie regelmatige vorm, maar dat geeft bij een graph immers niet. Het gaat bij een graph niet om de vorm, maar om de onderlinge ligging van hoekpunten en kanten en die verandert bij deze vervorming niet. Vergelijk in beide figuren nog even de ligging van de punten A, B en C, dan kun je je misschien wel voorstellen, hoe het twaalfvlak in de graph veranderd is.

In fig. 12 zien we nu, hoe we langs de kanten van de graph reizend, alle steden, die zich bij de hoekpunten bevinden, kunnen bezoeken en elk daarbij slechts éénmaal passeren. Het spreekt van zelf, dat we daarbij niet alle kanten gebruiken, want bij ieder hoekpunt gaan we langs één kant „de stad in” en langs een tweede er weer uit. De derde kant bij dat hoekpunt blijft dus ongebruikt.

In de graphentheorie wordt nu een gesloten circuit, dat juist eenmaal door elk der hoekpunten gaat een *Hamiltonlijn* genoemd. Men heeft nog geen methode gevonden om van een willekeurige graph te kunnen vaststellen of deze een Hamiltonlijn bezit of niet. Ook hierin verschilt het probleem van Hamilton van dat van Euler, omdat bij het laatste wel een eenvoudig kenmerk was te vinden, nl. of het aantal kanten bij elk der hoekpunten even was.

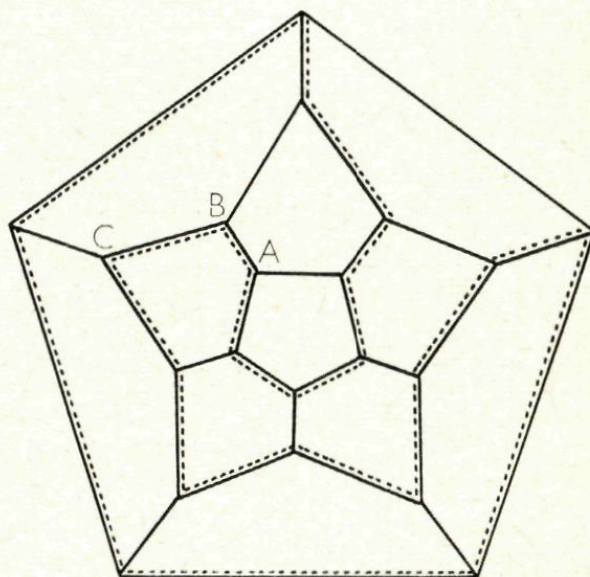


Fig. 12





28. Een horloge loopt $2\frac{1}{2}$ minuut per etmaal achter. Het wordt op 15 januari 1965, om een uur des middags, gelijkgezet, daarna wordt het niet meer bijgesteld. Hoe laat is het, wanneer het horloge op 21 januari 1965 negen uur des morgens aanwijst?
29. Een getal bestaat uitsluitend uit cijfers 1, 2, 3, 4, 5. Voor elk tweetal cijfers van dat getal geldt: staan ze naast elkaar, dan zijn ze verschillend; zijn ze gelijk, dan zijn al hun burens verschillend. Bepaal het grootste getal, dat deze eigenschappen heeft.
30. Vijftien tijdschriften liggen op een tafel en bedekken die tafel volledig. Bewijs dat het mogelijk is zeven van die tijdschriften weg te nemen, zodat de overblijvende acht tijdschriften minstens $\frac{8}{15}$ van de oppervlakte van de tafel bedekken.
-

Lezers schrijven ons

Tot nu toe hebben we van onze lezers vrij geregeld allerlei reacties ontvangen op de inhoud van Pythagoras. Dat is bijzonder plezierig, omdat het ons het prettige gevoel geeft gelezen te worden. Deze reacties hebben we steeds persoonlijk beantwoord. Nu hebben we echter een paar brieven gekregen, die we ook voor de andere lezers de moeite waard vinden. Hier zijn ze (soms een beetje bekort).

Geen Nederlands woord voor „graph”?

De Heer J. W. Perdeck, Berliozstraat 7E te Amersfoort schrijft:

In het nieuwste nummer van Pythagoras wordt op bldz. 22 de „graph” ingevoerd. Een goede Nederlandse naam zou er niet voor bestaan. Dat is echter onjuist. Op het Mathematisch Centrum in Amsterdam heeft men, vooral op de statistische afdeling, van meet af aan strijd gevoerd tegen de „Engelse ziekte” en met succes. Eén van de vondsten, al jaren geleden, van Prof. Dr. J. Hemelrijk was het scherpe Hollandse „KNOOPSEL” voor het nietszeggende Grieks-Engelse woordje „GRAPH”. Zie bijvoorbeeld het M. C. Rapport S 268 van Ir. A. R. Bloemena: „Het aselekt kiezen van knopen in een knoopsel.” Het is van 1960.

Antwoord aan de Heer Perdeck

Toen we de voorbereidingen troffen voor het plaatsen van de artikelenreeks over graphen, hebben we ons over de Nederlandse terminologie laten inlichten door een kenner van de graphentheorie van de Amsterdamse Universiteit. Deze adviseerde ons de term 'graph' te blijven gebruiken. Aangezien ook wij liever Nederlandse dan Engelse woorden gebruiken stellen we het op prijs, dat u ons

wijst op het woord, dat de statistische afdeling van het Mathematisch Centrum gebruikt. Des te meer past de mededeling daarvan in dit nummer van Pythagoras, omdat we juist in dit nummer een artikel hebben opgenomen over knopen. Onze lezers bemerken dan dat de knopen inderdaad in de wiskunde een belangrijke rol spelen, al zijn het dan niet altijd knopen in touwtjes. Overigens lijkt het ons het beste, dat we in de artikelen over graphen deze naam maar blijven gebruiken. We zijn er nu al zo aan gewend en hoewel een spreekwoord zegt: „Beter ten halve gekeerd, dan ten hele gedwaald”, we dwalen toch niet zo heel erg, als we onze lezers zelf de keuze laten maken of ze in het vervolg de naam 'knoopsel' willen gebruiken?

Onmogelijke figuren

In jaargang 2 gaven we een aantal voorbeelden van zg. onmogelijke figuren. Deze hebben veel belangstelling getrokken. De Heer J. J. K. de Werk te Geldermalsen stuurde ons nog eens een nieuw voorbeeld, dat hij vond in het tijdschrift „Brick and Clay”. Als onze inlichtingen juist zijn, dan werd deze figuur in een Amerikaans tijdschrift als blikvanger gebruikt in een advertentie. Evenals de Heer de Werk willen we onze lezers graag even laten genieten van de lichte geestelijke verwarring, die zo'n figuur veroorzaakt. Is het niet zo, dat we er om lachen, omdat we er een beetje zenuwachtig van worden?

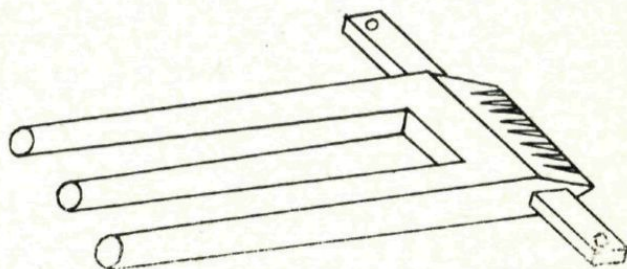


Fig. 13

Een wiskundeclub in Haarlem

De Heer J. J. A. Harbrink Numan, leraar aan het Lourens Costerlyceum te Haarlem zond ons een afschrift van een circulaire, die hij bij Pythagoras op zijn school had doen uitreiken. In deze circulaire schrijft hij o.a.:

Het denkbeeld is bij mij opgekomen op onze school een „Wiskundeclub” of „Studiekring” of welke andere naam ook geschikt is, te stichten.

Begin niet te schrikken van dit woord; de bedoeling is minder erg dan het lijkt. Om te beginnen wil ik aansluiten op artikelen en problemen die in Pythagoras behandeld worden. Ik kan mij voorstellen dat deze artikelen en problemen nadere toelichting behoeven; ik kan mij ook voorstellen, dat sommige artikelen verdere belangstelling opwekken.

Het is uiteraard niet de bedoeling het toch al zware schoolprogramma verder te belasten; eenmaal in de vier of zes weken een bijeenkomst lijkt mij voldoende.

Mocht je er iets voor voelen, zeg mij dit dan. Zelfs met een zeer klein clubje (bijv. 4 personen) lijkt het mij de moeite waard de proef eens te nemen.”

Tot zover de circulaire. We willen graag aanbevelen dit initiatief over te nemen en mogen we dan aan het eind van de cursus eens horen wat de ervaringen zijn?

°Tegelvloeren, balklagen en getallenrijen

Het sommeren van getallenrijen kan op een aardige manier plaats vinden door het leggen van tegelvloeren en balklagen.

In fig. 14 zien we een rechthoekige vloer (8 bij 9), die voor de helft belegd is met vierkante tegels. Het aantal tegels kan van links naar rechts geteld worden in kolommen. In de eerste kolom 1, in de tweede kolom 2, enz. Er zijn dus in het geheel $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ tegels in deze vloer gelegd. Hoeveel zijn er dat nu samen? Wel, in de hele vloer zouden 9 maal 8, dat is 72 tegels passen. Dus is

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \frac{1}{2} \cdot 72 = 36.$$

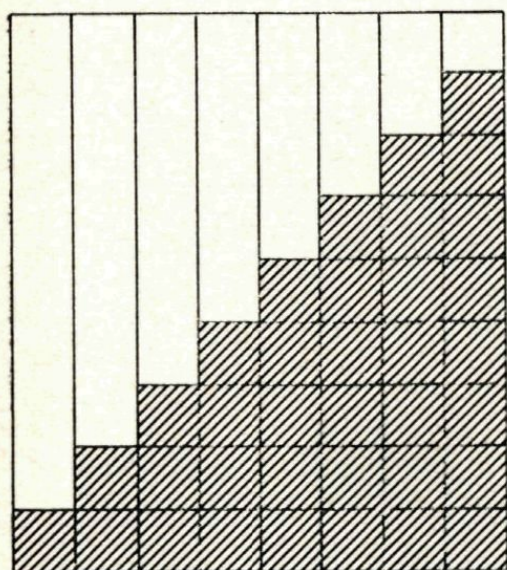


Fig. 14

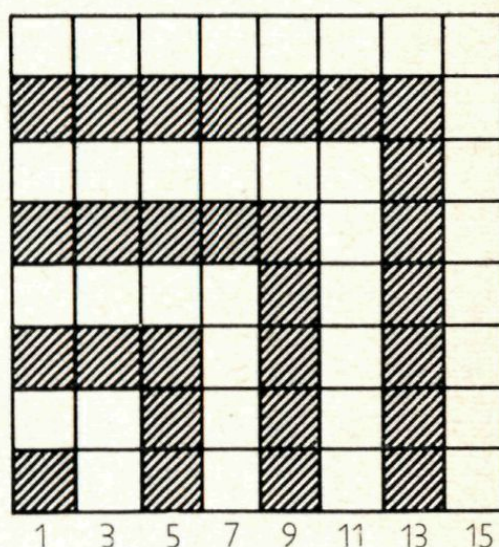


Fig. 15

We kunnen deze methode gemakkelijk voor een willekeurig aantal natuurlijke getallen toepassen. Willen we berekenen:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 1) + n$$

dan leggen we een vloer van n bij $(n + 1)$ op de manier van fig. 14 voor de helft vol met tegels. Het aantal tegels is dan $\frac{1}{2}n(n + 1)$. Dus is

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 1) + n = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

We kunnen dat korter noteren door gebruik te maken van het somteken:

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

Hierin en in de volgende formules in dit artikel stellen de letters k en n steeds natuurlijke getallen voor.

In het vierkant (8 bij 8) van fig. 15 zijn witte en zwarte tegels gelegd zo, dat de hele vloer er mee gevuld is. Er ontstaan daardoor witte en zwarte

banen. Het aantal tegels in elk dezer banen (te beginnen in de linker-onderhoek) is 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 en 15. Dus in de eerste „baan” 1, in de tweede baan $2 \cdot 2 - 1 = 3$, in de derde baan $2 \cdot 3 - 1 = 5$, enz. tenslotte in de achtste baan $2 \cdot 8 - 1 = 15$.

Zouden we dus een vierkant kiezen van n bij n , dan zou de laatste baan daarin $2n - 1$ tegels bevatten. In fig. 15 zien we

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$$

terwijl we nu gemakkelijk kunnen begrijpen, dat

$$\sum_{k=1}^{k=n} (2k - 1) = n^2.$$

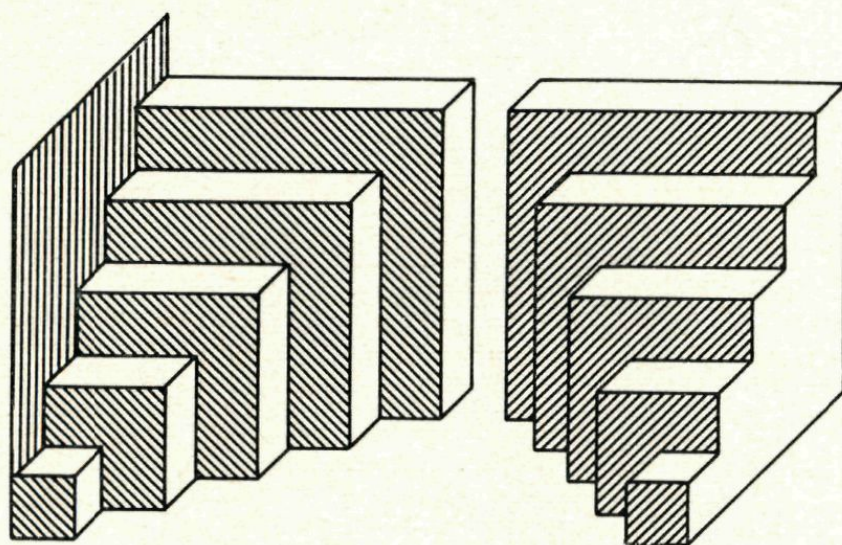


Fig. 16

Van het platte vlak met zijn tegelvloeren gaan we nu over naar de ruimte, waarin we tenslotte balklagen gaan leggen. Eerst bekijken we fig. 16.

Links tegen een wand zijn een aantal blokken opgestapeld en rechts zien we deze blokken opnieuw. We kijken nu eerst naar de blokken links. Hun voorkanten zijn vierkant en hebben de lengten 1, 2, 3, 4 en 5. Hun breedten zijn gelijk en we nemen aan, dat deze breedten alle gelijk 1 zijn. De inhouden van deze blokken zijn dan van voor naar achter gerekend:

1^2 , 2^2 , 3^2 , 4^2 en 5^2 . Met de rechterblokken is dat ook zo. We kunnen ons deze figuur gemakkelijk naar achteren voortgezet denken, zodat we ons kunnen voorstellen, dat de inhouden zich voortzetten tot en met n^2 . De blokken aan de rechterkant moeten we dan steeds zover naar rechts opschuiven, dat er tussen de achterste blokken een ruimte met lengte 1 overblijft, zoals dat ook in fig. 16 het geval is. We gaan nu deze figuur

zodanig vullen met balklagen, dat we tenslotte kunnen berekenen

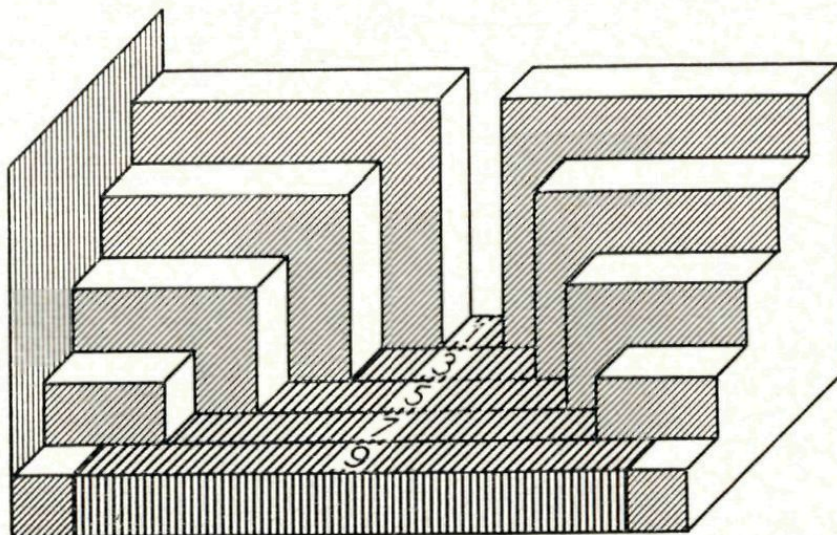
$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2.$$

Dat wil dus zeggen de som:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2.$$

In fig. 17 zien we, dat de eerste balklaag gelegd is.

Fig. 17



Achteraan tussen de beide grootste blokken ligt een balkje met de inhoud 1, daarvoor een balkje met de inhoud 3, enz. Tenslotte ligt er vooraan een balk met de inhoud 9.

Zouden we de figuur zo uitgebreid hebben, dat er n blokken achter elkaar zouden staan, dan zou de aan te brengen balklaag bevatten balken met een gezamenlijke inhoud van

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

Op deze eerste balklaag kunnen we nu een tweede en een derde, enz. aanbrengen tot de hele figuur is aangevuld tot een trap als in fig. 18.

In de tweede balklaag liggen dan balken met een totale inhoud van

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) = (n-1)^2.$$

(ga dat zo nodig even na in fig. 17 of 18).

Het is nu niet moeilijk te begrijpen, dat als de hele trap klaar is, zoals in fig. 18, dat dan de inhouden van de balklagen (van boven naar beneden bekeken) samen zijn:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2.$$

De inhoud van de hele trap is blijkbaar $3 \cdot \sum_{k=1}^{k=n} k^2$.

Het is bovendien gemakkelijk om in te zien, dat de inhoud van deze trap de helft is van een blok met de afmetingen: lengte $2n + 1$, breedte n en hoogte $n + 1$. De inhoud van dat blok is dus $n(n + 1)(2n + 1)$.

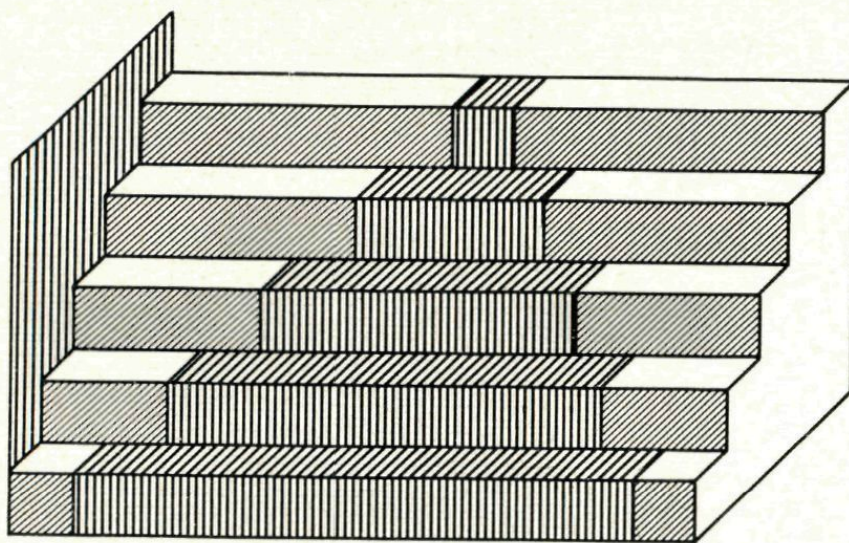


Fig. 18

De inhoud van de trap is de helft hiervan en dus vinden we tenslotte:

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1).$$

Oplossing van Wimecos-prijsvraag I

Vraag 1: Het aantal vakjes van een figuur bedraagt $7 + 5 + 3 + 1 = 16$. Elk kan op twee manieren gekleurd worden (wit of zwart). Het aantal mogelijke figuren bedraagt dus $2^{16} = 65536$. Hierin is begrepen de figuur, die alleen maar witte vakjes heeft. Naar verkiezing mag men die wel of niet meetellen. Het antwoord kan dus ook 65535 zijn.

Vraag 2: Het aantal verschillende figuren is wel groot, maar niet onbeperkt. Bij voortzetting van het afleidingsproces moet men dus op een figuur stuiten, die al eerder voorkwam.

Vraag 3: Er zijn slechts acht perioden, die uit zes verschillende symmetrische figuren bestaan. Men kan ook zeggen, dat er 48 zijn, want zulk een periode kan men met elk van de zes er in voorkomende figuren laten beginnen. Eén van de mogelijke oplossingen is hieronder afgebeeld. (Figuur 19).

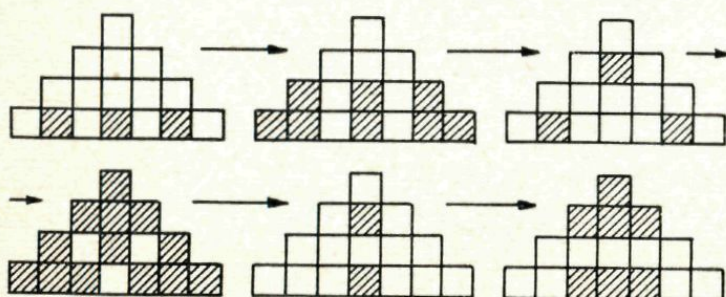


Fig. 19

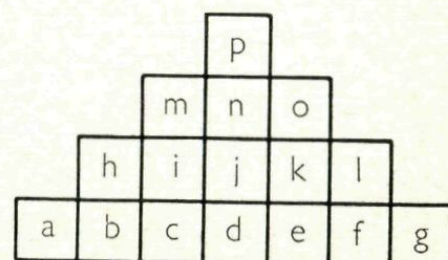


Fig. 20

Vraag 4: We beginnen met de zestien vakjes namen te geven (zie figuur 20). Vakje a moet aan een even aantal zwarte vakjes grenzen, omdat het dezelfde kleur moet hebben als het overeenkomstige vakje van de afgeleide figuur. Vakje a grenst echter slechts aan één ander vakje met zijn zijden, namelijk aan b. Dus dat even aantal kan geen ander zijn dan nul. Dus b moet wit zijn. Op dezelfde manier beredeneren we dat f wit moet zijn. Zo komen we tot figuur 21.

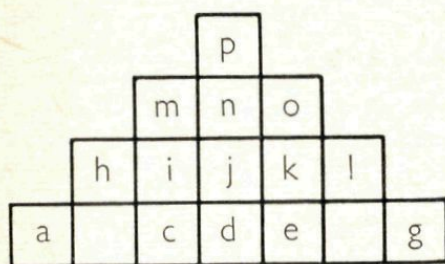
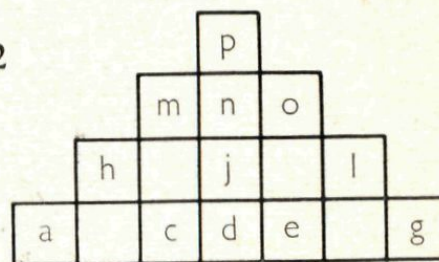


Fig. 21

Fig. 22



Nu bekijken we h, die eveneens aan een even aantal zwarte vakjes moet grenzen. De enige zwarte buurman van h zou i kunnen zijn. Dus i moet wit zijn. Evenzo blijkt dat ook k wit moet zijn. De situatie wordt in figuur 22 weergegeven.

Passen we dezelfde overwegingen nu toe op m of op o, dan blijkt dat n wit moet zijn en zo verkrijgen we figuur 23. Tot slot vinden we uit de beschouwing van j dat ook d nog wit moet zijn. We houden dus nog tien „onbekenden” over in figuur 24.

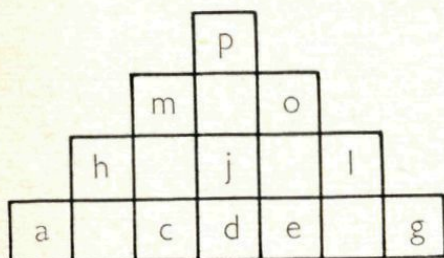
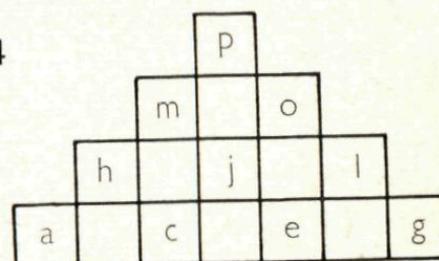


Fig. 23

Fig. 24



Elk van die tien onbekenden grenst aan louter witte vakjes en kan dus beslist niet veranderen bij de overgang op de afgeleide figuur. We moeten er dus alleen nog voor zorgen, dat de vakjes, die nu wit zijn niet van kleur veranderen bij die overgang. Er zijn zes van die witte vakjes. Dit levert ons dus straks zes voorwaarden voor tien onbekenden.

Laten we aan een zwart vakje het getal 1 toekennen en aan een wit vakje het getal 0. Dit betekent, dat we de letters a, c, e, g, h, j, l, m, o, p nu echt als onbekenden gaan beschouwen in plaats van als namen van de vakjes. Maar bedenk wel, dat die onbekenden slechts twee verschillende waarden kunnen aannemen: 0 en 1. Het begint dus een beetje te lijken op algebra in het tweetallig stelsel. Maar een nog beter beeld krijgen we met de dozenalgebra (zie nummer 2 van deze jaargang), waarbij we slechts met twee dozen rekenen.

Het vakje, dat eens b heette, moet wit blijven bij de overgang naar de afgeleide figuur. Dit betekent dat er onder het drietal a, h, c een even aantal enen moet zijn. Beter gezegd: $a + c + h$ moet even zijn. En in de dozenalgebra-taal: $a + c + h = 0$. Op deze manier kunnen we nog vijf andere vergelijkingen vormen. Hier is het complete stelsel:

$$\begin{array}{rcl} a + c & + h & = 0 \\ c + e & + j & = 0 \\ e + g & + l & = 0 \\ c & + h + j & + m = 0 \\ e & + j + l & + o = 0 \\ j & + m + o + p & = 0 \end{array}$$

We hebben meer onbekenden dan vergelijkingen. Daarom proberen we een aantal van de onbekenden in de andere uit te drukken; meer kunnen we toch niet bereiken. We brengen dus vier onbekenden naar rechts, te weten c, e, h, l. Bedenk, dat je daarbij niet aan tekenwisseling hoeft te denken. Tel je bijvoorbeeld bij beide leden van de eerste

vergelijking c op, dan komt er $a + 2c + h = c$ of $a + h = c$ (in de dozenalgebra is $2c = 0$, omdat $2c$ een even getal is).

Zo krijgen we dan het nieuwe stelsel:

$$\begin{array}{rclcl} a & & & = c & + h \\ & j & & = c + e \\ g & & & = e & + l \\ & j + m & & = c & + h \\ & j & + o & = e & + l \\ & j + m + o + p & = & & 0 \end{array}$$

Drie van de onbekenden, namelijk a, j, g , staan al in de andere uitgedrukt. Substitueren we deze uitdrukkingen in de andere vergelijkingen, dan vinden we m, o, p , onmiddellijk. Het resultaat is dan: $a = c + h, g = e + l, j = c + e, m = e + h, o = c + l, p = h + 1$. Aan de onbekenden c, e, h, l kunnen we nu op willekeurige wijze de waarden 0 en 1 toekennen, waarna ook a, g, j, m, o, p bekend zijn. We kunnen dit op $2^4 = 16$ manieren doen, zodat er zestien oplossingen geconstrueerd kunnen worden. In de onderstaande figuur 25 is er een afgebeeld: die, welke overeenkomt met $c = e = h = 1$ en $l = 0$.

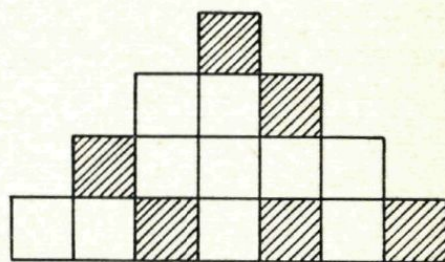


Fig. 25

Oplossingen Denkertjes no. 2

11. Een graph, waarbij in elk hoekpunt vier kanten samenkomen. Deze graph is isomorf met het regelmatig achthvlak (fig. 26 en 27).

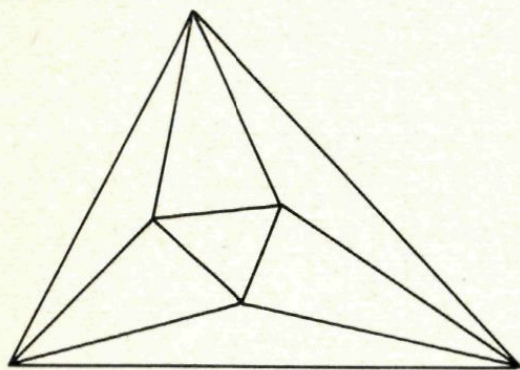


Fig. 26

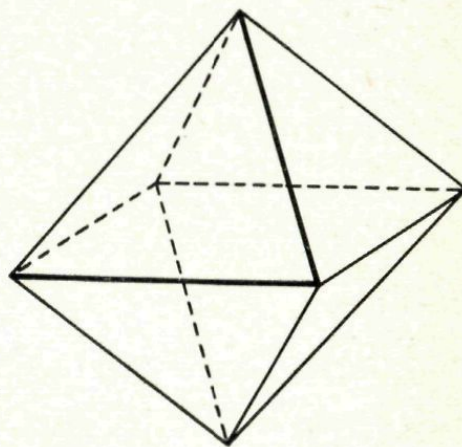


Fig. 27

12. De som is gebroken. Men kan de breuken die van $\frac{1}{2}$ verschillen paarsgewijze samen nemen, zodat de som van de breuken van elk paar gelijk is aan 1. Voorbeeld: $\frac{1}{7} + \frac{6}{7}, \frac{2}{7} + \frac{5}{7}, \frac{3}{7} + \frac{4}{7}, \frac{1}{8} + \frac{7}{8}, \frac{3}{8} + \frac{5}{8}$. Het „totaal generaal” wordt dus een geheel getal plus $\frac{1}{2}$.
13. Q is het spiegelpunt van P ten opzichte van a; R dat van Q ten opzichte van c; S dat van R ten opzichte van b. AB valt langs PS. (Zie fig. 28, bldz. 72).
14. De overblijvende getallen vormen groepen op de volgende manier: 2 – 4,5 – 7, 8, 9, – 11, 12, 13, 14 – 16, 17, 18, 19, 20 – ... (elke volgende groep bevat een getal meer dan zijn voorganger). De eerste 44 groepen bevatten samen $\frac{1}{2} \cdot 44 \cdot 45 = 990$ getallen. Het gevraagde getal bevindt zich dus in de 45-ste groep, wordt in de rij van de natuurlijke getallen voorafgegaan door 45 verwijderde getallen en is 1045.
15. Na zeven „schrikelperioden” van vier jaren, dus in $1964 + 28 = 1992$.

Convex

uit het Latijn. *Convexus* = *gewelfd, bolrond*. Een veelhoek of kromme is convex, als voor elk tweetal punten van het binnengebied het verbindingslijnstuk geheel in dat binnengebied ligt.

Modulus

uit het Latijn. *Modus* = *maat*. Bij de vorming van een restklassensysteem naar een gegeven modulus n geeft men voor ieder geheel getal op, hoeveel het groter is dan het dichtstbij liggende n -voud.

Priemgetal

uit het Latijn. *Primus* = *eerste*. Getallen, die geen andere delers hebben dan 1 en zichzelf werden door de Grieken „eerste getallen” genoemd, waarschijnlijk omdat deze getallen in een rij van hun veelvouden slechts als eerste kunnen optreden.

Reflexief

uit het Latijn. *Reflecti* = *zich omdraaien*. Een relatie R heet reflexief, als aRa steeds juist is.

Relatie

uit het Latijn. *Relatio* = *betrekking*.

Symmetrisch

uit het Grieks. *Symmetria* = *evenmaat*. Een relatie R heet symmetrisch, als uit xRy volgt yRx .

Topologie

uit het Grieks. *Topos* = *plaats*; *logos* = *leer*.

Transitief

uit het Latijn. *Transire* = *overgaan*. Een relatie R heet transitief, als uit aRb en bRc volgt aRc .

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden. *Oplossingen inzenden vóór 15 februari 1965.*

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,— per jaargang. Voor anderen f 3,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J.B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.