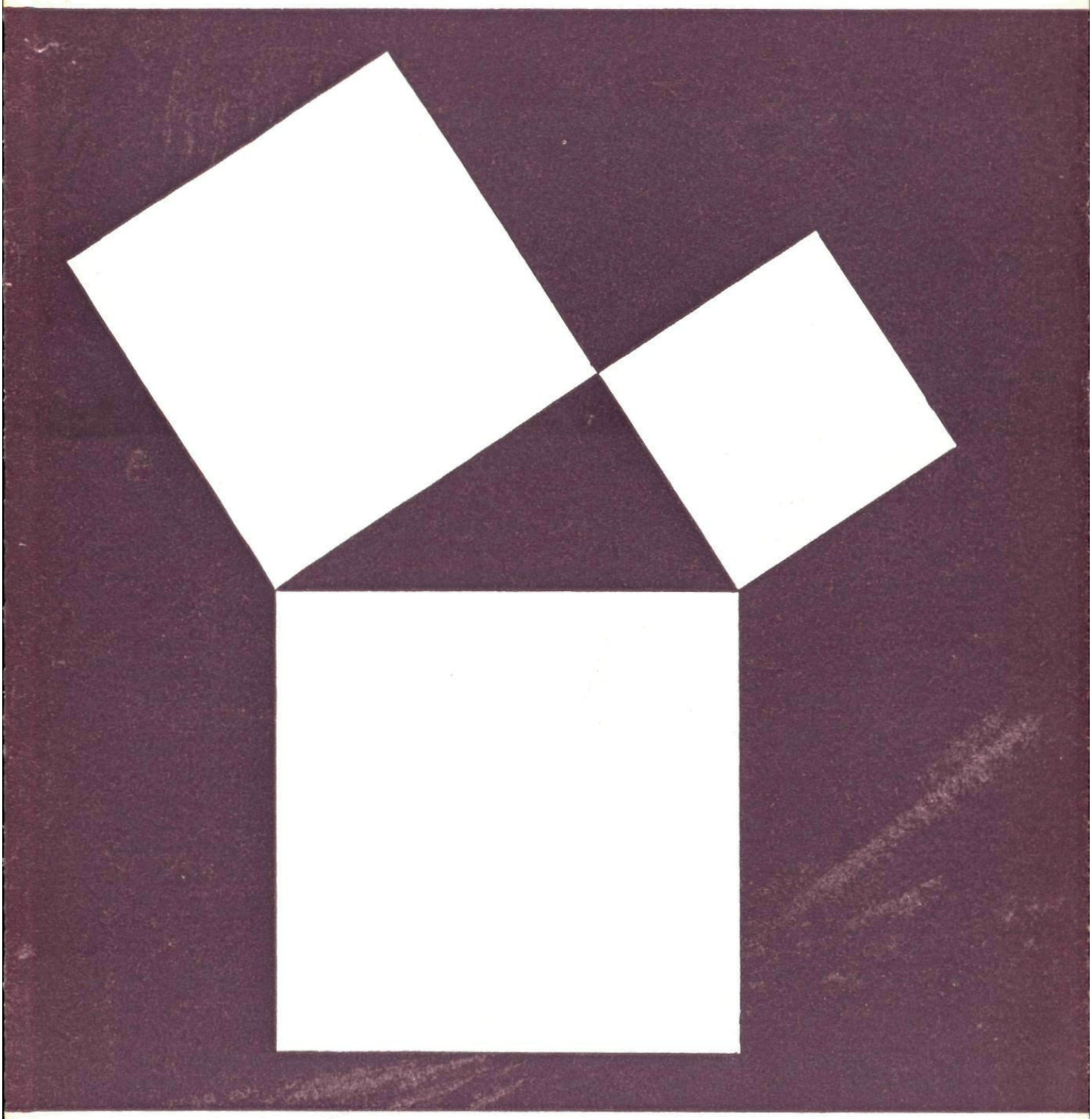
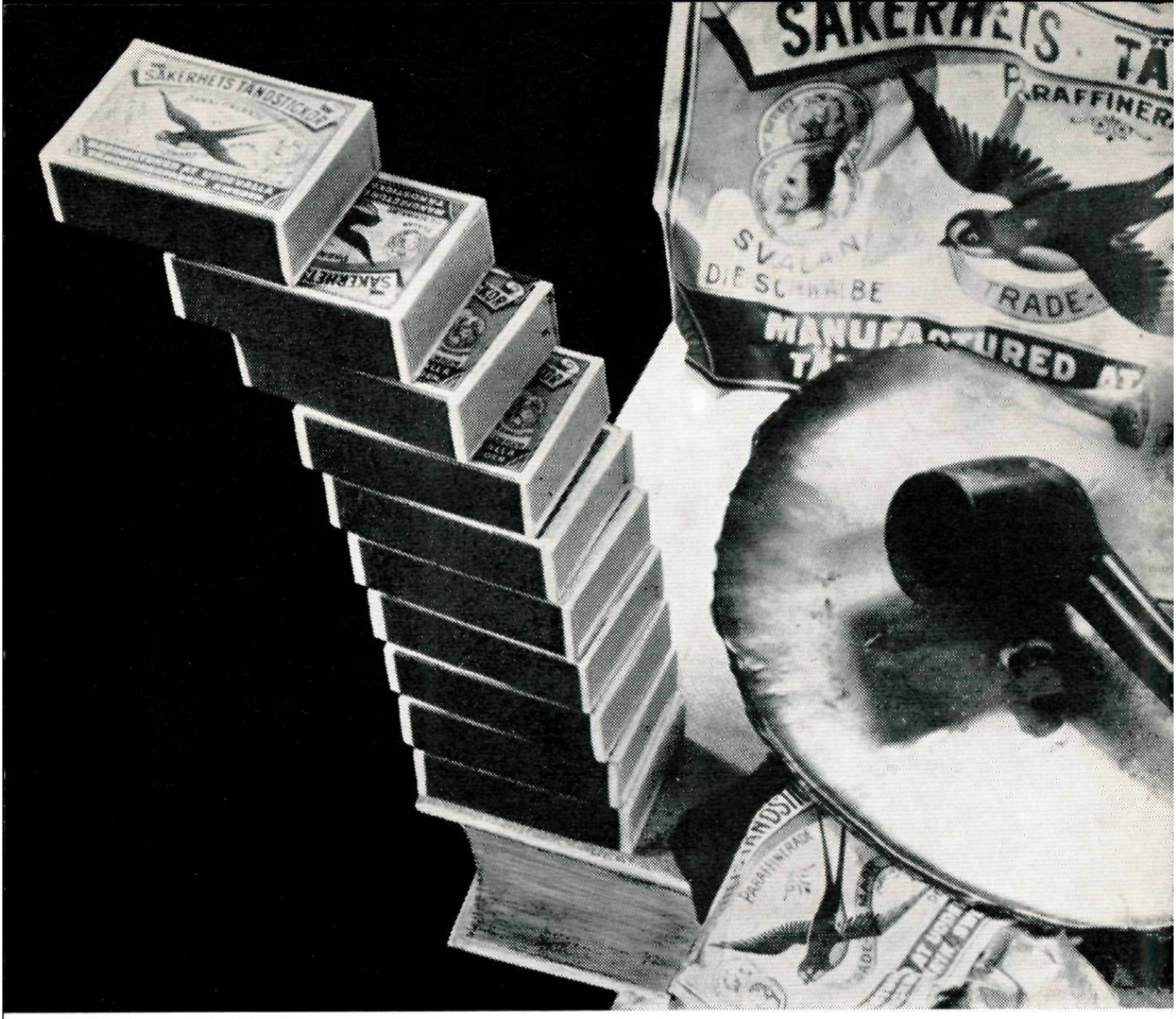
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

4

Vierde jaargang



Nog schever dan de toren van Pisa is deze stapel lucifersdoosjes. Als je ze ziet staan, denk je dat er een truc in het spel moet zijn. Dat het echter een eerlijke zaak is, kun je lezen in het artikel op blz. 82.

pythagoras

jaargang 4 no 4

°Een formule van Euler I

Een kubus heeft 6 zijvlakken, 12 ribben en 8 hoekpunten.
Een regelmatig achtvlak heeft 6 hoekpunten, 12 ribben en 8 zijvlakken. Je ziet een merkwaardige overeenstemming tussen deze aantallen. In fig. 1 wordt onmiddellijk duidelijk, waarom het aantal hoekpunten van het achtvlak gelijk is aan het aantal zijvlakken van de kubus. Immers elk regelmatig achtvlak heeft een „omgeschreven kubus".

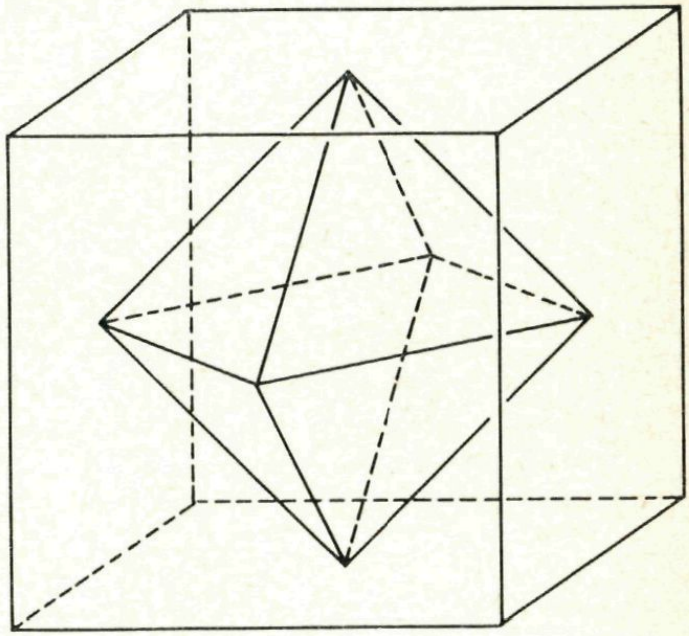


Fig. 1

Het is echter niet onze bedoeling de aantallen ribben, zijvlakken en hoekpunten van allerlei lichamen met elkaar te vergelijken. Er is een verband tussen deze aantallen onderling voor elk lichaam apart. Dus bijvoorbeeld, wanneer we een zeszijdige piramide hebben met (zoals je gemakkelijk kunt natellen) 7 hoekpunten, 7 zijvlakken en 12 ribben, dan hebben die 7 en 7 en 12 wat met elkaar te maken. Duidelijker gezegd: wanneer een lichaam a hoekpunten, b zijvlakken en c ribben heeft, dan is er een relatie tussen die a, b en c, die in een formule uit te drukken is. Deze heet de *formule van Euler*.
Bekijk nu eens goed de aantallen in het onderstaande overzicht en probeer dan de formule van Euler zelf te raden. Op blz. 90 wordt deze afgeleid.

	hoekpunten	zijvlakken	ribben
regelmatig viervlak	4	4	6
regelmatig twaalfvlak	20	12	30
regelmatig twintigvlak	12	20	30
afgeknotte vijfzijdige piramide	10	7	15

Wij bladeren dit nummer even door

Tot ons genoegen hebben we gemerkt, dat oplossers van „Denkertjes" de artikelen over graphen goed gelezen hebben en de terminologie daarvan in hun oplossingen konden toepassen. In dit nummer zien we hoe graphen gebruikt kunnen worden om een formule van EULER te bewijzen. Equivalentierelaties en breuken ontmoeten we in het vervolgartikel over relaties. Een meetkunde met slechts 49 punten, met precies acht rechten door de oorsprong, enz. vinden we als vervolg op de „dozenalgebra". Hoe we een toren kunnen bouwen schever dan de toren van Pisa zien we op de omslagfoto en lezen we in het artikel van die naam. DE WIMECOS-prijsvraag is deze keer gekoppeld aan een artikel, waarin onder meer het Braille-schrift wordt genoemd. Zo is er, hopen we, weer voor elk wat wils.

Uitslag Denkertjes: 93 inzenders, 795 sommen. 417 waren een 10 waard. *Lootprijs:* L. van Stratum, Geldrop. *Ladder:* Thijs Michels, A'dam (288), A. Verbeek, Blaricum (279), J. R. Heringa, A'dam (271), J. Verburg, Utrecht (261), D. Dieks, Amersfoort (255), Chr. Peters, Hillegom (253).
Wimecos-prijsvr.: 1. G. Hulst, Arnhem, 2. A. v. d. Horst, Boxtel, 3. J. Verburg, Utrecht. (Er waren 20 inzendingen).

°Relaties III

In het vorige nummer zagen we, dat relaties verschillende karaktertrekken kunnen hebben. We bestudeerden o.a. relaties, die reflexief of symmetrisch of transitief zijn. Om even weer goed in het onderwerp thuis te raken, beginnen we met een overzicht, waarin voor een aantal relaties het wel of niet bezitten van een karaktertrek vermeld wordt.

Er zijn een groot aantal relaties te noemen, die de drie karaktertrekken tegelijk bezitten. We noemen ze *equivalentierelaties*. Een bijzondere equivalentierelatie vind je in de artikelen, die handelen over het rekenen

	Reflexief	Symmetrisch	Transitief
y heeft x tot broer	neen	neen	ja
y heeft x tot vader	neen	neen	neen
y is geboren te x	neen	neen	neen
$y > x$	neen	neen	ja
$y \perp x$	neen	ja	neen
y woont in hetzelfde huis als x	ja	ja	ja
$y = x$	ja	ja	ja
$y \sim x$	ja	ja	ja
$y \underline{\underline{\sim}} x$	ja	ja	ja
$y \mathbin{//} x$	ja	ja	ja

met „dozen". Dat is nl. de relatie *y ligt in dezelfde doos als x* of officiëler gezegd *y is congruent met x naar de modulus* 7 en kort genoteerd

$$y \equiv x \text{ (mod. 7)}$$

Zo is $38 \equiv 66$ (mod. 7), want ze liggen beide in doos **3**. Deze equivalentierelatie wijst aan elk geheel getal een doos toe, waarin het thuis hoort. Elke equivalentierelatie verdeelt de verzameling, waarin hij gedefinieerd is, in „dozen".
Neem maar eens de verzameling der rechten en daarin de relatie $y \parallel x$. Elke rechte behoort tot een „doos" van rechten, die onderling evenwijdig zijn. We zouden zo'n doos een *richting* kunnen noemen. Elke rechte van zo'n „doos" kan gebruikt worden om deze richting te karakteriseren.
In de wiskunde spreken we niet over dozen, maar over *klassen*. Een richting is dus een klasse van evenwijdige rechten. Door de equivalentierelatie $y \parallel x$ wordt elke rechte in precies één klasse ingedeeld. M.a.w. twee verschillende klassen hebben geen rechte gemeen.
De gelijkvormigheidsrelatie is eveneens een equivalentierelatie. Elke klasse zou hier een *vorm* genoemd kunnen worden. Wanneer twee figuren tot dezelfde klasse behoren, zijn ze gelijkvormig. (Of congruent, als we congruent-zijn als een bijzondere manier van gelijkvormig-zijn opvatten).

We gaan nu eens even rondkijken in de verzameling der breuken. We weten, dat een breuk een getallenpaar is, waarvan het ene (de teller) meestal boven een streep wordt geschreven en het andere (de noemer) onder die streep.
Hier heb je een aantal leden van die verzameling:

$$\frac{3}{9} \quad \frac{15}{45} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{21}{63} \quad \frac{4}{12} \quad \frac{6}{18} \quad \frac{50}{150} \quad \frac{1}{3}$$

In een puzzelrubriek zou de vraag gesteld kunnen worden „Welke breuk hoort in deze groep niet thuis?" Het zal je ongetwijfeld geen moeite kosten die ene te vinden.
$\frac{5}{12}$ behoort tot een andere *klasse* dan de rest van het groepje, nl. tot die klasse, waarvan alle leden geschreven kunnen worden als $\frac{5p}{12p}$, waarin p een geheel getal is, maar niet nul. Alle breuken, die tot eenzelfde klasse behoren zijn equivalent. Elk van de breuken van de klasse kan dienen om het getal te vertegenwoordigen, dat door deze klasse wordt bepaald.

We noemen zo'n klasse een *rationaal* getal. Meestal kiezen we als vertegenwoordiger van de klasse de breuk met een zo klein mogelijke teller en noemer, maar noodzakelijk is dat niet.
Tenslotte nog iets over het woord klasse. Het is je vanzelfsprekend vertrouwd, omdat je ook in een klasse bent ingedeeld. (klasse 5B of 4Gym) Er moet dus een soort equivalentierelatie zijn, die de schoolleiding in staat heeft gesteld je in te delen. Deze is niet zo gemakkelijk onder woorden of in formule te brengen. Misschien zouden we kunnen zeggen, dat de relatie is: Leerling Y heeft evenveel van de talen, wiskunde, aardrijkskunde, enz. geleerd, als leerling X. Ook deze relatie heeft de drie karaktertrekken reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit.

---

31. Bereken de hoeken van een trapezium, dat drie gelijke zijden heeft en door een van zijn diagonalen in twee gelijkbenige driehoeken verdeeld wordt.

32. Met $[x]$ bedoelen we het grootste gehele getal, dat niet groter dan x is. Los de vergelijking $x^3 - [x] = 3$ op.

33. Twee onderling loodrechte lijnen a en b snijden elkaar in S. We beschouwen alle gebroken lijnen ST, die een lengte van 6 cm hebben en die met geen enkele met a of b evenwijdige rechte meer dan één punt gemeen hebben. Bepaal de verzameling van de punten T.

°Binaire codes

Je hebt natuurlijk wel eens van het Morse-alfabet gehoord. Welnu, dan ken je dus al een binaire code.
Een code wordt namelijk *binair* genoemd, wanneer zijn tekens opgebouwd zijn uit *twee* verschillende elementen. Bij het Morse-alfabet zijn dat punten en strepen, of korte en lange fluittonen, of lichtflitsen van korte of lange duur.
Ook het Braille-alfabet (fig. 2) is een binaire code. Voor elke letter worden in het leesvlak zes kleine „veldjes" gereserveerd. Elk daarvan kan op twee manieren gebruikt worden, namelijk als een bobbeltje of gewoon plat. Een blinde lezer bevoelt dat patroon van aanwezige en afwe-

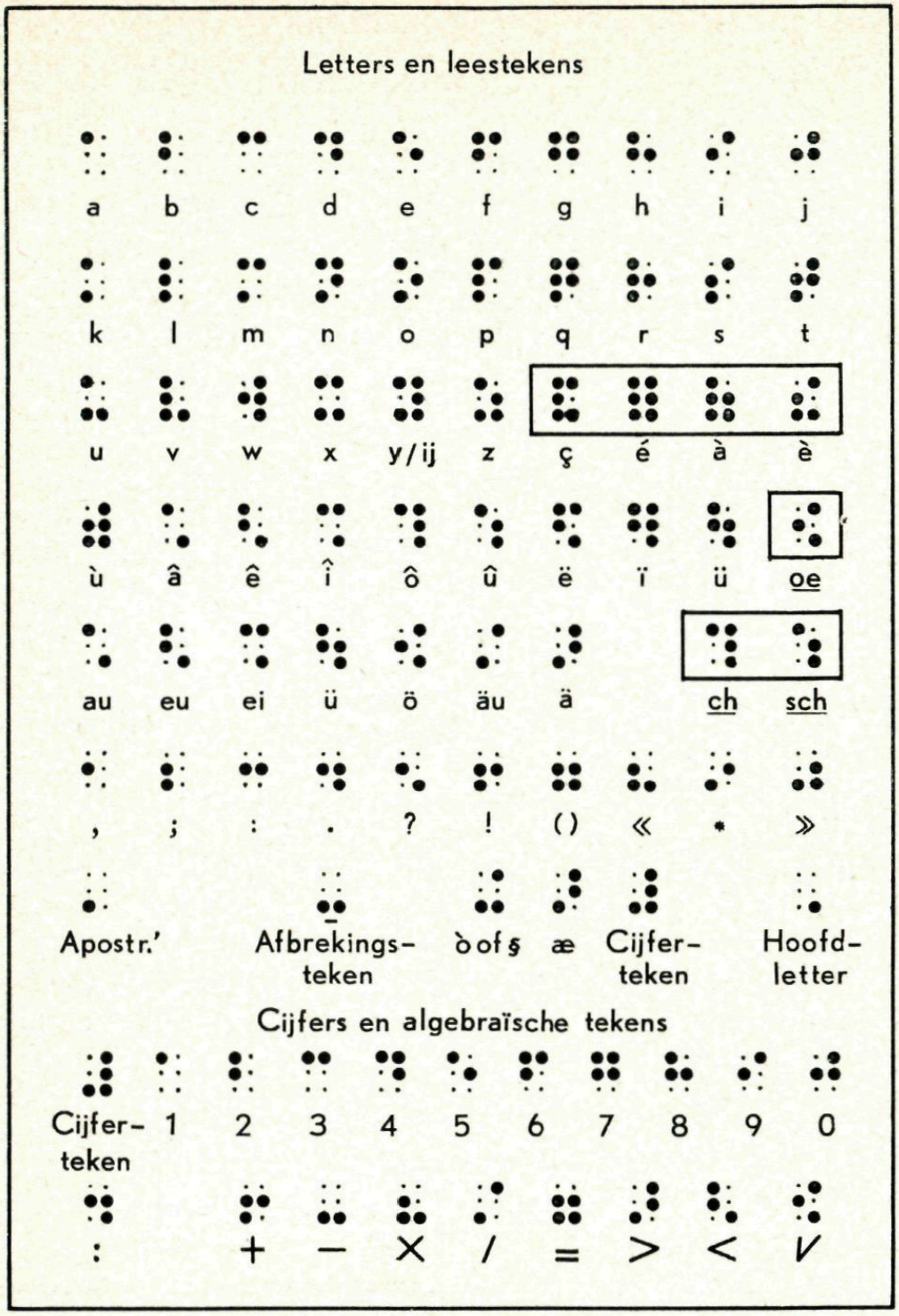


Fig. 2

zige bobbeltjes met zijn vingertoppen. En denk nu niet, dat hij bij elke letter hevig moet nadenken om te weten te komen wat er precies staat. Met de nodige ervaring kan hij er even vlot mee overweg als een geroutineerde telegrafist met zijn „tattattattuut".

Hoeveel verschillende patronen kunnen we met die zes veldjes nu eigenlijk opbouwen?

Een veldje kan op twee manieren gebruikt worden, hebben we gezien:

bol of plat. Zijn er twee veldjes, dan kunnen we er vier patronen mee maken: bol-bol, bol-plat, plat-bol, plat-plat. Nemen we nog een derde veldje in gebruik, dan wordt het aantal patronen weer verdubbeld en wordt dus 2^3. Zo voortgaande komen we tot de conclusie dat er bij zes veldjes 2^6 patronen mogelijk zijn. Alleen is die conclusie ietwat voorbarig, want plat-plat-plat-plat-plat-plat brengt geen enkele informatie over. Het antwoord moet dus $2^6 - 1 = 63$ zijn.
Het alfabet bevat echter slechts 26 lettertekens. Bij Braille heeft men dus de mogelijkheid om vaak voorkomende letterparen of zelfs gehele woorden door een enkel patroon weer te geven.

In grote kantoren gebruikt men soms een rij van bijvoorbeeld vijf lampjes als oproepinstallatie. Elk lampje kan op twee manieren gebruikt worden: aan of uit.

Fig. 3

Er zijn dus $2^5 - 1 = 31$ patronen mogelijk. Elke staffunctionaris kent zijn eigen oproeppatroon. Is hij ergens nodig, maar niet op zijn kamer aanwezig, dan schakelt de centrale dat lichtjespatroon in. Alweer een voorbeeld van een binaire code dus.
En je kent natuurlijk ook wel die geweldige auto's, die aan hun indrukwekkende achtersteven behalve de gewone achterlichten nog vier signaallampen hebben. Daarmee kunnen in principe 15 signalen gegeven worden. Van „ik sla straks linksaf" tot „ik ga opstijgen" toe.

Wij leven in de eeuw van de electronika. Allerlei ingewikkelde apparaten worden bediend door kleine stroomstootjes, die ook al weer bepaalde patronen kunnen vormen. De twee elementen, waaruit zo'n patroon opgebouwd is, zijn dus: wel stroom en geen stroom.
Bij een elektronische rekenmachine stellen deze patronen geen letters voor, zoals de Morse-code, maar cijfers. Nu maken zelfs die elektronische apparaten wel eens fouten. Bijvoorbeeld codeerfouten. En daarover willen we in dit artikel iets vertellen. Wist je bijvoorbeeld, dat er apparaten zijn, die zo geconstrueerd zijn, dat ze codeerfouten zelf kunnen opsporen en .... soms zelf ook kunnen verbeteren?
We denken ons een code, waarin elk patroon uit 5 tekens is opgebouwd. De twee soorten tekens noemen we gemakshalve 0 en 1. Een voorbeeld van zo'n patroon is nu 10111. Dit patroon komt dan in het apparaat voor als een opeenvolging van wel-niet-wel-wel-wel een stroomstootje. Stel je nu voor, dat het tweede stroomstootje om de een of andere reden niet tot stand komt. Dan behandelt het apparaat dus in plaats van 10111 het patroon 10011. Zo iets noemen we nu een codeerfout. En zo'n fout kan tot gevolg hebben, dat iemand een veel te hoge elektriciteitsnota te be-

talen krijgt of dat de krant de uitslag van een belangrijke voetbalwedstrijd verkeerd publiceert. Een ernstige fout dus!
Een eenvoudige (maar niet onfeilbare) manier om deze narigheid te verhelpen, is het toevoegen van een extra-teken aan elk patroon. Dat controle-teken voegt men achter de vijf andere. En men maakt het zo, dat het aantal enen steeds *even* wordt. Natuurlijk betekent dat, dat we een zes-tekens-code gaan gebruiken inplaats van een vijf-tekens-code.

Enkele voorbeelden: 10000 wordt 100001
11010 wordt 110101
01001 wordt 010010

Nu kan men het apparaat zo „dresseren", dat het controleert of het aantal enen wel even is gebleven. Ontstaat er ergens in het apparaat een codeerfout, dan wordt die even later dus geconstateerd, omdat het aantal enen dan oneven is geworden. En men kan het apparaat zo construeren, dat het die fout kenbaar maakt, bijvoorbeeld door te stoppen of door het foutieve patroon op de schrijfmachine te tikken.
Wanneer er echter in een patroon twee codeerfouten ontstaan, dan is het aantal enen toch weer even. En zo'n fout wordt dus niet geconstateerd. Gelukkig zijn dergelijke dubbele fouten nog zeldzamer dan enkele.
Een medewerker van de Amerikaanse Bell-Telephone Maatschappij heeft een nog vernuftiger controlesysteem bedacht. We zullen dat demonstreren aan een voorbeeld van een vier-tekens-code. In dat Amerikaanse systeem bevat elk patroon drie controletekens, zodat er dus een zeven-tekens-code ontstaat.
In de onderstaande voorbeelden staan de drie controletekens achteraan:

1001 wordt 1001100
1101 wordt 1101001
0110 wordt 0110011

Het eerste controle teken maakt het aantal enen op de tweede, derde, vierde en vijfde plaats even: in 1001 . . . staat een enkele een onderstreept, zodat de stip op de vijfde plaats een een moet worden om een even aantal te krijgen; in 1101 . . . zijn al twee enen onderstreept en dat is een even aantal, zodat er op de vijfde plaats een nul moet komen om geen oneven aantal te verkrijgen: in 0110 . . . staat al een even aantal enen onderstreept en op de stip moet dus ook een nul verschijnen.

Het tweede controleteken doet hetzelfde met de eerste, derde, vierde en zesde plaats:

1001 . . . wordt 1001 . 0 .
1101 . . . wordt 1101 . 0 .
0110 . . . wordt 0110 . 1 .

Het derde controleteken tenslotte maakt het aantal enen op de plaatsen nummer een, twee, vier en zeven tot een even aantal.

1101 . . . wordt 1101 . . 1

Evenals bij het eenvoudige systeem van hierboven kan men nu het apparaat zelf telkens laten controleren of de drietallen enen nog steeds even zijn gebleven. Maar . . . ditmaal is er meer dan dat alleen. Want als er één codeerfout in een patroon zit, dan blijkt uit het resultaat van die drie controles ook meteen *waar* die fout zit.
Laten we eens een foutief patroon bekijken, bijvoorbeeld 1101100.

De eerste controle levert: 1101100 oneven
De tweede controle levert: 1101100 even
De derde controle levert: 1101100 oneven

Dat er een fout is, blijkt uit het feit, dat er bij twee van de drie controles een oneven aantal enen wordt gevonden. Nemen we nu aan, dat er slechts één fout is, dan staat die fout op de plaats, die wel bij de eerste en derde controle bekeken wordt, maar niet bij de tweede controle.

Bij de eerste controle worden bekeken de plaatsen 2, 3, 4, 5.
Bij de tweede controle worden bekeken de plaatsen 1, 3, 4, 6.
Bij de derde controle worden bekeken de plaatsen 1, 2, 4, 7

De fout bevindt zich dus op plaats nummer 2. Het patroon moest zijn 1001100.
Het vernuftige van dit systeem is hierin gelegen, dat *elke* enkelvoudige fout op deze manier gelocaliseerd kan worden. En daarom is het mogelijk het apparaat zo te programmeren, dat het al dit werk alleen doet, het verbeteren van de fout incluis.
Nog een kleine opmerking tot slot: de drie controles leveren een resul-

taat, dat eigenlijk zelf ook een binaire code is, nl. een drie-tekens-code. De twee soorten tekens zijn de woorden „even" en „oneven". Zulk een code heeft $2^3 - 1 = 7$ patronen. Dat is in overeenstemming met het feit, dat er zeven verschillende fouten mee gelocaliseerd kunnen worden; het te controleren patroon heeft immers zeven plaatsen.

Wimecos-prijsvraag III

Lees het artikel over Binaire Codes aandachtig door en probeer dan de volgende opdrachten uit te voeren:

a. Toon aan, dat *elke* enkelvoudige fout gevonden en gecorrigeerd kan worden met het controlesysteem uit het laatste voorbeeld (vier-tekens-code met drie controletekens).

b. Contrueer een soortgelijk controlesysteem voor een vijf-tekens-code met vier controletekens. Zo'n controlesysteem kan $2^4 - 1 = 15$ fouten verwerken terwijl de te controleren patronen slechts 9 plaatsen hebben. Kan je nu bereiken, dat er ook sommige dubbele fouten mee verwerkt kunnen worden?

---

34. Onderzoek de juistheid van de volgende twee beweringen:
    a. Als alle zijvlakken van een veelvlak vierhoeken zijn, dan is het aantal van zijn ribben het dubbele van het aantal van zijn zijvlakken.
    b. Als het aantal ribben van een veelvlak het dubbele is van het aantal van zijn zijvlakken, dan is elk zijvlak een vierhoek.

35. Een lange, dunne draad van 10 meter lengte moet verknipt worden tot 100 stukjes van een decimeter lengte. Dat kan natuurlijk gebeuren, door 99 keren te knippen. Dit aantal kan echter aanzienlijk verminderd worden door meerdere stukken van die draad tegelijk door te knippen. Hoe vaak moet men minstens knippen om het doel te bereiken?

36. Bewijs, dat het onmogelijk is een vierkant te vormen uit 25 congruente legpuzzelstukjes van de hiernaast getekende vorm (fig. 4).

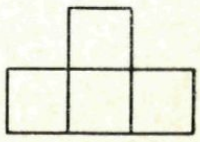


Fig. 4

°Nog schever dan de toren van Pisa

Die scheve toren van lucifersdoosjes op de foto (binnenzijde omslag) maakt een onwerkelijke indruk, als je die zo op de rand van mijn bureau ziet staan. Het bovenste doosje steekt meer dan $1\frac{1}{2}$ maal de lengte van één doosje over de rand. Is het een truc?
Als je de doosjes aan elkaar plakt en het onderste doosje op het houten blad, is het natuurlijk een koud kunstje. Maar ze zijn echt niet vastgeplakt. Het zijn lege lucifersdoosjes, die los op elkaar gestapeld zijn.

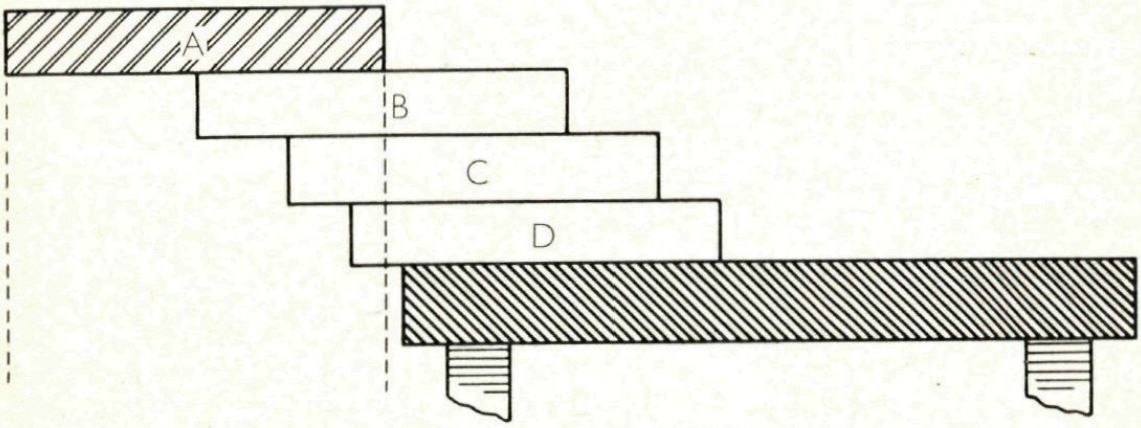


Fig. 5

°°Figuur 5 toont een stapeling van 4 doosjes. Het bovenste steekt nu juist even boven de tafelrand uit en voor wie reeds zijn eerste schreden op het pad der mechanica heeft gezet, is het niet moeilijk in te zien, dat deze stapeling werkelijk stabiel is.
Laten we beginnen met één blokje (het bovenste) In fig. 6*a* is in het midden bij A de kracht getekend, waarmee het blokje op de ondergrond drukt. Als we het in A ondersteunen is het in evenwicht.

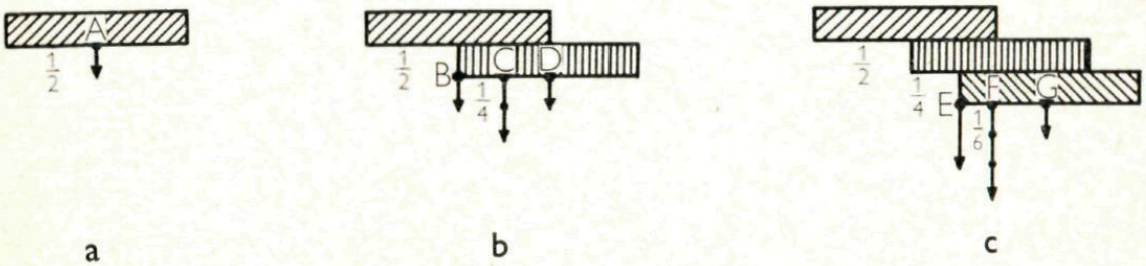


Fig. 6

In fig. 6*b* zien we het bovenste blokje bij A ondersteund door het tweede blokje, dat even groot en even zwaar is. De neerwaartse kracht van het bovenste blokje hebben we nu naar beneden verplaatst naar B. Bij D is de kracht getekend, waarmee het tweede blokje op de ondergrond drukt.

De resultante van de krachten bij D en B vinden we bij C. C ligt midden tussen B en D. Het derde blokje schuiven we nu onder de andere twee tot het deze bij C ondersteunt. (fig. 6*c*) Let nu weer op de krachten bij E en G. De resultante daarvan is getekend bij F en volgens een bekende wet van de mechanica is EF : FG = 1 : 2. Dus is EF gelijk aan de lengte van $\frac{1}{6}$ blokje.
Letten we nu eens op de overstekende delen van de blokjes, dan zien we, dat deze achtereenvolgens zijn: $\frac{1}{2}$ blokje, $\frac{1}{4}$ blokje, $\frac{1}{6}$ blokje (en als je zelf verder gegaan bent, zul je hebben gezien: $\frac{1}{8}$ blokje, $\frac{1}{10}$ blokje, $\frac{1}{12}$ blokje, enz.) Wanneer we op deze wijze vier blokjes op elkaar stapelen, kunnen we gemakkelijk uitrekenen, dat het bovenste nu geheel buiten de tafelrand uitsteekt. Immers

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} = 1\tfrac{1}{24}.$$

We kunnen ons afvragen: hoe ver kan het bovenste blokje maximaal over de tafelrand steken?
We moeten daarvoor de rij $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \ldots$ sommeren. Dit kan slechts als de som van n termen van deze rij een limiet heeft. Je zult wel weten, dat bijvoorbeeld de rij

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \ldots$$

sommeerbaar is en dat de limiet, waartoe de som van n termen nadert bij onbegrensd toenemende n, gelijk aan 1 is.
Nu is in het geval van de rij, die we bij de overstekende blokjes vinden, daarvoor te schrijven

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots)$$

zodat deze rij sommeerbaar is, als dat het geval is met de *harmonische rij*, die tussen de haken vermeld staat. Maar ... de harmonische rij is *niet* sommeerbaar. Dit is het beste in te zien, als we de termen in groepen samen nemen:

$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}) + (\tfrac{1}{9} + \ldots + \tfrac{1}{16}) + \ldots$$

Elke groep termen tussen twee haken heeft een som, die groter is dan $\frac{1}{2}$ en zo is het mogelijk, door genoeg termen te nemen, de som boven elke waarde te laten stijgen.
Wat volgt daar nu uit voor de maximale afstand van het bovenste blokje tot de tafelrand?

Als je zelf blokjes gaat stapelen, neem dan geen lucifersdoosjes, want de onder- en bovenkant daarvan is te hobbelig. Heel goed gaat het met een nieuw stel speelkaarten. (fig. 7) Begin altijd met de „top van de toren".

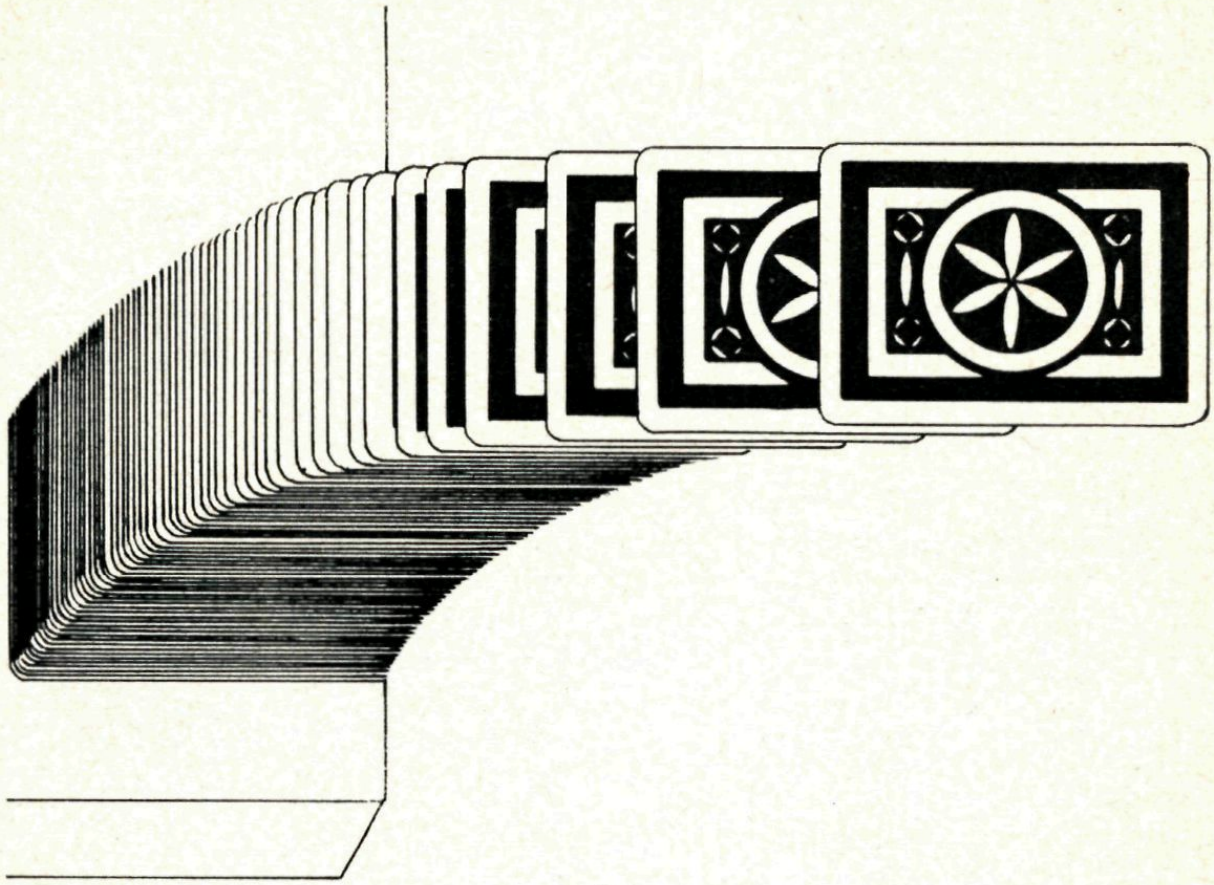
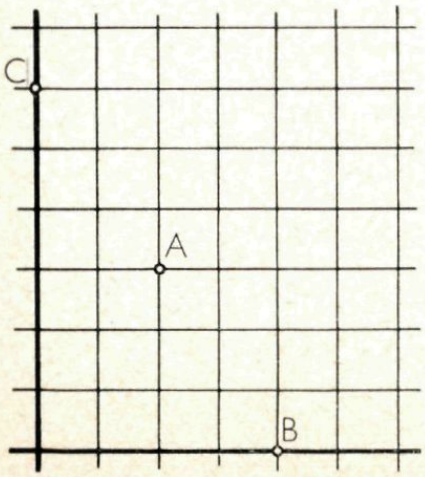


Fig. 7

°°Een merkwaardige algebra- en meetkundeles III

door F. v. d. Blij, Bilthoven

We zijn nu toegekomen aan de meetkundeles. In het voorgaande maakten we kennis met een rekenkunde en algebra met slechts zeven „getallen". We zullen nu zien, dat hierbij een meetkunde behoort met slechts 49 punten.



We weten, dat in de algebra en in de analytische meetkunde de plaats van een punt ten opzichte van twee coördinaatassen wordt gegeven door een getallenpaar (x, y). Zo zien we in fig. 8 de punten A(2, 3), B(4, 0) en C(0, 6).

Fig. 8

We kunnen zeggen, dat bij elk getallenpaar, dat we vormen, een punt aangewezen kan worden, dat dit paar als coördinaten heeft. Bij het paar (2, 3) behoort een ander punt dan bij het paar (3, 2). We zeggen daarom, dat we te maken hebben met *geordende* getallenparen.
In onze dozenalgebra kunnen we ook geordende paren vormen. De leden van het paar zijn dan dozen. Of anders gezegd: Het zijn restklassen naar een zekere modulus. Nemen we nu weer als modulus het getal 7, dan kunnen we 49 paren vormen. Voegen we aan elk dezer paren een punt van het vlak toe, dan zijn er precies 49 punten. Alle zijn dan roosterpunten. Dat wil dus zeggen, dat in fig. 9 *alle* punten, die in deze meetkunde voorkomen zijn getekend en dat er geen andere zijn.

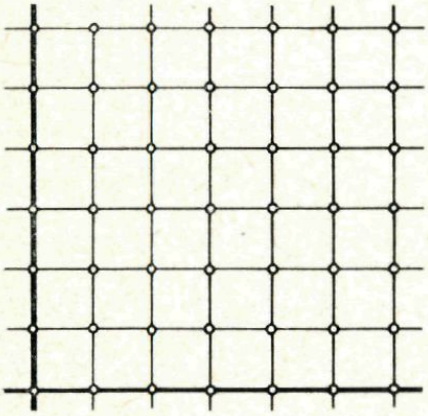


Fig. 9

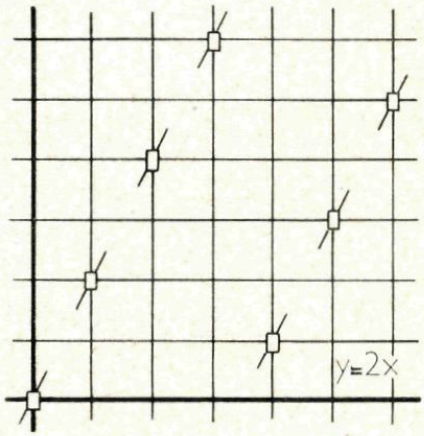


Fig. 10

Rechten door de oorsprong.

In de gewone wiskunde hebben we gezien, dat de verzameling getallenparen, die voldoen aan $y = 2x$, afgebeeld kan worden op een rechte lijn door de oorsprong met de richtingscoëfficiënt 2. Er zijn dan oneindig veel getallenparen elk behorende bij een der oneindig vele punten van de genoemde rechte.
Ook in onze dozenalgebra zijn er paren, die voldoen aan $\boldsymbol{y} = \mathbf{2}\boldsymbol{x}$. Het zijn er nu echter maar zeven, nl.

(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 1), (5, 3) en **(6, 5)**.

In fig. 10 staan ze alle zeven getekend.

Naar analogie van de gewone wiskunde zullen we nu deze verzameling van 7 punten ook een rechte lijn noemen.

In onze „dozenmeetkunde" zijn precies acht rechten, die de oorsprong als punt bevatten. Dat zijn nl. de zeven rechten $y = mx$ met $m = 0$ tot en met 6 en de y-as, waarvan de vergelijking is $x = 0$. In fig. 11 zie je de rechte $y = 5x$ ofte wel $y + 2x = 0$ afgebeeld.

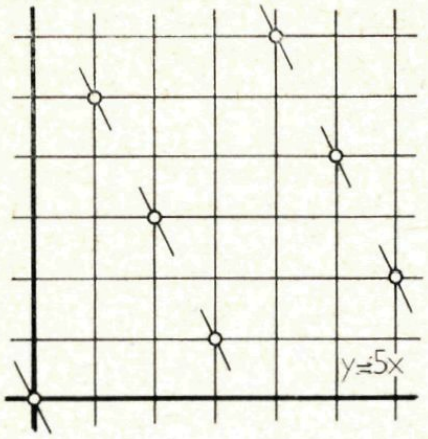


Fig. 11

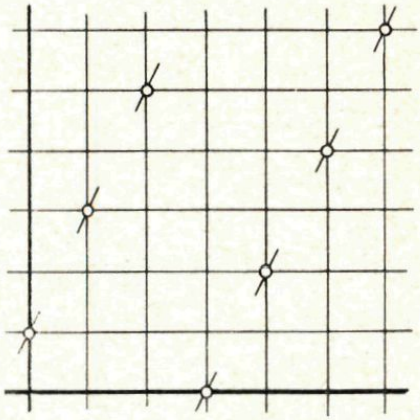


Fig. 12

Willekeurige rechten in de dozenmeetkunde

We noemen de verzameling punten (x, y), waarbij x en y voldoen aan de vergelijking

$$ax + by + c = 0$$

een rechte lijn.
Wanneer $a \neq 0$ kunnen we bij iedere x een passende y vinden. Op iedere rechte liggen dan dus weer zeven punten. Zo liggen op de lijn $3x + 2y + 5 = 0$ de punten $(0, 1)$; $(1, 3)$; $(2, 5)$; $(3, 0)$; $(4, 2)$; $(5, 4)$ en $(6, 6)$. In fig. 12 vind je deze lijn.
Vergelijk je deze met de rechte, die is getekend in fig. 10 dan dringt zich de gedachte op, dat we deze twee rechten evenwijdig zouden kunnen noemen. Zij hebben in ieder geval geen snijpunt. In de analytische meetkunde hebben we de evenwijdigheid leren herkennen aan de gelijke richtingscoëfficiënten. Dat lijkt er hier in het eerste gezicht niet op. Maar als je de vergelijking van de rechte van fig. 12 schrijft in de vorm $y = mx + n$, dan zie je toch zo iets als gelijke richtingscoëfficiënten optreden. De herleiding van de vergelijking kan als volgt plaats vinden. Tel bij beide leden van $3x + 2y + 5 = 0$ op $4x + 2$. Dan wordt de vergelijking $2y = 4x + 2$, waarvoor we nog kunnen schrijven $y = 2x + 1$. Is in de vergelijking $ax + by = c$ de coëfficiënt a gelijk aan 0, dan kunnen we bij iedere x voor y het getal $c : b$ kiezen. Ook dan heeft dus de rechte weer zeven punten. Hoe loopt de grafiek daarvan?

Het snijpunt van twee rechten.

We willen van de rechten $x + y + 4 = 0$ en $2x + 3y + 4 = 0$ het snijpunt bepalen. We gebruiken daartoe dezelfde methode als in de gewone algebra.
We lossen dus het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} x + y + 4 &= 0 \text{ op.} \\ 2x + 3y + 4 &= 0 \text{ op.} \end{aligned}$$

Daartoe vermenigvuldigen we de eerste vergelijking met **2**.
Daarna trekken we ze van elkaar af:

$$\begin{array}{r} 2x + 2y + 1 = 0 \\ 2x + 3y + 4 = 0 \\ \hline 6y + 4 = 0 \end{array} \text{ af}$$

$$\begin{aligned} 6y &= 3 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Vullen we dit in de vergelijking

$$x + y + 4 = 0,$$

dan vinden we $x = 6$.
Het blijkt dus dat het snijpunt van de rechten is het punt $(6, 4)$. Zie nu fig. 13, waarin dit eveneens blijkt.
In het volgende artikel zullen we in deze meetkunde „kegelsneden" bestuderen.

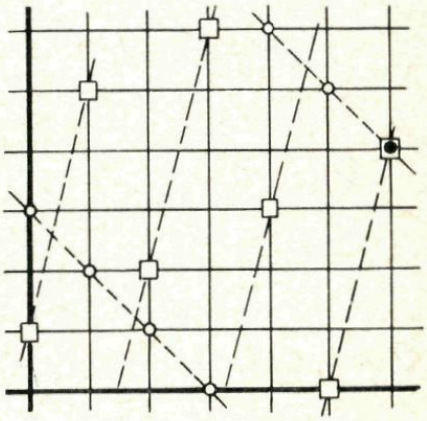


Fig. 13

---

37. Op een overigens leeg schaakbord wil men een dame van een gegeven veld naar een ander gegeven veld brengen. Als dat niet in één zet kan, dan kan het altijd in twee zetten gebeuren, en zelfs op meerdere manieren. Op hoeveel manieren maximaal?
(Een dame mag horizontaal, vertikaal en diagonaalsgewijs zetten)

38. Hoeveel verschillende paren natuurlijke getallen x en y voldoen er aan de vergelijking $x^2 - y^2 = 97 \cdot 103$.

39. a, b, c, d zijn gehele getallen en voor elke gehele waarde van x is $ax^3 + bx^2 + cx + d$ een vijfvoud. Toon aan, dat a, b, c, d vijfvouden zijn.

40. In een driehoek wordt de ingeschreven cirkel beschreven. De raakpunten van die cirkel aan de zijden van de driehoek zijn hoekpunten van een nieuwe driehoek, die gelijkvormig is met de oorspronkelijke. Bereken de hoeken van de oorspronkelijke driehoek.

De vermenigvuldigstroken van Genaille

door A. J. Poelman te Bennekom

Al eeuwen geleden heeft men gezocht naar middelen om het cijferwerk te vergemakkelijken of te mechaniseren. We hoeven niet alleen te denken aan het uitvinden van kostbare of ingewikkelde rekenapparaten (in 1623 werd door de Tubinger Professor Schickard al een rekenmachine vervaardigd, terwijl de beroemde Franse wiskundige Pascal in 1642 zijn optel- en aftrekmachine construeerde). We kunnen ook denken aan eenvoudige hulpmiddelen, die de rekenaar gemakkelijk zelf kan maken.

Een voorbeeld van een eenvoudig hulpmiddel zijn de vermenigvuldigstroken, die door de Franse ingenieur Genaille in 1891 op een congres werden gedemonstreerd.
Op de bladzijde hiernaast (fig. 14) zien we een afbeelding van zulke stroken. Ze vormen niet één kaart, maar bij de dubbele lijnen zijn ze los van elkaar, zodat ze onderling verwisseld kunnen worden. De strook helemaal links heet indexstrook. We zullen deze de strook I noemen. De andere tien zijn genummerd van 0 tot en met 9. Verder zien we, dat op deze stroken in fig. 14 tien horizontale banen zijn aangebracht, die op strook I genummerd zijn van 0 tot en met 9.
In elk der banen staan op strook I dezelfde getallen als op strook 0. Het is verder heel gemakkelijk in elke baan de getallen op de stroken aan te brengen, omdat de getallen 0 tot en met 9 zich steeds herhalen.
Men kan de stroken gebruiken om een getal met een factor tussen 1 en 10 te vermenigvuldigen. Een voorbeeld daarvan zien we in fig. 15. Wanneer we 673 met 8 willen vermenigvuldigen, leggen we de stroken 6, 7 en 3 in deze volgorde naast elkaar. Strook I wordt aan de linkerkant gelegd en we kijken alleen in baan 8. Daarom is in fig. 15 ook alleen maar die baan

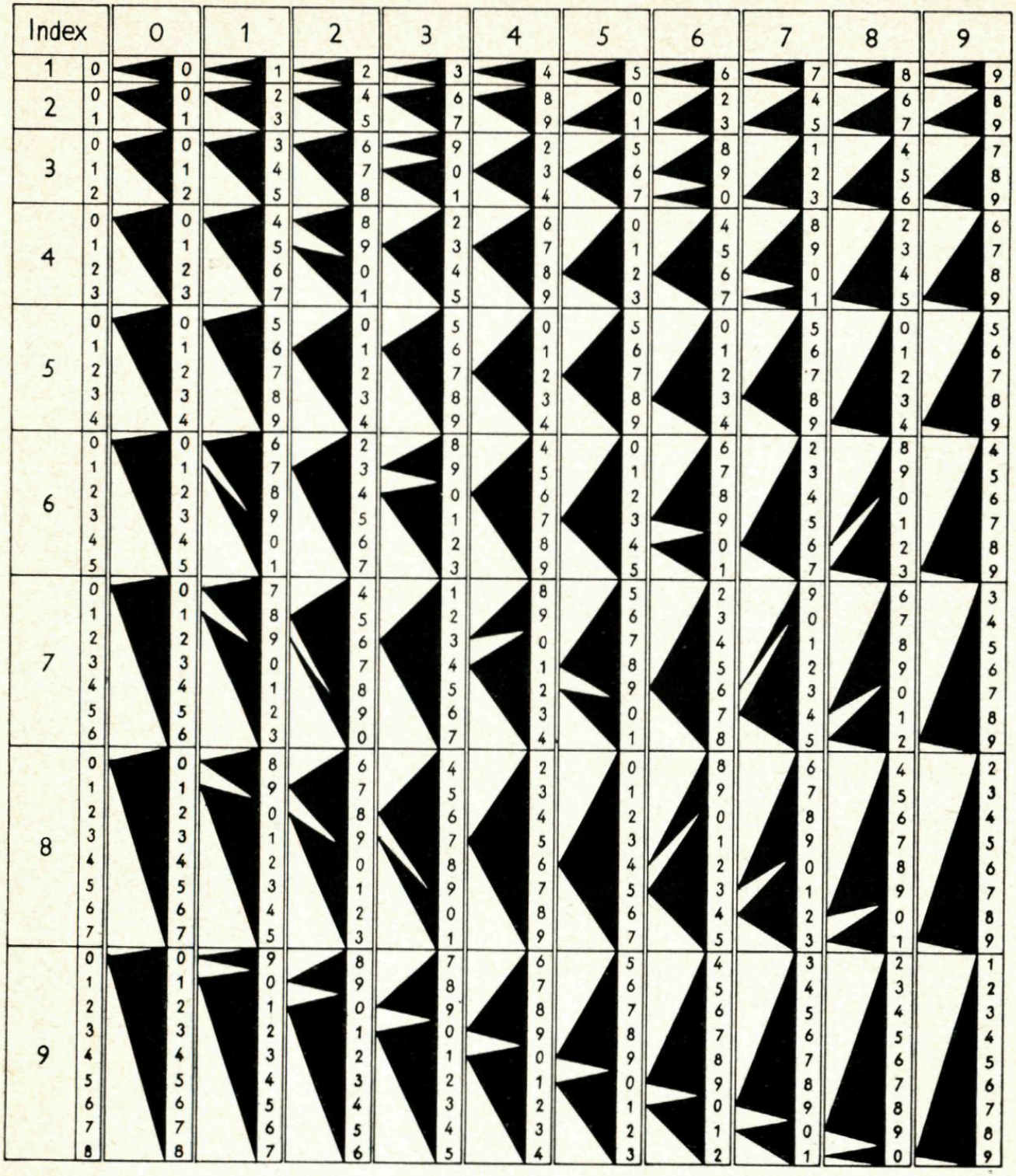


Fig. 14

afgebeeld. Het antwoord van de vermenigvuldiging begin je nu achteraan af te lezen, nl. met het bovenste cijfer van strook 3, dat is een 4. De zwarte driehoek, waar deze 4 achter staat, wijst met zijn punt naar de 8 op strook 7. Dus is 8 het voorlaatste cijfer van het antwoord. De zwarte driehoek, waar 8 achter staat, wijst naar de 3 op strook 6 en de driehoek tenslotte, waar deze 3 achter staat, wijst naar de 5 op strook I. Het antwoord is dus 5384.

De verklaring van dit alles is heel eenvoudig en men mag wel bewondering hebben voor de man, die op zo'n slimme wijze in beeld heeft gebracht, wat we gewoonlijk bij het vermenigvuldigen doen.
Als we de vermenigvuldiging $8 \cdot 673$ maken, beginnen we met $8 \cdot 3 = 24$. We schrijven 4 op en onthouden 2. De 4 staat rechts boven en het 2 onthouden vindt plaats doordat de zwarte driehoek op de volgende strook wijst naar de derde plaats van boven. De eerste plaats van boven nl. hoort bij 0 onthouden, de tweede plaats bij 1 onthouden, de derde bij 2 onthouden, enz. Je kunt nu gemakkelijk nagaan hoe bij de rest van de vermenigvuldiging telkens het „onthouden" door de driehoek wordt „geregeld". In fig. 15 zien we in elk der stroken twee driehoeken. Kijk maar in strook 6. De ene driehoek wijst naar de 4 op strook I, de andere naar de 5. 8 maal 6 nl. is 48. Moet daarbij nu nog 0 of 1 opgeteld worden dan blijft het eerste cijfer een 4. Zodra er echter van de voorafgaande vermenigvuldiging nog 2 of meer te onthouden was, krijgen we 50 of meer en dan moet dus de 5 op strook I aangewezen worden.

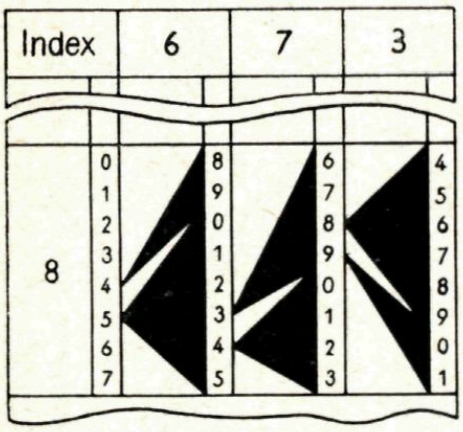


Fig. 15

Willen we 673 vermenigvuldigen met 528, dan hoeven we de stroken niet te verleggen. We lezen eenvoudig de antwoorden af, die we krijgen bij vermenigvuldiging met 5, 2 en 8. We zorgen ervoor die antwoorden op de juiste manier onder elkaar te schrijven en hoeven dus alleen maar op te tellen.
Natuurlijk moet een hulpmiddel als dit het afleggen tegen een rekenmachine en zelfs tegen een rekenliniaal, al geeft deze laatste de resultaten slechts met een beperkte nauwkeurigheid.

°Een formule van Euler II

Je zult bij het bestuderen van het overzicht op blz. 73 wel opgemerkt hebben, dat het aantal r der ribben, het aantal z der zijvlakken en het aantal h der hoekpunten van de daarin genoemde lichamen, voldoen aan de betrekking

$$h + z = r + 2$$

Dit is de formule van Euler. Voor het bewijs daarvan maken we gebruik van graphen. Al in het vorige nummer zagen we, dat de graph van

fig. 16 isomorf is met een regelmatig twaalfvlak. Het twaalfvlak en de graph hebben evenveel hoekpunten en kanten. De kanten van de graph sluiten vijfhoeken in. Het aantal daarvan is één kleiner dan het aantal zijvlakken van het twaalfvlak. Immers we konden de graph „maken" door uit het twaalfvlak een zijvlak weg te snijden en dan de vijfhoek, die dit zijvlak begrensde, zo uit te rekken (en daarbij zonodig de andere zijvlakken en ribben zo te laten inkrimpen), dat alle zijvlakken in één plat vlak kwamen te liggen. Voor de graph moet dus gelden de formule

$$h + z = r + 1.$$

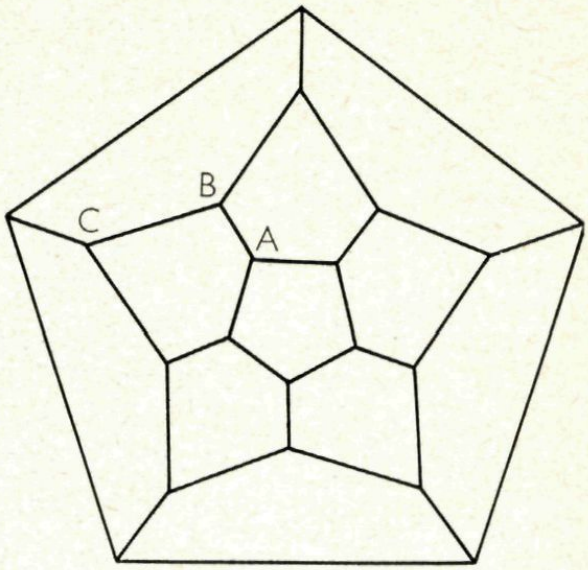


Fig. 16

We kunnen de formule van Euler nu gaan bewijzen door het aantal kanten en hoekpunten van een vlakke graph te gaan tellen. We moeten daarvoor die vlakke graphen bekijken, die isomorf zijn met een der lichamen, die in het overzicht op blz. 73 genoemd zijn. Deze graphen bestaan uit een net van veelhoeken, die telkens met een zijde aan elkaar grenzen. Het begrip veelhoek moeten we daarbij wat ruimer nemen dan we gewend zijn en we moeten ook toelaten dat deze als zijden hebben delen van krommen. Een goed voorbeeld van zo'n graph is de kaart van Nederland, waarin de provinciegrenzen zijn getekend. De provincies zijn dan de veelhoeken.
Pas op, dat er zich niet zulke bijzonderheden mogen voordoen in dit net, als we aantreffen bij de enclave Baarle-Nassau. We eisen dus, dat geen der veelhoeken geheel door een andere omsloten wordt.
Nu komt het bewijs van de formule van EULER; het is een „sprongbewijs". (Zie blz. 7 van deze jaargang)

1. Voor een veelhoekennet bestaande uit slechts één veelhoek geldt de formule

$$h + z = r + 1$$

Voor één veelhoek is nl. $h = r$ en $z = 1$.
Ga het maar na in fig. 17.
(r stelt in dit geval het aantal kanten voor)

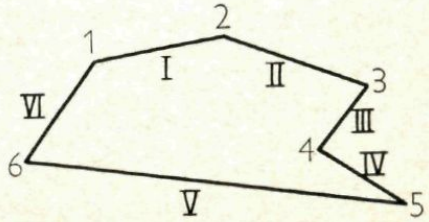


Fig. 17

2. Veronderstel nu, dat deze formule geldt voor een veelhoekennet bestaande uit n veelhoeken. We gaan bewijzen, dat hij dan ook geldt voor een net bestaande uit $(n + 1)$ veelhoeken.
Wanneer we in een veelhoekennet bestaande uit $(n + 1)$ veelhoeken één ribbe weglaten (zoals bijv. de ribbe CE in fig. 18) dan krijgen we een net met n veelhoeken. We veronderstellen dus, dat voor dat net de betrekking van Euler geldt.

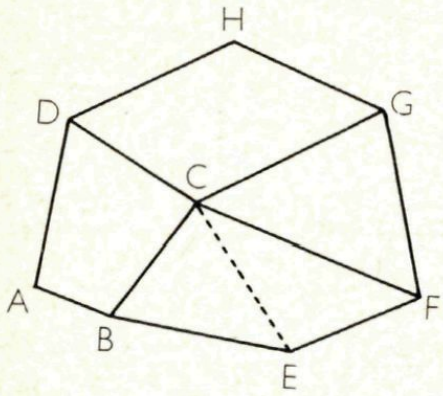


Fig. 18

Tekenen we nu de weggelaten ribbe er weer in, dan blijft h (het aantal hoekpunten) gelijk, z (het aantal zijvlakken) vermeerdert met één en r (het aantal ribben) vermeerdert met één. In de betrekking van Euler worden beide leden dus 1 groter, zodat de betrekking nu ook voor het veelhoekennet met $(n + 1)$ veelhoeken geldt.

3. Nu komt de toepassing van het principe van de volledige inductie: Omdat in het eerste deel van het bewijs de juistheid is gebleken voor $n = 1$, is de betrekking ook juist voor $n = 2$, volgens het tweede deel van het bewijs. Maar dan ook voor $n = 3$, enz.
Voor elk lichaam, waarvoor een vlakke graph te maken is, die een veelhoekennet is, zoals we besproken hebben, geldt de betrekking

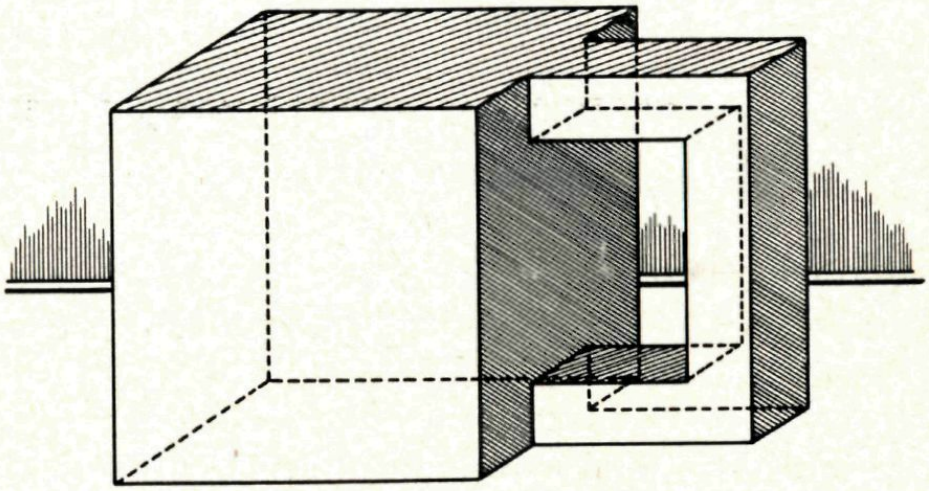


Fig. 19

van Euler. Er zijn echter ook lichamen, waarvoor dat niet het geval is. Een voorbeeld daarvan vind je in fig. 19.
Je zou kunnen zeggen, dat in deze figuur een „kubus met oor" is afgebeeld. In dit lichaam is $h = 24$, $z = 12$ en $r = 36$. Dit lichaam kunnen we niet zo vervormen, dat al zijn hoekpunten en ribben op

een bol komen te liggen. Het is niet isomorf met een bol. Wel met een opgeblazen autobinnenband (wiskundig gezegd een torus). En de topologische eigenschappen van een bol en een torus zijn zeer verschillend. Het driebronnenprobleem is wel op een torus, niet op een bol oplosbaar. (Zie deze jaargang, blz. 25).

Oplossingen Denkertjes

21. Uit DE = EA + AB + BC + CD blijkt dat de punten ABC op het lijnstuk DE liggen De afstand AD bedraagt DE − AE = 523 − 13 = 510.

22. De rechten m en n zijn evenwijdig of staan loodrecht op elkaar (in het laatste geval is een van de punten P of Q het snijpunt van m en n).

23. Uit $xy = 10(x + y)$ volgt $y = \dfrac{10x}{x - 10}$. Hieruit leiden we af, dat de volgende (x, y)-paren aan de eis voldoen: (11, 110), (12, 60), (14, 35), (15, 30), (20 20).

24. De drie gevraagde natuurlijke getallen zijn 39, 760, 419. Bij de oplossing wordt gebruikt: als $\dfrac{x}{19} - \dfrac{x}{20}$ groter is dan 1 (resp. 2), dan ligt er minstens een natuurlijk getal resp. een tweetal natuurlijke getallen) tussen $\dfrac{x}{20}$ en $\dfrac{x}{19}$.

25. Zie figuur 20. De gevraagde verzameling bestaat uit de punten van het grijze gebied, die niet op de rand daarvan liggen.

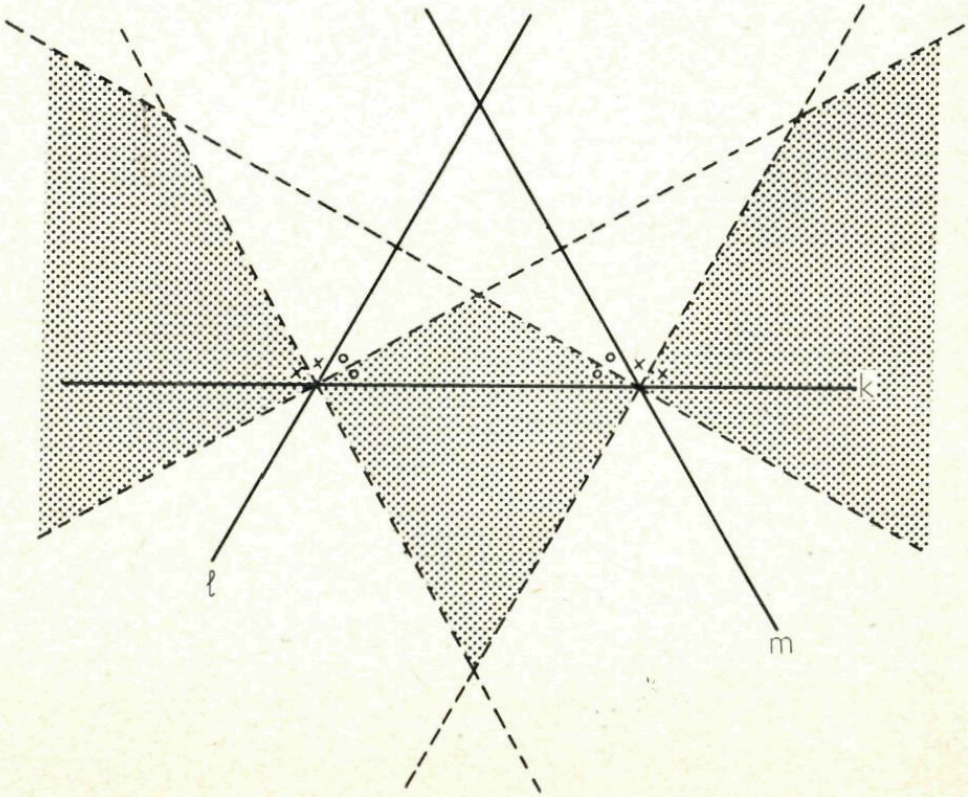


Fig. 20

26. Zie figuur 21.

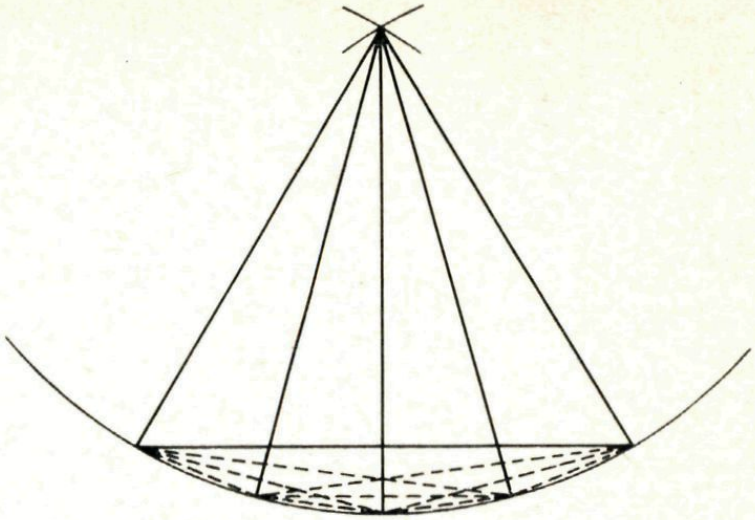


Fig. 21

27. Bij dit probleem (en ook bij het vorige) is het van belang het begrip „veelhoek" scherp te definieren. Dat is in de opgave niet gebeurd, en daarom is de vraag eigenlijk niet te beantwoorden. Beperkt men zich tot „convexe" veelhoeken (dat zijn veelhoeken zonder inspringende hoeken), dan kan een vijfhoek hoogstens drie scherpe hoeken hebben. Laat men ook inspringende hoeken toe, dan kan dat aantal echter vier bedragen. (Zie figuur 22). En wat zou je denken van het aantal scherpe hoeken van de stervormige vijfhoek uit figuur 23.

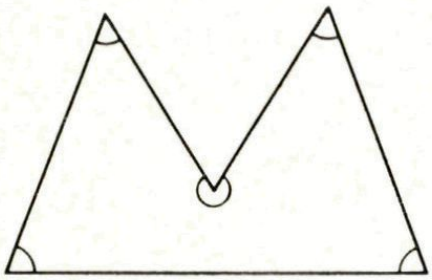


Fig. 22

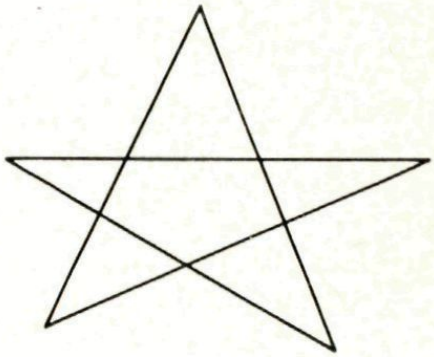


Fig. 23

28. $14\frac{14}{23}$ minuten over negen.

29. 54352413215.

30. Noem de oppervlakte van de tafel t. Wanneer elk van de vijftien tijdschriften een oppervlakte had, die kleiner dan $\frac{t}{15}$ was, dan konden ze niet samen de gehele tafel bedekken. Minstens een van de tijdschriften heeft dus een oppervlakte, die groter dan $\frac{t}{15}$ of gelijk aan $\frac{t}{15}$ is. Kies zo'n tijdschrift uit en verdeel het resterende veertiental op willekeurige wijze in twee groepen van zeven tijdschriften. Verwijderen we de tijdschriften van de eerste groep, dan komt deel A van de tafel vrij; de oppervlakte daarvan noemen we a. Halen we de tweede groep weg, dan wordt deel B onbedekt; de oppervlakte daarvan noemen we b. De delen A en B „overlappen" elkaar niet. Daarom is $a + b$ hoogstens gelijk aan $\frac{14}{15}t$ (dat ene uitgekozen tijdschrift blijft immers in beide gevallen liggen). Het paar (a, b) bevat dus zeker een getal, dat hoogstens gelijk aan $\frac{7}{15}t$ is; verwijderen we de daarbij behorende groep tijdschriften, dan is het nog bedekte deel van de tafel minstens $\frac{8}{15}t$ groot.

Leeftijd en schoenenmaat

Heb je op 17 januari jl. op de televisie het programma „Hoe bestaat het?" gezien? Je zult je dan herinneren, dat twee rekenkunstenaars hun verbluffende rekenvaardigheid demonstreerden.

Een van hen (Pascal) liet een „kunstje" zien, dat je zelf na enige oefening ook wel vlot kunt uitvoeren. Het ging als volgt: Dick van Ruler moest zijn schoenenmaat met honderd vermenigvuldigen. Onder het zo verkregen getal moest hij het jaartal van zijn geboorte schrijven. Pascal liet hem toen het verschil van deze beide getallen mededelen. Dat was 2366. Prompt daarop kon hij de schoenenmaat (43) en de leeftijd (30 jaar) noemen. Hoe kwam hij daaraan? Wel, hij vertelde dat hij bij het getal 2366 het jaartal 1964 had opgeteld, het antwoord 4330 leverde links de schoenenmaat 43 en rechts de leeftijd 30. Frappant, nietwaar? Maar misschien vind je na even puzzelen wel de verklaring.

Mocht het je niet gelukken, schakel dan even de algebra in: Stel de schoenenmaat a, dan is het eerste getal, dat je opschrijft $100a$. Stel de leeftijd b, dan is het tweede getal $1964 - b$ (als je tenminste in 1965 nog niet jarig bent geweest). Aftrekken geeft: $100a - 1964 + b$. Tel je daarbij nu weer 1964 op, dan is het resultaat $100a + b$ en daardoor komen in het antwoord schoenenmaat en leeftijd netjes naast elkaar te staan.

Oplossing Wimecos-prijsvraag II

Vraag 1: Elk hoekveld is middelste veld van één samenhangende deelverz., die uit drie velden bestaat. Elk ander randveld is middelste veld van 3 zulke deelverzamelingen. Elk middenveld is middelste veld van 6 zulke deelverzamelingen. Het gevraagde aantal is dus $4 + 24 \cdot 3 + 36 \cdot 6 = 292$.

Vraag 2: zie figuur 24.

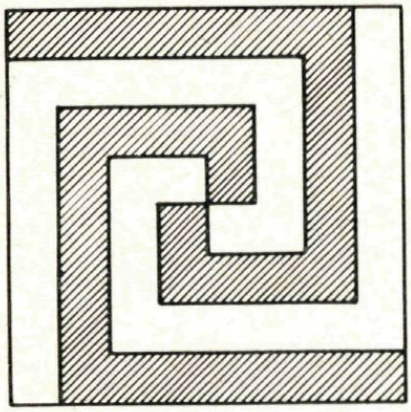


Fig. 24

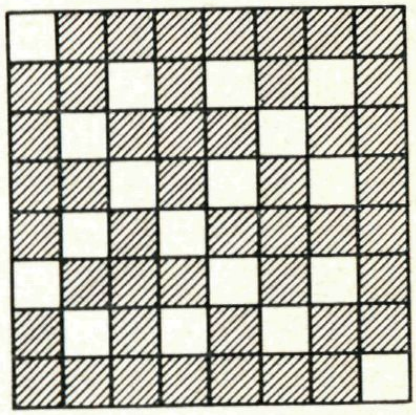


Fig. 25

Vraag 3: Heeft een samenhangend deel, dat uit n velden bestaat, een omtrek van $2(n + 1)a$, dan bevinden zich in het inwendige van die deelverzameling $(n - 1)$ zijden met een totale lengte van $(n - 1)a$. Aan de omtrek en in het inwendige van die deelverzameling bevinden zich dus $(3n + 1)$ zijden samen. Het schaakbord telt 144 zijden van velden, dus kan n niet meer dan 47 zijn. We bewijzen nu, dat n ook niet gelijk kan zijn aan 47. Daartoe denken we ons een samenhangend deel, dat uit 47 (zwartgemaakte) velden bestaat en dat een omtrek heeft van $96a$. Er zijn dan nog 17 velden witgebleven. Neem nu aan, dat één van die witte velden zich aan de buitenomtrek van het schaakbord bevinden. De buitenomtrek van het schaakbord levert dan een bijdrage van hoogstens $27a$ tot de omtrek van de deelverzameling. Dat ene witte veld aan de rand van het schaakbord levert een bijdrage van hoogstens $3a$. Dus moet minstens $96a - 27a - 3a = 66a$ geleverd worden door die zestien witte velden in het inwendige van het schaakbord. Dat is echter duidelijk onmogelijk. Evenzo toont men aan, dat er ook niet méér witte velden aan de rand van het schaakbord kunnen grenzen.

Nu blijft er nog één mogelijkheid over: dat alle witte velden zich in het inwendige van het schaakbord bevinden. De gehele buitenrand bestaat dan dus uit zwartgemaakte velden, die tot de samenhangende deelverzameling behoren. Nu kan men zo'n samenhangende deelverzameling met maximale omtrek zodanig veld voor veld opbouwen, dat elk toegevoegd veld de omtrek met $2a$ doet toenemen. Daarbij zal men in het gestelde geval op zeker ogenblik de buitenrand van het schaakbord sluiten. Maar .... dan is het onmogelijk, dat daardoor de omtrek met $2a$ toeneemt. Zo komen we dus weer op een ongerijmdheid terecht.

De conclusie luidt dus, dat n niet groter kan zijn dan 46. Figuur 25 toont aan, dat dit inderdaad het gezochte maximum is.

Binair Uit het Latijn. *Bini* = *telkens twee.*

Congruent Uit het Latijn. *Congruere* = *overeenstemmen.* Twee getallen heten modulo *n* congruent, als ze overeenstemmen in de rest bij deling door *n.*

Equivalent Uit het Latijn. *Valere* = *waard zijn.*
aequus = *gelijk.*

Torus Latijnse vertaling van een Grieks woord, dat oorspronkelijk iets gewondens, later ook iets gewelfds beduidt en dat in verband hiermee als mathematische term een lichaam betekent, dat voortgebracht wordt door het wentelen van een cirkel om een as in zijn vlak, die niet de cirkel treft.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.
G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.
A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.
Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden. *Oplossingen inzenden vóór 1 april 1965.*
Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.
Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, *f* 2,— per jaargang. Voor anderen *f* 3,—.
Abonnementen kan men opgeven bij J.B.Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B.Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.