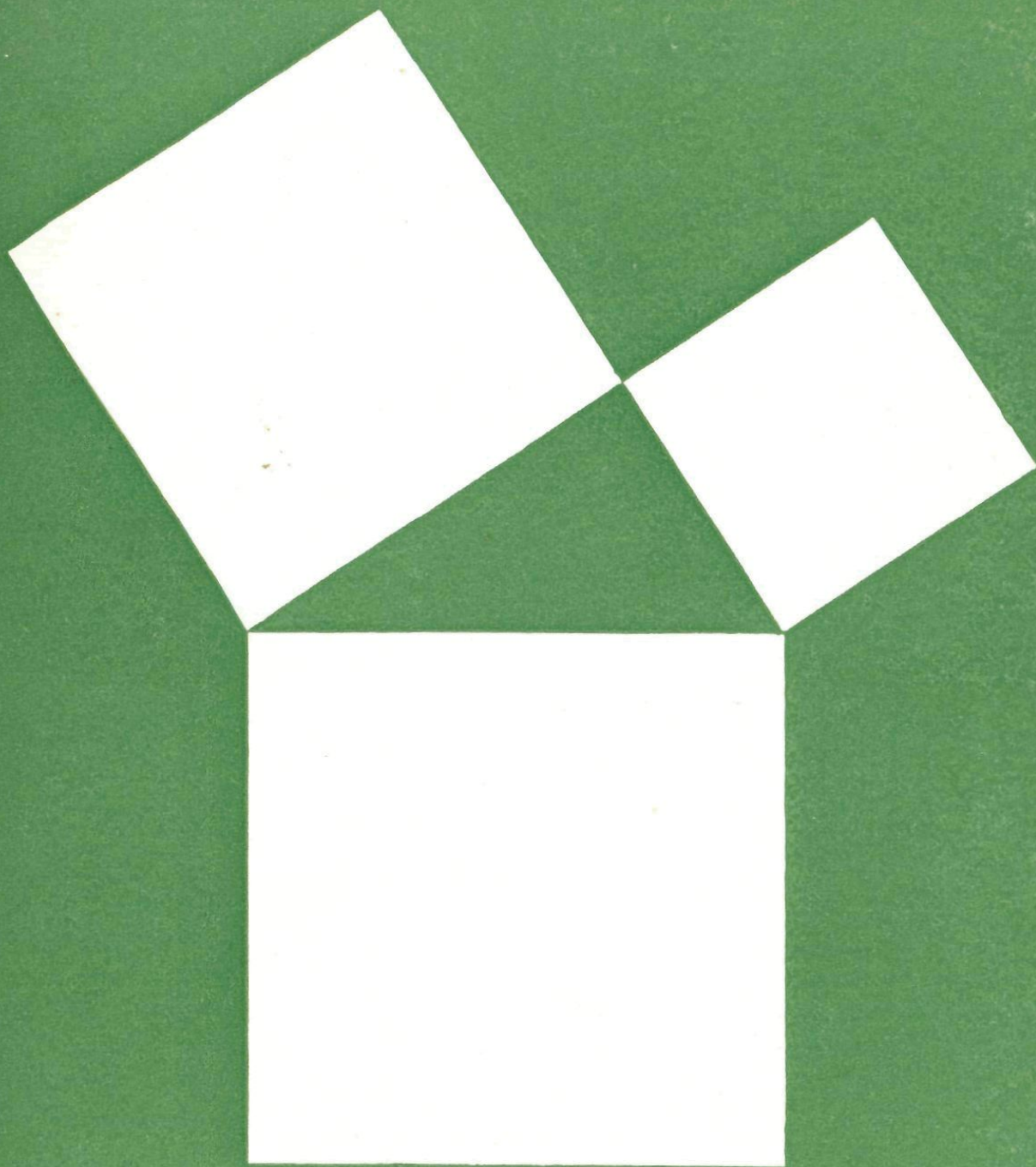


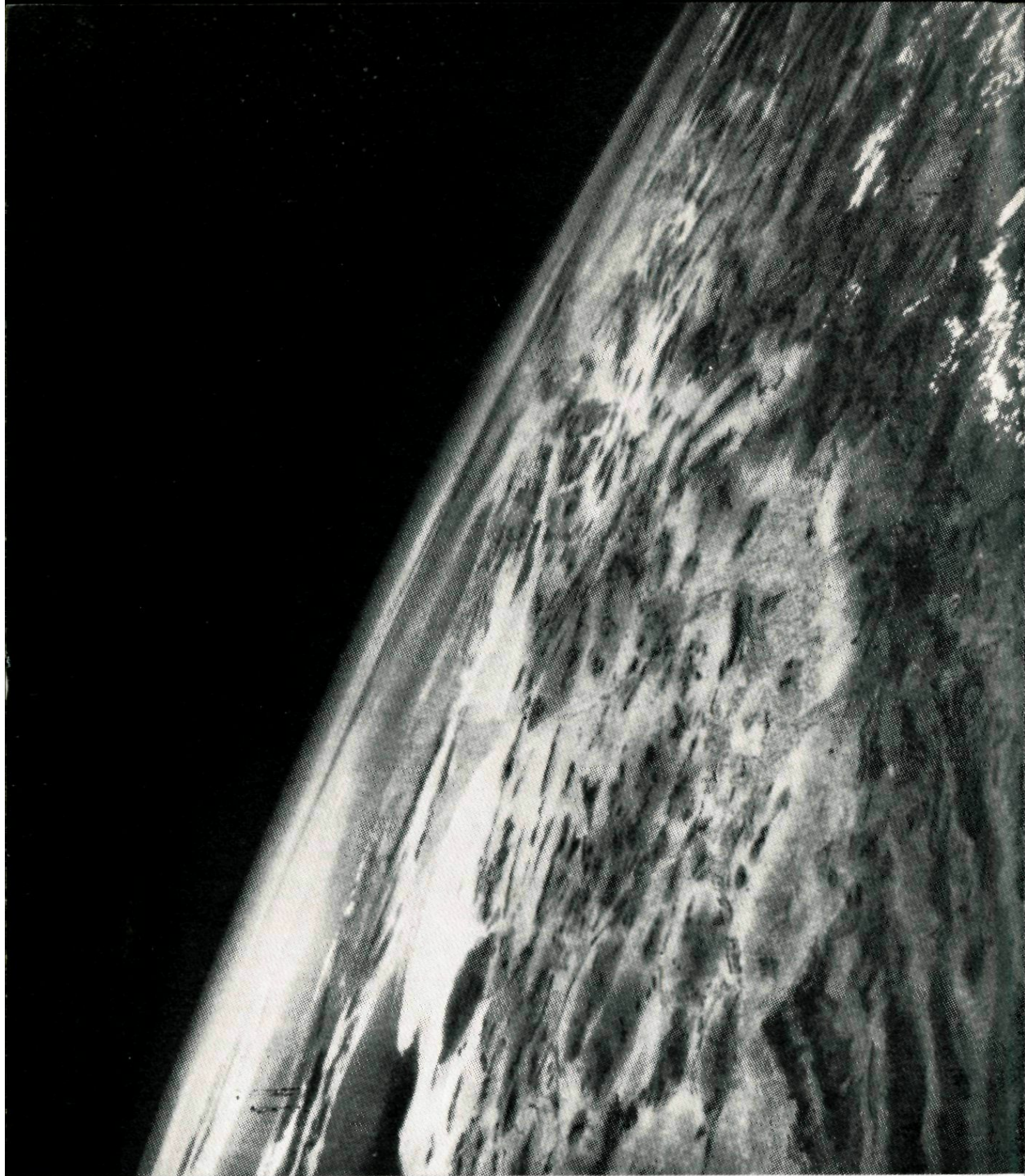
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

5

Vierde jaargang



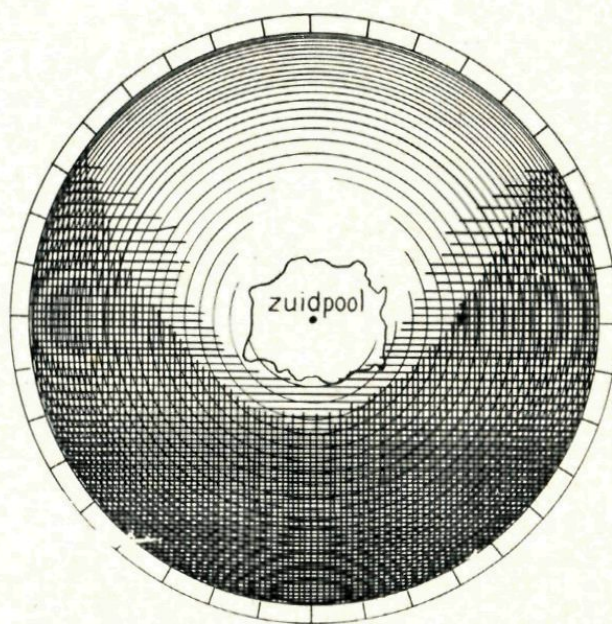
Zo overziet een camera, in een raket gebouwd, een groot deel van de aarde. Hoe groot is echter die aarde? Hoe meet men die grootte? Wie daarover wat meer wil weten kan terecht op blz. 100.

° Een touw rond de evenaar I

Stel je eens voor, dat de aarde een gladde bol was, zonder zeeën en zonder bergen. En stel je dan eens voor, dat we om die gladde aarde een touw zouden spannen over de evenaar. Weet je, hoe lang dat touw dan zou worden? Neen? Dat is niet zo erg, maar we zullen je het even verklappen: ongeveer 40.000 km.

Maar stel je nu eens voor, dat we dat touw zouden doorknippen en er één meter tussen zouden knopen. We zouden het dan overal kunnen optillen tot het weer een cirkel zou vormen concentrisch met de evenaar. Zo iets als in fig. 1.

Fig. 1



Hoe hoog zou het dan overal boven de aarde zijn? Zou er bijvoorbeeld een vlieg onder door kunnen?

Misschien ken je de frappante uitkomst al; zo niet, dan is het eenvoudig die te berekenen. Je hoeft er alleen maar voor te weten, dat de omtrek van een cirkel de lengte $2\pi R$ heeft, als R de lengte van de straal is. Voor π kun je wel ongeveer 3,14 rekenen.

Dikwijls wordt dit vraagstukje op een andere manier gegeven. Dan wordt gevraagd: Als we het touw, dat rondom de evenaar gespannen was, nu eens overal 1 m boven het aardoppervlak zouden optillen, hoeveel langer zouden we het dan moeten maken? Als je iemand laat schatten, dan lopen deze schattingen uiteen van 100 tot 10.000 m.

Je vindt een bespreking van deze beide vragen op bldz. 114.

We bladeren dit nummer even door

Hoe meet je eigenlijk de grootte van zo'n geweldige bol, als onze aarde is? Een antwoord op deze vraag vind je op bldz. 100. De Heer Poelman laat ons nog eens weer kennis maken met een stukje Chinese wiskunde. De series over relaties en vreemde meetkundes worden in dit nummer besloten. Hoe merkwaardig de afbeelding werkt, die inversie heet, blijkt in het artikel: Een cirkel wordt binnenste-buiten gekeerd. „Is elke driehoek met twee gelijke deellijnen gelijkbenig?“, vroeg ons een lezer. Een bewijs van een beroemd meetkundige bevestigt dat.

Deze maal ontbreken de Denkertjes. We hadden er echt geen plaats meer voor. We kunnen dus nu de einduitslag van de ladderwedstrijd bekend maken.

12 deelnemers aan de ladderwedstrijd klonnen boven de 300 punten. Ze krijgen een boekenbon. De eerste drie waren A. Verbeek, Blaricum (374); J. R. Heringa, Amsterdam (366) en T. Michels, Amsterdam (357).

De WIMECOS-prijsvraag werd gewonnen door: 1. R. Wiekema, Breda; 2. A. D. Freye, Harkstede; 3. C. Cuvelier, Amstelveen.

De extraprijs voor de beste prestatie was voor A. Verbeek.

De *lootprijs* is deze keer voor C. M. P. Busio, Heerlen.

° Enkele grepen uit de Chinese wiskunde

door A. J. Poelman te Bennekom

In nummer 2 van deze jaargang lieten we een stukje Chinese wiskunde zien uit de 14e eeuw. We gaan nu nog verder terug en wel naar het boek CHIU CHANG, geschreven door LIU HUI, dat in de derde eeuw na Chr.

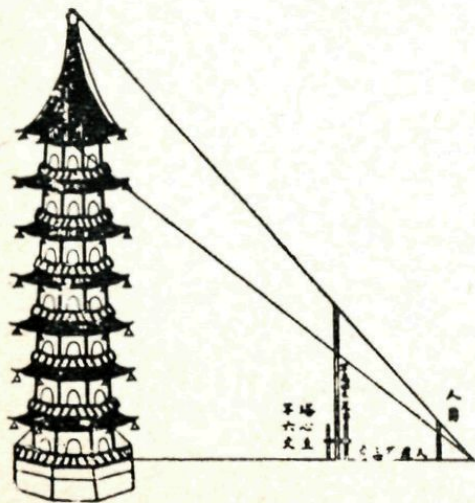


Fig. 2

verscheen. We treffen in dit boek o.a. een hoofdstuk aan, dat heet Chhung Chang, wat ongeveer betekent, „de methode der dubbele verschillen” en dat handelt over gelijkvormige rechthoekige driehoeken. We zien dat deze wordt toegepast op het berekenen van afstanden en hoogten. De methode, die werd besproken in nummer 1 van deze jaargang om de hoogte van een huis te meten, vinden we

er ook in terug. Zie bijv. fig.2, waarin blijkt hoe de hoogte van een pagode wordt gemeten. Deze figuur spreekt wel zo voor zich zelf, dat we die niet zullen bespreken.

Een belangrijke rol spelen in dit hoofdstuk de berekeningen van vestingwerken. In fig.3 zien we bijvoorbeeld, hoe de diameter van een ommuurde stad wordt gevonden. De Chinese steden, waren dikwijls cirkelvormig of vierkant. Ze hadden vier poorten, naar elk der vier windstreken één.

In A en F zijn twee waarnemingsposten. In D en E staan stokken, verbonden door een koord op oogshoogte. De Chinezen moesten hun berekeningen omschrijven in zinnen en met woorden en gebruikten dus niet de korte notaties met letters, waaraan we al zo gewend zijn geraakt, dat we er haast niet meer het gemak van beseffen.

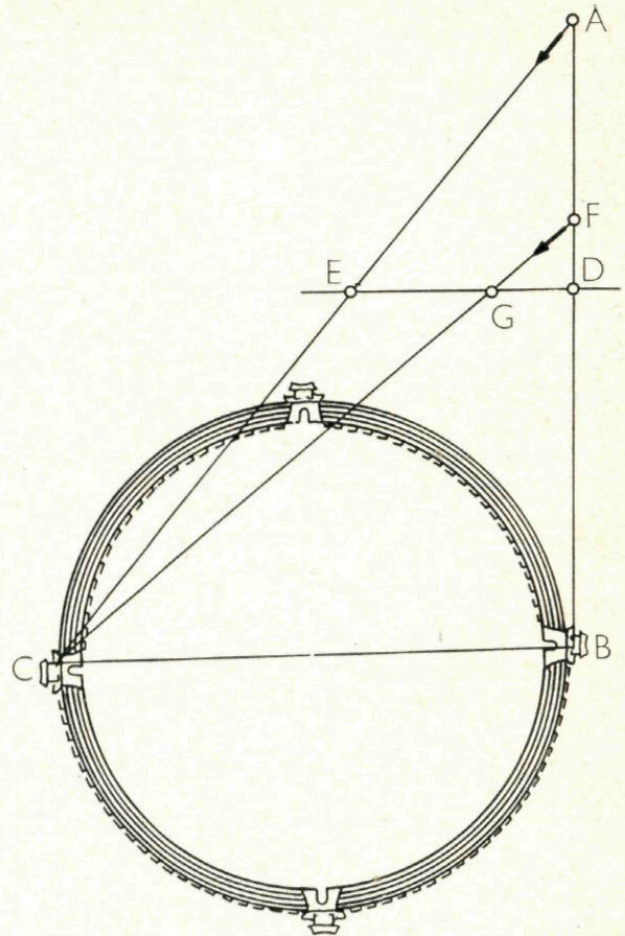


Fig.3

We zullen dus nu de berekening maar wel met letters geven en stellen daarvoor:

$DE = a$, $DF = b$, $DG = c$, $AD = d$ en de gevraagde diameter $BC = x$.

Nu is $\triangle FDG \sim \triangle FBC$, dus $b : c = FB : x$.

Ook is $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, dus $d : a = AB : x$.

Hieruit volgt: $FB = \frac{bx}{c}$ en $AB = \frac{dx}{a}$

Verder is $AB = FB + (d - b)$, dus $AB - FB = d - b$.

We vinden hieruit: $x \cdot \frac{dc - ab}{ac} = d - b$.

Dus tenslotte: $x = \frac{ac(d - b)}{dc - ab}$.

°° Hoe groot is de aarde?

We weten niet, wie zich dat voor het eerst heeft afgevraagd. De vraag hangt nauw samen met de vraag naar de vorm van de aarde. Uit berichten van zijn tijdgenoten weten we, dat ERATOSTHENES van Alexandrië in de derde eeuw voor het begin van onze jaartelling de mening van vele Griekse geleerden deelde, dat de aarde een bolvorm had. Deze Eratosthenes heeft de omtrek van de aarde op een ingenieuze manier berekend.

Het was hem bekend, dat de waterputten te Syene (het tegenwoordige Assoean) op 21 juni telkens 's middags tot op de bodem door de zon beschenen werden. Dat betekende, dat op die datum de zon in Syene in het zenith stond. Op dezelfde datum bepaalde hij de zonshoogte in

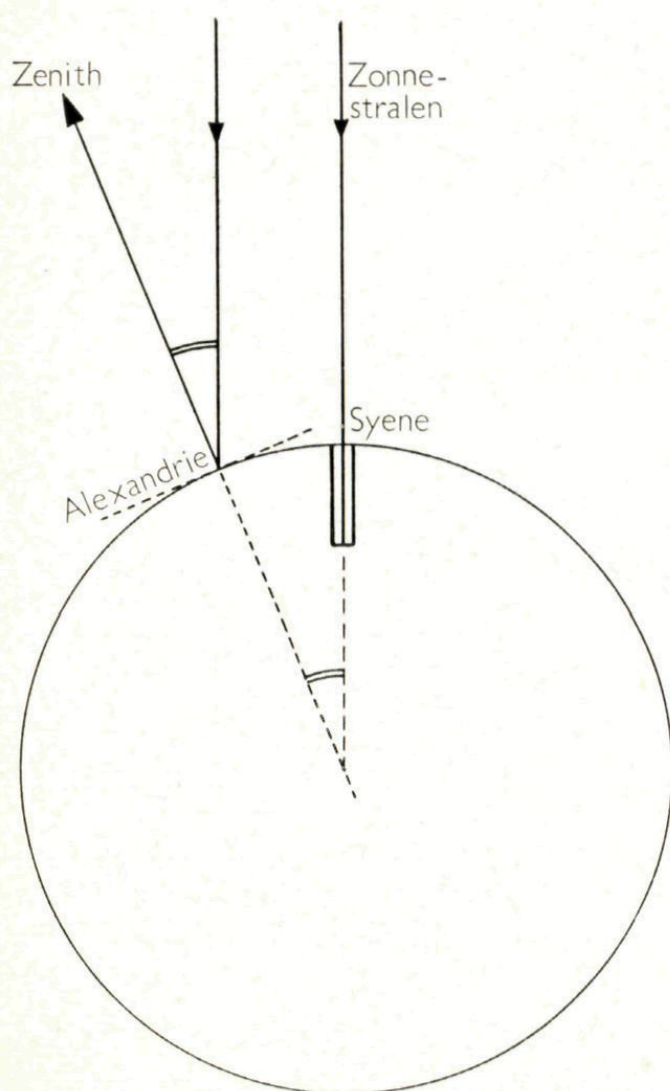


Fig. 4

Alexandrië en vond hij, dat de zon $\frac{1}{50}$ deel van een cirkel van het zenith af stond.

De afstand van Syene tot Alexandrië was ongeveer 5000 stadiën, zodat de hele omtrek van de aarde $50 \cdot 5000$ stadiën moest zijn. Rekent men 1 stadion gelijk aan 175 m (het is niet met zekerheid bekend, hoe groot 1 stadion was¹), dan komt Eratosthenes heel dicht bij de tegenwoordig bekende omtrek, nl. ongeveer 40.000 km. Deze werd echter pas veel later en met veel nauwkeuriger instrumenten bepaald. De tijd van de nauwkeuriger berekeningen van de grootte van de aarde begint in de 17e eeuw. Onze landgenoot SNELLIUS (1580–1626) werd de „Era-

¹ Zie bijvoorbeeld het aardige boek „Van sterren tot inlegzolen” door Prof. Dr. H. Freudenthal.

tosthenus Batavus" genoemd, omdat hij een der pioniers was van nauwkeurige metingen in het veld en het verwerken der gegevens met behulp van trigonometrie.

Ook in onze tijd is men de aarde nog aan het „opmeten” en daarbij spelen de aardsatellieten een grote rol.

De Nederlandse astronoom Prof. J. C. KAPTEYN (1851–1922) heeft in een speels ogenblik een methode bedacht om de straal van de aarde te berekenen, die minstens zo ingenieus is als die van Eratosthenes en die in de dagen van Eratosthenes gevonden zou kunnen zijn, omdat de benodigde waarneming eenvoudig en de wiskundige uitwerking simpel is.

Als je aan zee staat te kijken naar een zonsondergang, hangt het tijdstip van de ondergang af van de hoogte, waarop je je bevindt. Het is nu genoeg om de straal van de aarde te kunnen berekenen, om het tijdsverschil te bepalen tussen twee tijdstippen, waarop waarnemers op verschillende hoogten de zon zien ondergaan.

Om dat te verklaren nemen we ter vereenvoudiging aan, dat de beide waarnemers zich op 21 maart of 23 september ergens op de evenaar bevinden, zodat ze die dag de zon loodrecht zien ondergaan. De ene waarnemer C ligt plat op het strand en de ander A staat. Zijn ogen zijn juist 1,70 m hoger dan die van C. Op het moment, dat C zich bevindt op de plaats C_1 (fig. 5) en A op de plaats A_1 geeft C een sein, dat hij juist het laatste stukje zon onder de horizon ziet verdwijnen. Terwijl A wacht tot hij dat ook kan zeggen, draait de aarde rustig om zijn as. Geeft A dus, laten we zeggen na 10 sec zijn sein, dan zijn beide aangekomen op de plaatsen C_2 en A_2 .

De lengte van de boog C_1C_2 volgt uit het tijdsverschil tussen de beide waarnemingen, bijvoorbeeld de genoemde 10 seconden. Na 24 uur

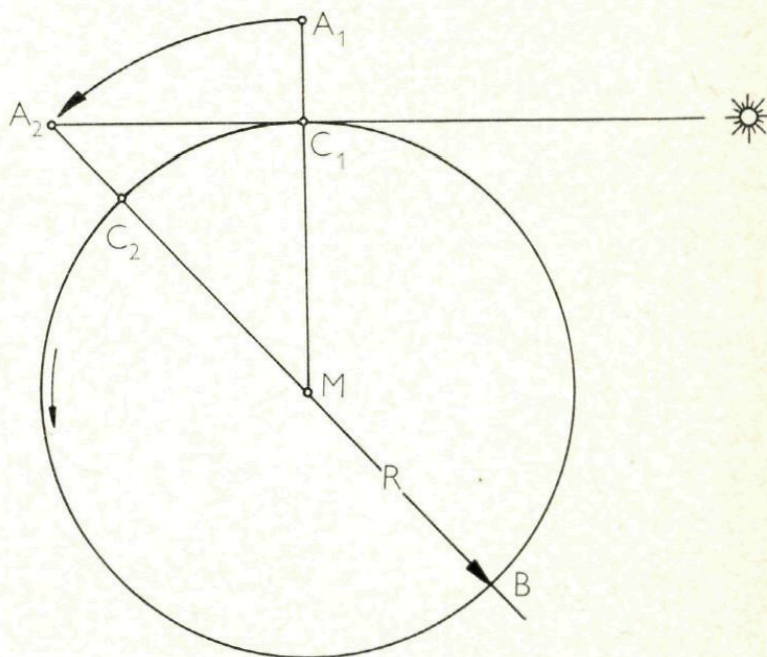


Fig. 5

nl. zou C weer in C_1 zijn aangekomen. De boog, die hij in 10 sec doorloopt is dus het $\frac{10}{24 \cdot 60 \cdot 60}$ -ste deel van de omtrek van de evenaar. Duurt het tijdsverloop tussen de beide waarnemingen t sec dan is de lengte van boog $C_1C_2 = \frac{t \cdot 2\pi R}{24 \cdot 60 \cdot 60}$ als R de lengte is van de straal van de aarde.

Nu leert de meetkunde ons, dat

$$(A_2C_1)^2 = A_2C_2 \cdot A_2B.$$

Omdat A_2C_1 en A_2C_2 beide zeer klein zijn ten opzichte van de aarde, maken we niet zo'n erg grote fout, als we $A_2B = C_2B = 2R$ stellen en de lengte van A_2C_1 gelijk aan de lengte van de boog C_1C_2 . Stellen we bovendien nog $A_2C_2 = A_1C_1 = h$, dan vinden we dus

$$(C_2C_1)^2 = h \cdot 2R$$

d.w.z.
$$\left[\frac{t \cdot 2\pi R}{24 \cdot 60 \cdot 60} \right]^2 = h \cdot 2R$$

Het is duidelijk, dat hieruit R berekend kan worden, als t en h bekend zijn.

Wanneer de berekening niet op 21 maart of 23 september plaats vindt, moet een correctie in de formule worden aangebracht. Dat is ook het geval, wanneer we de waarnemingen op onze breedte doen plaats vinden.

Bevinden de waarnemers zich bijvoorbeeld in een plaats op 52°NB , dan doorlopen ze in de tijd van 24 uur niet een grote cirkel van de aardbol, maar de breedtecirkel. Dan is dus de lengte van boog C_2C_1 gelijk aan

$$\frac{t \cdot 2\pi r}{24 \cdot 60 \cdot 60}$$

waarin r de lengte van de straal van de breedtecirkel is. Zie fig. 6. In deze figuur zien we, dat

$$r = R \sin 38^\circ \approx 0,6 R.$$

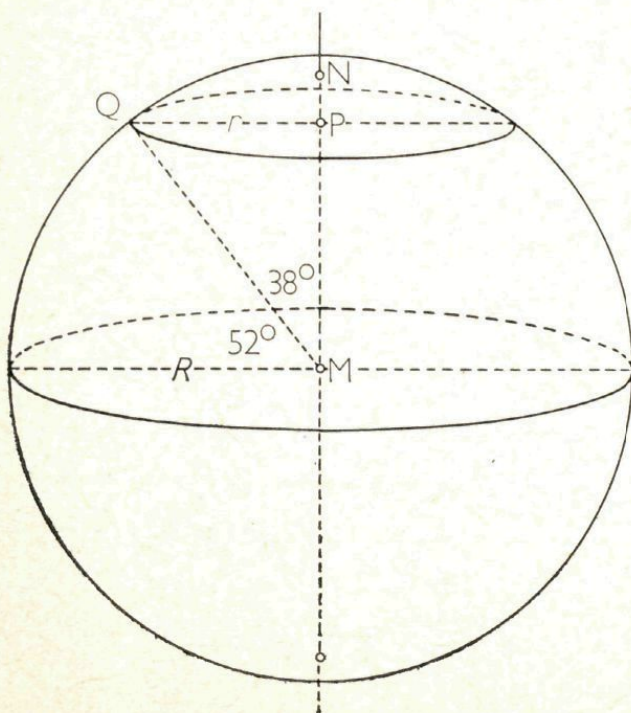


Fig. 6

De vergelijking, waaruit R berekend kan worden, komt er dan dus als volgt uit te zien

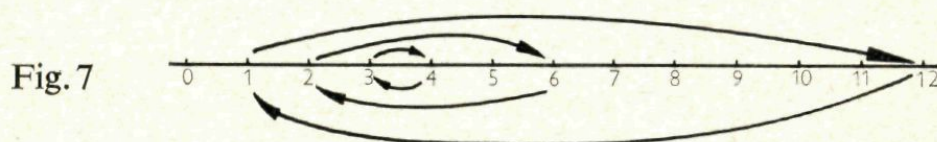
$$\left[\frac{0,6t \cdot 2\pi R}{24 \cdot 60 \cdot 60} \right]^2 = h \cdot 2R$$

Het spreekt van zelf, dat voor het bereiken van nauwkeurige resultaten rekening moet worden gehouden met allerlei storende factoren, bijvoorbeeld met de buiging van de lichtstralen bij het doorlopen van de dampkring, enz. Maar de methode is in wezen eenvoudig en voor een ruwe schatting zeer bruikbaar, omdat er maar weinig hulpmiddelen bij nodig zijn.

°°Relaties IV

In de vorige artikelen hebben we relaties besproken, die betrekking hadden op twee variabelen, die we voorstelden door x en y . De variabelen in de relatie *y is een broer van x* stellen mensen voor. Kiezen we voor x een persoon, dan is het mogelijk, dat daarbij verschillende personen voor y worden gekozen. In de relatie *y is de vader van x* behoort echter bij iedere x slechts één y . Relaties, die de eigenschap hebben, dat bij iedere x slechts één y behoort, heten afbeeldingen of functies. In de wiskunde treffen we veel van dit soort relaties aan. In dit artikel bekijken we er twee, die je waarschijnlijk wel kent uit de algebra- of natuurkundelessen.

Wanneer aan elk getal x een getal y zo wordt toegevoegd, dat $x \cdot y = k$, waarbij k een constante is, dan heet de relatie, waartoe deze variabelen x en y behoren, „het omgekeerd-evenredig-zijn.” Deze relatie voegt aan elk getal x juist één getal y toe en is dus een *afbeelding*. We kunnen zeggen, dat de verzameling van de reële getallen erdoor op zichzelf wordt afgebeeld. Figuur 7 maakt dat duidelijk. We hebben daarin een



getallenlijn getekend. Elk punt van deze getallenlijn stelt daarbij, zoals we weten, een reëel getal voor. De getallen y , die zo bij de gekozen getallen x behoren, dat $x \cdot y = 12$ is, worden in deze figuur door de spitsen van de pijlen aangewezen.

Een wat duidelijker figuur krijgen we, als we twee getallenlijnen gebruiken. Eén voor de getallen x en een voor de getallen y , zoals in fig. 8.

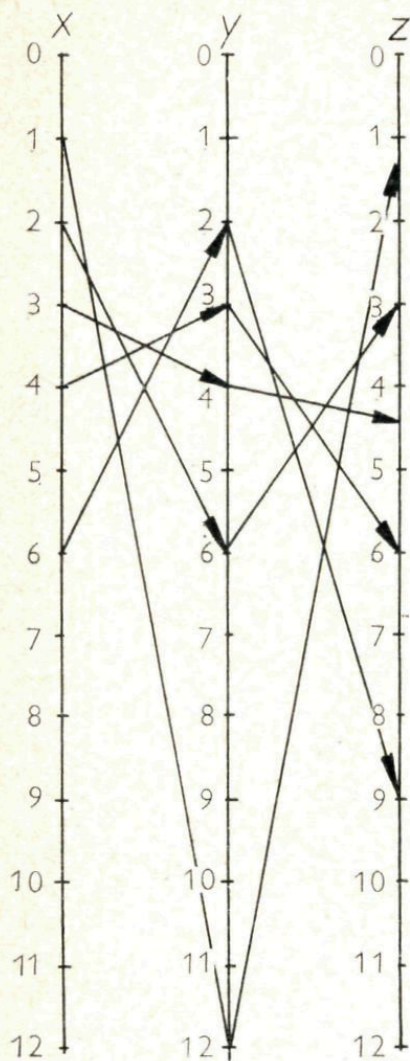


Fig. 8

Je ziet, dat in deze figuur de pijlen weer de getallen y aanwijzen, die bij de gekozen getallen x behoren. Echter is bij elk der getallen y weer een getal z aangewezen op een derde getallenlijn. Het voorschrift, dat de getallen z aan de gekozen getallen y toevoegt, luidt: $y \cdot z = 18$. In fig. 8 zijn dus twee omgekeerd-evenredigheids-afbeeldingen na elkaar uitgevoerd. We kunnen ook zeggen, dat langs een omweg de getallen x op de getallen z zijn afgebeeld. Welke afbeelding zou ze rechtstreeks aan elkaar toevoegen? Dat is gemakkelijk na te rekenen:

$$x \cdot y = 12 \text{ en } y \cdot z = 18,$$

dus
$$y = \frac{12}{x} \text{ en } z = \frac{18}{y}.$$

Daaruit volgt
$$z = 1\frac{1}{2}x.$$

Zoals je ziet is dit niet opnieuw een omgekeerd-evenredigheids-afbeelding. Wanneer aan elk getal x een getal z zo wordt toegevoegd, dat $z = k \cdot x$ (k constant), dan heet de relatie „het recht-evenredig-zijn”. Deze

relatie is opnieuw een afbeelding, omdat weer bij elke x , die we kiezen, slechts één bijbehorende z gevonden kan worden.

Stellen we nu de afbeelding met het voorschrift $x \cdot y = 12$ voor door O_1 , die met het voorschrift $y \cdot z = 18$ door O_2 , die met het voorschrift $z = 1\frac{1}{2}x$ door R en tenslotte het achter elkaar toepassen van de afbeeldingen O_1 en O_2 door $O_1 \circ O_2$, dan is dus

$$O_1 \circ O_2 = R$$

De interessante vraag doet zich nu voor, welke afbeelding in de plaats gesteld zou kunnen worden van het na elkaar toepassen van twee recht-evenredigheids-afbeeldingen, bijv. R_1 met het voorschrift $y = 6x$ en R_2 met het voorschrift $z = 4y$.

Het blijkt, dat het opnieuw een recht-evenredigheids-afbeelding is, nl. die met het voorschrift $z = 24x$. We gaan nu vanzelfsprekend ook even onderzoeken, wat het na elkaar toepassen van een recht- en een omgekeerd-evenredigheids-afbeelding oplevert, bijv. $R_1 \circ O_1$ of $O_1 \circ R_1$. Je kunt dat gemakkelijk even doen en daarmee het volgende schema controleren:

$\circ$	R	O
R	R	O
O	O	R

Misschien denk je, wat komt mij dit schema toch bekend voor. Waar heb ik zo iets eerder gezien? Ik vermoed, dat je nu denkt aan het schema voor het vermenigvuldigen van negatieve en positieve getallen. Het produkt van twee negatieve getallen is positief, enz. Kijk zo:

$\times$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

Of dacht je misschien aan het optellen van twee even of oneven getallen? Bijvoorbeeld: de som van twee oneven getallen is even. Daarvoor kun je het volgende schema geven:

$+$	e	o
e	e	o
o	o	e

En warempel vind je weer iets dergelijks, als je na elkaar twee der relaties uitvoert met de voorschriften $y \perp x$ of $z \parallel y$, waarbij de x , y en z dan natuurlijk rechten voorstellen.

Het schema ziet er dan zo uit:

$\circ$	$\parallel$	$\perp$
$\parallel$	$\parallel$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\parallel$

Het is wel frappant zo dikwijls als deze *structuur* voorkomt. Je zult hem ook nog eens aantreffen, als je een vermenigvuldigingstabel opstelt voor het rekenen modulo 2. (Zie de artikelen over de dozenalgebra).

°Over driehoeken met gelijke deellijnen

Een onzer lezers schreef ons: „Het is niet moeilijk te bewijzen, dat een driehoek gelijkbenig is, als daarin twee hoogtelijnen gelijk zijn. Ook als twee zwaartelijnen gelijk zijn, lukt het bewijs wel, als we maar gebruiken, dat ze elkaar verdelen in stukken, die zich verhouden als 2:1. Het is mij nog niet gelukt te bewijzen, dat een driehoek gelijkbenig is, als daarin twee deellijnen gelijk zijn. Wilt u daaraan eens een artikel wijden?”

De Zwitserse meetkundige JACOB STEINER (1796–1863) gaf hiervoor een verrassend bewijs. Het is heel eenvoudig omdat het gebruik maakt van

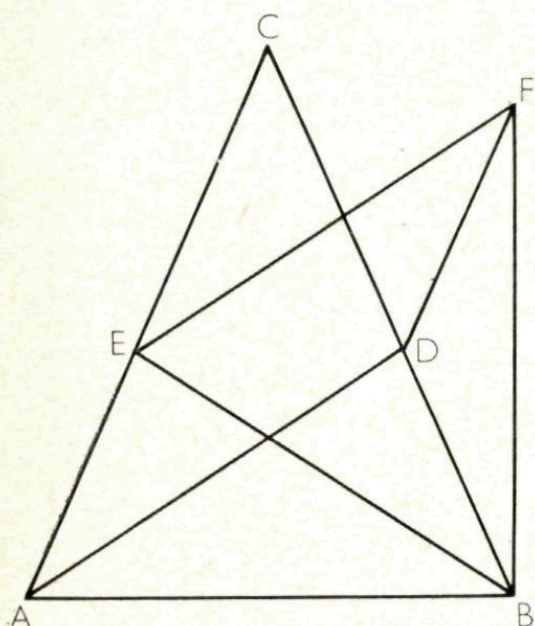


Fig. 9

de eenvoudige orde-eigenschappen van het vlak, bijv.:

Als in een driehoek twee hoeken niet gelijk zijn, dan ligt tegenover de grotere hoek een grotere zijde.

Zie nu fig. 12. Gegeven is, dat in $\triangle ABC$ AD deellijn is van $\angle A$ en BE deellijn van $\angle B$. $AD = BE$.

We willen nu bewijzen, dat $\angle A = \angle B$ is. Daartoe construeren we het punt F zo, dat ADFE een parallelogram is.

Dan is $EF = AD$ en dus $EF = BE$.

We kunnen nu eerst veronderstellen dat

$$\boxed{\angle A \leq \angle B} \quad (1)$$

Dan is $\angle DAE \leq \angle EBD$

$$\therefore \angle DFE \leq \angle EBD$$

$$\therefore \angle DFB \geq \angle DBF$$

$$\therefore DB \geq DF$$

$$\therefore DB \geq AE$$

$$\therefore \angle DAB \geq \angle EBA$$

(Immers als twee driehoeken 2 paar zijden gelijk hebben, en het derde paar zijden is niet gelijk, dan ligt tegenover de grotere van deze twee zijden een grotere hoek).

Nu volgt er uit deze betrekking, dat

$$\boxed{\angle A \geq \angle B} \quad (2)$$

(1) en (2) kunnen slechts gelijktijdig gelden als $\angle A = \angle B$, dus als $\triangle ABC$ gelijkbenig is.

Stellen we, dat $\angle A \geq \angle B$, dan volgt uit een analoge redenering eveneens, dat $\angle A = \angle B$.

°° Een cirkel binnenste-buiten gekeerd

De titel van dit artikel moet, laten we het maar eerlijk zeggen, dienst doen als blikvanger. Want als je onder een cirkel een gesloten kromme lijn verstaat, dan kun je die niet binnenste-buiten keren. Maar de afbeelding, die we gaan bestuderen, doet toch wel zo iets merkwaardigs, dat de uitdrukking binnenste-buiten keren zich vanzelf aan ons opdringt.

De Russische hoogleraar in de theoretische natuurkunde aan de George Washington Universiteit te Washington, George Gamov, heeft in een van zijn merkwaardige boeken een fantasie getekend. Daarin laat hij zien, hoe het heelal er uit zou zien, als het ten opzichte van de huid van een zeker mens binnenste-buiten zou worden gekeerd. Alles wat zich buiten deze mens bevindt, zou dan binnen in hem zijn: de zon, de maan, de sterrenstelsels. Ook de aarde, waar hij met één voet op staat. De ledematen, de oren, ze zouden naar binnen gericht zijn. Maar het gehele inwendige zou zich in het oneindig uitgestrekte buitengebied bevinden. Bekijk deze fantastische figuur (figuur van een fantast) maar eens met de vergevensgezindheid van de humor, als je 't er soms niet mee eens mocht zijn (fig. 10).

Een cirkel heeft een binnengebied en een buitengebied. Het binnengebied is begrensd. Het buitengebied onbegrensd. We gaan nu een afbeelding toepassen, waardoor telkens een punt van het binnengebied (met uitzondering van het middelpunt) aan een punt van het buitengebied wordt toegevoegd.

Bekijk eerst fig. 11. Daarin is de cirkel met O als middelpunt en met straal 1 de gegeven cirkel. We zullen deze de *grondcirkel* noemen. P en P' en ook Q en Q' zijn aan elkaar toegevoegde punten. Twee aan elkaar toegevoegde punten worden zo gekozen, dat ze met O op één rechte liggen en dat het produkt van hun afstanden tot O gelijk 1 is. Dus $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = 1$.

$$OP = \frac{1}{2}, \text{ dus } OP' = 2, OQ = \frac{1}{3}, \text{ dus } OQ' = 3.$$

Het zal duidelijk zijn, dat als P' beeldpunt is van P , dat dan ook P beeldpunt is van P' . Verder dat het beeldpunt van ieder punt van het binnengebied (met uitzondering van het middelpunt O) in het buitengebied ligt en omgekeerd ieder punt van het buitengebied zijn partner in het binnengebied vindt. (Willen we, dat ook O een beeldpunt heeft, dan moeten we dat als een oneigenlijk punt aan het buitengebied toe-

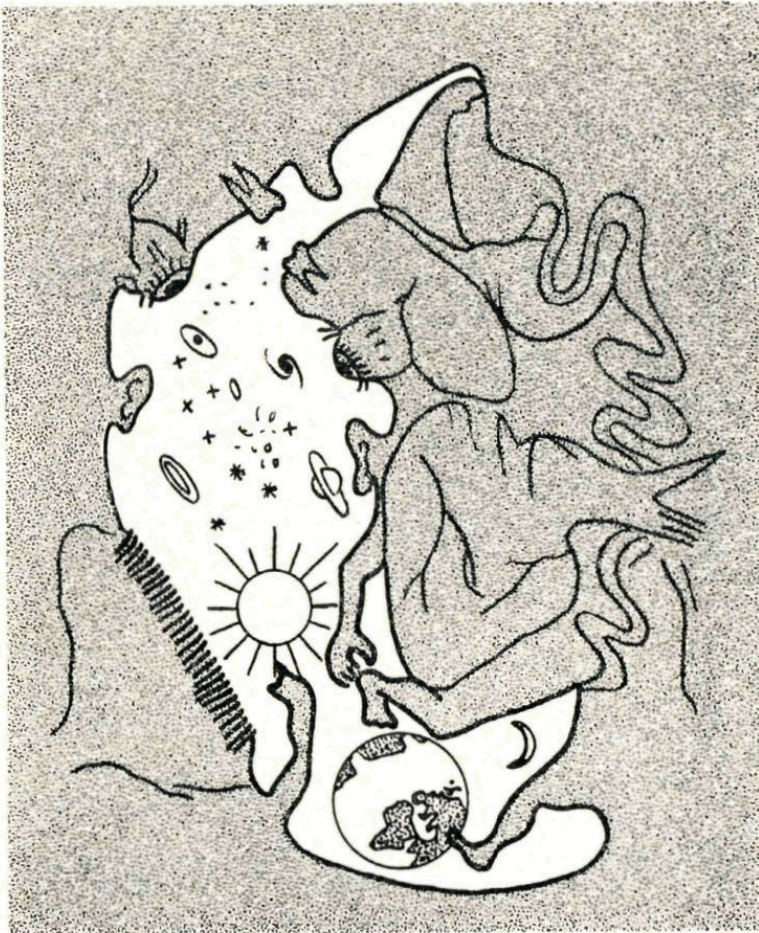


Fig. 10

voegen.) De rechte PQ snijdt de grondcirkel in A en B . De beeldpunten van deze twee punten vallen met hun originelen samen, immers $OA \cdot OA' = 1$, terwijl ook al $OA = 1$ is. Je ziet in fig. 11 dadelijk, dat de beeldfiguur van de rechte AB niet weer een rechte is. We zullen bewijzen, dat deze beeldfiguur een cirkel is door O . Eerst laten we even zien, dat elk tweetal punten P en Q met hun beeldpunten P' en Q' hoekpunten zijn van een koordenvierhoek.

Zie fig. 11. Uit $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$ volgt $\triangle OPQ \sim \triangle OP'Q'$. Daaruit volgt de gelijkheid van de hoeken P en Q' . Waaruit we concluderen, dat vierhoek $PQQ'P'$ een koordenvierhoek is.

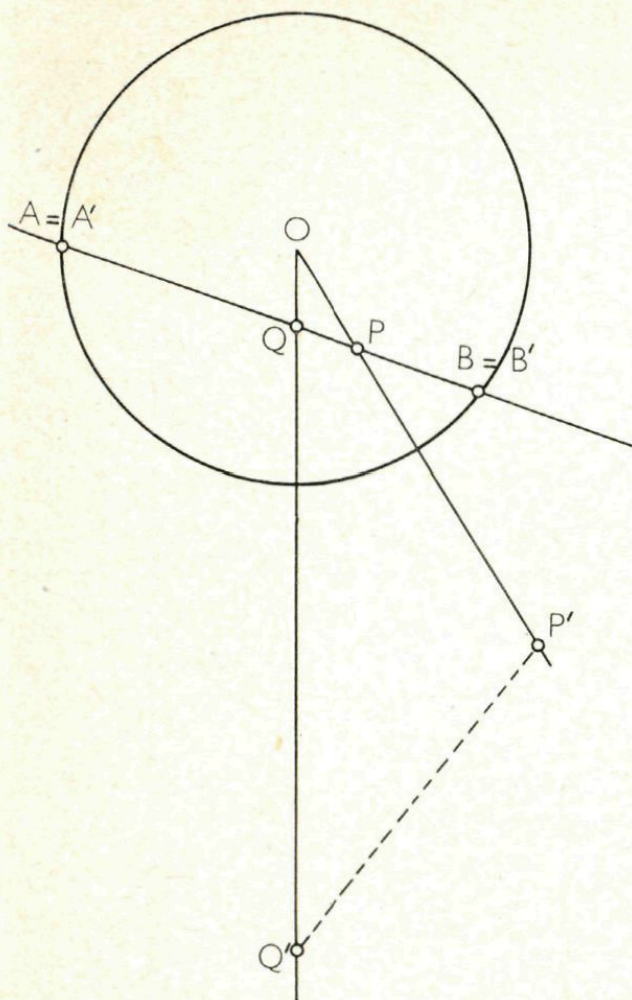


Fig. 11

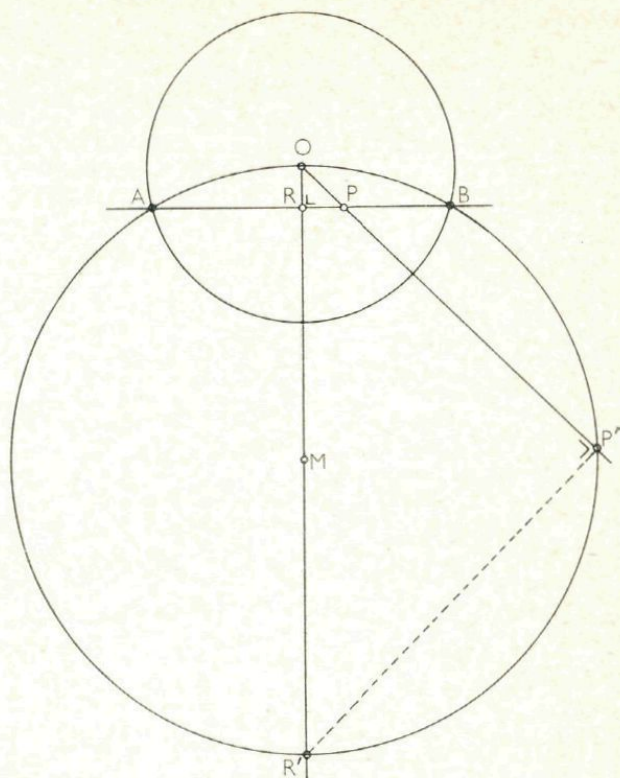


Fig 12

In fig. 12 is R zo op de rechte AB gekozen, dat OR loodrecht staat op AB. Nu is voor iedere keuze van het punt P op AB vierhoek PRR'P' een koordenvierhoek, zodat dus voor elke keuze van P op AB $\angle OP'R'$ recht is. Daaruit volgt, dat de verzameling der punten P' de cirkel is met OR' tot middellijn. Slechts het punt O behoort niet tot de verzameling.

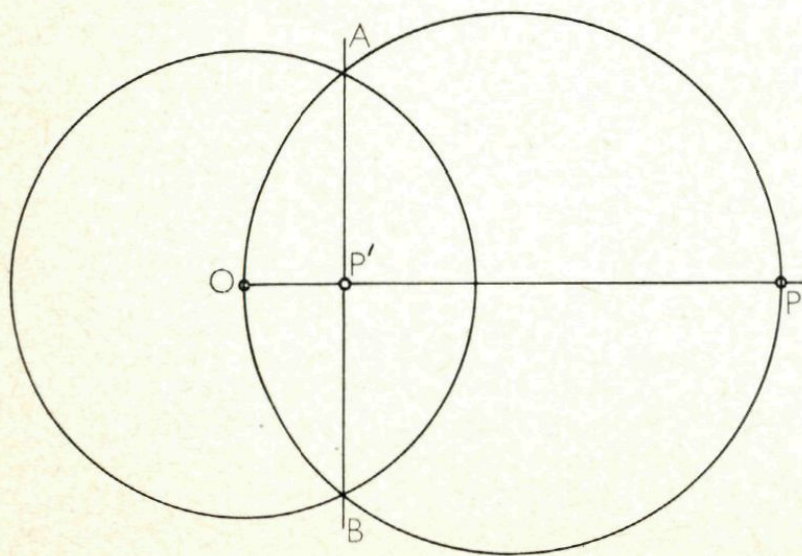


Fig. 13

Het is nu ook mogelijk een eenvoudige constructie te beschrijven om bij elk punt P het beeldpunt P' te construeren. Zie fig. 13. Ligt P buiten de grondcirkel trek dan OP en construeer de cirkel met OP als middellijn. Deze snijdt de grondcirkel in A en B. Trek AB, deze snijdt OP in P'.

Ligt P binnen de grondcirkel, bijvoorbeeld op de plaats, waar in fig. 13 P' ligt, trek dan OP en AB loodrecht erop. Construeer de cirkel door A, B en O. Deze snijdt het verlengde van OP in het beeldpunt.

Nog even één opmerking voor we de cirkel „binnenste-buiten gaan keren”: Het beeld van een rechte door O is weer een rechte. Je kunt dat gemakkelijk nagaan.

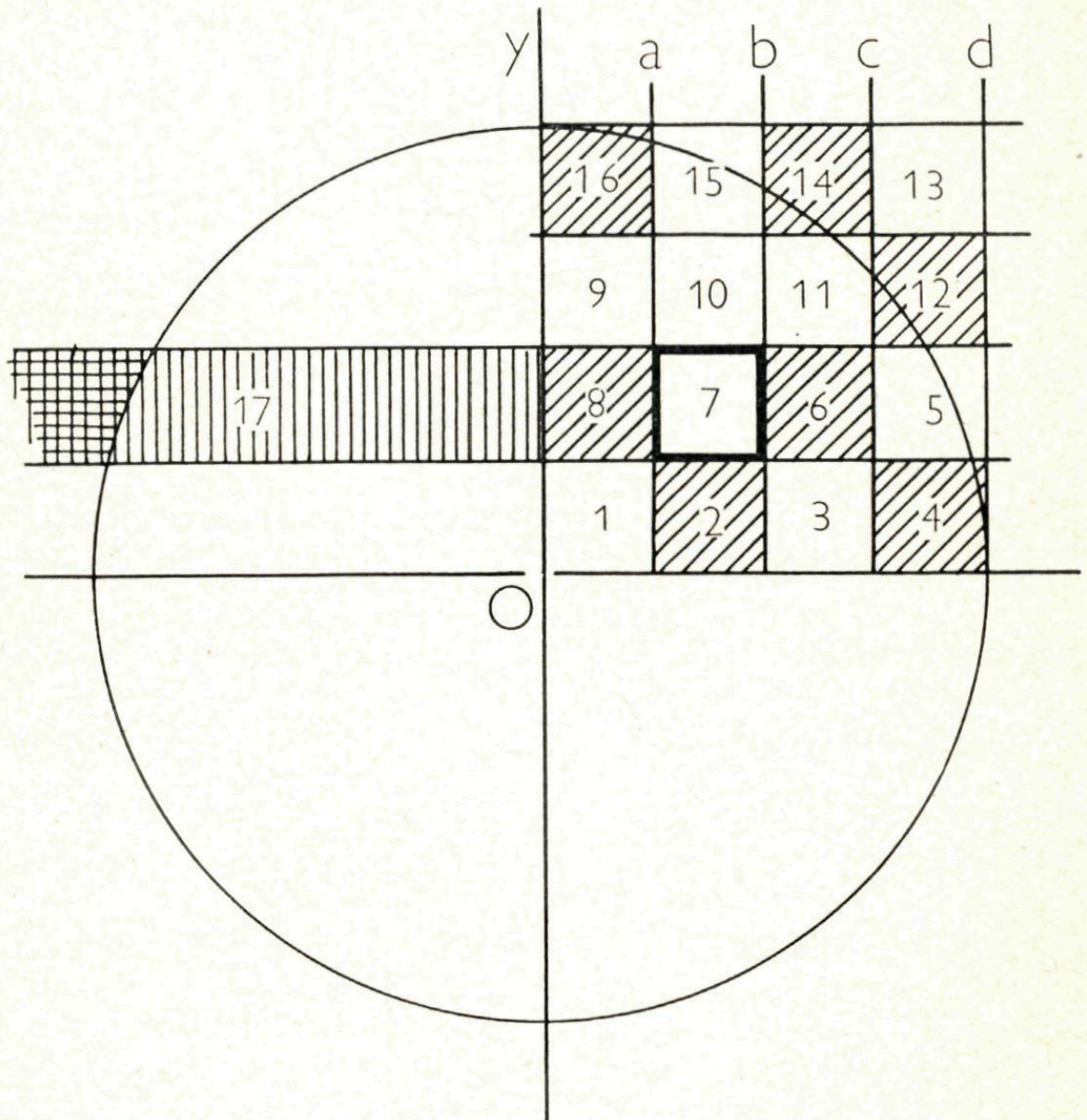


Fig. 14

Vergelijk nu de figuren 14 en 15. (Ontleend aan Praxis der Mathematik sept. '59) In fig. 14 is de grondcirkel getekend en is een deel van het binnen- en buitengebied daarvan in kleinere gebieden verdeeld door horizontale en verticale rechten. In fig. 15 is (op schaal 1:2) het beeldgebied van elk der gebieden uit fig. 14 geconstrueerd. Men moet zich dus eigenlijk voorstellen, dat fig. 15 tweemaal vergroot over fig. 14 werd

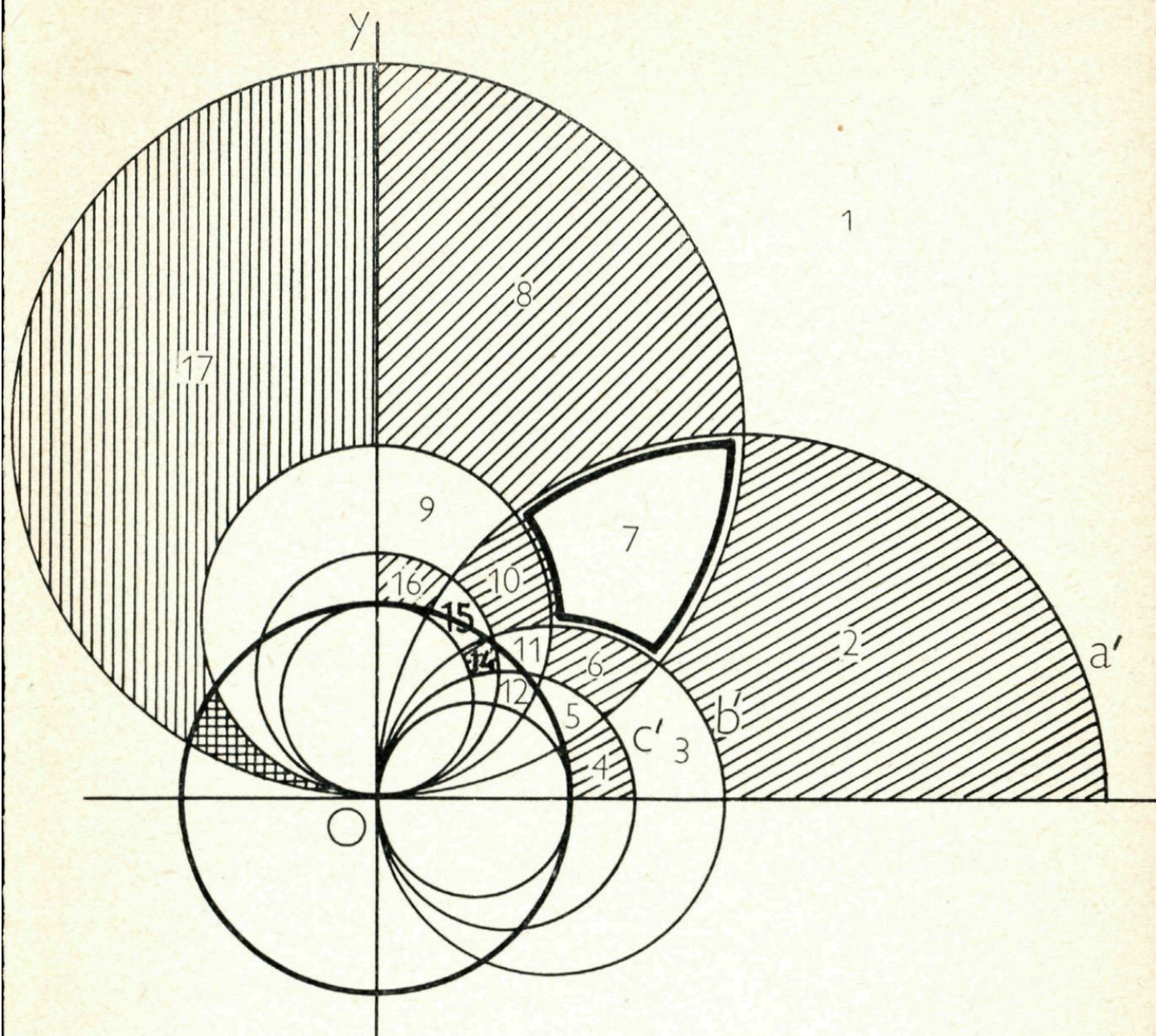


Fig. 15

gelegd, zodat gebied en beeldgebied in dezelfde figuur aanwezig zouden zijn. Dat zou echter bijzonder onoverzichtelijk worden.

In fig. 14 zien we de halve rechten a , b , c en d . In fig. 15 zijn hun beelden halve cirkels a' , b' , c' en d' . Het vierkantje nummer 7 van fig. 14 vinden we in fig. 15 terug. De beeldfiguur is nu geen vierkant meer, maar een door vier bogen begrensd gebied. Je zult het nu niet moeilijk vinden de beelden van de gebieden 1 tot en met 17 in fig. 15 terug te vinden. Het gebied 17 is in fig. 14 een horizontale strook, die binnen de grondcirkel enkel gearceerd is en daarbuiten dubbel. Let er nu op, waar in het beeld van 17 de enkele en dubbele arcering zit. Je ziet, hoe heel het tot in het oneindige voortlopende deel van 17 in fig. 15 is samengeschrom-

peld tot een klein gebied binnen de grondcirkel. Van bijna alle punten van de strook liggen de beeldpunten in de omgeving van het middelpunt O van de grondcirkel.

Maar kijk nu eens, hoe het 't vierkantje 1 vergaan is, dat O als hoekpunt heeft. Zijn beeld wordt begrensd door twee cirkelbogen, waarvan a' er een is en verder door de x -as en de y -as. Maar een beeld van zijn hoekpunt O is er niet. Van de punten dicht bij O in het vierkantje 1 liggen de beeldpunten heel ver weg.

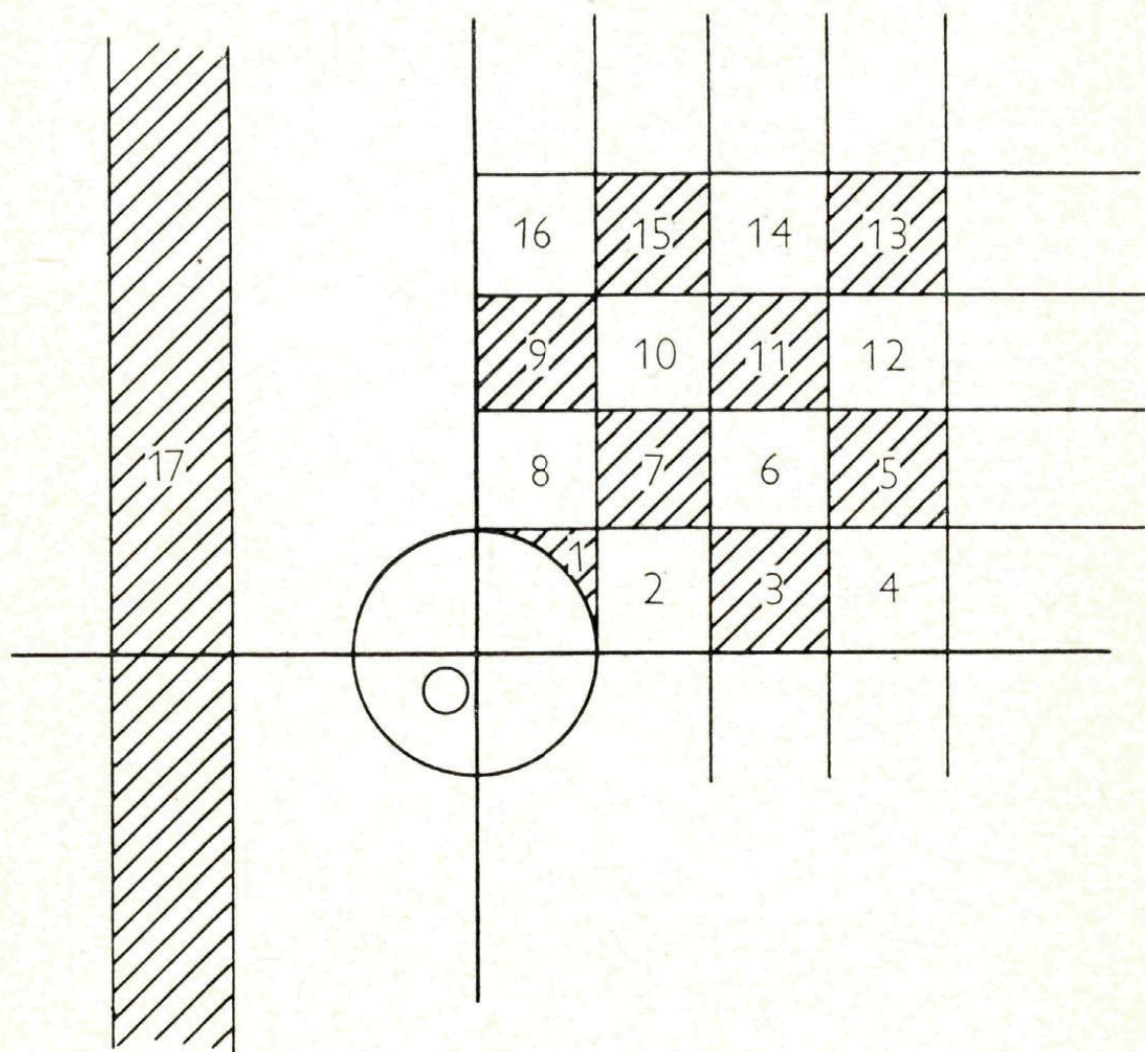


Fig. 16

In de figuren 16 en 17, die we zonder commentaar geven, zie je een afbeelding van een deel van het buitengebied in het binnengebied.

De afbeelding, die we nu besproken hebben en die op zo'n interessante manier de punten van binnen- en buitengebied van de grondcirkel aan elkaar toevoegt, heet *inversie*. Het is een manier van afbeelden, die nog tal van aardige gelegenheden geeft om met figuren te spelen. Zo is bijvoorbeeld het beeld van elke cirkel, die niet door O gaat, weer een

cirkel. Daarbij is echter niet het middelpunt van de beeldfiguur beeld van het middelpunt van de gegeven cirkel.

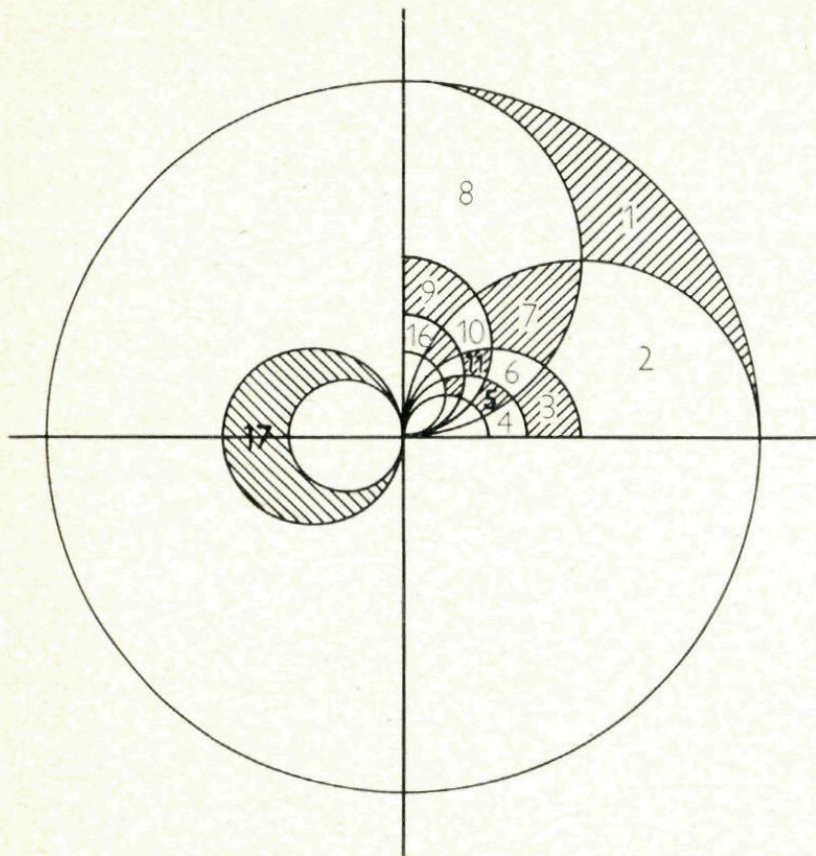


Fig. 17

Er zijn mechanische instrumenten, waarmee de inversie kan worden uitgevoerd. Maar het is zelfs mogelijk om de inversie te zien, nl. bij een holle spiegel of een lens. In fig. 18 is M het krommingsmiddelpunt en F het brandpunt van een holle spiegel. Langs de hoofdas tussen de spiegel en M zijn een aantal cijfers geplaatst (bijvoorbeeld in hout uitgezaagd). Van deze cijfers worden de beelden door de spiegel gevormd. Het cijfer 5 en zijn beeld staan beide bij M. Als het cijfer 1 vlak voor de

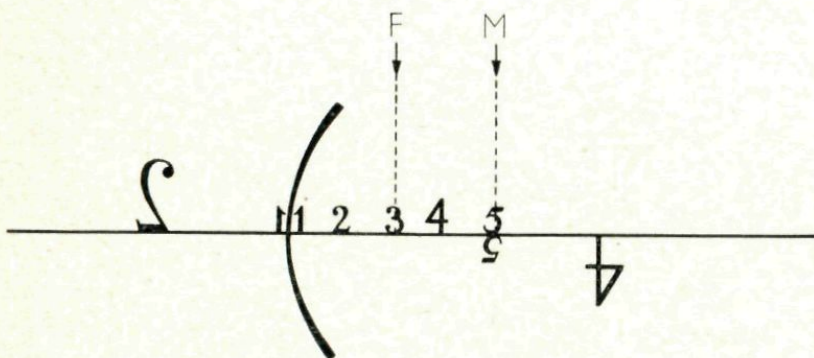


Fig. 18

spiegel wordt gezet, staat zijn beeld er vlak achter. Het beeld van de 3 is in de figuur niet te zien. Het ligt „heel ver weg”. Zelfs zouden we zien, dat het beeld van de 3 gedeeltelijk rechts en gedeeltelijk links heel ver weg ligt. Dit doet allemaal denken aan inversie. Bekijk nu eens de formule voor de holle spiegel:

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

De afstanden v en b worden gemeten tot de spiegel. Laten we nu echter eens veronderstellen, dat het voorwerp de afstand p tot F en het beeld de afstand q tot F heeft, dan is $v = p + f$ en $b = q + f$.

De formule wordt dan:

$$\frac{1}{p+f} + \frac{1}{q+f} = \frac{1}{f}$$

Na enige herleiding blijkt, dat hieruit volgt $pq = f^2$.

Stellen we nu nog voor het gemak $f = 1$, dan herkennen we de formule voor de inversie.

Een touw rondom de evenaar II (zie bldz. 97)

Zoals we weten, is de omtrek van een cirkel met straal R gelijk aan $2\pi R$. Is nu in het eerste der beide problemen de straal x m groter geworden door het touw 1 m te verlengen, dan is dus

$$2\pi(R+x) = 2\pi R + 1$$

Daaruit lezen we af $2\pi x = 1$

Dus $x = \frac{1}{2\pi} \approx 0,16$ m.

We zien, dat het touw overal ongeveer 16 cm opgetild zou moeten worden. Dat is meer dan de meeste mensen schatten.

Bij het tweede probleem werd de straal van de cirkel, die door het touw wordt gevormd 1 m groter, dus dan vinden we voor de nieuwe omtrek

$$2\pi(R+1) \text{ m} = (2\pi R + 2\pi) \text{ m}$$

De omtrek is 2π m groter geworden, dat is ongeveer 6,28 m. Deze frappant kleine uitkomst is onafhankelijk van de lengte van de straal. Hadden we in plaats van de aarde een Edammer kaasje genomen, dan was de uitkomst weer 6,28 m geweest.

Het bovenstaande bracht ons op een paar vragen, die je eens moet overwegen:

1. Wanneer we de straal van een cirkel met 1 cm verlengen, dan wordt zijn omtrek een constant getal groter. Dat wil zeggen een getal, dat onafhankelijk is van de grootte van de straal.
Is het nu ook zo, dat de omtrek van een vierkant met een constant getal vermeerderd wordt, als we zijn halve diagonaal met 1 cm verlengen?

2. Wordt de omtrek van een driehoek met een constant getal vermeerderd, wanneer we hem zodanig vermenigvuldigen, dat de straal van zijn omgeschreven cirkel 1 cm langer wordt? (Weet je, dat in elke driehoek ABC geldt $a = 2R \sin \alpha$, enz.?)
3. Teken een scherphoekige $\triangle ABC$. Trek de hoogtelijn CD. Verleng CD met $DD' = 1$ cm. Trek door D' een rechte evenwijdig met AB, die het verlengde van CA snijdt in A' en het verlengde van CB in B' . Is het verschil van de omtrekken der driehoeken $A'B'C'$ en ABC onafhankelijk van de grootte van $\triangle ABC$?

°° Een vreemde algebra- en meetkundeles IV

door F. van der Blij (Bilthoven)

„Kegelsneden”

In onze meetkunde met weinig punten gaan we nu over tot de bestudering van tweedegraadskrommen (de „kegelsneden”) We kiezen een paar eenvoudige voorbeelden:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Met een beetje verstandig proberen vinden we, dat hierop de volgende punten liggen:

$(0, 1)$; $(0, 6)$; $(1, 0)$; $(2, 2)$; $(2, 5)$; $(5, 2)$; $(5, 5)$ en $(6, 0)$. Deze kwadratische kromme bezit dus 8 punten. Zie fig. 19.

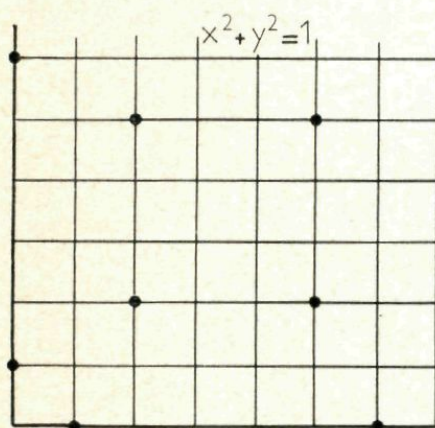


Fig. 19

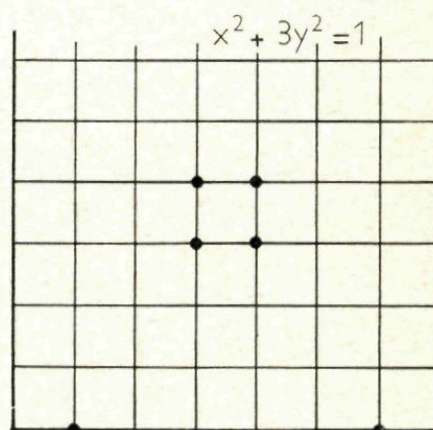


Fig. 20

Bezien we echter $x^2 + 3y^2 = 1$ (fig. 20) dan blijkt het, dat deze kromme slechts de volgende 6 punten bezit:

$(1, 0)$; $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(4, 3)$; $(4, 4)$ en $(6, 0)$.

Een derde voorbeeld: $y - x^2 = 0$ (fig. 21).

Nu vinden we de volgende 7 punten:

$(0, 0)$; $(1, 1)$; $(2, 4)$; $(3, 2)$; $(4, 2)$; $(5, 4)$ en $(6, 1)$.

Een kwadratische kromme met vergelijking $f(x, y) = 0$ heet ontaard, wanneer $f(x, y)$ te ontbinden is in twee factoren van de eerste graad.

Een voorbeeld is

$$x^2 - y^2 = 0$$

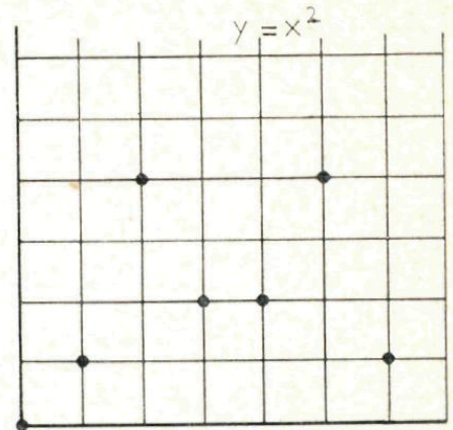


Fig. 21

Je kunt natellen, dat op deze kromme (eigenlijk twee rechten) 13 punten liggen. (Op iedere rechte liggen 7 punten en er is 1 gemeenschappelijk punt).

We vragen ons af of er in het algemeen iets te zeggen is over het aantal punten van een kwadratische kromme. Wanneer de kromme niet ontaard is, blijkt dit aantal steeds 6, 7 of 8 te zijn. We zouden in het geval van 6 punten over een hyperbool, van 7 punten over een parabool en van 8 punten over een ellips willen spreken.

Om de keus van deze namen toe te lichten moeten we iets dieper graven. In de gewone analytische meetkunde klassificeren we de kegelsneden als hyperbolen, parabolen en ellipsen al naar gelang er twee, één of geen oneigenlijke (of oneindige) punten of ook asymptotische richtingen zijn.

Een mooier resultaat krijgen we als we deze oneigenlijke punten aan onze verzameling toevoegen. We krijgen dan een projectieve meetkunde¹.

Zoals we in het vorige artikel zagen, zijn er in onze meetkunde 8 stelsels onderling evenwijdige rechten. De rechten uit één stelsel hebben één en hetzelfde oneigenlijke punt. We zeggen daarom, dat we in onze projectieve meetkunde één oneigenlijke rechte bestaande uit acht oneigenlijke punten toevoegen. Op iedere rechte liggen dan dus acht punten nl. op alle eigenlijke rechten 7 eigenlijke punten en 1 oneigenlijk punt. Het totale aantal punten is nu $7^2 + 7 + 1$. Op iedere niet-ontaarde tweedegraadskromme liggen 8 punten, nl. 8 eigenlijke (ellips), 7 eigenlijke en 1 oneigenlijke (parabool) of 6 eigenlijke en 2 oneigenlijke (hyperbool).

¹ Zie Pythagoras, 2e jaargang pg. 5, 38, 95, 116.

We kunnen nu allerlei sommen uit de analytische meetkunde opnieuw gaan maken. We geven maar een voorbeeld. We gaan uit van $x^2 + y^2 = 1$ en beschouwen alle lijnen door het punt $(0, 1)$ op deze „kegelsnede”. Om de snijpunten van deze lijnen met de kegelsnede te bepalen, rekenen we even. De vergelijking van de lijnen is $y = mx + 1$. We elimineren y uit

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 1, \\ y &= mx + 1.\end{aligned}$$

We vinden

$$(1 + m^2)x^2 + 2mx = 0.$$

Een wortel is $x = 0$, hierbij hoort het punt $(0, 1)$, maar we vinden nog een tweede wortel en dus een tweede snijpunt. Alleen als $m = 0$ vinden we het punt $(0, 1)$ nog een keer. We zeggen dat de lijn met $m = 0$ in $(0, 1)$ raakt aan onze kegelsnede.

Om de figuren wat beter te doorzien, bekijken we onze meetkunde nog eens op een andere manier. We gaan uit van alle punten (x, y) in het gewone vlak met gehele coördinaten x en y . We stoppen nu twee punten (a, b) en (p, q) in een zelfde „kistje”, wanneer a en p in de zelfde doos (modulo 7) liggen. Zo komen bijvoorbeeld $(3, 5)$ en $(10, -2)$ in een zelfde kistje. Alle punten van het vlak komen zo in 49 kistjes te liggen. Het zal duidelijk zijn dat deze kistjes juist corresponderen met de punten van het vlak met 49 punten.

Neem nu eens een velletje roosterpapier en teken daarop alle punten die in het kistje liggen, waarin $(2, 4)$ ligt, we zouden dit kistje $(2, 4)$ kunnen noemen. We tekenen nu de lijn $y = 2x$ in onze meetkunde met 49 punten (zie fig. 22) en vergelijken deze met een tekening in een gewoon vlak van alle punten met gehele coördinaten, die liggen in één van de kistjes $(0, 0)$; $(1, 2)$; $(2, 4)$;

$(3, 6)$; $(4, 1)$; $(5, 3)$; $(6, 5)$.

Het lijkt een verschrikkelijk werk, maar het patroon wordt eenvoudig (fig. 23).

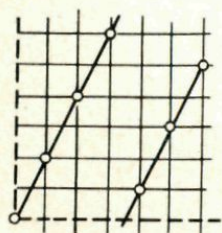
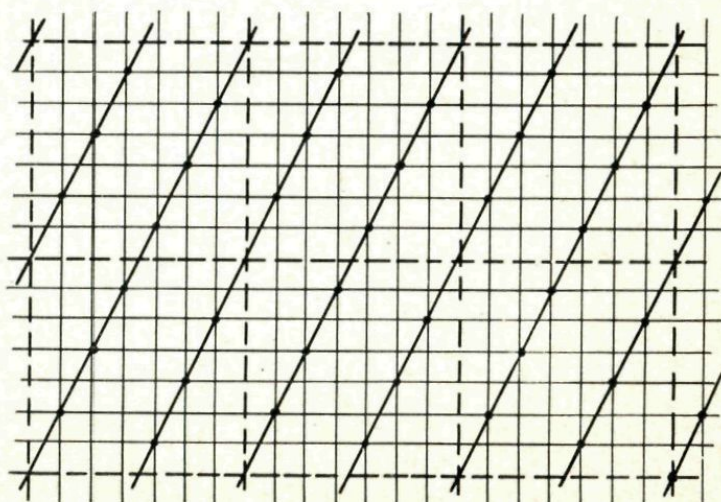


Fig. 22

Fig. 23



Als je de figuur van het vlak met 49 punten als een tegel opvat, kunnen we het gewone vlak met deze tegels beleggen en wel zo, dat op de punten $(0, 0)$; $(7, 0)$; $(7, 7)$; $(0, 7)$ enz steeds het punt $(0, 0)$ van onze tegel komt te liggen. De „rechte lijn” uit onze vreemde meetkunde correspondeert nu met een stelsel evenwijdige rechten uit de gewone meetkunde.

Gebruik nu op de zelfde manier eens de figuren 19, 20 en 21 als tegels voor een tegelvloer (denk er om dat iedere tegel de afmeting 7×7 moet hebben). De figuren voor de kegelsneden worden dan verzamelingen roosterpunten in prachtige symmetrische patronen. (zie fig. 24).

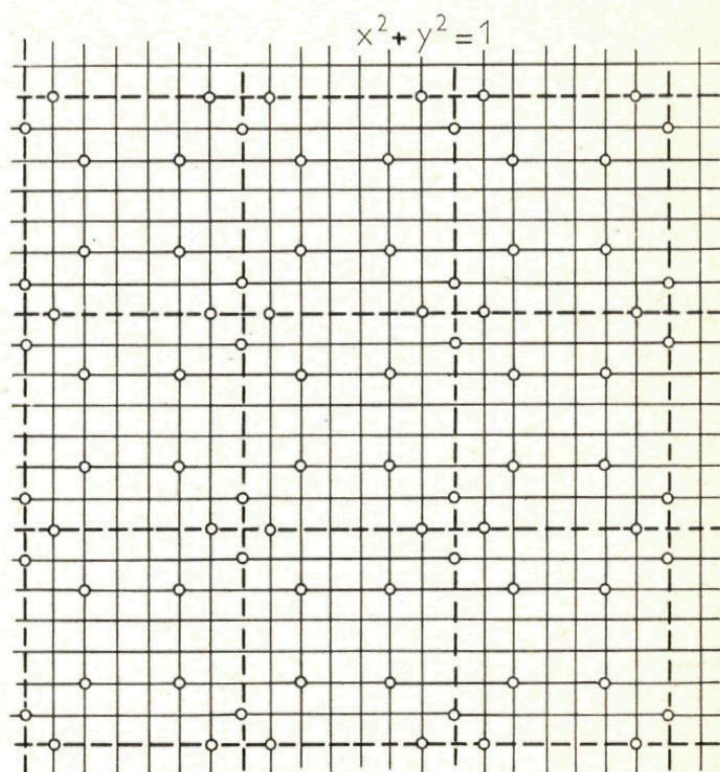


Fig. 24

Slotwoord

Zowel bij de algebra als bij de meetkunde met restklassen zijn nog vele opgaven te maken en stellingen af te leiden. Men heeft zelfs wel geprobeerd deze meetkunde (dan wel met heel veel punten!) voor de natuurkunde te gebruiken inplaats van de gewone meetkunde.

Bij de algebra maakten we al een begin met de theorie van de wortels. Met een enkel woord nog iets over de mogelijkheid een *logaritme* in te voeren. We werken weer met het priemgetal 7 als uitgangspunt en proberen bijv. de vergelijking

$$2^x = a$$

op te lossen. Eerst kiezen we $a = 1$. Met proberen vinden we $x = 0$, $x = 3$, maar ook $x = 3k$ met een willekeurig geheel getal k .

De vergelijking $2^x = 2$ heeft als wortels $1 + 3k$ voor alle gehele getallen k . Maar $2^x = 3$ heeft geen enkele wortel. Aan de andere kant controleer je zelf eenvoudig, dat

$$3^x = a$$

voor iedere $a \neq 0$ een wortel heeft:

a	1	2	3	4	5	6
x	0	2	1	4	5	3

Omdat $3^6 = 1$ kunnen we hier bij iedere wortel weer een zesvoud toevoegen. Het geheel ziet er dus nogal wat vreemd uit om logaritmen in te voeren. We zouden echter met wat goede wil de bovenstaande tabel een logaritmentafel voor het grondtal **3** kunnen noemen.

In ieder geval hoop ik, dat deze vreemde algebra- en meetkundeles je wat ideeën aan de hand gedaan heeft om nog wat meer hiermee te experimenteren. Veel succes!

Oplossingen Denkertjes No. 4

31. 72° , 72° 108° , 108°

32. $x^3 = [x] + 3$, zodat x^3 een geheel getal moet zijn. Na enig proberen blijkt dit alleen 4 te kunnen zijn: $\sqrt[3]{4}$ is de enige wortel van deze vergelijking.

33. Zie fig. 25; de straal van de cirkel is 6 cm; de cirkel en de zijden van het vierkant behoren niet tot de gevraagde verzameling.

34. De eerste bewering is juist, de tweede niet. Wordt een veelvlak door n vierhoeken gegrensd, dan hebben de zijvlakken samen $4n$ zijden. Elke ribbe neemt twee van die zijden op, zodat er $2n$ ribben zijn. Dat de tweede bewering niet juist is, toont figuur 26.

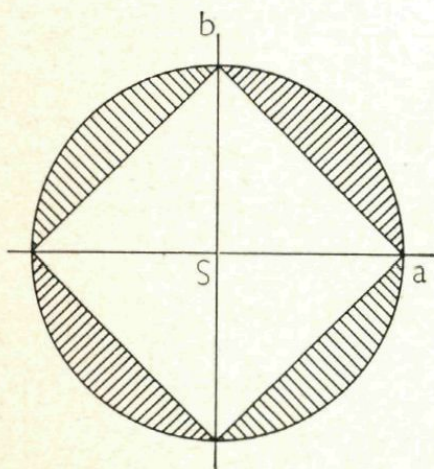
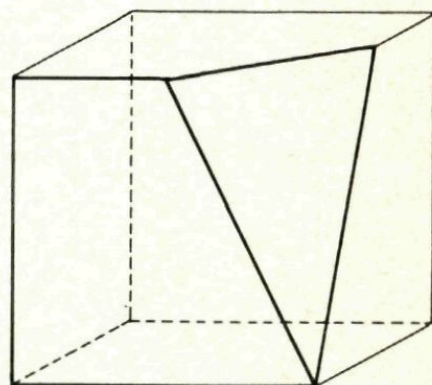


Fig. 25

Fig. 26



35. Men kan het doel met één knip bereiken na de draad om een rechthoekig stukje karton gewonden te hebben (breedte 10 cm). Dit knipt men dan midden door. Denk eraan: het beginpunt van de draad moet *midden* op het kartonnetje liggen.

36. Het vierkant zou natuurlijk 10 rijen van 10 kleine vierkantjes moeten bevatten. Deze 100 velden zou men als bij een schaakbord afwisselend zwart en wit kunnen maken, zodat er 50 witte velden en 50 zwarte velden behoren te komen. Deze kleuren zouden dan van te voren al op de legpuzzelstukjes aangebracht moeten worden. Sommige van de stukjes krijgen drie zwarte velden en een wit veld, andere krijgen drie witte velden en een zwart veld. Omdat het aantal stukjes oneven is, kan dit echter niet zo gebeuren, dat er 50 witte en 50 zwarte velden komen.
37. Een dame kan in vier richtingen zetten. Een opeenvolging van twee zetten, die verschillende richtingen moeten hebben, kan op $4 \cdot 3 = 12$ manieren gemaakt worden. Inderdaad is 12 het maximum. Probeer dat maar met de velden d2 en e5.
38. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 97 \cdot 103$ kan voor natuurlijke x en y alleen zo tot stand gebracht worden:
 $x + y = 97 \cdot 103$ en $x - y = 1$, dus $x = 4996$ en $y = 4995$;
 $x + y = 103$ en $x - y = 97$, dus $x = 100$ en $y = 3$.
39. Vul voor x achtereenvolgens 0, 1, -1, 2 en -2 in. Dan vinden we de vijfvouden d , $a + b + c + d$, $-a + b - c + d$, $8a + 4b + 2c + d$ en $-8a + 4b - 2c + d$. Omdat we nu al weten, dat d een vijfvoud is, kunnen we beweren dat $a + b + c$, $-a + b - c$, $4a + 2b + c$ en $-4a + 2b - c$ vijfvouden zijn. Door de som van de eerste twee getallen te bestuderen vinden we dat b een vijfvoud is. Nu kunnen we dus zeggen, dat $a + c$ en $4a + c$ vijfvouden zijn, evenals hun verschil $3a$ en hun som $5a + 2c$. Dit levert tenslotte, dat a en c vijfvouden zijn.
40. Noemen we de hoeken van de oorspronkelijke driehoek α , β , γ dan zijn die van de nieuwe driehoek $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, $90^\circ - \frac{1}{2}\beta$ en $90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$. Door deze bedragen in de een of andere volgorde aan elkaar gelijk te stellen, vinden we dat $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ de enige oplossing is.

De ring uit de knoop

Albert Verbeek uit Blaricum laat zich niet gauw iets wijs maken. Hij probeerde toch de ring uit foto 4, (Pythagoras no.3) naar rechts te krijgen en het ging prima.

Wij hadden nl. een „verkeerde knoop” gefotografeerd.

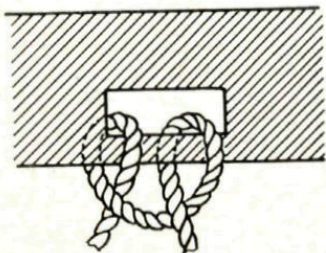


Fig. 27

De tekening van figuur 27 geeft weer hoe de knoop dan wel had moeten zijn. En wie met die knoop kans ziet de ring naar rechts te krijgen, wordt een vermaard man.

PYTHAGORAS - WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

Het is voor de redactie van een tijdschrift voor jongeren bijzonder belangrijk de eerlijke kritiek van zijn lezers te ontvangen. Daarop kan dan het beleid voor de volgende jaargang worden gebouwd. We willen het je voor het zenden van deze kritiek erg gemakkelijk maken. Hieronder wordt telkens gevraagd welk artikel je interessant, vervelend enz. vond. Je kunt dat het beste vermelden door de eerste bladzijde te noemen waarop dat artikel of de serie artikelen begon.

Vul eerst dit in:

Leeftijd

jaar

Schooltype

Klas

Noem in volgorde van voorkeur de drie interessantste artikelen in deze jaargang

Bladz.

Noem de vervelendste artikelen

Bladz.

Artikelen, die je te moeilijk vond

Bladz.

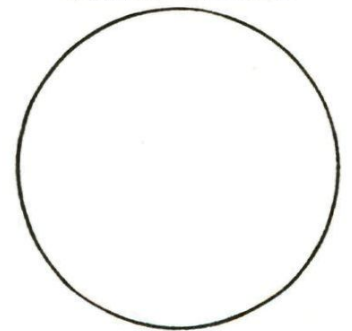
Drie interessante artikelen uit voorgaande jaargangen

Jaarg.

Bladz.

Wensen voor de volgende jaargang

Kan ongefrankeerd
worden verzonden



ANTWOORDKAART

Machtiging 13

GRONINGEN

Inversie

Uit het Latijn. *Invertere* = *omkeren*.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden.

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,— per jaargang. Voor anderen f 3,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J.B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.