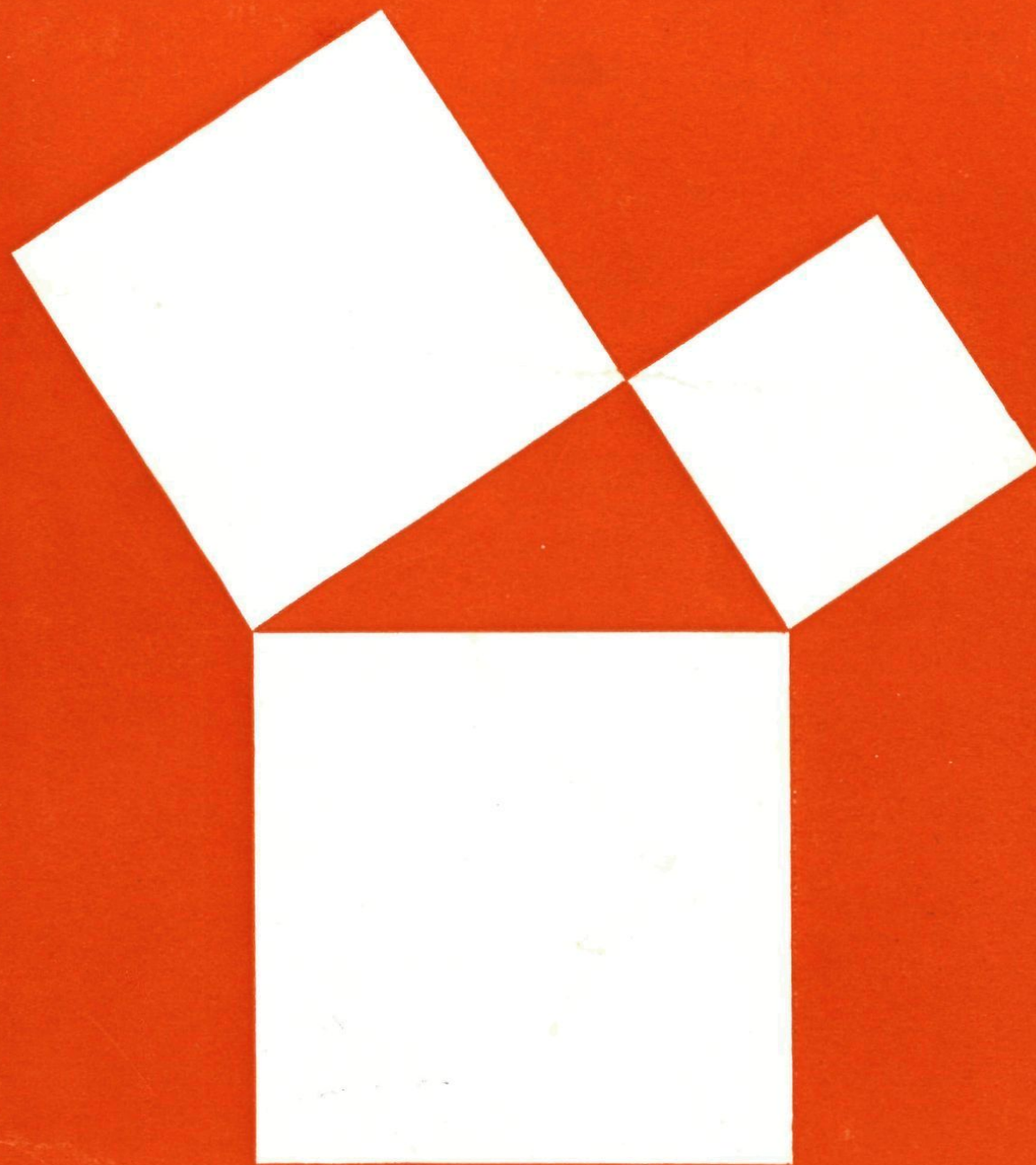


PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

6

Vierde jaargang



*Ook dit is een spel.
Een der „tegenspelers” is de zwaartekracht.
Is er een „winnende strategie” voor te vinden?*

De wiskunde in het spel

Je kunt viool spelen en vadertje en moedertje spelen, toneelspelen en een spelletje halma doen. De een ziet graag de zon op het water spelen en de ander interesseert zich meer voor het spel van Ajax tegen Blauw-Wit. Als het in de politiek zo grof toegaat, dat geen enkele journalist meer aan een schaakspel denkt, dan schrijven ze allemaal over touwtrekken om de macht.

Zodra je aandacht op dit soort taalkundige eigenaardigheden gericht is, begin je ze overal te ontmoeten. En dan ga je langzamerhand begrijpen, dat het spel in het leven van de mensen toch wel een zeer belangrijke plaats inneemt (bijna had ik geschreven . . . een belangrijke rol speelt). En dat is dan de reden, waarom dit nummer van PYTHAGORAS geheel aan het spel besteed wordt.

Er zijn dikke boeken volgeschreven over de betekenis van spel en spelen voor de mens. Wonderlijk genoeg zijn het allemaal ernstige boeken, vol diepgaande psychologische beschouwingen en zonder een greintje speelsheid. Verwacht echter geen zwaarwichtigheid van het dunne boekje, dat je nu in handen hebt.

In plaats daarvan zal je er enkele spelen in aantreffen, waarmee je je best zult kunnen vermaken. Natuurlijk zijn het spelen met een wiskundige inslag, bijvoorbeeld doordat ze de spelers voor ruimtelijke problemen stellen. Sommige van die spelen worden in dit nummer ook geanalyseerd. Om de spelpret niet te bederven hebben we die analyses echter niet onmiddellijk achter de spelregels afgedrukt. Speel liever eerst een poosje zonder die analyses te kennen. Probeer daarbij zelf wat te speuren naar strategie en tactiek. Ken je eenmaal alle mogelijkheden, die door de spelregels worden toegelaten, dan is de aardigheid er immers af. Tenzij je zo'n rasechte wiskundige amateur bent, dat voor jou juist dat scherpzinnige denken in die analyse de grootste aardigheid is.

Nee, die laatste zin is te onvriendelijk. Je zou er namelijk de indruk uit kunnen krijgen, dat echte wiskundigen zelf niet van spelen houden. En dat is beslist niet waar. Laat ons daarom eens wat nauwkeuriger denken over de overeenkomsten tussen het spelen van een spel en het bedrijven van wiskunde.

Bij elk spel tracht je een welomschreven doel te bereiken. Bij schaken is dat het matzetten van je tegenstander, bij voetbal probeer je de bal tussen de doelpalen door te laten gaan. Nu zou je natuurlijk met die bal onder je arm tussen die palen door kunnen wandelen, maar dat is niet de be-doel-ing. Er zijn namelijk spelregels, waar je je aan te houden hebt, en die staan dat niet toe.

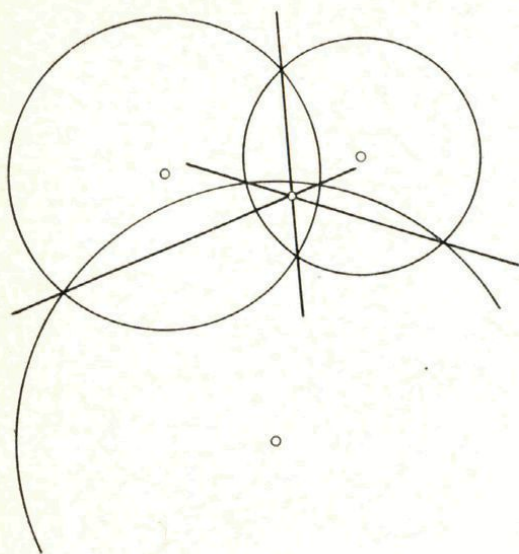


Fig. 1

Bekijk nu eens figuur 1. Daarin wordt de volgende stelling gedemonstreerd: als de middelpunten van drie elkaar twee aan twee snijdende cirkels niet op één rechte liggen, dan hebben de drie rechte lijnen die de gemeenschappelijke koorden bevatten één punt gemeen.

Om je van de waarheid van deze stelling te overtuigen, zou je figuur 1 een groot aantal malen kunnen variëren. Geef de drie cirkels allerlei afmetingen en allerlei standen, constateer dat telkens weer die drie lijnen door een punt gaan, en je bent binnen een paar minuten van de waarheid van de stelling overtuigd.

Dit is helaas tegen de regels van het wiskunde-spel. Bewijzen moet je, en daarbij mag je gebruiken de logica en het hele arsenaal van axioma's, definities en stellingen!

Zie je de overeenkomst met het voetbalspel? Het enige verschil is, dat de scheidsrechter hier een rood potlood heeft in plaats van een fluitje.

Spelregels kan je meestal tot op zekere hoogte vrij kiezen (merkwaardige gedachte: je hebt de vrijheid om jezelf aan banden te leggen). In de wiskunde gebeurt dat ook. Er zijn allerlei takken van wiskunde ontstaan, doordat de een of andere wiskundige een stelsel axioma's en definities naar willekeur koos en daarna eens proberen ging wat er nu allemaal te bewijzen viel. Zo was dan een nieuw wiskunde-spel ontstaan. Een voorbeeld daarvan is matrix-algebra.

Spelregels moeten het een beetje moeilijk maken om het speldoel te bereiken. Dan is het spel pas aardig. Ongetwijfeld ken je het spel, dat om de een of andere onverklaarbare reden „boter, kaas en eieren” genoemd wordt (zie figuur 2). Twee spelers zetten om de beurt hun merkteken in een open vakje. Hij, die er in slaagt een hele rij, kolom of diagonaal met zijn merkteken te vullen, wint het spel. In het getekende diagram is de kruisjes-speler aan de beurt en hij staat op het punt te verliezen. Dit spel

×	○	
	○	×
○		

Fig. 2

is zeer bepaald niet aardig, omdat het aantal mogelijkheden te gering is. Ik heb echter eens gelezen, hoe op een amerikaans congres van wiskundigen iemand op het idee kwam om het spel driedimensionaal te spelen (zie figuur 3). Niet op een speelveld van negen vakjes dus, maar in een speelruimte van 27 cellen. Welnu, binnen enkele ogenblikken zat iedereen kubusjes te tekenen en verwoed te spelen. Dat duurde echter niet lang, want al heel vlug kwam een van de aanwezigen op het idee om het spel te spelen zonder „diagram”, door alleen maar de nummers van de cellen op te schrijven. Daarbij bestond elk celnummer uit drie cijfers, drie coördinaten; alleen de cijfers 1, 2, 3 werden daarvoor gebruikt. De grote (en aantrekkelijke) moeilijkheid daarbij was om aan die celnummers te kunnen zien welke cellen keurig op een rijtje lagen. Na enig zoeken en spelen kreeg men natuurlijk ook dit probleem wel onder de knie. En tenslotte speelde men het spel vierdimensionaal, met „celnummers”, die uit vier cijfers bestonden, los van ruimtelijke aanschouwelijkheid dus.

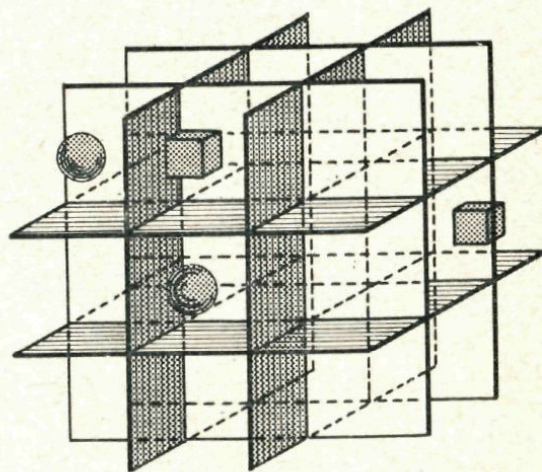
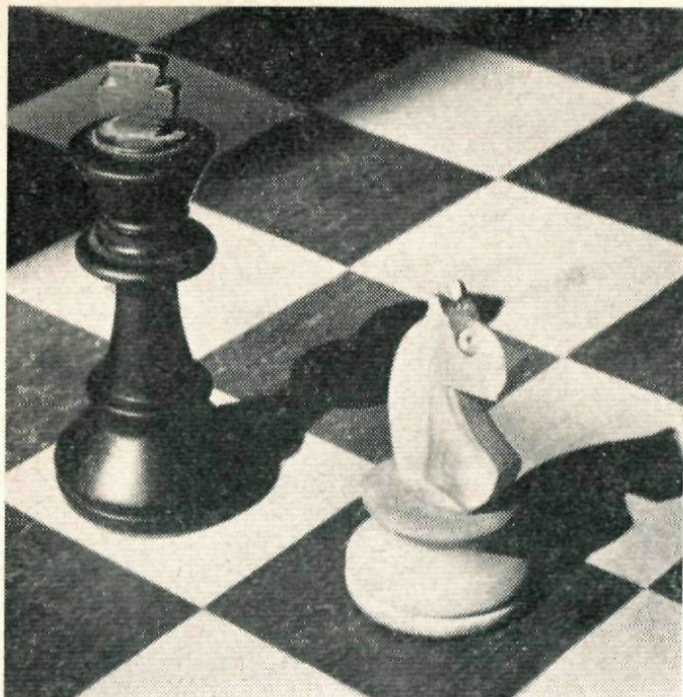


Fig. 3

En hiermee is dan een tweede punt van overeenkomst tussen spelen en wiskunde bedrijven aan een voorbeeld toegelicht: voor beide activiteiten is een behoorlijke dosis fantasie nodig. In het spel en in de wiskunde moet men snel kunnen combineren, moet men regelmaat en wetmatigheid in gecompliceerde situaties kunnen zien, moet men de soepelheid van geest bezitten om „de zaak eens van een andere kant te bekijken” als de blik van deze kant uit weinig perspectief geeft. En zo zouden we wel verder kunnen gaan. Heus, de meeste wiskundigen spelen graag en spelen vaak. Eigenlijk spelen zij zelfs als zij werken, want de wiskunde is ... een boeiend spel.

Regelmaat en wetmatigheid opmerken moet men ook als het spel Go wordt gespeeld. Liefhebbers van dit uit Japan afkomstige spel vindt men ook in Nederland, o.a. verenigd in de Nederlandse Go-Bond. De secretaris van deze bond, de Heer Schilp, die het artikel van deze aflevering over het spel Go schreef, wil belangstellenden gaarne nader inlichten. Zijn adres is Sallandstraat 16^{II}, Amsterdam Z.



De strategie voor het schaakspel is zelfs voor de groten onder de spelers nog steeds vol verrassingen.

Strategie

In dit inleidende artikel wordt een begrip besproken, dat je in deze aflevering telkens zult ontmoeten.

Twee spelers, die we kortheidshalve A en B zullen noemen, spelen het volgende spel met lucifers. Op de tafel liggen drie stapeltjes van opvolgend 7, 12 en 19 lucifers. Om de beurt mogen A en B daarmee een „zet” doen; A begint. Er zijn twee soorten zetten toegestaan: het splitsen van een stapeltje in twee kleinere stapeltjes (zonder lucifers weg te nemen) en het wegnemen van een deel van één bepaald stapeltje of van dat hele stapeltje. Winnaar is degene, die de laatste lucifer pakt.

Een mogelijk spelverloop is dus bijvoorbeeld zo:

beginstand : 7, 12, 19
 na zet 1 van A: 3, 12, 19
 na zet 1 van B: 3, 5, 7, 19
 na zet 2 van A: 3, 5, 19
 na zet 2 van B: 3, 5, 4
 na zet 3 van A: 3, 5
 na zet 3 van B: 3, 1, 4
 na zet 4 van A: 3, 1
 na zet 4 van B: 1, 1
 na zet 5 van A: 1

B neemt in de vijfde zet de laatste lucifer weg en wint.

Bij het bestuderen van dit spelverloop zal je jezelf wel de vraag stellen „Was het nodig, dat A verloor? Heeft hij niet ergens een fout gemaakt? Was het wel zo verstandig om in zijn vierde zet dat hele stapeltje van 4 weg te pakken?”. We raden je aan, om eerst maar eens zelf te proberen die vragen te beantwoorden. Lees dus niet verder, maar speel dit simpele spel zelf eerst eens enige malen. Dan krijg je misschien de moeilijkheden wel door. En in elk geval behoudt dit spel dan nog even voor jou zijn waarde. Als je het eenmaal ten volle doorziet, dan is de aardigheid eraf.

Wanneer je tot de conclusie gekomen bent, dat A niet had behoeven te verliezen en wanneer je bovendien weet, hoe hij de winst had kunnen afdwingen, dan is dat heel knap van je. Want dit spelletje bevat in al zijn eenvoud toch een bijzonder verrassend element, dat beslist niet gemakkelijk te vinden is.

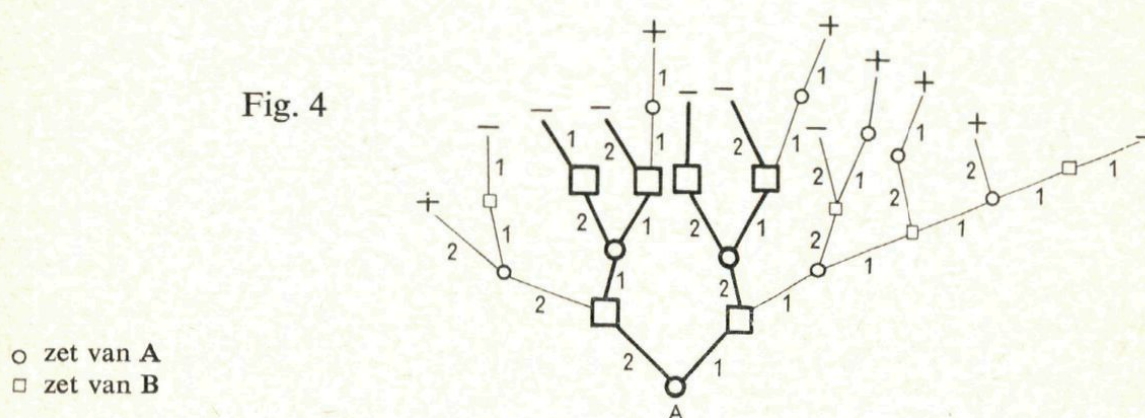
A had in zijn eerste zet de grote stapel moeten splitsen in twee kleinere, zodat daardoor de symmetrische stand 7, 12, 12, 7 ontstond. Die symmetrie wordt dan natuurlijk door B verstoord, maar ... telkens opnieuw door A hersteld. Maakt B er 7, 10, 12, 7 van, dan doet A de zet van B na en levert 7, 10, 10, 7. Neemt B een hele stapel weg, zodat er bijvoorbeeld 12, 12, 7 ontstaat, dan neemt A een even grote stapel weg en scheept B met 12, 12 op. Splitst B tot 7, 3, 9, 12, 7 dan splitst A ook tot 7, 3, 9, 9, 3, 7. En zo verder. Zolang B kan zetten, kan A antwoorden. Dus is A verzekerd van de laatste zet en wint dan ook onherroepelijk.

Ziezo, dat was dan een eerste voorbeeld van een strategie, en wel van een tot winst voerende strategie voor A. Straks zullen we dit begrip wel scherper omschrijven. Maar eerst bespreken we nog een voorbeeld.

Ons tweede spel¹ wordt gespeeld met slechts één stapeltje lucifers. Het zijn er maar zes. Bij elke zet mag de speler naar keuze er 1 of 2 wegnemen. Wie de laatste lucifer kan wegnemen heeft gewonnen. Het merkwaardige bij dit spel is, dat degene, die de eerste zet moet doen, bij foutloos tegenspel van de tegenstander, zeker is het spel te verliezen. Dit wordt op een eenvoudige manier duidelijk, als er een graph getekend wordt van het spelverloop. Elke zet wordt aangegeven door een hoekpunt van de graph, terwijl elke kant van de graph een der mogelijkheden van die zet vertegenwoordigt. Als A begint heeft hij de keus uit twee mogelijk-

¹ Ontleend aan: E. Herrmann, Spieltheorie und lineares Programmieren.

heden: 1 wegnemen of 2 wegnemen. Daarom gaan er van het onderste hoekpunt van de graph twee kanten uit. Bij de ene kant staat 1, bij de andere 2. Het zal duidelijk zijn, dat er bij elk hoekpunt twee kanten vertrekken.



Elk hoekpunt van de graph (met uitzondering van het eerste) is nu met juist één lager gelegen hoekpunt verbonden. De hoekpunten, vanwaar geen kanten meer vertrekken heten eindpunten. De graph, die op deze wijze ontstaat heet een *boom*. Bij een eindpunt is een $+$ geplaatst, als de laatste zet voor A winst betekende en een $-$, als deze verlies voor A aangaf. Zo'n $-$ betekent dus winst voor B . Uit de graph is nu gemakkelijk af te lezen, dat B bij foutloos spel altijd wint. Zie maar de vetgetekende wegen in de graph. De strategie voor B is ook duidelijk. Hij moet telkens zorgen, dat zijn zet en de daaraan voorafgaande van A samen een wegnemen van 3 lucifers opleveren.

Onderzoek eens met een graph of er tot winst voerende strategieën voor A of B zijn, als begonnen wordt met 7 lucifers en de spelregels verder hetzelfde blijven.

Na deze twee voorbeelden gaan we voorzichtig eens proberen de theoretische achtergronden te verkennen. We gebruikten het woord strategie. Dat doet denken aan krijgskunde, aan een generale staf, aan het nemen van ingrijpende beslissingen, aan het inzetten van troepen en materiaal. Wat bedoelt men echter in de *speltheorie* met een strategie? Er zijn spelen, waarbij geen strategie mogelijk is. Men noemt ze hazardspelen. Een voorbeeld daarvan is de roulette. Het balletje wordt aan het rollen gebracht. Op welke kleur of op welk nummer het zijn reis zal eindigen hangt van het toeval af. De speler kan het niet beïnvloeden. Bij *strategische* spelen ligt de zaak anders. De twee of meer spelers kun-

nen dan handelend optreden en hebben meestal verschillende mogelijkheden om het verloop van het spel te beïnvloeden. Omdat ze die echter allen hebben, staat de einduitslag voor de meesten van hen niet van te voren vast. Dit is slechts het geval als een van hen een winnende strategie kent, zoals in de zojuist genoemde voorbeelden, bovendien in de gelegenheid is die te gebruiken (bijvoorbeeld door op de juiste tijd aan zet te zijn) en dan nog foutloos speelt. Elk van de handelingsmogelijkheden, die een speler bij het spelen heeft, noemen we nu een strategie. Bij de meeste spelen beschikt elke speler over een groot aantal strategieën. Het is de kunst de beste daarvan te kunnen vinden. De speltheorie wil de spelers daarbij behulpzaam zijn. Nu moet je bij spelen in dit geval niet alleen aan gezelschapsspelen denken. Deze zijn niet anders dan vereenvoudigde modellen van de „spelen”, die in het sociale leven gespeeld worden. Denk maar aan twee kruideniers in een zelfde buurt, die het spel om de klanten spelen. Hun strategieën bestaan in het geven van kortingen, het verstrekken van spaarzegels, de psychologische beïnvloeding door de reclame, enz. enz.

In 1943 verscheen dan ook een belangrijk boek over speltheorie, geschreven door een wiskundige (John von Neumann) en een econoom (Oskar Morgenstern). De titel van het boek is 'Theory of Games and Economic Behaviour'.

Hier is een voorbeeld van een economisch spel:

Stel je voor, dat twee olieconcerns *A* en *B* samen een gemeenschappelijke markt hebben. Ze hebben dan dus op deze markt geen andere concurrenten. Hoe spelen ze nu hun spel om de winst? Wat zijn hun strategieën? We zouden kunnen zeggen, dat ze elk twee strategieën tot hun beschikking hebben, nl. de afzet beperkt houden of de markt overstroomen met het eigen produkt. Zo ontstaan er vier mogelijkheden voor het spel:

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| 1. <i>A</i> houdt de afzet beperkt, | <i>B</i> houdt de afzet beperkt, |
| 2. <i>A</i> houdt de afzet beperkt, | <i>B</i> overstroomt de markt, |
| 3. <i>A</i> overstroomt de markt, | <i>B</i> houdt de afzet beperkt, |
| 4. <i>A</i> overstroomt de markt, | <i>B</i> overstroomt de markt. |

Wanneer ze geen onderlinge afspraak maken om zich aan mogelijkheid 1 te houden, zal in het algemeen de onderlinge concurrentie hen brengen tot mogelijkheid 4.

Het spreekt vanzelf, dat de economische „spelen” veel moeilijker te doorzien zijn, dan de beide eenvoudige voorbeelden, die we gaven. Deze laatste hebben nl. een aantal kenmerken, die de meeste spelen niet bezitten:

1. Ze worden gespeeld door slechts *twee spelers*.
2. Ze zijn *eindig*. Dat wil zeggen, dat er na een eindig aantal zetten een eind komt aan het spel. Bij de voorbeelden zal het duidelijk zijn, dat er na elke zet minder lucifers zijn, zodat na eindig veel zetten de lucifers op zijn. Spelen, die als graph een boom hebben met eindig veel kanten, zijn eindige spelen.
3. Beide spelen leiden tot winst voor een der spelers en dus tot verlies voor de andere bij elke aan de spelregels voldoende mogelijkheid. Er is geen remise mogelijk, zoals bij schaken. Het zijn dus *spelen met een beslissing*.

Het NIM-spel, dat in de volgende bladzijden besproken wordt, heeft een winststrategie voor een der spelers, die verrassend eenvoudig is, maar helemaal niet gemakkelijk te bedenken. Het eerste voorbeeld, dat we hiervoor noemden bezit een winststrategie voor *A* in het door ons besproken geval. Wordt het echter gespeeld met drie stapeltjes van resp. 1, 6 en 8 lucifers, dan bezit niet *A* maar *B* een winststrategie, die je misschien zelf wel kunt vinden. En denk er eens over na, hoe de toestand is, wanneer in dat zelfde spel een stapeltje ook in 3 kleinere stapeltjes gesplitst mag worden.



Het NIM-spel I

Het NIM-spel, dat naar men zegt, van Chinese afkomst is, wordt door twee spelers gespeeld, meestal met lucifers. Er zijn veel variaties in het spel mogelijk, maar wij zullen er één van bekijken, nl. dat, waarbij met drie hoopjes lucifers wordt gespeeld. De spelregels zijn erg eenvoudig en toch is het spel niet gemakkelijk te doorgronden. Het is dus niet eenvoudig er een tot winst voerende strategie voor te geven. In dit eerste artikel zullen we enkele winnende situaties bekijken. Je moet dan eens zien of je daaruit zo'n strategie kunt afleiden. Lukt dat niet, dan moet je het tweede artikel (het begint op bladz. 142) maar bestuderen.

Dit zijn de spelregels:

1. Men vormt drie hoopjes lucifers. *A* en *B* mogen om beurten uit één willekeurig hoopje een willekeurig aantal wegnemen.
2. Wie de laatste lucifer moet wegnemen heeft verloren. (Wordt de afspraak gemaakt, dat wie de laatste lucifer moet wegnemen gewonnen heeft, dan verandert de strategie maar heel weinig.)

Bevat het eerste hoopje a lucifers, het tweede b en het derde c , dan zullen we zeggen, dat we de situatie a, b, c hebben. Het spreekt vanzelf, dat de situaties a, b, c en a, c, b en b, a, c enz. gelijkwaardig zijn.

We beginnen met de gevallen, waarin $a = 0$. Nu zal A winnen, als hij er voor zorgt, dat de twee andere hoopjes gelijk worden. Alleen moet hij voorkomen, dat hij de situatie 0, 1, 1 zou maken want in dat geval zou B daarvan maken 0, 0, 1 en zou B winnen. Stel, dat A zo gezet heeft, dat de situatie 0, 5, 5 is ontstaan. Antwoordt B met 0, 5, 3, dan maakt A daarvan 0, 3, 3. Antwoordt B nu met 0, 2, 3, dan reageert A met 0, 2, 2. Nu kan B nog antwoorden met 0, 2, 1 (A daarna 0, 0, 1) of met 0, 2, 0 (A daarna 0, 1, 0). Het is duidelijk, dat als A steeds goed antwoordt, de winst voor hem verzekerd is.

Zorgt A ervoor de situatie 0, p, p te bereiken, dan is dat voor hem een winnende situatie, als $p > 1$. Hij hoeft er slechts voor te zorgen telkens weer zo'n situatie te krijgen.

Het geval, dat geen der drie hoopjes leeg is, is moeilijker te overzien. Een bekende winnende situatie is 1, 2, 3.

Ga maar na: Hieronder hebben we de antwoorden van B opgesomd, die in dit geval mogelijk zijn en daaronder de reacties van A vermeld. Je kunt gemakkelijk controleren, dat A in elk dezer gevallen kan winnen. We veronderstellen natuurlijk, dat hij geen fouten maakt.

A 1, 2, 3					
B 0, 2, 3	1, 1, 3	1, 0, 3	1, 2, 2	1, 2, 1	1, 2, 0
A 0, 2, 2	1, 1, 1	1, 0, 0	0, 2, 2	1, 1, 1	1, 0, 0

Je moet je krachten nu maar eens beproeven op de volgende winnende situaties voor A. Zoek bij elk de mogelijke antwoorden voor B en de juiste reacties van A.

A 1, 4, 5	A 1, 6, 7	A 1, 8, 9
A 2, 4, 6	A 2, 5, 7	A 2, 8, 10
A 3, 4, 7	A 3, 5, 6	A 3, 8, 11

Het spreekt vanzelf, dat er meer winnende situaties zijn, die moeilijker te controleren zijn, naarmate het aantal lucifers in elk der hoopjes groter wordt. Hoe deze winnende situaties langs wiskundige weg gevonden kunnen worden kun je lezen in het vervolg op dit artikel (bldz. 142).

Het Black-spel I

Een volledige analyse van dit spel vind je op bladzijde 145 e.v.

In Amerika heeft het Black-spel een korte glorie-tijd gekend in 1960. Het werd door de studenten van het Massachusetts Institute of Technology zeer vaak en zeer verwoed gespeeld. Het was een uitvinding van een van hen, William L. Black.

De korte duur van die glorie-tijd is geen gevolg van het simpele karakter van dit spel. Ieder van jullie speelt bijvoorbeeld een poosje lang het befaamde Boter-kaas-en-eieren-spel, maar lang duurt dat nooit, omdat dat spelletje in wezen te kinderachtig is. Met het Black-spel is dat beslist niet het geval. Het is een boeiend spel, dat vele intrigerende problemen opwerpt. Je zult er wel veel plezier mee kunnen hebben.

Nee, die korte glorie-tijd is te wijten aan de spitsvondigheid van een van Black's medestudenten, Elwyn R. Berlekamp. Dat jongmens vond namelijk een verbluffend eenvoudige strategie voor het Blackspel, waardoor de uitslag van het spel eigenlijk al beslist was, zodra uitgemaakt was, wie de eerste zet mocht doen. En toen was de aardigheid eraf.

Je vindt die strategie verderop in dit nummer vermeld en besproken. Neem echter een goede raad aan: kijk er niet naar (tenzij je verschrikkelijk nieuwsgierig bent). Speel het spel liever. Het is het waard.

Het Blackspel wordt op een rechthoekig en in vierkantjes verdeeld veld gespeeld. De afmetingen van dat veld doen er niets toe. Je kunt bijvoorbeeld als speelveld een acht-bij-acht-vierkant kiezen, maar het mag ook wel een vijf-bij-zeven-rechthoek zijn. Maak het speelveld niet te klein als je jezelf de kans wilt gunnen om de aardige kanten van het spel te ervaren. In de figuren bij dit artikel hebben we een vier-bij-vier-veld gekozen omdat dat gemakkelijk is voor het uitleggen. Je kunt je speelveld gemakkelijk tekenen op roosterpapier (schaf er maar een flinke voorraad van aan, dat zal je wel nodig hebben, omdat het spel je niet zal loslaten).

De twee spelers zetten om de beurt. Elke zet bestaat uit het plaatsen van een van de volgende tekeningetjes in een van de vierkantjes van het speelveld:

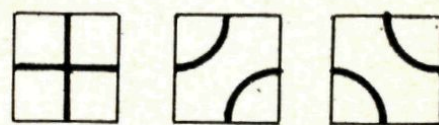


Fig. 5

De eerste speler heeft echter geen vrije keuze: hij moet een kruis zetten in het vierkantje in de linkerbovenhoek van het speelveld. De tweede speler kiest een van de „poten” van dat kruis en „verlengt” die door zijn

zet. Zo ontstaat een „pad” dat bij elke volgende zet opnieuw verlengd moet worden. In de onderstaande figuur is dat duidelijk te zien. Let daarbij vooral ook eens op de toestand, die door de derde zet van B ontstaat. Bij die zet wordt een reeds op het speelveld aanwezig lijntje, dat niet tot het pad behoorde, in het pad opgenomen.

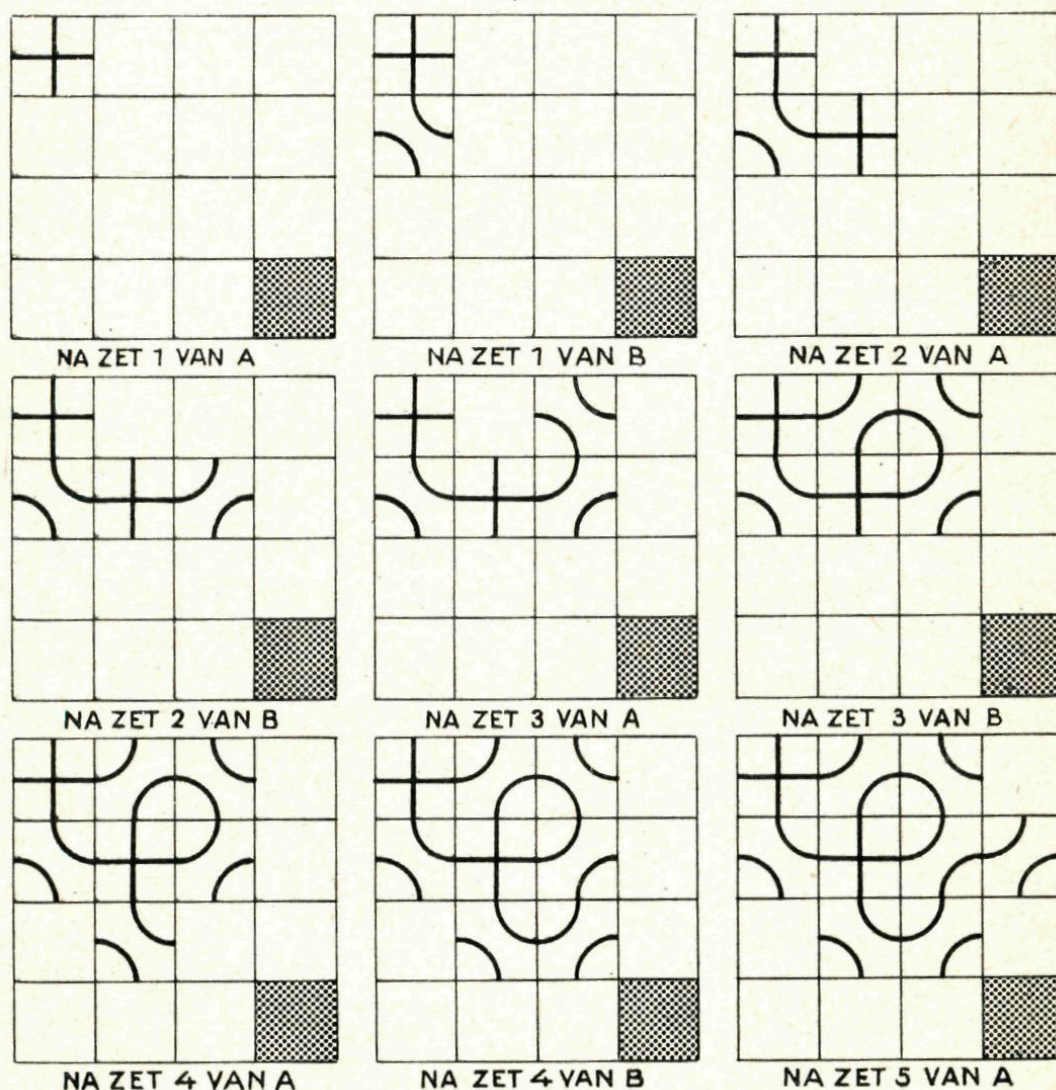


Fig. 6

Bij het bestuderen van deze figuur zal je merken, dat beide spelers angstvallig vermijden het pad dood te laten lopen op de rand van het speelveld. De speler, die door zijn zet het pad de rand van het veld laat bereiken, verliest namelijk (in de figuur verliest B bij zijn vijfde zet), tenzij ... het pad de rand bereikt in het grijze vakje rechtsonder; in dat geval wint hij namelijk.

Ziezo, dat zijn de spelregels. En nu maar aan de slag.

Een spel met graphen

door Prof. Dr. H. Freudenthal, Utrecht

In fig. 7 is een gerichte, eindige graph met één onderste en één bovenste hoekpunt afgebeeld. Wie het spel met deze graph wil spelen, doet er goed aan deze of een dergelijke graph op grotere schaal over te tekenen. In een *gerichte* graph is in elke kant door een pijl aangegeven in welke richting deze kant doorlopen moet worden. De pijlen in fig. 7 maken het

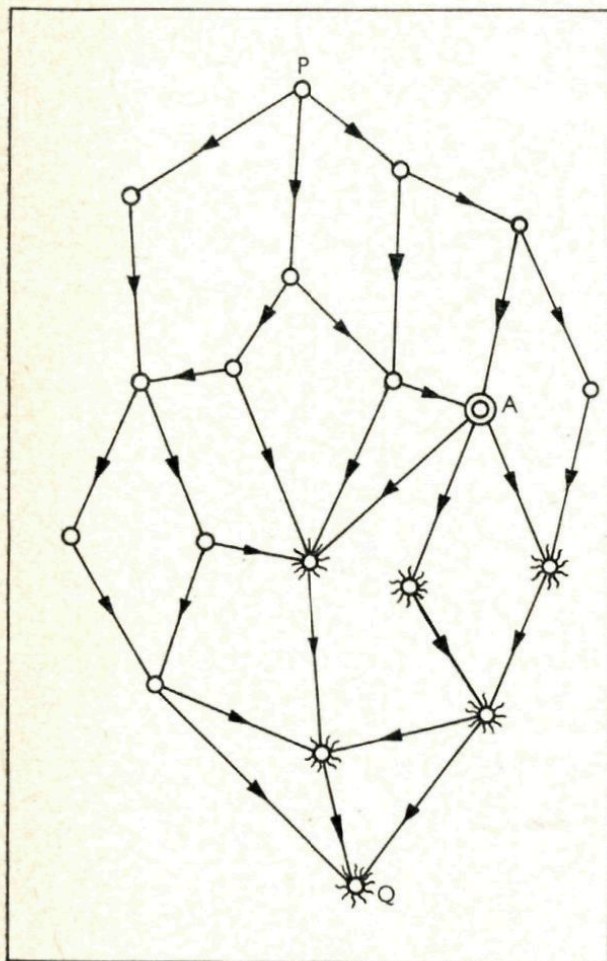


Fig. 7

duidelijk, dat P het bovenste hoekpunt is en Q het onderste. We zullen zeggen, dat een hoekpunt *hoger* ligt dan een ander, als men de kanten van het eerste naar het tweede in de richting van de pijlen moet doorlopen. Vanzelfsprekend ligt dan het tweede hoekpunt *lager* dan het eerste.

Het spel wordt met twee spelers gespeeld. Om beurten zetten ze een schijf (knoop, muntstuk) op een der hoekpunten. *Daardoor blokkeren ze alle lager gelegen hoekpunten.* D.w.z. dat op de geblokkeerde hoekpunten geen schijven meer geplaatst mogen worden. Wordt er bijv. een schijf geplaatst op het hoekpunt A in fig. 7, dan zijn daardoor alle met een „zonnetje” voorziene hoekpunten geblokkeerd. De tegenspeler mag daar dus geen schijven meer plaatsen.

Wie gedwongen is het hoekpunt P te bezetten, heeft verloren

Men kan bewijzen, dat de beginner, als hij goed speelt, altijd kan winnen, hoe de ander ook speelt, en wel geldt dit voor elke gerichte graph met één onderste en één bovenste hoekpunt.

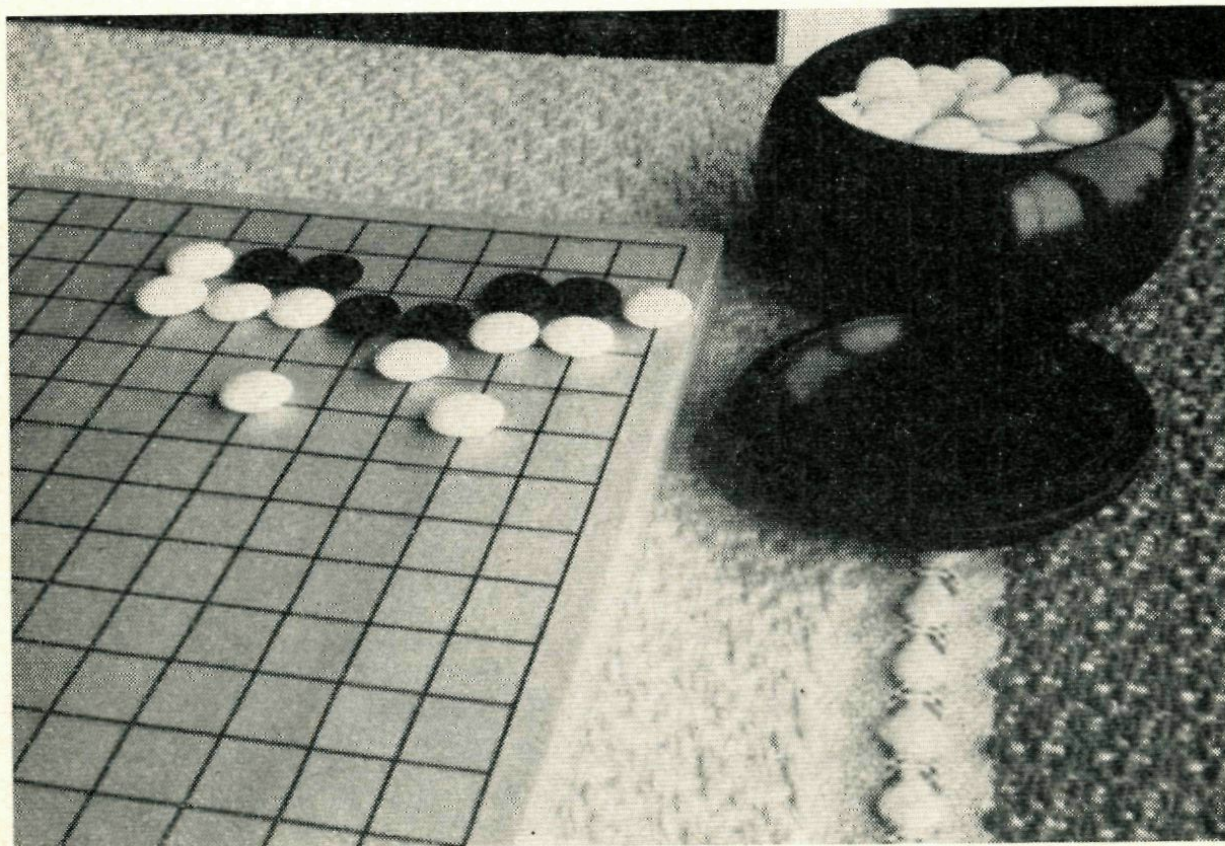
Wie ons een goed bewijs toezendt (adres G. Krooshof, Noorderbinnensingel 140, Groningen), dingt mee naar de prijs: een der boeken van Prof. Freudenthal, door hem daarvoor beschikbaar gesteld. Inzenden vóór 1 september 1965.

Go, het boeiende omsingelingsspel

Schaken is een spel, dat beperkt is tot de bewoners van onze planeet, maar Go is iets bovenaards. Als er denkende wezens op Mars zijn, dan kennen zij Go. (Dr. Emanuel Lasker, wereldkampioen schaken van 1894 tot 1921).

Aan de wieg van een groot, oud spel staat meestal een legende: de koning verveelt zich en een slimme hoveling brengt hem kant en klaar het zo juist tot dit doel uitgevonden bordspel. Soms wordt de uitvinder beloond, bij voorkeur met een zich telkens verdubbeld aantal graankorrels. Hoewel dit geschenk kostbaarder blijkt dan de grif belovende monarch zich aanvankelijk had voorgesteld, blijft hij blijmoedig. Het is voor de koning dan ook veel genoeglijker de kamp ten paleize te voeren dan op het slagveld met zijn tochtige legertenten.

Hoewel het een 4000 jaar oud spel is, verbeeldt Go de strijd wel op zeer moderne wijze. De vijandelijkheden worden geopend door het neerlaten van parachutisteneenheden, terwijl het middenspel meer het karakter van infanterie- en tankgevechten aanneemt. Toch gebeurt het ook daarbij vaak, dat men parachutisten achter de vijandelijke linies afwerpt om



Go, meer spel dan wiskunde, maar van de grote denkspelen zoals schaken, dammen en bridge, wel het spel met de sterkste wiskundige inslag.

de tegenstander in paniek te brengen en hem te dwingen een strijd op twee fronten te voeren.

De oorsprong van het Go-spel moeten wij in China zoeken en nog steeds vindt men de meeste beoefenaren in het Verre Oosten, waar het in aanzien is als het denkspel bij uitnemendheid. Het is pas in de moderne tijd in het Westen bekend geworden, zodat het te begrijpen is dat wij in Europa en Amerika nog niet zo veel spelers vinden als in China of Japan. Hun aantal neemt echter voortdurend toe.

De spelregels in het kort

Go wordt gespeeld met ronde, lensvormig gebolde schijfjes op een bord met 19 horizontale en 19 verticale lijnen.

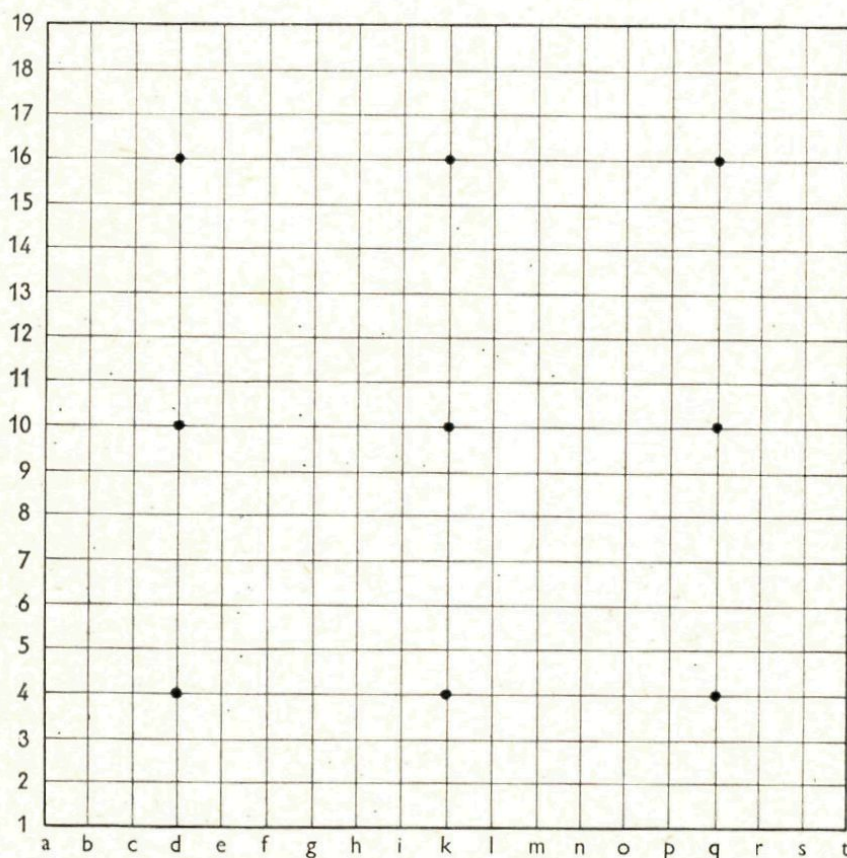


Fig. 8

Gewoonlijk zijn er twee spelers, waarvan de een de witte en de ander de zwarte stenen aanvoert. Merkwaardig is dat het aantal stenen er niet zoveel toe doet! Er moeten eigenlijk 181 zwarte en 180 witte zijn, maar met een paar meer of minder kan men net zo goed spelen.

De stenen worden op de snijpunten – kortweg „punten” genoemd – van de lijnen van het bord geplaatst. Niet in de vakken dus, zoals bij schaken

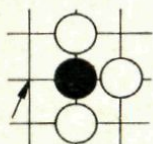
of dammen. Ook op de rand- of hoekpunten mogen de stenen gezet worden.

Een ander punt waarin het Go-spel zich van bijna alle andere bordspelen onderscheidt, is dat het bord bij het begin van het spel volkomen leeg is! Het spel ontwikkelt zich nu doordat de spelers afwisselend – zwart begint altijd – één enkele steen op een onbezet punt plaatsen. In de keus van het punt waar hij zijn steen wil zetten, is elke speler volkomen vrij. In plaats van te zetten mag men ook altijd passen, d.w.z. zijn beurt voorbij laten gaan, maar dit komt eigenlijk alleen aan het eind van de partij voor.

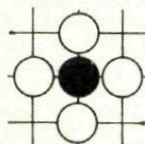
Eenmaal gezette stenen worden nooit verschoven of verplaatst en blijven dus tot het eind van het spel op hetzelfde punt staan, behalve als zij geslagen worden. (Over dit slaan direct meer). In de loop van de partij wordt het bord dus steeds voller, doordat er telkens een steen aan de bestaande stelling wordt toegevoegd. Men zou kunnen denken, dat zulke partijen nogal statisch en weinig beweeglijk zijn. Niets is echter minder waar! Hoe beter men Go leert kennen, des te meer bemerkt men hoe het toevoegen van één enkele steen de gehele situatie beïnvloedt.

Een steen of een groep stenen van dezelfde kleur, die volledig en zonder tussenruimte door vijandelijke stenen is ingesloten, wordt onmiddellijk van het bord genomen. Dit is het *slaan* van stenen. De geslagen stenen worden door de tegenstander tot het eind van de partij bewaard, omdat zij bij het bepalen van de uitslag meetellen.

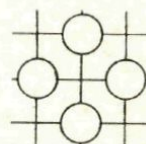
Bij één steen gaat dit slaan als volgt:



Dit is het laatste vrije
nevenpunt van de zwarte
steen.



Wit zet daar en



neemt direct de geslagen
steen van het bord.

Fig. 9

Het zetten van de witte steen en het van het bord nemen van de zwarte tellen samen voor één zet. Wij zien overigens dat wit alleen de 4 punten die direct aan de zwarte grenzen, hoeft te bezetten (en niet ook nog de 4 punten die diagonaalsgewijs aan de zwarte steen grenzen).

Hoewel het vaak voordelig is om vijandelijke stenen te slaan, is het toch niet het hoofddoel van het spel. Dit bestaat daarin dat men zijn stenen

langzamerhand tot groepen samenvoegt en wel zó, dat die groepen een zo groot mogelijk aantal *onbezette* punten omsluiten. Hiervan laat fig. 10 iets zien.

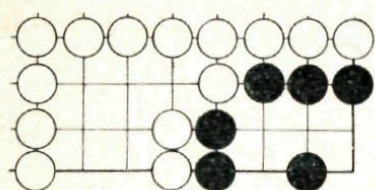


Fig. 10

Een gedeelte van een eindstand. Rechts heeft zwart een gebied van 5 punten omsloten. Links daarvan een wit gebied van 7 punten. Je ziet dat de bordrand meetelt als omsluiting, zowel voor wit als voor zwart.

Aan het eind van de partij wordt van elke speler de score opgemaakt door het aantal onbezette punten dat hij met zijn stenen omsloten heeft, te verminderen met het aantal stenen, dat hij door slaan heeft verloren. De speler met de hoogste score wint; zijn de scores gelijk – wat niet vaak voorkomt – dan is de partij remise.

Dit zijn – in het kort – de spelregels.

Verbonden stenen. Ketten

Het verbinden speelt in Go een belangrijke rol. Twee stenen zijn *verbonden* als zij van dezelfde kleur zijn en op eenzelfde lijn vlak naast elkaar staan. Een voorbeeld hiervan vormen de zwarte stenen op d4 en d5 in fig. 11. (De notatie zal wel duidelijk zijn: d4 is op de d-lijn het vierde punt, van onder af geteld.) Evenzo zijn de twee witte stenen op e4 en f4 met elkaar verbonden – verder worden twee stenen die met een derde steen verbonden zijn, zelf ook verbonden genoemd. In onze figuur bijv. e3 en f2, want zij zijn beide met f3 verbonden. Maar nu zijn ook e3 en g2 met elkaar verbonden (omdat zij beide met f2 verbonden zijn).

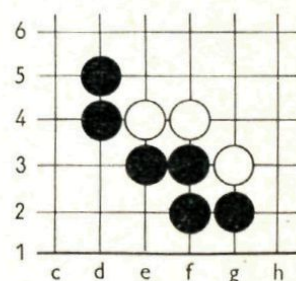


Fig. 11

Het komt er dus op neer dat de vier stenen e3, f3, f2, g2 alle met elkaar verbonden zijn. Zo'n groep stenen noemen wij een *keten*. Andere ketens in fig. 11 zijn: d4-d5, e4-f4, terwijl wij vaak een enkele losse steen zoals g3 ook een keten noemen. Diagonaalsgewijs komt dus geen verbinding tot stand: keten e4-f4 en keten g3 zijn los van elkaar. Wanneer wij echter op g4 een witte steen zouden toevoegen, zouden de twee witte ketens tot een grotere keten verenigd worden. Door het plaatsen van een zwarte steen op d3, ontstaat er één zwarte keten van 7 stenen.

Als wij een – ietwat wiskundig getinte – definitie willen geven, kunnen wij zeggen: *Onder een keten verstaan wij de verzameling van alle stenen die met een bepaalde steen verbonden zijn, met inbegrip van die steen zelf.*

Vrijheid. Het slaan

Nu wij het begrip keten kennen, kunnen wij het slaan van meerdere stenen behandelen. De zwarte keten e3-f3-f2-g2 heeft de volgende *nevenpunten*: h2, g3, f4, e4, d3, e2, f1, g1. (Dat zijn dus de punten die langs de lijnen van het bord onmiddellijk aan die keten grenzen). Elke zwarte steen die op een onbezet nevenpunt gezet zou worden, zou tot die keten komen te behoren. Elke witte steen die op zo'n nevenpunt gezet wordt, draagt er meer of minder toe bij de zwarte keten in te sluiten. – De onbezette nevenpunten van een keten worden gewoonlijk diens *vrijheden* genoemd. Van groot belang voor een keten is nu het aantal vrijheden dat hij heeft. De regel voor het slaan luidt nl.: *Een keten die geen enkele vrijheid meer heeft, geldt als geslagen en wordt onmiddellijk van het bord genomen.* Voor het slaan van één losse steen wisten wij dit al, maar deze regel is natuurlijk veel algemener. Als bijv. in fig. 11 wit in de gelegenheid zou zijn witte stenen te zetten op h2, d3, e2, f1 en g1, dan wordt met de laatste zet de zwarte keten van vier stenen geslagen. (Om het eenvoudig te houden hebben wij hierbij aangenomen dat zwart intussen telkens ergens anders zet. In het praktische spel zou zwart geen moeite hebben wit's plannen te verijdelen.)

Onthoud vooral dat een keten of in zijn geheel blijft leven, of in zijn geheel geslagen worden. Men *mag* stenen slaan, maar het is niet verplicht. Beide spelers mogen op de door slaan opengekomen punten zetten. Geslagen stenen moeten, zoals wij al weten, tot het eind van de partij bewaard worden: de witte stenen door zwart, de zwarte stenen door wit.

Probeer nu zelf eens de volgende probleempjes op te lossen. Je kunt dit bijv. met damstenen op een zelfgetekend Go-bord doen, of op een van de manieren die aan het eind van dit artikel beschreven zijn.

1. (zie fig. 11) Zwart begint en verovert één of meer witte stenen.

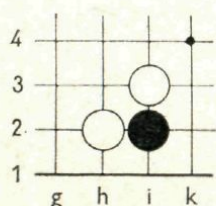


Fig. 12

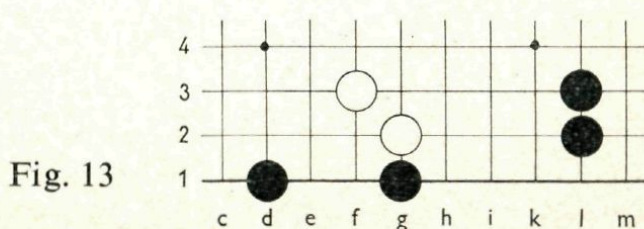


Fig. 13

2. (zie fig. 12) Wit speelt en veroverd i2 (of nog enige stenen erbij).

3. (zie fig. 13) Wit speelt en veroverd g1.

De oplossingen van deze probleempjes vind je verderop in dit artikel (blz. 142).

Wij hebben zo lang over het slaan moeten spreken omdat het schijnbaar zo eenvoudige topologische begrip „omsluiten” niet zo gemakkelijk exact te definiëren is. Dat hier problemen liggen, zien wij bij de behandeling van fig. 14.

In fig. 14 is de witte keten wel door zwart ingesloten maar hij is niet geslagen omdat hij nog één vrijheid bezit (a1 nl.). Als zwart hier a1 speelt heeft de witte keten geen vrijheid meer, maar ook de zwarte steen a1 is zonder vrijheid. Het is nu zo, dat alleen de witte stenen van het bord genomen worden en wel alleen de *witte* omdat *zwart* de zet doet. Algemeen geldt de volgende belangrijke aanvulling van de slagregel: *Als in een of andere stelling zwart een zet doet, waardoor tegelijkertijd witte en zwarte ketens hun laatste vrijheid verliezen, dan worden alleen de witte ketens geslagen. Doet wit een dergelijke zet, dan worden alleen de zwarte ketens geslagen.* Speelt dus in fig. 14 zwart op a1 dan gaan a2, b1 en b2 van het bord, maar a1 blijft staan.

Je kunt nu probleem 4 oplossen (zie fig. 15). Wit speelt en veroverd de drie zwarte stenen bij c3.

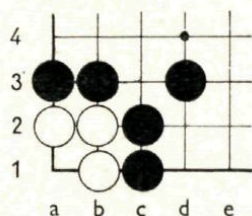


Fig. 14

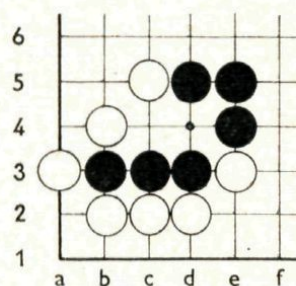


Fig. 15

Als in fig. 14 wit op a1 speelt, ontstaat er een witte keten van vier stenen zonder vrijheid. Deze keten geldt dus als geslagen en hij wordt dan ook onmiddellijk van het bord genomen. Wij zien dat het mogelijk is zijn eigen stenen te slaan! Zo'n „zelfmoordzet” is natuurlijk meestal onverstandig, maar kan in enkele gevallen heel nuttig zijn.

Je zult gemerkt hebben dat de ketens van alle kanten, zowel van binnen als van buiten, kunnen worden aangevallen. Hoe moet dat gaan als het bord hoe langer hoe voller wordt en men zich hier voortdurend tegen moet verweren? Gelukkig kan men een stelling zo opbouwen dat hij voor altijd veilig is.

Ogen

Zie fig. 16. De witte groep bij b2 is onneembaar. Immers wit's beide vrijheden a1 en a3 kan zwart nooit tegelijkertijd bezetten, daar een zet op een van deze punten een zelfmoordzet zou zijn. Zo'n punt als hier a1 of a3 noemt men een *oog*. In fig. 14 hebben wij gezien dat een stelling met één oog geslagen wordt; een stelling heeft blijkbaar twee *ogen* nodig om te leven.

Ook de witte groep bij f2 in fig. 16 kan niet geslagen worden, hoewel de situatie hier iets anders ligt: er zijn hier nl. twee ketens. Wij leren hier het belangrijke principe kennen: *een groep leeft als elke keten aan minstens twee ogen grenst*. Dit is geen spelregel, maar een logisch gevolg van de regels voor het slaan. Het is een van de belangrijkste principes die ons bij de spelopbouw moeten leiden.

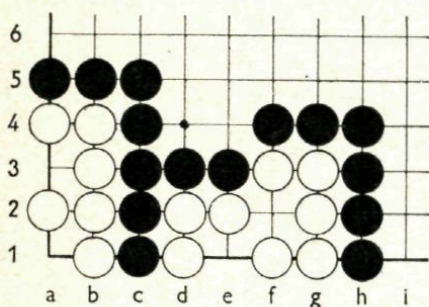


Fig. 16

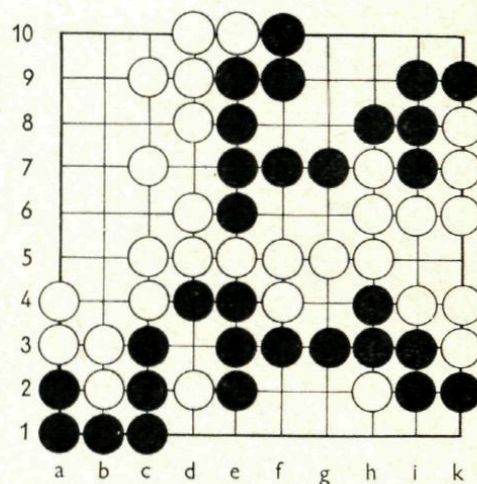


Fig. 17

Ko. Het komt voor, dat men in herhaling van zetten vervalt, doordat de spelers steeds elkaars stenen blijven slaan. Dit wordt voorkomen door de *Ko-regel*. Deze luidt: *Het is verboden een zet te doen, die een vroegere positie (op het gehele bord) herhaalt*.

Het einde van de partij. In de loop van de partij komen er steeds meer stenen op het bord, er ontstaan ketens, stenen worden geslagen, witte en zwarte terreinen worden afgepaald, en tenslotte komt er een moment dat nagenoeg het hele bord onder de beide spelers is verdeeld. Er kunnen geen grenswijzigingen meer geforceerd worden en geen van beide spelers hoeft, bevreesd voor een invasie, zijn stellingen nog te versterken. In fig. 17 zien wij een partij op een verkleind bord van 10 bij 10, die tot op dat moment is voortgeschreden.

Er zijn geen stenen geslagen en zwart is aan zet. Wit heeft linksboven gebied gemaakt en een klein gebiedje aan de rechterrاند. Zwart heeft gebied rechtsboven en aan de onderrand. Het valt je natuurlijk op dat zwart hier niet alleen onbezette punten omsloten heeft, maar ook twee witte stenen. Deze zijn echter niet belangrijk, want zij zijn ten dode opgeschreven, wie er ook aan zet is. (Zie bijv. wit d1, z d3, w e1, z f1+3; of w g2, z f2, w f1, z h1, w g1, z e1+4). Een belangrijk punt is nu dat zulke stenen aan het eind van de partij door hun bezitter (hier: wit) worden opgegeven, d.w.z. de tegenpartij mag die stenen van het bord nemen zonder dat hij ze werkelijk hoeft te slaan. De reden hiervan volgt later.

Zwart is nu aan zet. Wat moet hij doen? Met een zet in eigen terrein, bijv. g9, benadeelt hij zichzelf met één punt, omdat alleen de omsloten *onbezette* punten meetellen. Net zo slecht is het in het vijandelijke terrein, bijv. op b10, te spelen, want zo'n geïsoleerde steen wordt immers aan het eind opgegeven en is dus een verliespunt voor zwart. Het is nu het beste te spelen in het niemandsland dat tussen de witte en de zwarte ketens inligt, bijv. op punt d7. Zulke punten noemt men *neutraal*.

Als zwart op d7 gezet heeft, gelden voor wit bij zijn zetkeuze dezelfde overleggingen als zojuist voor zwart. Wit speelt dus ook op een neutraal punt, bijv. op f6. Daarna zwart op g6, wit op g4, het laatste neutrale punt. Voor zwart is er nu geen zet meer te vinden die geen nadeel oplevert; zwart zal dus passen (zijn beurt voorbij laten gaan). Daarop past wit ook en zo komt de partij op volkomen natuurlijke wijze vanzelf ten einde. – Beginners hebben wel eens moeite om vast te stellen of het einde al bereikt is of niet. Zij gaan nl. dikwijls door met aanvallen in het vijandelijke gebied terwijl er toch niets meer te bereiken is. Na enige zelf gespeelde partijen is het gevoel hiervoor gescherpt.

Wij kunnen nu ook inzien waarom het niet nodig is de gevangen stenen d2 en h2 te slaan. Om d2 te slaan moet zwart twee stenen in zijn gebied zetten, nl. d1 en d3, wat hem met twee punten benadeelt. Maar wit moet dan ook twee zetten doen, dat zijn 2 verliespunten voor wit. Omdat dit dus aan de uitslag niets verandert, bespaart men zich de moeite. Wanneer echter beide spelers verschil van mening hebben over het opgeven van bepaalde stenen kan men de partij voortzetten om te zien wie gelijk had. *Hierbij geldt echter dat er niet gepast mag worden en bovendien dat, als zwart de voortzetting begint, wit de laatste zet moet doen en omgekeerd.* Onder geoefende spelers komt dit doorspelen maar zelden voor.

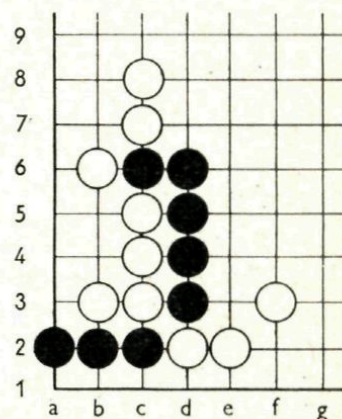
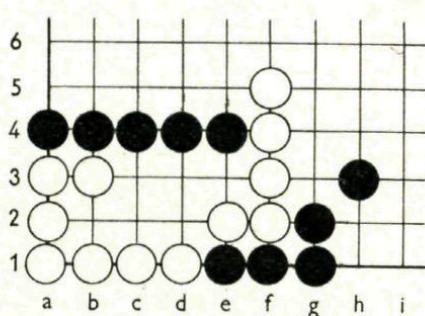
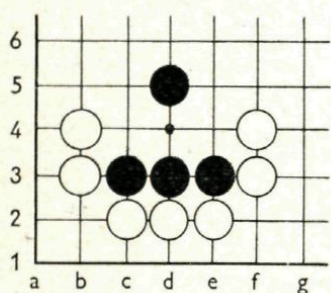
De afrekening

Wie heeft er nu eigenlijk gewonnen? Om dit te bepalen haalt zwart de beide witte gevangen en d2 en h2 van het bord. Zwart heeft nu in zijn gebieden $8 + 12 = 20$ punten. Wit heeft $16 + 2 = 18$ punten, maar hiervan moeten wij nog de 2 punten voor de gevangen stenen aftrekken. Wit's score is dus 16, die van zwart 20. Zwart's score is hoger, hij heeft dus gewonnen. – In de praktijk worden gebiedspunten en geslagen stenen niet apart geteld. De geslagen witte stenen worden nl. in het witte gebied geplaatst, zodat alleen de overgebleven punten geteld hoeven te worden om wit's score te vinden. Analooog voor zwart.

Hiermee weet je genoeg om het spel zelf te gaan spelen! Begin eerst met een klein bord van 11 bij 11 of 13 bij 13. Je kunt het op roosterpapier spelen met een potlood en vlakgom (om stenen te slaan) of met gekleurde punaises op een bord van zachtboard.

Een sterkere speler geeft een zwakkere altijd voorgift, d.w.z. deze mag als eerste zet enige stenen op vaste punten op het bord plaatsen. Twee stenen bijv. op d4 en q16, drie stenen op dezelfde punten benevens q4. (Zie de stippen in fig. 1). Deze punten zijn trouwens goede punten om de partij te openen.

Ook de deur van de schatkamer der Go-probleemkunst is nu wijd geopend. Zie de volgende drie problemen.



- Wit begint en verovert de drie zwarte stenen bij d3.
- Zwart speelt en verovert de witte keten bij b1.
- Zwart speelt en redt zijn drie stenen bij b2 doordat hij enige witte stenen verovert.

Deze opgaven moeten worden uitgevoerd, hoe de tegenpartij zich ook verdedigt.

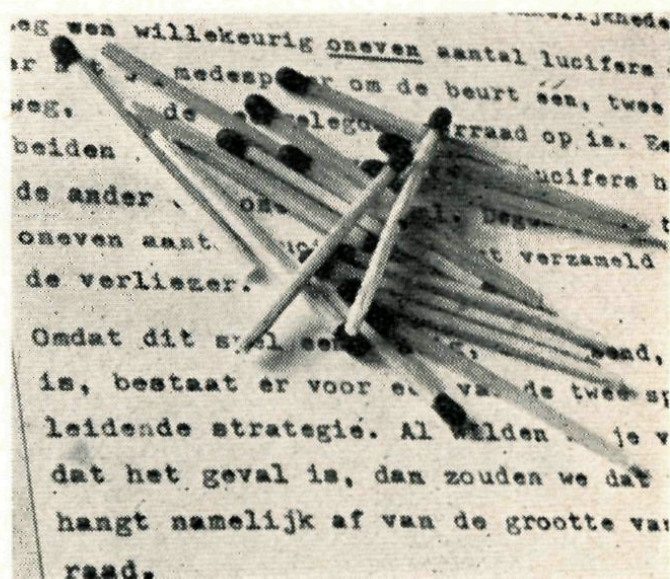
Voor de oplosers van deze problemen looft de Nederlandse Go-Bond een aantal prijzen uit. Inzendingen te sturen voor 1 september 1965 aan het secretariaat van de Ned. Go-Bond, Sallandstraat 16II, Amsterdam-Z.

Bij nadere kennismaking zal het Go-spel je zeker gaan fascineren. Zoals bij bijna alles van waarde, moet men wat moeite doen om de diepe schoonheid ervan te ontdekken. Hierbij wil bovengenoemd secretariaat je graag helpen, bijv. door het sturen van een nummer van „Go”, in welk blad o.a. partijen en problemen een plaats vinden, of door het beantwoorden van vragen die op Go betrekking hebben.

Oplossingen

1. 1.g4. Een dubbele aanval. Als wit nu met 2.h3 zijn steen g3 laat vluchten, dan 3.f5 (of g5) en keten e4—f4 kan niet meer ontsnappen. Als 2.f5, 3.h3+. Dit laatste betekent: bij de 3de zet speelt zwart op h3 en slaat één witte steen.
2. Wit moet zwart naar de rand drukken. 1.k2 2.i1 3.k1 (h1 is ook goed) 4.h1 5.g1+3.
3. 1.f1 2.h1 3.i2! Hiermee sluit wit alle ontsnappingswegen af. Zie bijv. 4.i1 5.k1 6.h2 7.h3+4. — 3.h2 is niet goed omdat zwart dan na 4.i1 verbinding krijgt met zijn hulptroepen bij 12 en gered is. Ook 1.h1 mislukt. Er volgt 2.f1 3.f2 4.e1 5.d2 (of een soortgelijke zet) 6.h2 en de bordjes zijn verhangen. Zwart veroverd nu steen h1, waardoor de omsingeling verbroken en de zwarte keten bij g1 gered is.
4. 1.d4. Zwart kan deze steen wel met 2.c4+ slaan, maar wit komt terug met 3.d4+4 en heeft daarmee zijn doel bereikt.

Lucifers zijn een geliefd spel-materiaal. Misschien wel, omdat men ze altijd in een groot aantal bij de hand heeft.



Het NIM-spel II

Het is niet bekend, wie op de gedachte gekomen is de strategie van het NIM-spel te bestuderen door gebruik te maken van de schrijfwijze der getallen in het tweetallig stelsel. In ieder geval was dit een geniale gedachte, want juist met dit tweetallig stelsel is het bijzonder eenvoudig *alle* winnende situaties te vermelden en het bewijs te leveren voor de juistheid van de strategie.

Het binaire stelsel

We moeten voor hen, die niet bekend zijn met deze schrijfwijze der getallen even een korte inleiding hierover vooraf laten gaan. Wie in staat is alle getallen met louter nullen en enen te schrijven, kan deze inleiding dus overslaan.

In het dagelijks leven schrijven we onze getallen in het tientallig stelsel. Dat wil zeggen, dat in elk getal elk cijfer een zeker aantal malen een macht van 10 aanduidt. 375 betekent 3 keer 10^2 + 7 keer 10^1 + 5 keer 10^0 . We zullen ons er maar niet in verdiepen, hoe de mensheid ertoe gekomen is juist het tientallig stelsel te gebruiken. Een feit is, dat elke andere *basis* voor een talstelsel ook mogelijk is en soms zelfs handiger. Gebruiken we 2 als basis, dan kan in een getal elke macht van 2 slechts telkens 0 of 1 keer voorkomen. Zou bijvoorbeeld 2^3 twee keer voorkomen in dat getal, dan kunnen we die 2 keer 2^3 direct vervangen door 1 keer 2^4 . Daarom komen in binair geschreven getallen alleen maar nullen en enen voor. Het getal 375 kan worden verdeeld in

$$\begin{array}{r} 1 \text{ keer } 2^8 = 256 \\ 0 \text{ keer } 2^7 \\ 1 \text{ keer } 2^6 = 64 \\ 1 \text{ keer } 2^5 = 32 \\ 1 \text{ keer } 2^4 = 16 \\ 0 \text{ keer } 2^3 \\ 1 \text{ keer } 2^2 = 4 \\ 1 \text{ keer } 2^1 = 2 \\ 1 \text{ keer } 2^0 = 1 \\ \hline 375 \end{array}$$

Het getal 375 is daarom tweetallig geschreven: 101110111.

Ga nog even na, we schrijven de eerste twintig natuurlijke getallen binair:

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000, 10001, 10010, 10011, 10100.

Herken je hierin de getallen 1, 2, 3, 4, 5, ..., enz.?

Nu de strategie van het NIM-spel

Schrijf de aantallen lucifers in elk hoopje binair. Zet deze binaire getallen onder elkaar. Nu staan er telkens 3 cijfers (nullen of enen) onder elkaar. Beslissend voor het winnend zijn van een situatie is, dat er op *elke* plaats een *even* aantal enen onder elkaar staan. (Als we met drie hoopjes spelen, dan zijn 2 of 0 een even aantal).

In het eerste artikel werd als winnende situatie o.a. genoemd 3, 5, 6.
We schrijven dit binair:

$$3 = 11$$

$$5 = 101$$

$$6 = 110$$

Zie je dat er telkens 2 enen onder elkaar staan? Dit moet dus een winnende situatie zijn.

Controleer ook nog eens 2, 8, 10:

$$2 = 10$$

$$8 = 100$$

$$10 = 110$$

Je ziet, weer staan er telkens een even aantal enen onder elkaar.

Nu is het ook niet moeilijk winnende situaties met grotere aantallen te bedenken. Stel, dat je begint met 23, 35, x . Hoe groot moet x nu zijn om de situatie winnend te maken?

$$23 = 10111$$

$$35 = 100011$$

Er is nu maar één getal mogelijk om voor x te kiezen, dat is het getal, dat overal het aantal enen even maakt. Het is $110100 = 52$. Je ziet, dat bij een willekeurige keuze van twee der hoopjes slechts één keuze voor het derde is om de situatie winnend te maken. Daaruit volgt, dat wanneer de drie hoopjes willekeurig gekozen worden de situatie in het algemeen niet winnend is. Wil je een overzicht hebben over de aantallen in elk der hoopjes leg ze dan volgens machten van twee. Leg bijvoorbeeld een hoopje van 23 op de volgende manier:

$$\text{iiiiiiiiiiiiiii} \quad \text{iii} \quad \text{ii} \quad \text{i}.$$

Nu het bewijs van deze strategie

Als bij de binair geschreven aantallen der hoopjes het aantal enen op elke plaats even is, zullen we deze situatie een even situatie noemen. Zodra ook maar op één plaats een oneven aantal enen staat, is de situatie al oneven.

We moeten nu drie dingen bewijzen:

- a. De eindsituatie, die de winst oplevert is even,
- b. Van een even situatie kan men niet in één zet weer een even situatie maken,
- c. Van een oneven situatie kan men steeds in één zet een even situatie maken.

Betekent het moeten wegnemen van de laatste lucifer winst, dan is aan voorwaarde a voldaan, want dan is de uiteindelijke situatie 0, 0, 0 en die is even.

Betekent echter het moeten wegnemen van de laatste lucifer verlies, dan klopt het niet helemaal met de eindsituaties want dan betekenen de oneven situaties 1, 1, 1 en 1, 0, 0, winst. Echter is elke daaraan voorafgaande winnende situatie even, bijvoorbeeld 0, 2, 2 of 1, 2, 3. Zie het overzicht op bladz. 129. Daarom moet elke daaraan voorafgaande winnende situatie ook even zijn. Dit volgt uit de regels b en c. Deze zijn gemakkelijk te bewijzen: Is de situatie even, dan verandert door het wegnemen van lucifers uit één der hoopjes minstens één der enen in een nul. Daardoor wordt de even situatie in een oneven veranderd. Is de situatie oneven, dan kan men gemakkelijk van een der hoopjes zoveel wegnemen, dat de situatie even wordt. Door goed spelen kan men dus een even situatie steeds even houden of een oneven situatie even maken en zo tenslotte op 1, 2, 3 of 0, 2, 2 terecht komen. En dat betekent winnen.

Het Blackspel II

De geniale vondst van Elwyn R. Berlekamp verschaft de speler, die de eerste zet doet, een tot winst voerende strategie, indien het speelveld een oneven aantal vierkantjes bevat. Bevat het speelveld een even aantal vierkantjes, dan kan volgens Berlekamp echter de tweede speler de winst afdwingen. We bespreken beide gevallen afzonderlijk.

Het eerste geval lichten we toe op een vijf-bij-vijf-veld. Nadat B zijn eerste zet gedaan heeft, brengt A in gedachten een verdeling van het speelveld aan in een-bij-twee-rechthoekjes (gemakshalve noemen we ze domino's). Omdat het totale aantal vierkantjes oneven is, moet er bij die verdeling een vierkantje over blijven. Daarvoor kiest A het grijze vakje rechtsonder. Bovendien zorgt hij ervoor, dat zijn eerste zet en die van B samen op een domino liggen.

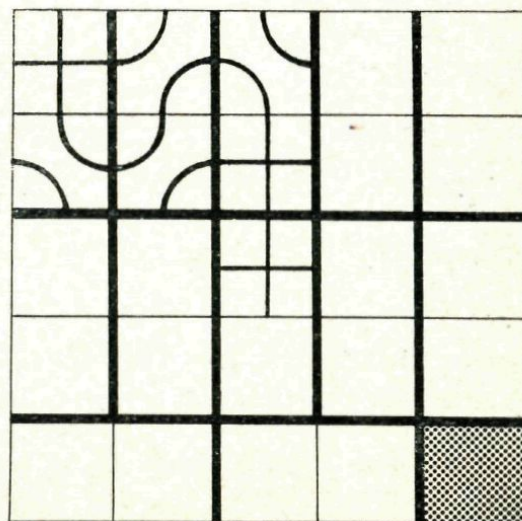


Fig. 18

In de onderstaande figuur is dit aangeduid door de dikke lijnen. Het zal wel duidelijk zijn, dat zulk een verdeling altijd aan te brengen is, hoe de afmetingen van het speelveld ook zijn mogen.

De eerste zet van B leidt het pad nu naar de rand van een nieuwe domino toe. A moet nu zo zetten, dat hij B dwingt die nieuwe domino vol te maken. Daardoor voert B het pad weer naar de rand van een derde domino, die A weer zodanig begint te vullen, dat B hem verder moet vol maken, enzovoorts.

Tenslotte zal B het pad moeten voeren naar de rand van het speelveld, eventueel naar de rand van het grijze vakje. In beide situaties wint A.

Bij een even aantal vierkantjes kan B zich zeker stellen van winst. We geven hieronder aan, hoe hij moet handelen. Dit lichten we toe op een vier-bij-vier-veld. Evenals A in het bovenstaande geval, moet ook B weer met domino's gaan werken. Nu zou je misschien denken, dat B het speelveld zodanig bedekt denkt met domino's dat alleen het startvierkantje linksboven en het grijze vierkantje rechtsonder niet tot een domino behoren. Dat is echter onmogelijk; we zullen dat eerst bewijzen. Denk je daartoe het speelveld gekleurd zoals een schaakbord of een dambord dat is, met afwisselend zwarte en witte velden. Het startvierkantje en het grijze vierkantje zijn dan allebei zwart of allebei wit. Bij de resterende vierkantjes zijn er dus of meer witte of meer zwarte. En omdat een aantal domino's altijd evenveel witte als zwarte velden bedekken, kunnen die resterende velden niet met domino's bedekt worden. Hoe je het ook probeert, er blijven altijd twee velden over, die beide zwart of beide wit zijn. Berlekamp noemt die twee overblijvende velden een „gespleten domino”.

Op de openingszet van A antwoordt B nu zoals in de figuren 19a, 19b en 19c getoond wordt. Daardoor moet A gaan zetten op het vierkantje, dat schuin naast het startveld ligt. Hij kan dat op drie manieren doen, die alle drie afgebeeld zijn.

B wacht dat antwoord van A af en let daarbij in het bijzonder op het

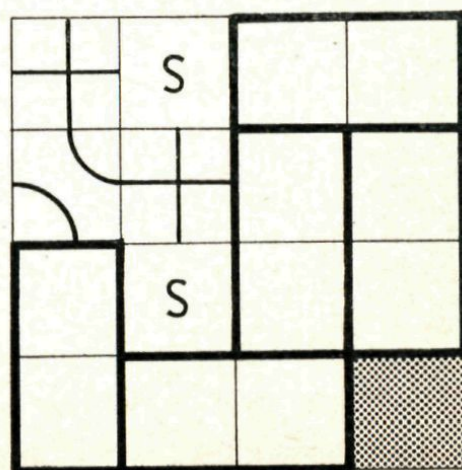


Fig. 19a

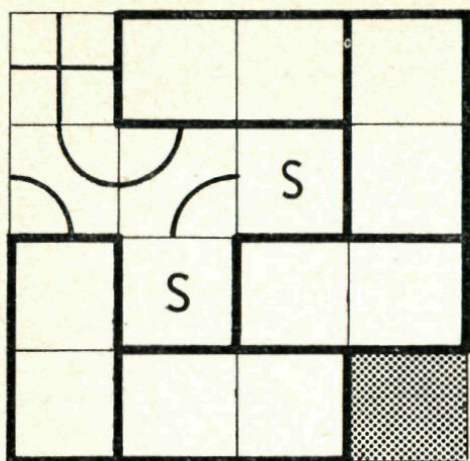


Fig. 19b

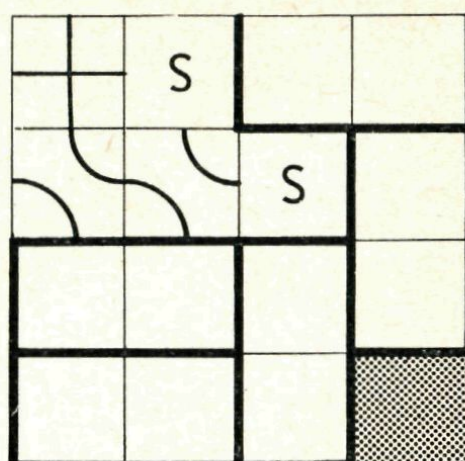


Fig. 19c

lijntje van die zet van A, dat niet tot het pad behoort. Dat lijntje verbindt twee vierkantjes, die dezelfde kleur zouden hebben als het speelveld er als een schaakbord uitzag. Die twee velden beschouwt B nu als samen de „gespleten domino” vormend. Je zou kunnen zeggen, dat A met zijn zet zijn doodvonnis getekend heeft. Want nu B de gespleten domino gekozen heeft, verdeelt hij de rest van het speelveld in domino's op een verder volkomen willekeurige manier (het lukt altijd). En daarna wint hij op dezelfde manier als A dat in het vorige geval deed: door A te dwingen telkens een domino vol te maken.

De punten worden geteld

Hoewel de redactie met de lezers geen spelletje speelde, toen ze de enquête-kaarten in nummer 5 van deze jaargang legde, heeft ze nu toch te maken met dat wonderlijke spel, dat in het maatschappelijke leven een steeds grotere rol gaat spelen: de statistiek.

Want nu de kaarten komen binnenstromen moeten de punten geteld worden en geregistreerd en daarna moeten de conclusies worden getrokken. Het zal duidelijk zijn, dat het tellen en registreren (overbrengen in een kaartstelsel) een tijdrovend werk is, zodat op het ogenblik, dat de kopij voor dit nummer klaar gemaakt moest worden alles nog niet geteld was.

Toch komt er al kleur en tekening in de gegevens, die we op deze wijze ontvangen. Omdat ieder drie interessante artikelen kon noemen (die we in onze berekeningen met een + waarderen), maar ook drie vervelende

(met een — gewaardeerd), zou men kunnen verwachten, dat het aantal pluspunten en minpunten ongeveer gelijk zou moeten zijn. We verheugen ons er over, dat het aantal pluspunten het tot nu toe royaal wint van de minpunten.

Er is één artikel, dat slechts 2 stemmen verwierf (bldz. 10) en nog wel minstemmen. Overigens heeft elk artikel aan de stemming deelgenomen. Vanzelf zijn er enkele, die de meeste aandacht getrokken hebben. Dat zijn bijvoorbeeld: Hoe hoog is dat gebouw? (veel plusstemmen), Matrix-malligheid (nog meer plusstemmen), Relaties (een overmaat aan minstemmen), Matrix-ernst (bijna evenveel plus- als minstemmen, echter veel vermeldingen van te grote moeilijkheid). De artikelen van Prof. van der Blij verwierven ook al ongeveer evenveel plus- als minpunten en werden ook nog al eens moeilijk gevonden. Wiskunde in de knoop, Binaire code, Vermenigvuldigstroken, Touw om de evenaar, Toren van Pisa hadden alle tot nu toe een pluspuntenoverschot.

Het spreekt vanzelf, dat in de vakantie de gelegenheid gezocht wordt voor een nauwkeuriger bestudering van het binnengekomen materiaal, waarbij ook het verschil in leeftijd of schoolklasse in aanmerking genomen kan worden.

Het zal dan ook mogelijk zijn onze strategie te bepalen voor de komende jaargang. Een lijst van ongeveer 75 onderwerpen hebben we al kunnen opstellen uit de verlangens, die onder aan de kaarten werden vermeld. Aan enkele veel genoemde wensen hopen we zeker te kunnen voldoen. Dat sommige wensen haast onvervulbaar zijn en andere liggen op het terrein van nu door velen als vervelend gekenmerkte gebieden liggen, zal ieder begrijpen.

Van één veel gevraagd onderwerp kunnen we nu echter al toezeggen, dat er in elk nummer zeker een artikel over zal verschijnen, dat is over de wondermooie en wonderlijke tekeningen en prenten van de heer *M. C. Escher*. We stellen het zeer op prijs, dat deze kunstenaar het goed gevonden heeft, dat we nog eens in een jaargang zijn werk mogen publiceren en bespreken. Dat dit een gevolg is van de enquête zal hun, die deze wens geuit hebben, zeker een genoegen doen.

We gaan nu door met puntentellen en wensen registreren en hopen zo ook de volgende jaargang weer naar genoegen te laten zijn. In ieder geval werden we herhaaldelijk op de kaarten aangemoedigd met de kreet: Ga zo voort. Hetgeen we dan hopen waar te maken.

WOORDENBOEK

Go afkorting van *igo* = *omsingelingsspel*

Ko technische term in het Go-spel, betekent „*eeuwigheid*”

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden.

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,— per jaargang. Voor anderen f 3,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J.B.Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B.Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.