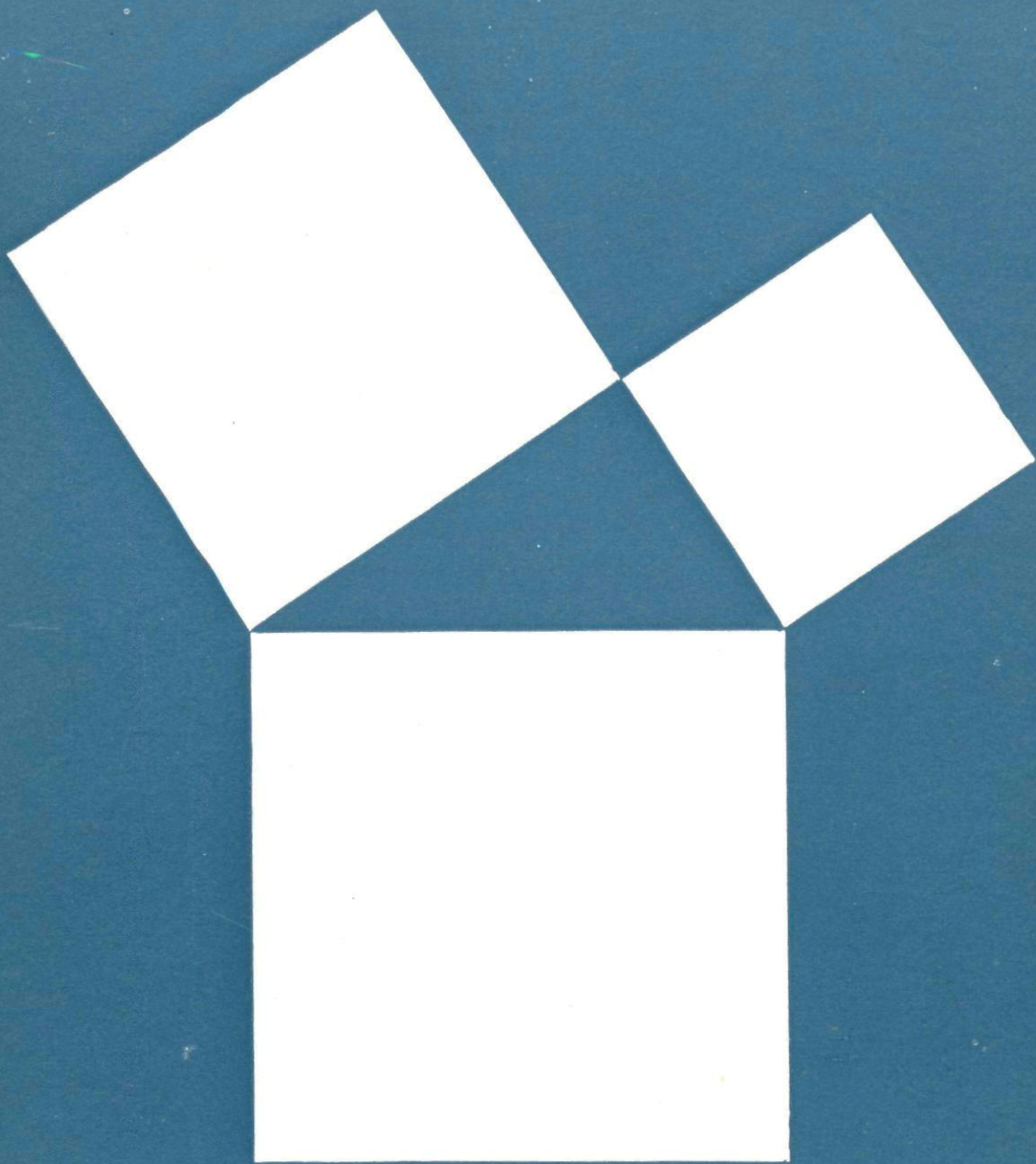


PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

1

Vijfde jaargang

Pythagoras proves the point

By Daily Mail Reporter

BUS-DRIVER Clifford Lord was cleared of a motoring offence yesterday, thanks to Pythagoras, the Greek mathematician who lived 2,500 years ago.

Pythagoras proves the point (blz.4).

° Onmogelijk

Het onmogelijke prikkelt ons, nietwaar beste lezers, die ons vroegen „geef ons weer eens zo'n onmogelijke figuur". Met fig.1 voldoen we aan dat verzoek.

Onze blik springt van het normale linkerdeel naar de gewone rechterhelft. Maar we kunnen een beetje kwaad worden, als de verbinding tussen die twee delen maar niet tot stand wil komen.

De figuur verzet er zich tegen om in zijn geheel bekeken te worden.

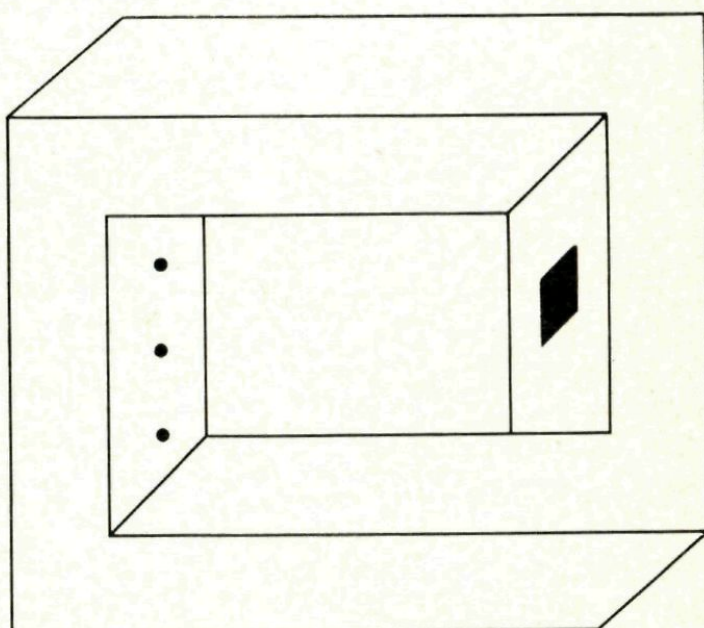
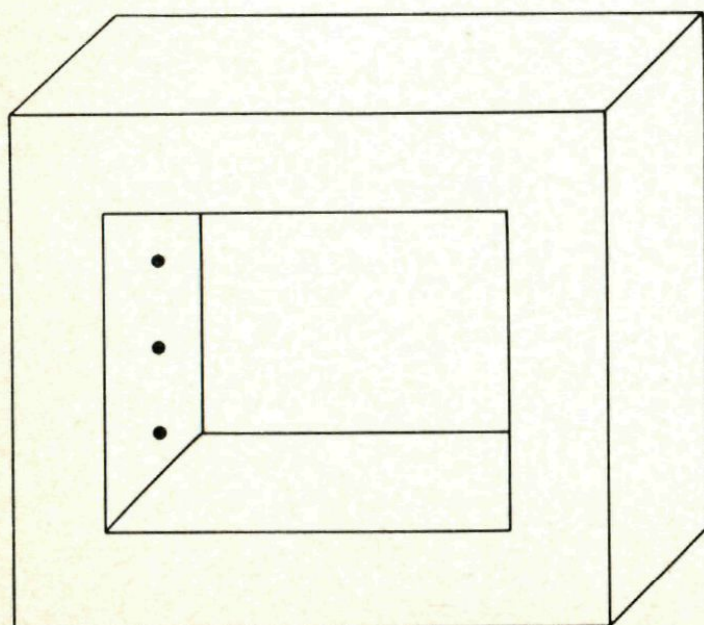


Fig.1



Daarom wipt nu eens het linkerdeel, dan weer het rechterdeel naar voren. Er zit beweging in de figuur, die daardoor niet star en statisch is, zoals figuur 2.

Maar figuur 2 is dan ook niet interessant.

Fig.2

Het zou voor de redactie niet interessant geweest zijn, als de wensen, die op de enquête-kaarten werden uitgesproken, alle gelijkluidend waren geweest. Ze zouden ons niet zo tot verdere activiteiten hebben geprikkeld. Nu vonden we naast het verzoek „geef ons *meer* theoretische artikelen” de wens „geef ons *minder* theoretische artikelen”. Naast de vraag „maak Pythagoras gemakkelijker” ook weer die andere: „maak Pythagoras moeilijker”. Onze blik springt van de ene vraag naar de andere. Hoe brengen we de verbinding tot stand? Het is een onmogelijke figuur, die onze lezers ons voorgetoverd hebben. Wat zullen we nu doen? Laveren, denk ik. De ene keer eens meer theorie, de andere keer meer praktijk. En wees niet boos, als je wens niet in alle nummers vervuld wordt! We hopen, dat elke lezer zo nu en dan iets van zijn gading zal vinden. Honderd procent interessant kunnen we ons tijdschrift voor niemand maken. Dat is onmogelijk.

Er is nog iets anders, dat onmogelijk is, althans heel moeilijk. Onder de wensen voor de nieuwe jaargang vonden we verscheiden malen de vraag: „geef ons eens artikelen over de ruimtevaart”. Nu denkt de redactie al sinds het eerste nummer over de mogelijkheid artikelen over de ruimtevaart te plaatsen. De moeilijkheid is echter, dat voor een goed artikel zoveel ruimte nodig is, dat er wel een geheel nummer van Pythagoras mee gevuld zou moeten worden. En dan krijgen we ruzie met de lezers, die zich voor andere dingen interesseren. We kunnen echter mededelen, dat ons zustertijdschrift Archimedes in de komende jaargang een nummer aan de ruimtevaart gaat wijden.

We bladeren dit nummer even door

Pythagoras voor de rechter werd door een onzer cartoonisten getekend bij een verslag van een rechtzaak, dat we vonden in de Daily Mail. Hoe de inhoud van een bos gemeten wordt en hoe de inhoud berekend wordt van een merkwaardig voorwerp, dat we „kokinje” doopten, vinden we in twee der artikelen in dit nummer. De hoofdmoot van dit nummer is een artikel over een plaat van de graficus Escher. De kenners zullen zich verheugen opnieuw de analyse van zo’n plaat te vinden. Wie voor het eerst daarmee kennis maakt, zal al spoedig een bewonderaar worden van deze vreemde, intrigerende platen. Dat wiskunde iemands liefhebberij kan zijn, is voor de lezers van Pythagoras vanzelfsprekend. Dat men die liefhebberij tot uiting laat komen op de manier, waarop

we dat bij Ir. E. Strens zien, is betrekkelijk zeldzaam. Misschien zijn er onder onze lezers verzamelaars van exlibris, die in hun verzameling ook exemplaren hebben met een wiskundige inhoud. Dan willen we die graag eens zien. Misschien kunnen we er een artikeltje aan wijden. De Heer Strens daagt ons in zijn exlibris uit om handig te tellen. Neem deze uitdaging aan.

De Denkertjes vormen eveneens een uitdaging aan de puzzelliefhebbers. Er is ook dit jaar weer een ladderwedstrijd aan verbonden. In de vorige jaargang hadden we veel deelnemers aan deze wedstrijd. We verwachten nu ook weer een grote deelname.

We moeten voor nieuwe abonnees nog even enkele zaken verklaren. Bij de titel van elk artikel treft men een seintje aan, nl. ° of °° of °°. Deze seintjes geven de graad van moeilijkheid van de artikelen aan. Die met ° zijn het gemakkelijkst. Er zijn van de voorgaande jaargangen nog enkele exemplaren verkrijgbaar. In het bijzonder van de nummers, die aan één onderwerp gewijd waren. Daarvan hebben we nl. meer exemplaren laten drukken. Het zijn de nummers gewijd aan de rekenliniaal, vectoren, nomogrammen en het spelnummer. Ze zijn verkrijgbaar voor f 0,75 per stuk of f 3,— per jaargang. Te bestellen door storting of overschrijving van het bedrag op girorekening 807707 van J. B. Wolters te Groningen.



Klim er eens in

Denkertjes

De redactie ontvangt graag beredeneerde oplossingen van de kleine probleempjes, die als „Denkertjes” in elke aflevering worden opgenomen. De ontvangen oplossingen worden met zorg beoordeeld en met een cijfer gehonoreerd. Elke 10 geeft de inzender een kans op de lootprijs: per aflevering van Pythagoras wordt daarvoor een boekenbon ter beschikking gesteld. Ook de niet helemaal volmaakte oplossingen hebben echter waarde. De behaalde punten worden namelijk geadministreerd. En ieder, die uit de eerste vier afleveringen een totaal van minstens 300 punten weet te halen, krijgt ook een boekenbon. Doe mee aan deze ladderwedstrijd. Klim er eens in.

1. Ik ga nu op weg naar het station. Loop ik met een snelheid van 3 km/uur, dan kom ik een kwartier te laat voor mijn trein. Loop ik echter met een snelheid van 6 km/uur, dan kom ik een kwartier te vroeg. Met welke snelheid moet ik lopen om mijn trein op het nippertje te halen? (naar „Archimedes”)
2. Een lichtsignaal is afwisselend gedurende x minuten zichtbaar en gedurende x minuten onzichtbaar (x is een geheel getal). Om twaalf uur precies begint een periode van zichtbaarheid. Het signaal is onzichtbaar om 12 uur 9 min, maar zichtbaar om 12 uur 17 min en om 12 uur 58 min. Onderzoek of het zichtbaar is om 14 uur.



°°Pythagoras – Getuige a decharge

door een verslaggever van de Daily Mail

Buschauffeur Clifford Lord werd gisteren vrijgesproken van een verkeersovertreding, dank zij Pythagoras, de Griekse wiskundige, die 2500 jaar geleden leefde.

De beroemde stelling van Pythagoras redde de 35 jaar oude Heer Lord. De advocaat Mr. Leslie Portnoy, die de Heer Lord in Blackburn, Lancashire, verdedigde, citeerde de stelling voor de rechtbank. Deze zegt: *Het kwadraat van de hypotenusa van een rechthoekige driehoek is gelijk aan de som van de kwadraten van de beide andere zijden.*

De Heer Lord (Coronation-avenue, Padiham, Lancashire) was beschuldigd van roekeloos rijden. De aanklager beweerde, dat hij zijn wagen niet meer onder controle had gehad, toen hij slipte en tegen een vrachtwagen opbotste.

Gegeven: De weg was 27 ft.¹ breed en de vrachtwagen was 30 ft. lang. Volgens monteurs van een garage aan de overkant stond de vrachtwagen onder een hoek van 45° met de berm en 1 ft. over de witte streep op het midden van de weg.

Fout

Op dit punt herinnerde Mr. Portnoy zich Pythagoras. Hij schetste enkele driehoeken op een stuk papier en maakte een paar vlugge berekeningen. Toen bewees hij, als een eindexamenklasser in een proefwerk, dat uit de stelling van Pythagoras volgde, dat de getuigen ongelijk hadden.

Hij beweerde, dat als de vrachtwagen gestaan had, zoals de getuigen hadden gezegd, dat deze dan ongeveer 8 ft. over de middellijn van de weg had moeten staan. De afstand van de neus van de vrachtwagen tot de wegberm zou dan immers $15\sqrt{2}$ ft. zijn, dat is ruim 21 ft. en dus ongeveer 8 ft. meer dan de helft van de wegbreedte.

Het kostte de juryleden, de textielhandelaar Guy Aspden en Mevr. Wed. A. E. Chambers slechts twee minuten om tot de uitspraak onschuldig te komen.

De Heer Lord had al eerder beweerd, dat zijn remmen vastgelopen waren, toen hij in een hevige regen plotseling de vrachtwagen voor zich zag.

Mr. Portnoy zei later: „Tijdens de verklaringen van de getuigen schoot het me opeens te binnen, dat Pythagoras zou kunnen bewijzen, dat ze ongelijk hadden. En dat gebeurde”. De Heer Aspden, de voorzitter van de jury, zei: „Het was een nogal ongewone rechtzaak. Ik moest mijn meetkunde wel even weer ophalen om het bewijs met de stelling van Pythagoras te kunnen controleren”.

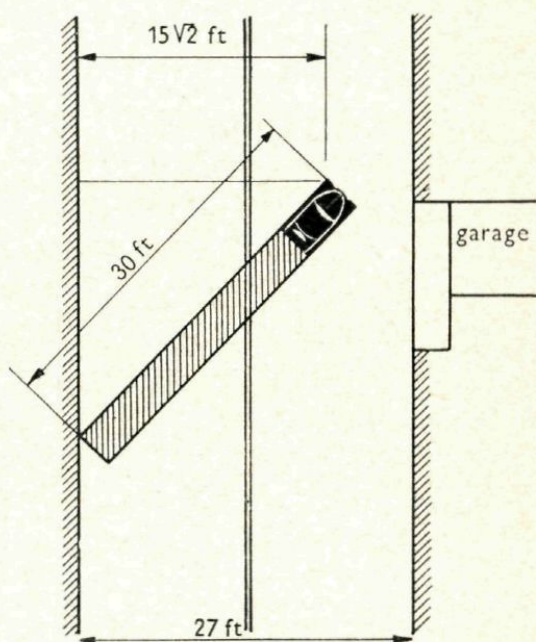


Fig. 3

¹ 1 foot = 0,3048 m.



3. Op een rechte lijn zijn vijf verschillende punten gegeven. Voor welk punt van die rechte lijn hebben de afstanden tot die vijf gegeven punten een zo klein mogelijke som?

4. Een stuk papier, dat de vorm van een scherphoekige driehoek heeft, moet in stukken verdeeld worden die allemaal de vorm van een scherphoekige driehoek hebben of allemaal de vorm van een stomphoekige driehoek hebben. Bepaal voor beide gevallen hoeveel stukken dit minstens zijn.
5. Hoeveel natuurlijke getallen liggen er tussen 1000 en 2000, die elfvoud plus tien en tevens dertienvoud plus twaalf zijn?

°Exlibris en wiskunde

De Heer Ir. E. Strens te Breda moet wel een groot liefhebber van de wiskunde zijn. Dit blijkt op vele manieren. Een van zijn zoons heeft hij PASCAL genoemd, naar de grote 17e-eeuwse Franse geleerde, die onder meer bekend is door de Driehoek van Pascal in de algebra, de stelling van Pascal in de meetkunde (deze zal in het volgende nummer worden besproken) en de wet van Pascal in de natuurkunde.

Voor zichzelf en zijn kinderen heeft de Heer Strens exlibris ontworpen, die eveneens getuigen van zijn liefde voor de wiskunde. In dit artikel vinden we een voorbeeld van deze exlibris. Een tweede is afgedrukt op blz. 24. Niet alleen zijn ze bijzonder sierlijk, zie maar de elegante gesloten kromme, waardoor de letters in fig. 4 omgeven zijn, maar bovendien zit er een puzzelelement in. Je kunt je nl. afvragen hoeveel maal de naam *Pascal* S in fig. 4 en de naam *Bianca* in fig. 25 te lezen is. We zullen de eerste vraag hier bespreken en de tweede op bladz. 24.

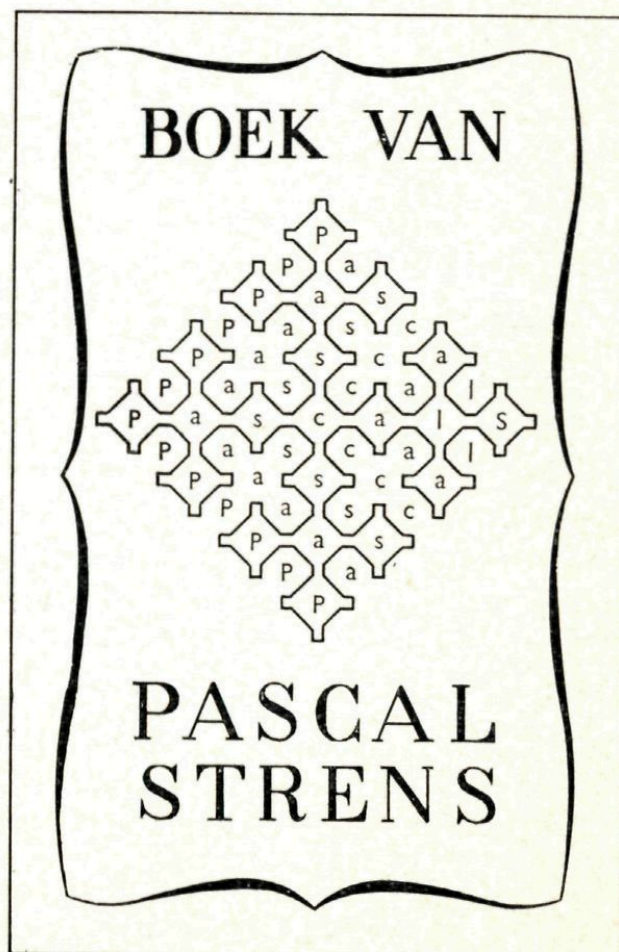


Fig. 4

De letters Pascal S in het exlibris van fig. 4 zijn gerangschikt in vierkanten rondom de S, die geheel rechts staat. In fig. 5 zijn die vierkanten eveneens te herkennen. In het onderste deel van fig. 5 is een der wegen aangegeven, waarlangs men de naam Pascal S kan lezen. Willen we

nu het totale aantal mogelijkheden tellen, dan kunnen we het beste aan de rechterkant beginnen. De eindletter S kan langs drie wegen bereikt worden vanuit de voorafgaande 1. Bij elk van deze letters 1 is het getal 1 geplaatst. Men kan immers van elke 1 uit langs 1 weg de S bereiken. Aan de letters l gaan de letters a vooraf. Van elk daarvan kan men langs 2 wegen de 1 bereiken, behalve van de middelste a, die slechts met 1 1 in verbinding staat.

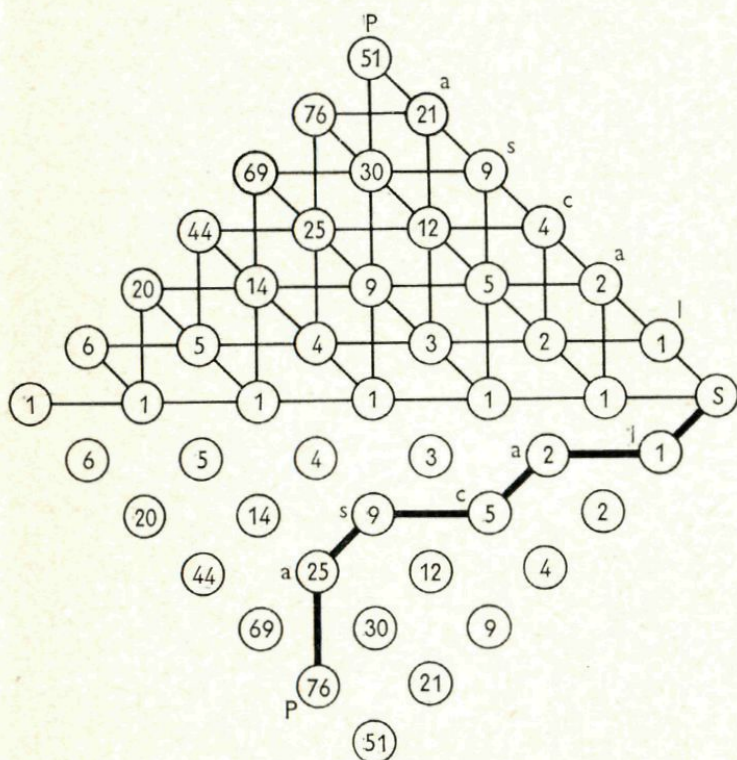


Fig. 5

Op de plaatsen van de letters a staan nu in fig. 5 vermeld 2, 2, 1, 2, 2, omdat men van de a uit langs dit aantal wegen de S kan bereiken. Langs hoeveel wegen kan men nu van de letters c uit de S bereiken. Van de c op de zijde van het vierkant rechts-boven kan men twee letters a bereiken. Van elk dezer letters gaan 2 wegen naar de S. Van deze c uit kan men dus langs 4 wegen naar de S. Van de volgende c uit kan men drie letters a bereiken, daardoor gaan er van deze c 5 wegen naar de S. Het zal nu waarschijnlijk wel duidelijk zijn, hoe elk getal in de kringetjes tot stand is gekomen. Nu kunnen we dus kijken langs hoeveel wegen we van de letters P uit naar de S kunnen komen. Dat zijn er in totaal:

$$1 + 2(6 + 20 + 44 + 69 + 76 + 51) = 533.$$

Op het exlibris van fig. 4 kan men in de omlijnde figuur dus 533 maal de naam Pascal S lezen.



Fig. 6

Prentententoonstelling

Toen ik de Litho: PRENTENTENTONSTELLING van Escher voor het eerst zag, was ik er niet van „ondersteboven”. Bij een verder indringen kwam echter de verrassing: er is aan deze prent zeer veel te beleven. Het is misschien wel de knapste, die Escher ooit bedacht en uitgevoerd heeft. Laten we de prent eerst als een argeloze beschouwer tegemoet treden. Rechts onderaan is de ingang van een galerij waarin een prentententoonstelling gehouden wordt. Gaan we naar links, dan zien we een

jongeman staan, die een van de prenten, die tegen de wand hangen be-
kijkt. Hij ziet op die prent een schip en verderop, links boven dus, hui-
zen langs de kade. Gaan we nu naar rechts, dan zet zich de huizenrij
langs de kade voort. Helemaal rechts gekomen laten we de blik naar
beneden dwalen tot we onderaan bij het hoekhuis komen: we zien een
galerij, waarin een prentententoonstelling gehouden wordt. Gaan we nu
langs de onderkant weer naar links, dan komen we in de linkerhoek een
jongeman tegen die naar een prent staat te kijken.

Het meest verrassende is wel, dat deze jongeman op dezelfde prent
staat, als waarnaar hij staat te kijken.

Toen we hem voor de eerste keer ontmoetten was hij een bezoeker van
de tentoonstelling en bij de tweede ontmoeting is hij een figuurtje op de
prent, waarnaar hij zojuist stond te kijken.

Met behulp van de gegevens die Escher zelf zo vriendelijk was te ver-
strekken, gaan we nu wat dieper in op de constructie van de prent.

Zijn bedoeling was een gesloten ringvormige uitdijïng te verbeelden, die
nergens begint en nergens eindigt. We kunnen dit het beste verduide-
lijken met een paar eenvoudige schetsjes. (Fig. 7 en 8)

Rechts onderaan in het vierkant (fig. 7) is een figuurtje getekend, gaan
we nu langs de onderrand naar links, dan wordt dit figuurtje steeds
groter. Tegen de linkerrand is een viervoudige vergroting bereikt. De
afmetingen van het kleine zwarte figuurtje zijn nu ook vier maal zo
groot geworden.

Gaan we langs de linkerrand van onderen naar boven, dan is boven-

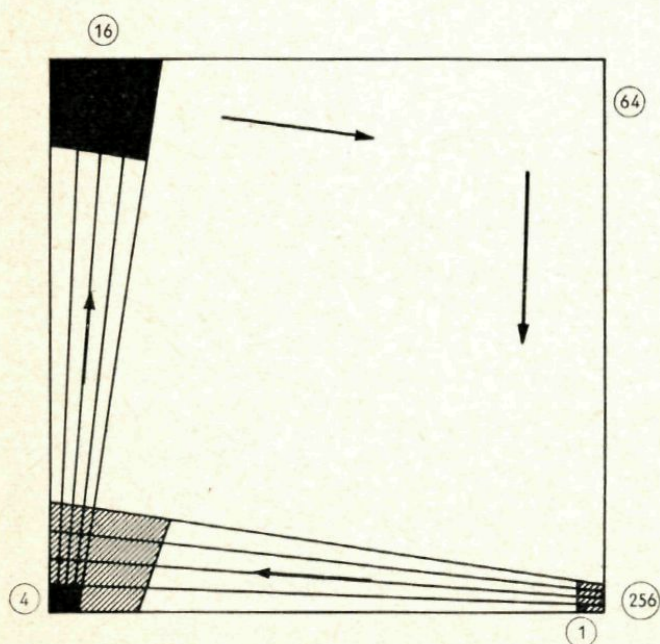


Fig. 7

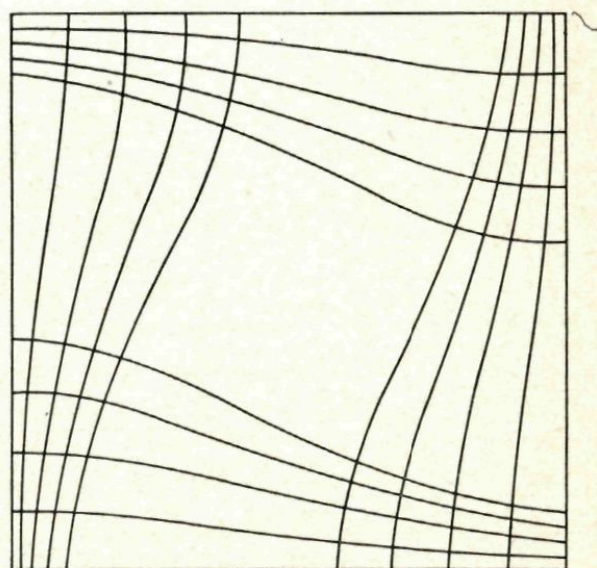
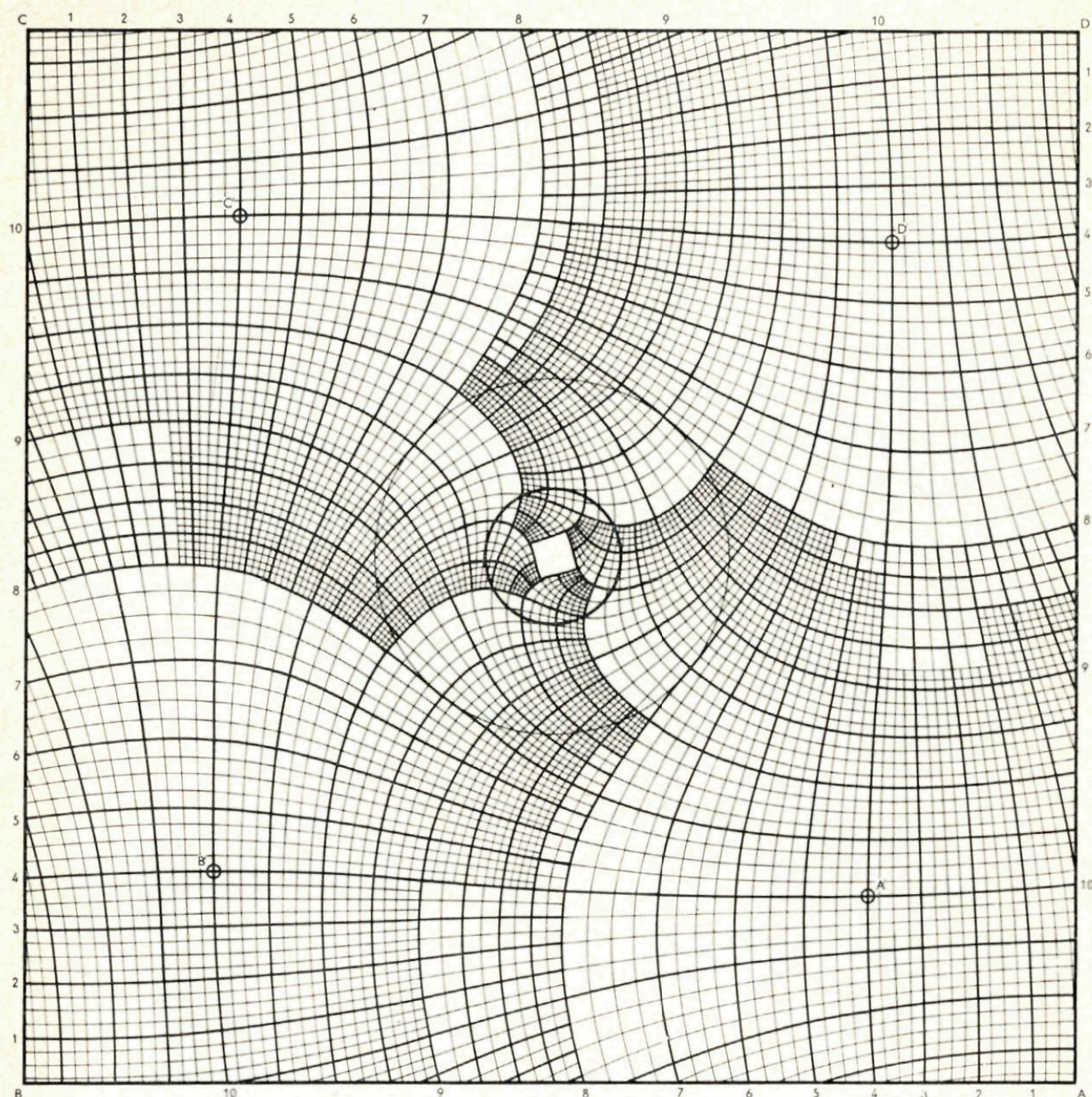


Fig. 8

Fig. 9



aan weer een viervoudige lineaire vergroting bereikt, zodat de afmetingen van het oorspronkelijke zwarte figuurtje daar 16 maal vergroot terugkomen. Langs de bovenkant naar rechts wordt alles weer 4 maal vergroot en tenslotte nóg eens van boven naar beneden. Wat oorspronkelijk 1 mm lang was onder in de rechterhoek, is, na één maal rond te zijn geweest 256 mm geworden.

Misschien voel je al aan, dat het een vrijwel onmogelijke opgave wordt dit idee in beeld te brengen. In het schetsje zijn we dan ook niet verder gegaan dan twee stappen, de twee overige stappen zijn slechts met pijltjes aangeduid.

Escher heeft aanvankelijk geprobeerd dit idee met behulp van rechte lijnen uit te werken. Intuïtief kwam hij echter op de gebogen lijnen die in het tweede schetsje zijn weergegeven (fig. 8). De oorspronkelijke vierkantjes blijven dan ook „meer vierkant”. Met behulp van dit netwerk was al een groot deel van de prent te tekenen, er bleef echter een leeg „vierkant” in het midden open.

Het bleek mogelijk dit „vierkant” van eenzelfde net te voorzien als het oorspronkelijke. Door dit nog enige keren te herhalen ontstond het net dat je afgebeeld vindt op pag. 10 (fig. 9). $A'B'C'D'$ is het oorspronkelijke vierkant. ABCD is een uitbreiding naar buiten die we nog niet vermeld hebben.

Dit prachtige regelmatige netwerk nodigt zeker uit tot een nadere wiskundige bestudering; verschillende wiskundigen (o.a. Prof. van Dantzig en Prof. van Wijngaarden) hebben getracht het te analyseren. Hun resultaten zijn echter te ingewikkeld om ze hier weer te geven.

In figuur 7 zie je, dat slechts twee stappen van de vergroting getekend zijn. In feite doet Escher dit ook in zijn prent. Van rechts-onder naar links-boven zien we de galerij steeds groter worden. De laatste twee stappen zouden onmogelijk binnen het vierkant uitgevoerd kunnen worden, omdat er een steeds groter oppervlakte nodig is om de vergroting van het geheel weer te geven. Het is een prachtige vondst om voor de laatste twee stappen de aandacht te vestigen op een der prenten in de galerij. Deze prent kan weer binnen het vierkant weergegeven worden met toenemende vergroting (tot 16 maal).

Een nieuwe vondst is nu weer dat Escher op de laatstgenoemde prent een galerij laat voorkomen die samenvalt met de galerij waarmee hij begonnen is.

Nu moeten we nog nagaan hoe Escher, uitgaande van een normale tekening, deze overgebracht heeft op het vooraf geconstrueerde net.

Van dit vrij ingewikkelde procédé zullen we slechts een klein gedeelte bekijken. Fig. 11 geeft een der deeltekeningen weer: de galerij. Over deze tekening is een net van vierkanten gelegd (je zou ook kunnen zeggen: het is op roosterpapier getekend). De punten A, B en A' vinden we ook op het net van figuur 9. We vinden daar ook hetzelfde rooster terug, maar nu vervormd; naar links steeds groter wordend. Nu is het beeld van elk ruitje van de oorspronkelijke tekening in het overeenkomstige ruitje van het net getekend. Daardoor ontstaat vanzelf de toenemende vergroting van het beeld.

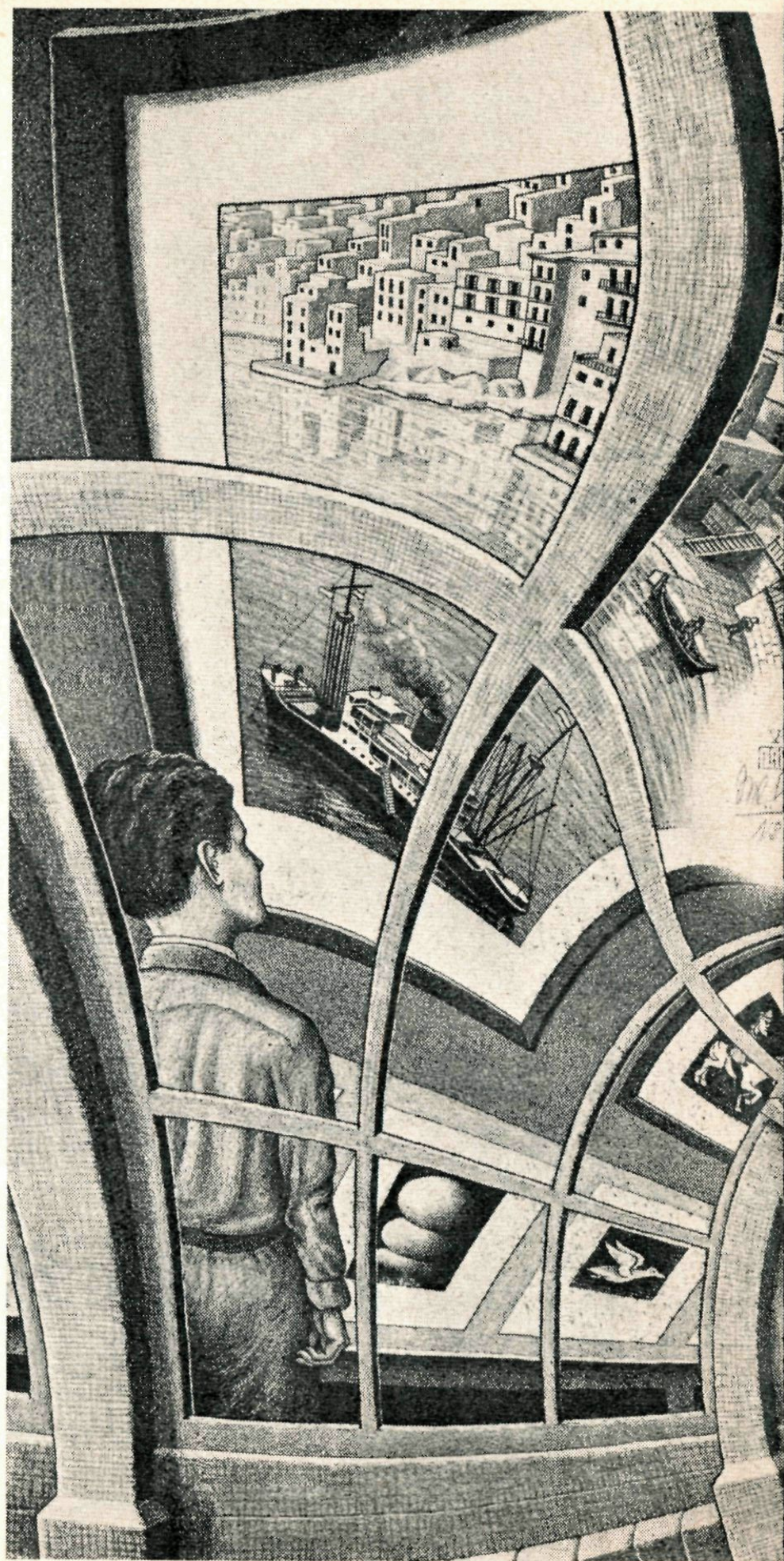
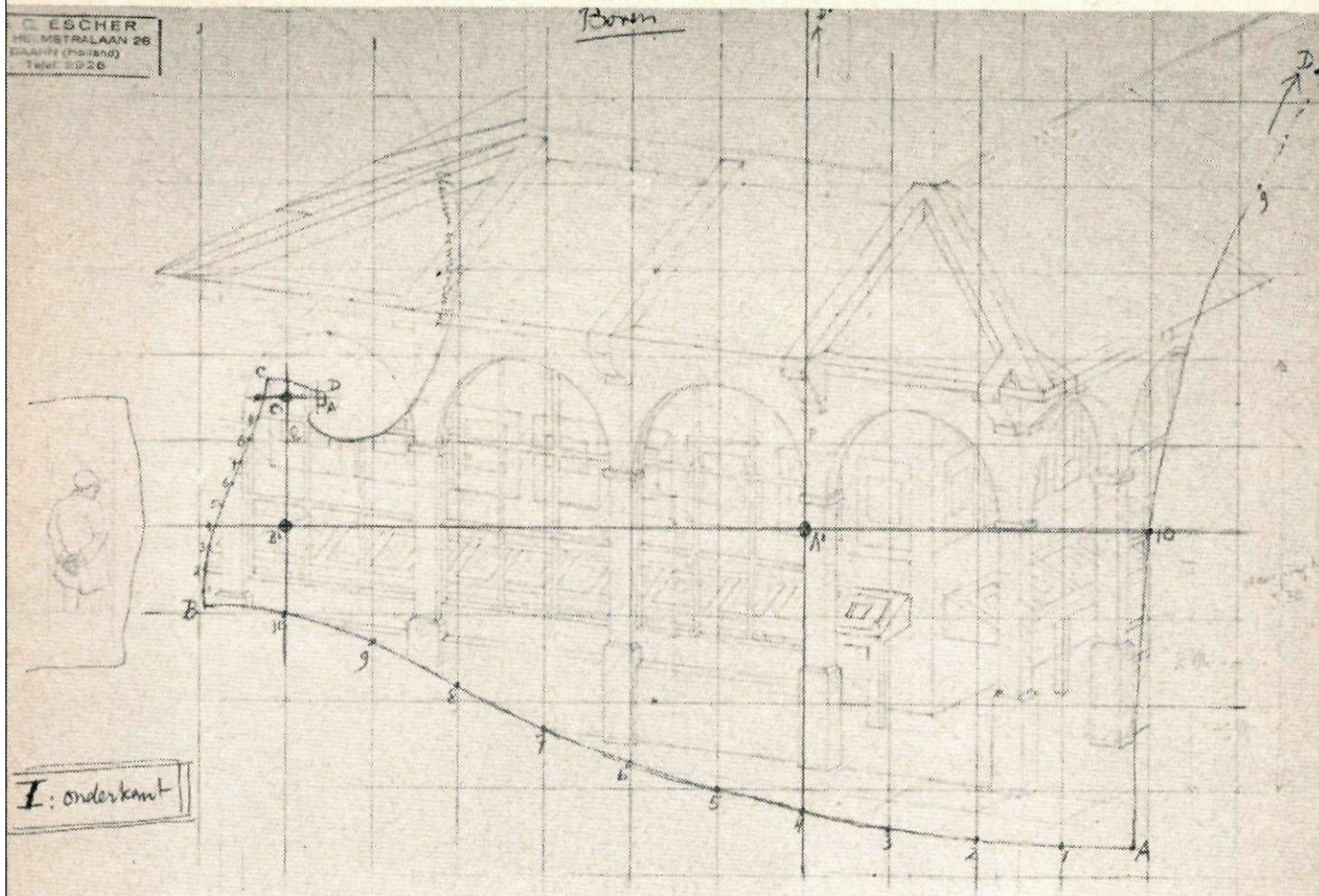




Fig. 10

Fig.11



Het is instructief na te gaan wat er gebeurd is met de rechthoek $A'PQB'$ uit de oorspronkelijke tekening. Figuur 12 en figuur 13 kunnen je daarbij helpen.

Fig.13

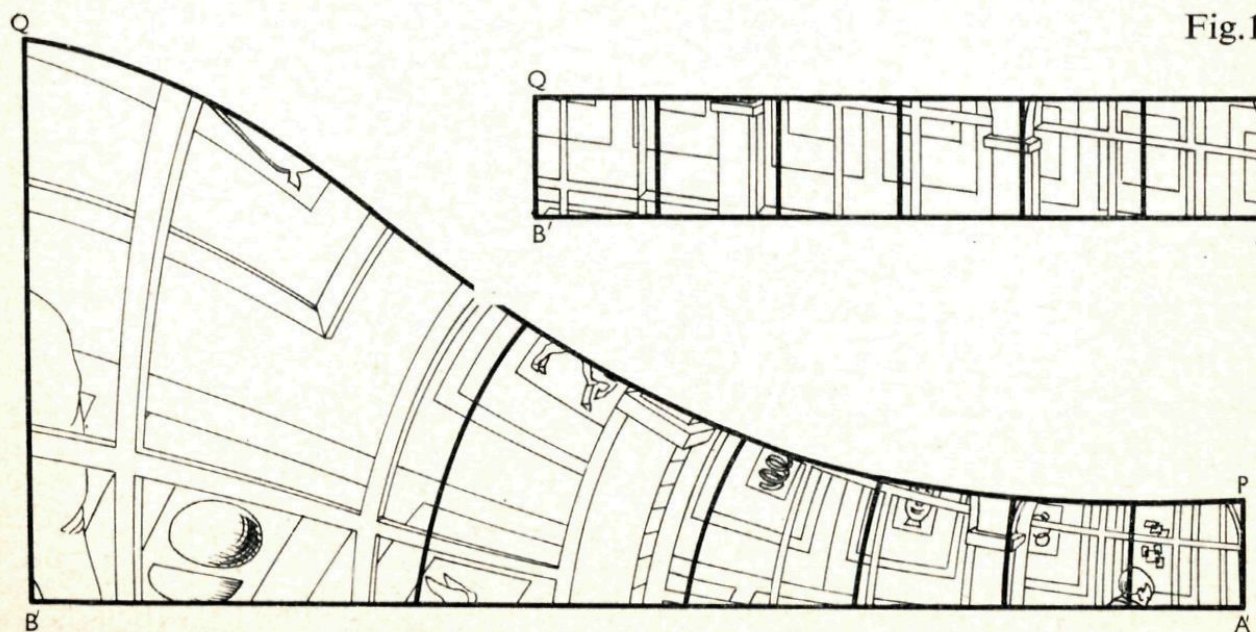
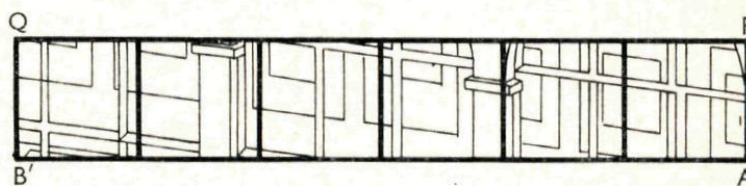


Fig.12



°° De inhoud van een Kokinje

Wie in een wiskundig woordenboek het woord „kokinje” gaat opzoeken, zal het niet vinden. Een handwoordenboek van de Nederlandse taal geeft het niet, maar in de „grote” Van Dale staat het vermeld. Kokinje is de naam van een ouderwets snoepje, dat ik vroeger wel eens kocht als ik als jongen een cent had gekregen van een of andere gulle oom. We noemden het in Deventer „kokkieë”. Later hoorde ik, dat het in Groningen „ke-kaigie” heette. In de Van Dale staan bij het woord „kokinje” als Nederlandse synoniemen „babbelaar”, „kussentje”. En dat laatste woord zouden we ook wel kunnen gebruiken voor het voorwerpje, waarvan we de inhoud gaan berekenen.

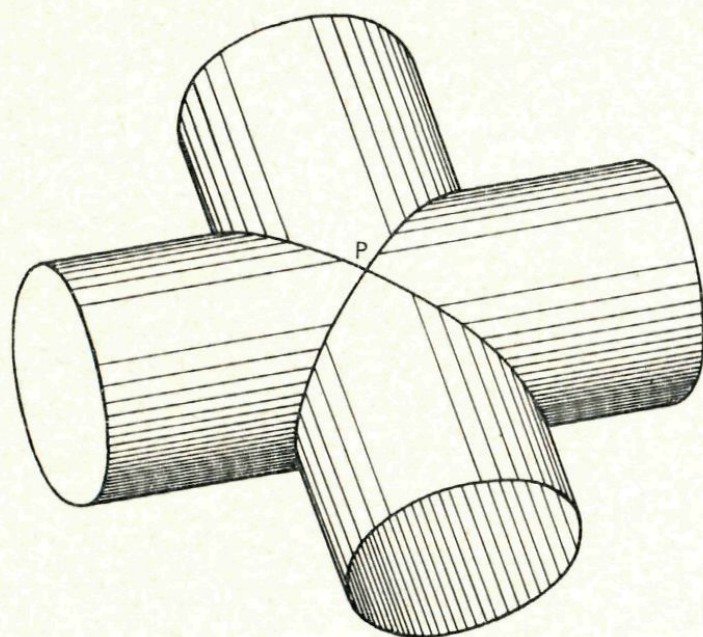


Fig. 14a

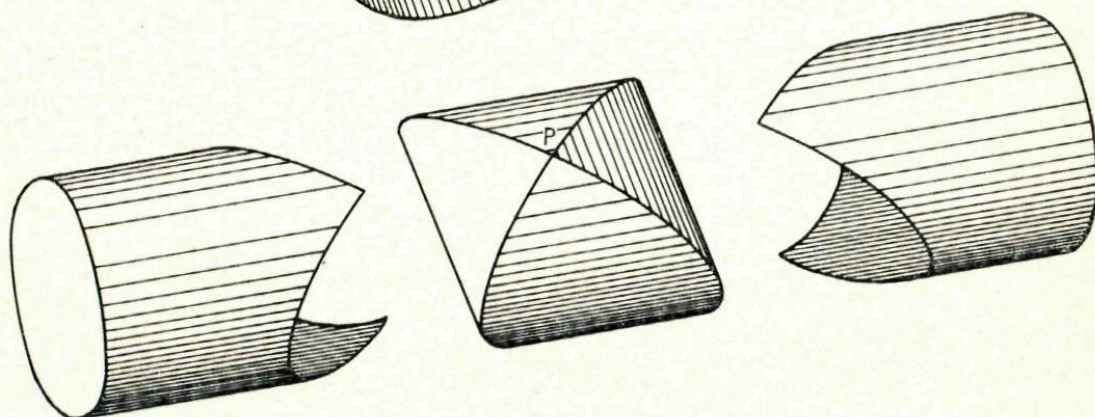


Fig. 14b

Wanneer twee rechte cirkelcilinders met gelijke straal elkaar zo doordringen, dat hun assen elkaar loodrecht snijden, zoals in fig. 14a, dan bestaat hun snijkromme uit twee ellipsen¹. Een der snijpunten van deze ellipsen is in de figuur met de letter P aangeduid.

Zijn het massieve cilinders, dan hebben ze een lichaam gemeen, dat tevoorschijn zou komen, als we de cilinderdelen uit elkaar zouden schui-

¹ Zie noot 2.

ven, zoals in fig. 14b. Dat lichaam heeft een vorm, die doet denken aan het ouderwetse snoepje, het kussentje, de kokinje. In fig. 14b kijken we boven op het kussentje. Je kunt je wel voorstellen, dat de onderkant er net zo uit ziet. In fig. 15a kijken we er pal boven op. We zien dan, dat het symmetrievlak, dat hem verdeelt in een bovenste en onderste deel, de kokinje snijdt volgens een vierkant. De zijden van dat vierkant hebben de lengte $2r$, als r de straal van elk der cilinders is. Kijken we pal voor tegen de kokinje aan, dan zien we, dat het symmetrievlak, dat hem verdeelt in een voorste en achterste deel, hem snijdt volgens een cirkel met straal r . Ook het symmetrievlak, dat een verdeling geeft in een linker- en rechterhelft snijdt hem volgens een cirkel (fig. 15b).

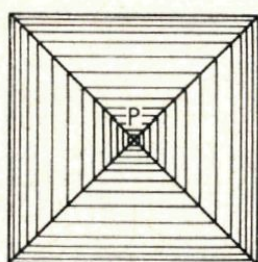


Fig. 15a

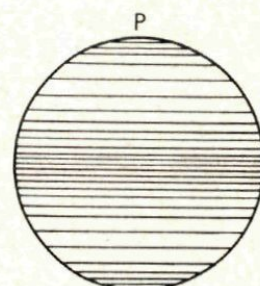


Fig. 15b

Zo, nu weten we ongeveer hoe het kussentje er uit ziet. De vraag is nu, hoe we de inhoud daarvan kunnen berekenen.

We bekijken daarvoor eerst fig. 16.

De drie zojuist genoemde symmetrievlakken zijn daarin getekend. Bovendien is er nog getekend een doorsnede evenwijdig met het horizontale symmetrievlak. Deze doorsnede is eveneens een vierkant. Bekijk fig. 14a nog maar eens goed, dan kun je je wel voorstellen, dat elke horizontale doorsnede een vierkant is. In fig. 15a zie je dat duidelijk. Een zuivere afbeelding van de kokinje is dus te verkrijgen door een groot aantal van deze vierkanten te tekenen, zoals in fig. 17, waarin de bovenste helft is opgebouwd met behulp van vierkanten².

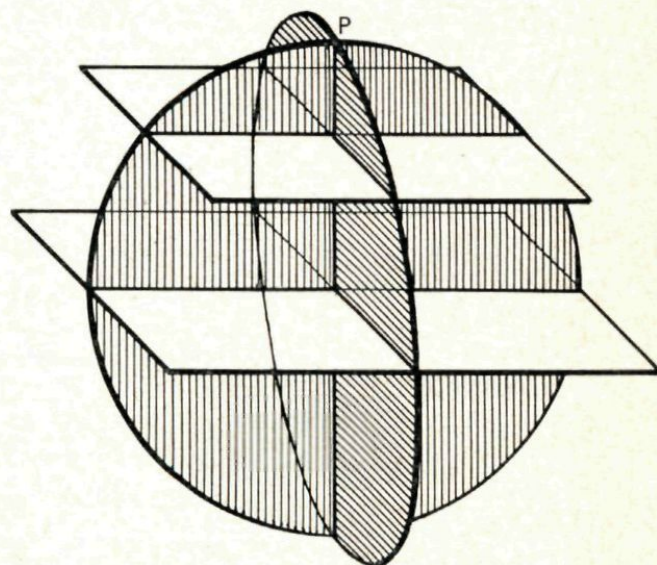


Fig. 16

² De hoekpunten van de vierkanten liggen, zoals ook in fig. 15 blijkt, in twee onderling loodrechte vlakken. Elk van die vlakken snijdt de cilinders volgens een ellips.

De inhoud zouden we nu kunnen berekenen door de kokinje zorgvuldig in een heel groot aantal zeer dunne vierkante plakjes te snijden. Een van die plakjes is afgebeeld in fig. 18. In dat plakje is eveneens een cilindertje aangebracht, waarvan de grondcirkel de ingeschreven cirkel van het vierkant is. Is de dikte van het plakje gelijk aan h en de lengte van het vierkant $2a$, dan is de inhoud van het vierkante plakje gelijk aan $4a^2h$ en van het cilindertje πa^2h , zodat de inhoud van het vierkante plakje $\frac{4}{\pi}$ maal zo groot is als die van het cilindertje.

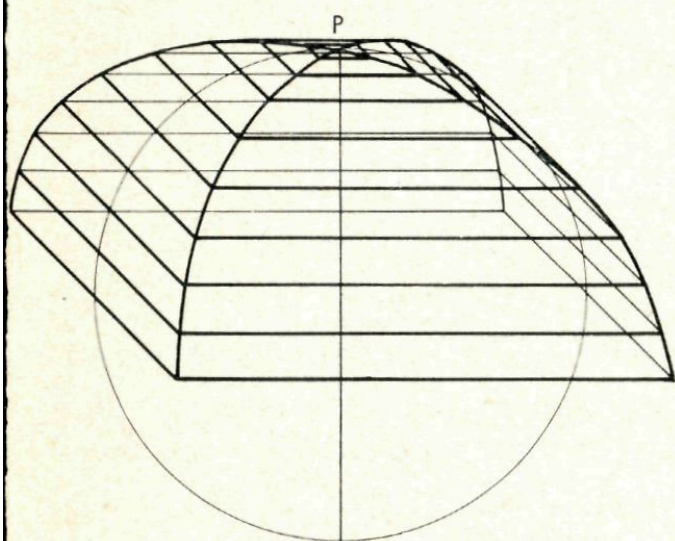


Fig. 17

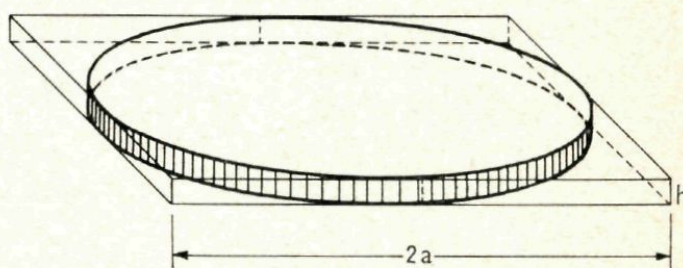


Fig. 18

Stapelen we nu al deze plakjes bij elkaar op, dan vormen ze samen, vooral als de dikte zeer klein is, nagenoeg de kokinje. De ingeschreven cilindertjes vormen samen nagenoeg de ingeschreven bol van de kokinje. Als we h tot nul laten naderen, dan nadert de som van de cilindertjes tot de inhoud van de bol. Deze is $\frac{4}{3}\pi r^3$. Voortdurend is de inhoud van elk vierkant plakje daarbij $\frac{4}{\pi}$ maal zo groot als de inhoud van een cilindertje. Nadert h tot nul, dan nadert de som van de inhoud van de plakjes tot $\frac{4}{\pi}$ maal de inhoud van de bol.

De inhoud van de kokinje is dus

$$\frac{4}{\pi} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{16}{3}r^3.$$

°Houtmeetkunde I

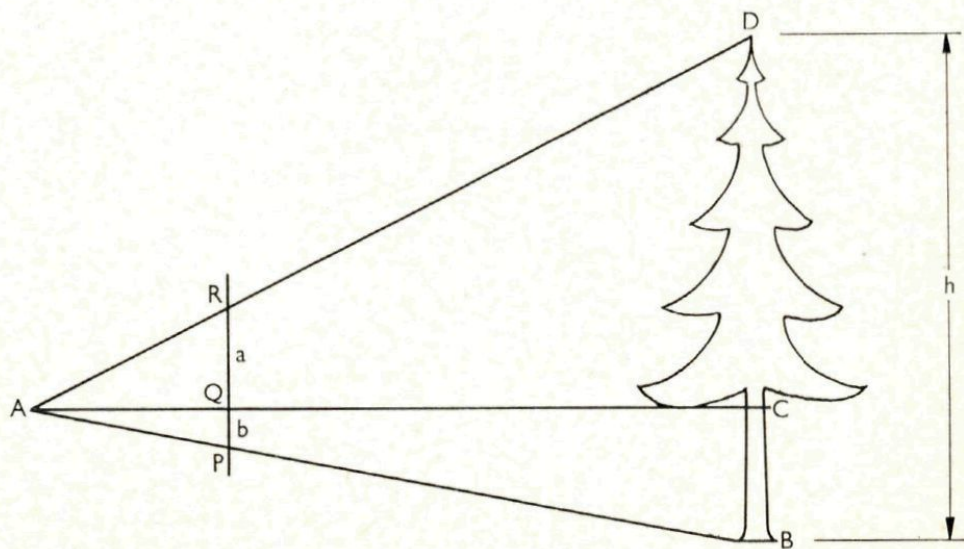
We hebben een stukje bos en daarvan moest een perceel gekapt worden. We waren benieuwd, wat we voor het hout zouden krijgen. Bij informatie bleek, dat naaldhout, geschild en gesnoeid, ongeveer $f\ 40,-$ per m^3 opbrengt, maar op stam slechts $f\ 25,-$.

Hoe komt nu de houtkoper te weten hoeveel kubieke meter we hem te bieden hebben. Hij kan toch moeilijk die bomen gaan onderdompelen in water en het volume van de verplaatste hoeveelheid water gaan bepalen. En als we „op stam” verkopen lijkt het helemaal moeilijk om het volume van het te verkopen hout te bepalen.

De Heer C. van de Broek van de Nederlandse Heidemaatschappij bracht ons uitkomst door het sturen van een dictaat over HOUTMEETKUNDE. Hierin vonden we een aantal gegevens, die demonstren hoe men met elementaire wiskunde heel wat praktische problemen kan oplossen. Het is ook interessant te zien, welke wonderlijke wegen (letterlijk en figuurlijk) hier soms bewandeld worden.

Als doel van de „houtmeetkunde” wordt opgegeven: het bepalen van de inhoud van de houtmassa van bomen, delen van bomen en opstanden (d.w.z. nog niet gevelde bomen). Bij de inhoudsbepaling moeten hoogte- en diktemetingen verricht worden. Daarom worden in het dictaat verschillende methoden daarvoor behandeld. Daarna volgen de inhoudsbepaling en de aanwasbepaling (d.w.z. de bepaling van de toename van de houtmassa van een bos in de loop van de tijd).

Fig.19



Hoogtemeting

Deze levert natuurlijk geen moeilijkheden op, als de boom geveld is. Bij de staande boom maakt men gebruik van twee methoden:

I. Bij deze methode moet de afstand van de waarnemer tot de boom gemeten worden. Zie fig. 19. Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ABD en APR volgt

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AQ}{PR}$$

dus

$$\frac{AC}{h} = \frac{AQ}{(a+b)}$$

Waaruit we vinden:

$$h = \frac{AC}{AQ} (a + b)$$

AC is de afstand van de waarnemer tot de boom, die wordt dus gemeten. a en b kunnen afgelezen worden op een maatlatje, dat de houtvester met uitgestrekte arm voor zich houdt. AQ is dan de lengte van de arm.

Een bijzonder geval van deze methode is het gebruik van de houtvestersdriehoek, een gelijkbenige rechthoekige driehoek met een handvat eraan. De waarnemer gaat zover van de boom af staan, dat hij het topje daarvan precies langs de schuine zijde van de driehoek ziet. De hoogte van de boom is dan gelijk aan zijn afstand tot de boom + de hoogte van zijn oog boven de grond. In fig. 20 is dit wel duidelijk.

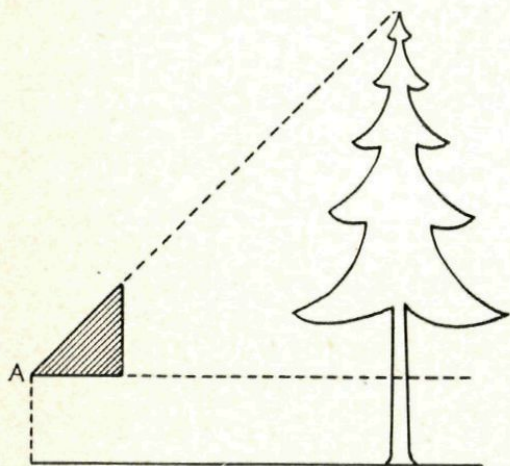


Fig. 20

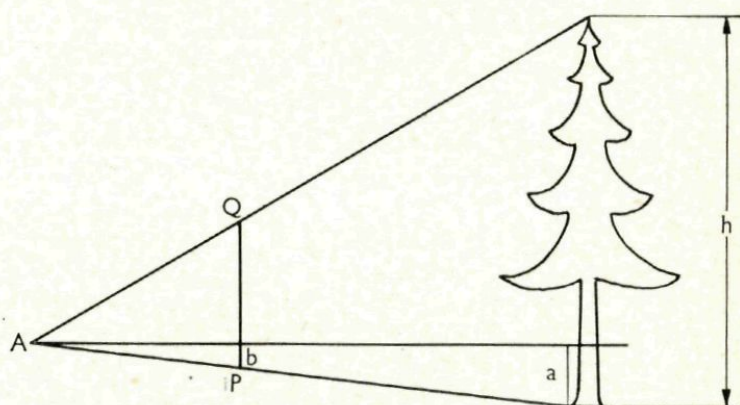


Fig. 21

II. Bij de tweede methode behoeft de afstand van de waarnemer tot de boom niet gemeten te worden. Wel moet men bij de boom een meetlat zetten. De methode komt overeen met die, welke in de vorige jaargang beschreven werd in het artikel HOE HOOG IS DAT GEBOUW? (Pyth. 4-1, bldz. 3). Door weer een maatlatje te gebruiken, dat met uitgestrekte

arm wordt vastgehouden, kan door het aflezen van twee afstanden op dat latje gemakkelijk de hoogte gevonden worden. Zie fig. 21. Met behulp van gelijkvormige driehoeken bewijzen we daarin

$$h = \frac{a}{b} \cdot PQ$$

a is daarin de lengte van de meetlat, die bij de boom staat. PQ en b worden op het maatlatje afgelezen.

Bij de tweede methode wordt wel gebruik gemaakt van een aardig instrument nl. de zg. meetliniaal van Christen. In fig. 22 is deze op verkleinde schaal afgebeeld.

De liniaal wordt op de volgende manier gebruikt:

- a. Plaats bij de boom een meetlat van 4 meter.
- b. Ga nu zover van de boom af staan, dat wanneer men de liniaal van Christen met uitgestrekte arm verticaal laat hangen, de top van de boom gezien wordt bij de bovenste inkeping en de voet bij de onderste inkeping. Het getal, waarbij de bovenkant van de meetlat nu gezien wordt, geeft dan de hoogte van de boom in meters.

Hoe wordt nu de schaalverdeling op deze liniaal vervaardigd? De afstand tussen de inkepingen is 30 cm. Dat is dus de afstand, die in de formule bij fig. 21 voorgesteld wordt door PQ . De lengte a in deze formule is 4 m = 400 cm. Vullen we deze waarden in de formule in, dan vinden we

$$h = \frac{400}{b} \cdot 30 = \frac{12000}{b} \quad \text{Dus} \quad b = \frac{12000}{h}$$

Vullen we hierin allerlei waarden van h in, dan kunnen we de bijbehorende waarden van b berekenen en deze van de onderste inkeping af afpassen op de liniaal. Plaatsen we bij de verkregen schaalverdeling dan niet de waarden van b maar die van h dan kunnen we de hoogte rechtstreeks op de liniaal aflezen. In een volgend artikel zullen we de inhoudsberekening bekijken.

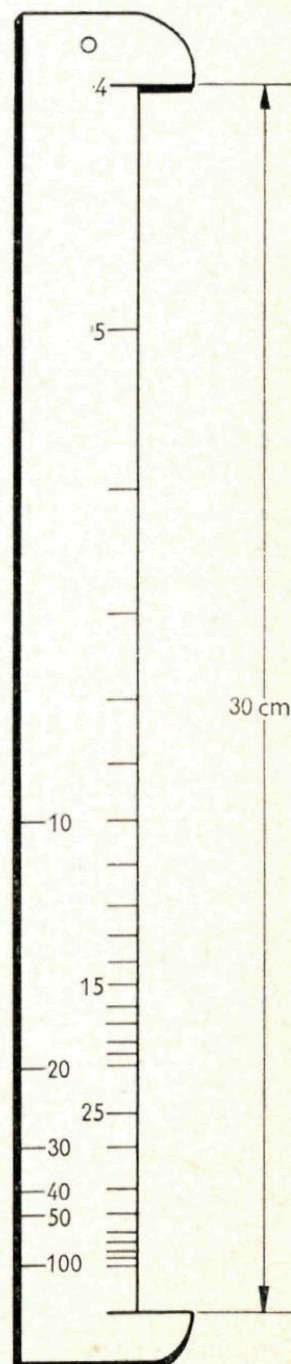


Fig. 22



6. In een gezelschap van acht personen bevinden zich:
de nederlander N, die ook engels en frans spreekt;
de hongaar H, die ook deens en pools spreekt;
de portugees P, die ook hongaars, russisch en zweeds spreekt;

de engelsman E, die ook italiaans en duits spreekt;
de griek G, die ook pools en zweeds spreekt;
de fransman F, die ook portugees, italiaans en spaans spreekt;
de duitser D, die ook nederlands en spaans spreekt;
de rus R, die ook grieks en deens spreekt.

Wat is de eenvoudigste manier, waarop de nederlander N en de rus R binnen dit gezelschap een gesprek met elkaar kunnen voeren?

7. Bewijs, dat uit $x + y + z = 15$ volgt $x^2 + y^2 + z^2 \geq 75$.
8. a. Teken in een cirkel vijf koorden, zodat elk van die koorden twee van de andere snijdt.
b. Teken in een cirkel vijf koorden, zodat elk van die koorden drie van de andere snijdt.

°° Wiskunde in het bedrijfsleven

In dit artikel zien we, dat eenvoudige wiskundige berekeningen een zakenman kunnen leren op welke manier hij zijn zaak het voordeligst kan beheren.

Een „kleine” fabrikant heeft een bedrijf, waarin hij hoogstens 9 man personeel kan te werk stellen. Dat personeel bestaat uit geschoolden en ongeschoolden (leerjongens). Van het produkt, dat er in dit bedrijf wordt vervaardigd, kan een geschoolde 5 stuks per dag afmaken en een leerjongen 3 stuks. Wil hij zijn klanten niet te lang laten wachten, dan moet hij zeker 30 stuks per dag klaar krijgen. *Hij vraagt zich nu af hoeveel geschoolden en hoeveel leerjongens hij het beste in dienst kan hebben.* Dat hangt vanzelfsprekend nog van meer factoren af, dan hierboven genoemd zijn. Zo wil de vakvereniging niet hebben, dat hij minder dan 2 geschoolden per leerjongen in dienst heeft, maar de wet staat niet toe meer dan 5 geschoolden per leerjongen te hebben. De beloning van de beide soorten werknemers speelt natuurlijk ook een rol. Een geschoolde verdient $f 40,-$ en een leerjongen $f 20,-$ per dag. Tenslotte moet hij er nog rekening mee houden, dat hij voor elk afgeleverd stuk werk $f 25,-$ ontvangt.

Stel je even voor, dat je de fabrikant bent. Je wilt je uitgaven voor lonen zo laag mogelijk houden, maar je moet ook voldoende werknemers hebben om je opdrachten te kunnen uitvoeren. Hoeveel ge-

schoolden en leerjongens zou je in dienst nemen? Je kunt aannemen, dat je alles, wat gefabriceerd is, verkoopt.

Je zou natuurlijk de wiskunde te hulp roepen en zeggen: Stel, dat ik x geschoolden en y leerjongens aan het werk heb. Er kunnen hoogstens 9 personeelleden zijn, dus

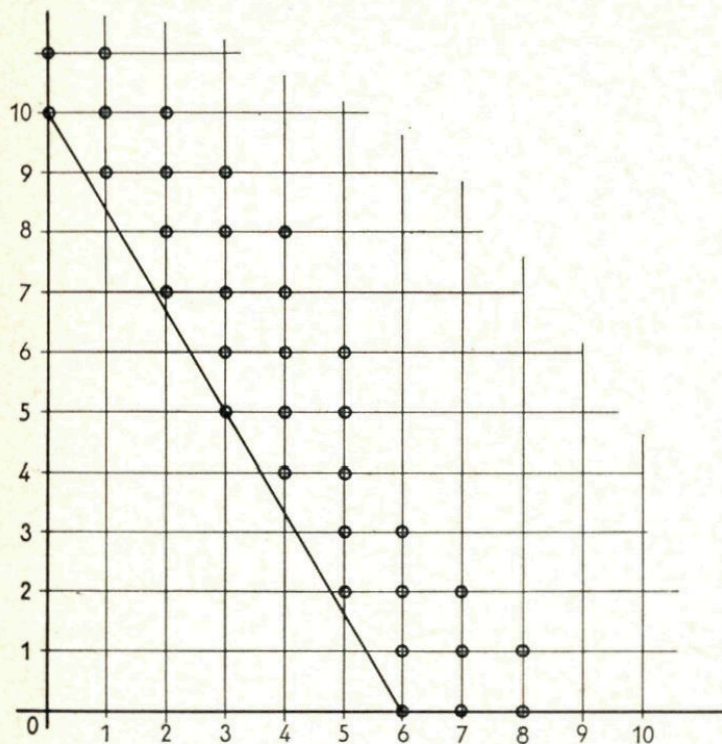


Fig. 23

$$x + y \leq 9 \quad (1)$$

Samen moeten ze minstens 30 stuks vervaardigen, d.w.z.

$$5x + 3y \geq 30 \quad (2)$$

Volgens de vakvereniging is

$$x \geq 2y \quad (3)$$

En de wet schrijft voor

$$x \leq 5y \quad (4)$$

Vandeze vier ongelijkheden kun je grafieken gaan tekenen. Zie bijvoorbeeld fig. 23. De daarin getekende rechte is de grafiek van $5x + 3y = 30$

30. Omdat echter x en y beide geheel en niet negatief moeten zijn komen alleen roosterpunten van de grafiek in aanmerking, die op de assen of in het eerste kwadrant liggen. De roosterpunten, die voldoen aan

$5x + 3y > 30$ liggen boven de getekende rechte. Een aantal daarvan zijn met kringetjes aangegeven.

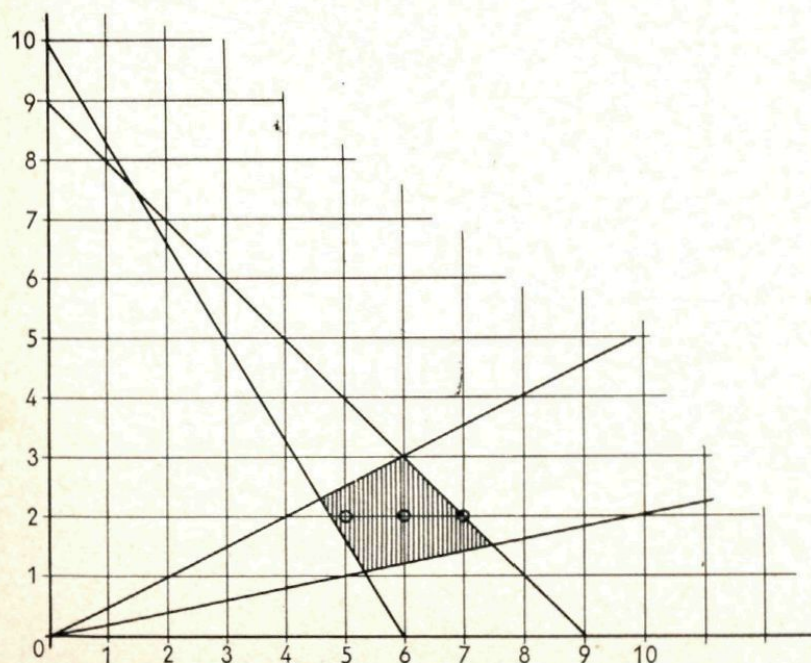


Fig. 24

Elk der vier ongelijkheden wijst nu in het eerste kwadrant een „toegelaten” gebied aan. Je moet die maar eens stuk voor stuk uittekenen. Deze vier gebieden hebben een gemeenschappelijk gebied. (We kunnen het de doorsnede van de vier verzamelingen noemen.) Dat gemeenschappelijk gebied is in fig. 24 gearceerd. Op de rand daarvan en erin-
binnen liggen in het geheel vier „toegelaten” roosterpunten, nl. (5, 2), (6, 2), (6, 3) en (7, 2).

Nu is het niet moeilijk na te gaan welke van deze vier de voordeligste oplossing geeft. Je kunt bijvoorbeeld onderzoeken in welk van de vier gevallen het verschil tussen de dagelijkse opbrengst en de lonen per dag het grootst is.

x	y	Totaal lonen per dag	Totaal aantal stuks per dag	Totaal opbrengsten per dag	Verskil opbrengsten en lonen
5	2	f 240,—	31	f 775,—	f 535,—
6	2	f 280,—	36	f 900,—	f 620,—
6	3	f 300,—	39	f 975,—	f 675,—
7	2	f 320,—	41	f 1025,—	f 705,—

Het is dus het voordeligst 7 geschoolden en 2 leerjongens aan te stellen. Zou de opbrengst van het produkt niet f 25,— maar f 8,— per stuk zijn, dan zou het voordeliger zijn 6 geschoolden en 3 leerjongens aan te stellen. Je kunt dat gemakkelijk narekenen. Zou de opbrengst per stuk f 10,— zijn, dan zou het geen verschil maken of je 6 geschoolden en 3 leerjongens of 7 geschoolden en 2 leerjongens zou aanstellen.

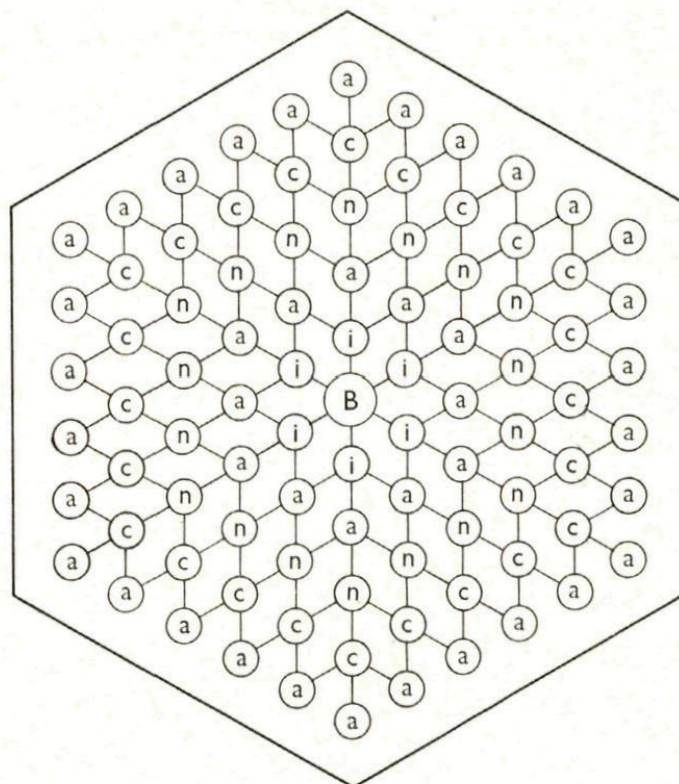


9. De diagonalen van vierhoek ABCD snijden elkaar in S.
 - a. Welke conclusie trek je uit het gegeven, dat de driehoeken BCS en ADS gelijke oppervlakte hebben?
 - b. Welke conclusie trek je uit het gegeven, dat driehoeken BCS, CDS, ADS gelijke oppervlakte hebben?
10. Bewijs dat bij geen enkele substitutie van een natuurlijk getal voor de letter n uit de vorm $\frac{14n + 3}{21n + 4}$ een vereenvoudigbare breuk ontstaat.

Bianca

We eindigen dit nummer met een tweede exlibris van Ir. Strens. Hij ontwierp het voor zijn dochter Bianca. En natuurlijk zijn er weer tientallen manieren om deze naam in het exlibris te lezen. Probeer ze eens te tellen.

Fig.25



De naam BIANCA kan op 186 manieren in het exlibris gelezen worden. Kijk maar naar het zesde deel van de figuur:

```

      B
    i   i
  a   a   a
n   n   n   n
c   c   c   c   c
a   a   a   a   a   a
  
```

en tel het aantal wegen, dat van de B uit over de verschillende letters naar de letters a voert.

```

      B
    1   1
  1   2   1
1   3   3   1
1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
  
```

De som van dit aantal wegen is nu

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31.$$

En 6 keer 32 geeft in het totaal dus 186 wegen.

Nederlandse wiskunde-olympiade 1965

Lijst van deelnemers aan de tweede ronde

1. Almelo, R.K. H.B.S. Pius X	Dook Mak	29-10-48
2. Amsterdam, Vossius Gymnasium	Hendrik Lenstra	16- 4-49
3. Amsterdam, Vossius Gymnasium	Loet Leydesdorff	21- 8-48
4. Amsterdam, Vossius Gymnasium	Jaques Perk	4-11-48
5. Amsterdam, Spinoza Lyceum	Adri Brouwer	3- 5-49
6. Amsterdam, St. Nicolaas lyceum	J. J. A. Koot	2- 5-46
7. Amsterdam, St. Ignatius college	A. P. J. A. Custers	18- 7-47
8. Amsterdam, Amsterdams Lyceum	Chris Dutilh	16-11-47
9. Amsterdam, Amsterdams Lyceum	Ida Gerda Kuiper	26- 7-47
10. Amsterdam, Hervormd Lyceum West	Jos Bakker	26- 2-49
11. Amsterdam, Amsterdams Montessori lyceum	Jan Kuiper	30-12-47
12. Amsterdam, Amsterdams Montessori lyceum	Henk Barendregt	18-12-47
13. Amsterdam, Chr. H.B.S. Nobelweg	A. Kool	6-10-47
14. Arnhem, Kath. Gelders Lyceum	H. Struyker Boudier	8- 2-50
15. Arnhem, Chr. Lyceum Bernhardlaan	Const. Holzscherer	24- 4-48
16. Assen, Chr. H.B.S.	W. C. Emmens	23- 5-49
17. Deurne, Pius XII college	Joop Kamphues	25- 4-47
18. Dordrecht, Gem. Lyceum	Kees Nagtegaal	18- 3-49
19. Eindhoven, Lorentz Lyceum	Maathuis	24- 4-47
20. Eindhoven, Lorentz Lyceum	van Tijen	17- 9-49
21. Eindhoven, Gemeentelijk Lyceum	Eric Otto	24- 5-46
22. Enkhuizen, Rijks H.B.S.	C. F. P. Thijs	19- 9-48
23. Gorinchem, Gymnasium Camphusianum	Ciska Zuur	
24. Gorinchem, Rijks H.B.S.	Henk v. d. Wal	24- 5-47
25. Gouda, Chr. Lyceum	Pieter Blankert	12- 1-48
26. 's-Gravenhage, Chr. Lyceum Populierstraat	Peter Kluyt	9- 6-48
27. 's-Gravenhage, St. Jans college	F. Raaymakers	31- 5-48
28. 's-Gravenhage, Stevin Lyceum	P. Bos	10- 3-48
29. 's-Gravenhage, Stevin Lyceum	H. Otten	30- 9-48
30. Haren (Gr.), St. Maartens College	Rudy Abeln	4- 9-48
31. Haarlem, Triniteits Lyceum	H. Thiellier	27- 6-49
32. Haarlem, Chr. Lyc. Marnix v. St. Aldegonde	Jan van Rongen	25- 2-48
33. Haarlem, Mendelcollege	Wim Harmsen	19- 8-47
34. Harlingen, Rijks H.B.S.	A. Sijsma	12- 6-47
35. Heerlen, St. Bernardinus college	T. Spauwen	
36. Hengelo, Gemeentelijke H.B.S.	G. de Leeuw	9- 1-47
37. Hengelo, Gemeentelijke H.B.S.	W. Admiraal	16- 9-49
38. Hilversum, Chr. Lyceum i/h Gooi	Jan Meijer	26- 1-49
39. Hilversum, Het Nieuwe Lyceum	R. H. Bourgonjen	30- 7-47

40. Hilversum, Gemeente H.B.S.	L. Mulder	18- 2-47
41. Hilversum, Gemeente H.B.S.	G. Rol	26- 8-49
42. Leeuwarden, Gereformeerd Gymnasium	K. Kuypers	4-12-47
43. Leeuwarden, Rijks H.B.S.	P. Velink	6-10-47
44. Leiden, R.K. Lyceum St. Bonaventura	O. Ruysenaars	10- 2-48
45. Leiden, R.K. Lyceum St. Bonaventura	J. Kuipers	15- 6-49
46. Lisse, Fioretti college	Chris Peters	8- 3-49
47. Middelburg, Stedelijk Gymnasium	Theo Beneder	10- 6-48
48. Nijmegen, Stedelijk Gymnasium	Fred Dijkers	4- 3-47
49. Nijmegen, Gymn. Canisius college	Juul Moormann	1- 7-48
50. Nijmegen, Lyc. v. h. Dominicus college	Nick Ruijsink	17- 4-48
51. Oss, Titus Brandsma Lyceum	A. van Tooren	5- 3-49
52. Rotterdam, Libanon Lyceum	E. de Jonge	11- 2-49
53. Rotterdam, Joh. Calvijn lyceum	Cor Hordijk	30- 1-48
54. Rotterdam, Montessori lyceum	Martijn de Lange	2-10-47
55. Rotterdam, Sint Montfort college	P. Verheijen	10- 9-49
56. Utrecht, Chr. Gymnasium	Marco Deurlo	16- 6-47
57. Voorburg, Openbaar Dalton Lyceum	Jan van der Kellen	3-10-47
58. Zaandam, Zaanlands Lyceum	J. A. Rijvordt	20- 3-48
59. Zeist, 1e en 2e Christelijk Lyceum	R. G. Tamboezer	
60. Zeist, 1e en 2e Christelijk Lyceum	W. IJ. Grindeler	
61. Zeist, 1e en 2e Christelijk Lyceum	H. Harkema	
62. Zeist, 1e en 2e Christelijk Lyceum	P. C. Mourick	
63. Zwolle, Rijks H.B.S.	J. Jellema	27- 8-48

WOORDENBOEK

analyse

uit het Grieks, *analysis* = *het oplossen*

statisch

uit het Latijn, *stare* = *staan*

symmetrie

uit het Grieks, *symmetria* = *evenmaat*

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden. *Inzenden vóór 15 november 1965.*

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,— per jaargang. Voor anderen f 3,50.

Abonnementen kan men opgeven bij J.B.Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B.Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.