

PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

3

Vijfde jaargang



Een handvol heelaal
(bldz. 58)

°Getallenpatronen

R. F. Kalse, leerling van de Rijkskweekschool, 5e klas, te Arnhem, zond ons onderstaande bijdrage. Hij werd getroffen door een merkwaardige regelmaat in de verzameling van de derde machten en vond daarvoor een bewijs volgens de methode der „sprongbewijzen”, die hij in de vorige jaargang van Pythagoras leerde kennen.

We beschouwen de derdemachten der natuurlijke getallen en berekenen daarvan sommen op de volgende manier:

$$\begin{aligned}1^3 &= 1 = 1^2 \\1^3 + 2^3 &= 9 = (1 + 2)^2 \\1^3 + 2^3 + 3^3 &= 36 = (1 + 2 + 3)^2 \\&\text{enz.}\end{aligned}$$

De gedachte kwam bij mij op of deze merkwaardigheid zou gelden voor een willekeurige som van derdemachten te beginnen bij 1^3 . Dus vroeg ik me af of

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

voor elke natuurlijke waarde van n .

Met een sprongbewijs kon dit aangetoond worden:

1e. De gelijkheid geldt voor $n = 1$.

2e. Stel dat de gelijkheid geldt voor $n = k$, als k een natuurlijk getal is. We kunnen dan bewijzen, dat ze ook geldt voor $n = k + 1$.

$$\text{Als } 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = (1 + 2 + \dots + k)^2,$$

dan is het rechterlid gelijk aan $[\frac{1}{2}k(k + 1)]^2$

$$\begin{aligned}\text{Nu is } 1^3 + 2^3 + \dots + (k + 1)^3 &= [\frac{1}{2}k(k + 1)]^2 + (k + 1)^3 = \\&= (k + 1)^2 [\frac{1}{4}k^2 + k + 1] = \frac{1}{4}(k + 2)^2 (k + 1)^2 = \\&= [1 + 2 + \dots + (k + 1)]^2\end{aligned}$$

3e. In 2e is gebleken, dat, als de formule geldt voor $n = k$, deze ook geldt voor $n = k + 1$. Omdat hij geldt voor $n = 1$, geldt hij ook voor $n = 2$, daarom ook voor $n = 3$, $n = 4$, enz.

We bladeren dit nummer even door

Aan de kunst, die met de wiskunde samenhangt, wordt in dit nummer wel enige aandacht geschonken. M.C. Escher is nl. weer vertegenwoordigd, maar de OP-ART in onze portemonnaie (of in die van je vader) is niet minder kunstzinnig. Er is een artikel over schakelalgebra en over het opgooien van centen. Beide hebben ze te maken met de toepassing van de wiskunde in de praktijk. De Wimecosprijsvraag zet de liefhebbers weer zwaar aan het denken. Doordat de uiterste datum voor het inzenden van oplossingen ongeveer samenviel met de datum van verschijnen van dit nummer kunnen er nog geen prijswinnaars vermeld worden.

°OP-ART in de portemonnaie

De kunstenaars, die zich bezig houden met OP-ART (we spraken daarover in het vorig nummer van Pythagoras), gaan dikwijls uit van eenvoudige figuren, die ze door combineren, spiegelen, draaien, verschuiven, enz. weten samen te voegen tot een harmonisch geheel van lijnen en vlakken. Ze werken daarbij soms met een fel contrast van zwart en wit, maar ook het heel fijne kantwerk van zorgvuldig getrokken scherpe lijnen en cirkels behoort tot deze soort van kunst.

Mijn vader heeft een ouderwets zilveren zakhorloge, dat hij kreeg als jongen van 15 jaar. (Het loopt nog uitstekend, hoewel hij nu 85 is). Als kind heb ik dikwijls met bewondering de achterkant van dit horloge bekeken. Zo zorgvuldig waren daarop in het zilver cirkels gegraveerd, dat ik me afvroeg, hoe iemand dat wel ooit zo nauwkeurig kon doen. Bovendien genoot ik van de figuren, die door de vele snijpunten van de cirkels werden gevormd. Telkens zag ik er weer andere in: guirlandes, bloemen met vele blaadjes, enz. Dat is nu juist wat een OP-ART kunstenaar ook van zijn scheppingen verlangt, nl. dat de kijker er zijn fantasie bij kan laten werken en zichzelf daardoor telkens nieuwe figuren schept. Ik denk, dat de lezer, die ons vroeg „Kunt u niet eens een artikel wijden aan de mooie figuren, die op bankbiljetten staan”, ook getroffen is door het op-art-achtige karakter daarvan en zich heeft afgevraagd, hoe men toch wel in staat is al die fijne cirkels, guirlandes en andere bogen te vervaardigen. We hebben ons om nadere inlichtingen gewend tot de drukkers van ons bankpapier en dat van verschillende andere landen, de firma Joh. Enschedé en Zonen te Haarlem. Met veel bereidwilligheid ontvingen we daarover de inlichtingen, die men ons mocht geven. Het is te begrijpen, dat het vervaardigen van bankbiljetten en ander geldswaardig papier niet iets is, waarvan men maar zonder meer alle geheimen kan prijsgeven. De lezers van Pythagoras zullen wel niet behoren tot de valse munters, maar men kan niet voorzichtig genoeg zijn.

Het maken van de mooie lijnfiguren is al in de 14e eeuw toegepast op juwelierswerk, dat er een bijzondere schittering door kreeg. Aan de Fransman Guillot wordt de uitvinding toegeschreven van een machine, die de lijnfiguren mechanisch trekt. De machine kan zeer ingewikkelde figuren maken, die moeilijk na te bootsen zijn. Ze zijn dan ook bijzonder geschikt om op geldswaardige papieren te worden afgedrukt.

De guillocheermachine, die Joh. Enschedé bij het vervaardigen van bankbiljetten gebruikt, is een heel vernuftig apparaat. De foto laat daar wel iets van zien:

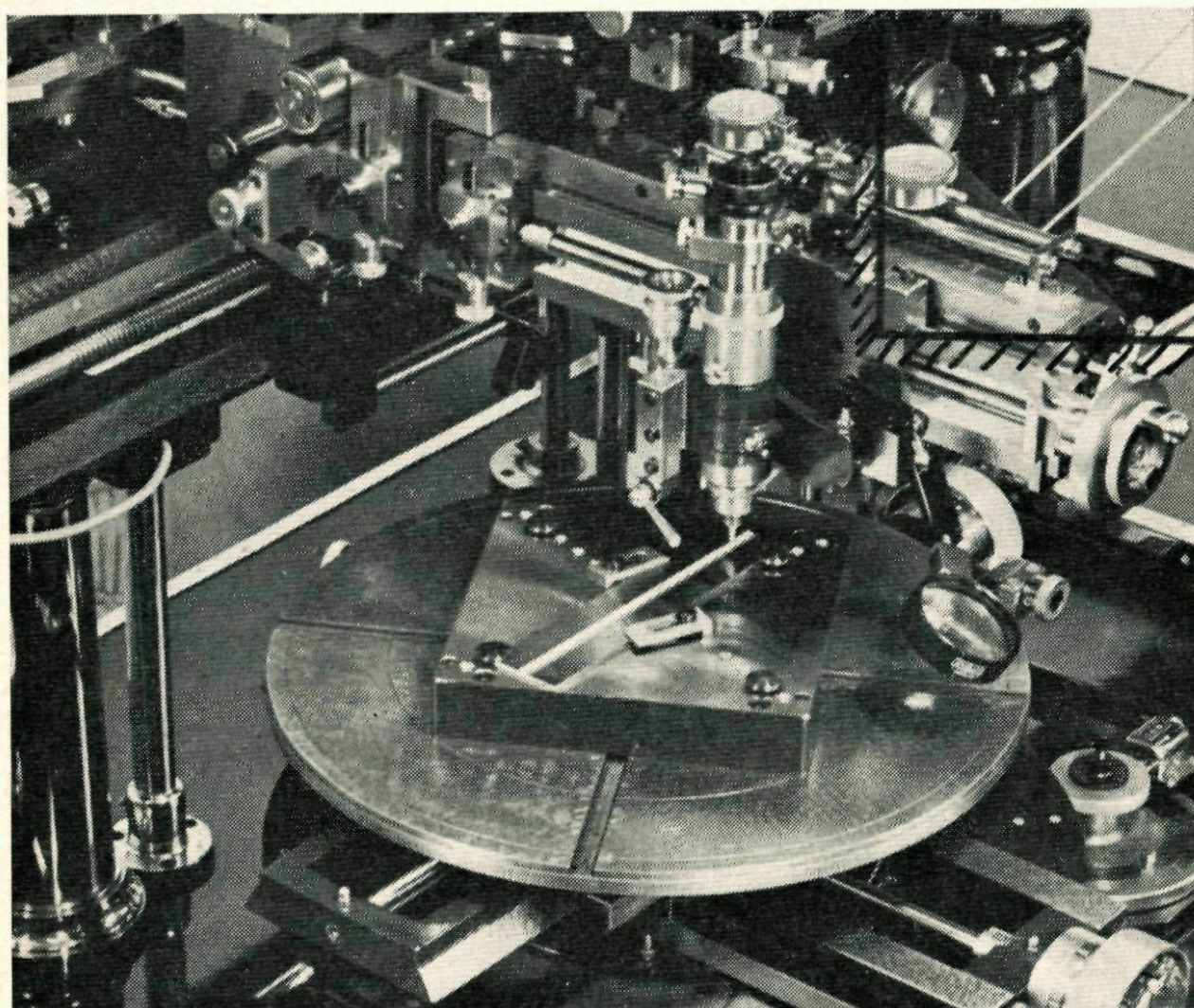


Fig.1

We zien het ronde tafelblad, waarop de te graveren plaat wordt bevestigd. Dit tafelblad kan op drie manieren bewegen:

- a. Het kan eenparig draaien om zijn as,
- b. Het kan zich bewegen (glijden) langs de staaf, die op de foto van links onder naar rechts boven loopt. Denken we aan coördinaatassen, dan zouden we kunnen zeggen, dat het zich in de y -richting kan bewegen.

- c. Tenslotte kan het ook nog glijden langs de andere staaf, die op de foto zichtbaar is. Deze staat loodrecht op de eerste, zodat ook een beweging in de x -richting mogelijk is. De bewegingen in de x - en y -richting worden veroorzaakt door excentriekenstelsels met verstelbare uitslag. Een voorbeeld daarvan is duidelijk te zien op de tweede foto, nl. rechts bovenaan. Het apparaat op deze foto is een instructie-apparaat, dat kan dienen om het gebruik van de guillocheer-machine te leren.

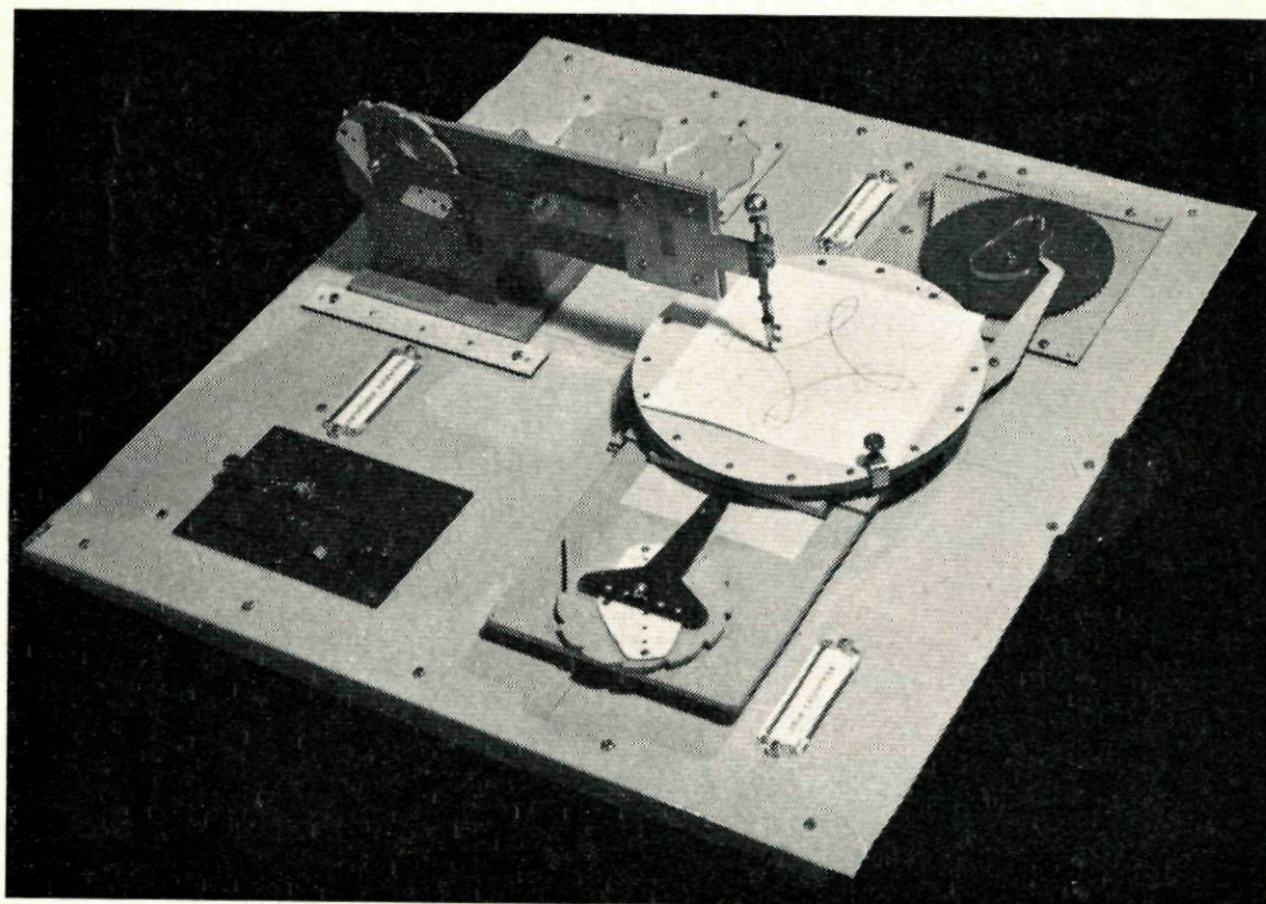


Fig. 2

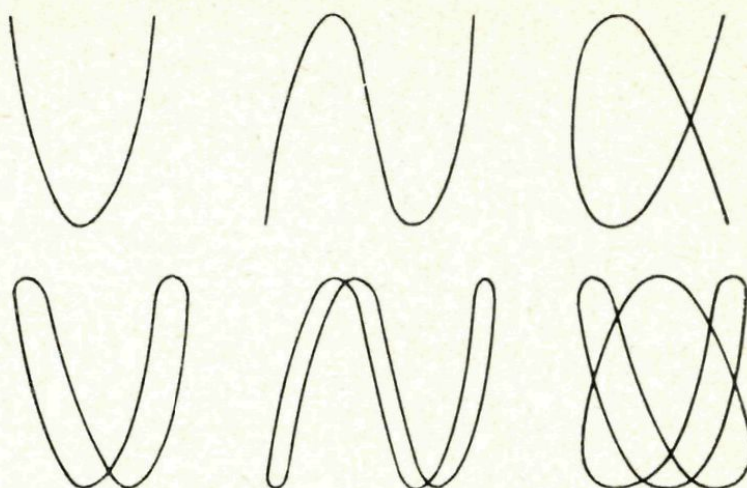
Boven het tafelblad bevindt zich de graveernaald. Deze kan zich ook nog bewegen en wel in de x - en y -richting.

Laten we alleen het tafelblad bewegen in de x - en y -richting dan zal de beweging, die elk punt van het tafelblad dan uitvoert, afhangen van de snelheid, waarmee het zich in de beide richtingen beweegt. Worden de bewegingen in de x - en y -richting als harmonische trillingen uitgevoerd, dan is de figuur, die elk punt van het tafelblad beschrijft, een Lissajous-figuur.

Fig. 3 geeft daarvan enkele voorbeelden. Hebben de beide harmonische trillingen gelijke frequentie, maar een faseverschil van $\frac{1}{2}\pi$, dan is de figuur van Lissajous een cirkel.

Wanneer een cirkel langs een tweede cirkel rolt (niet glijdt), dan beschrijft elk punt van de rollende cirkel een interessante figuur, die men trochoïde of ook wel cycloïde noemt. Voorbeelden van deze trochoïden vindt men in de figuren 4 en 5.

Fig. 3



In fig. 4 is cirkel a aan de binnenzijde langs cirkel b gerold. De stralen van de beide cirkels verhouden zich als 1 en 4. Het punt P , dat ze in de

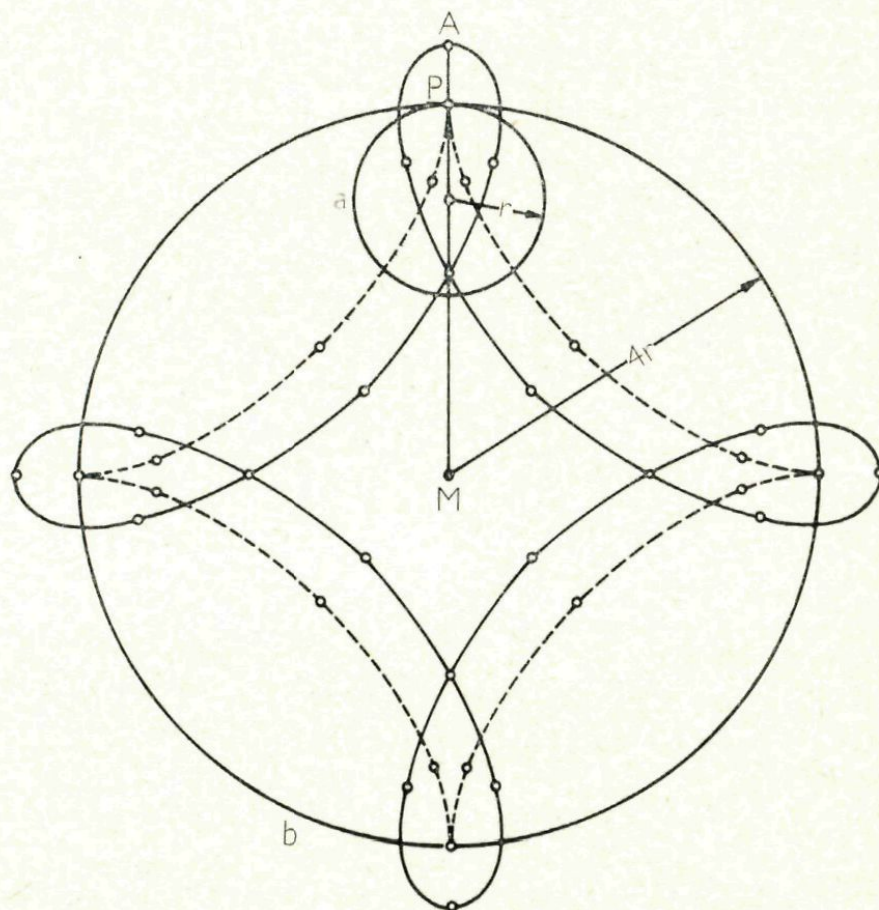


Fig. 4

beginstand gemeen hadden (het „bovenste” punt van cirkel b) kwam daarom na één volle omwenteling van cirkel a weer op cirkel b terecht en wel 90° van het beginpunt af. Na vier volle omwentelingen was het weer in dat beginpunt terug. Inmiddels had het de gestippelde baan doorlopen.

Het punt A in het vlak van cirkel a , dat aan deze cirkel „vast verbonden” is, doorliep daarbij de getrokken baan.

In fig. 5 rolde cirkel a aan de buitenzijde langs cirkel b . Punt P doorliep daarbij weer de gestippelde baan en punt A wandelde langs de getrokken lijn. Doordat de straal van cirkel a het vierde deel is van die van cir-

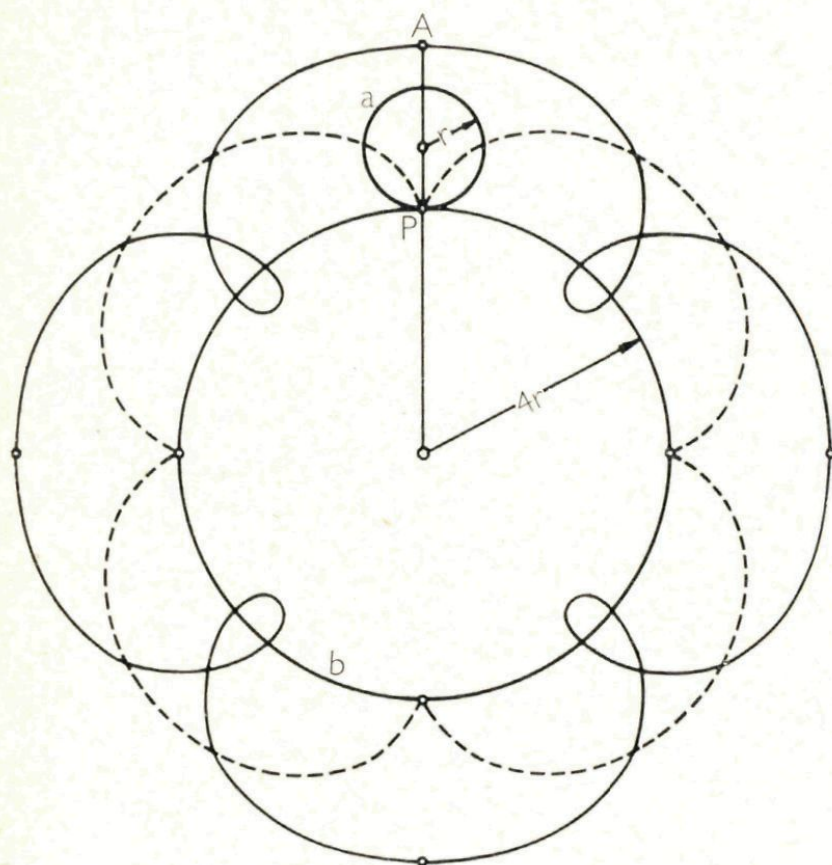


Fig. 5

kel b , werden in beide gevallen de trochoiden vierzijdig symmetrische figuren. Ze hebben vier spiegelrechten en een viertallige draaias. Een trochoïde met een n -tallige draaias kan worden verkregen door de verhouding van de stralen der cirkels a en b de waarde $\frac{1}{n}$ te geven.

De guillocheermachine is ook in staat trochoiden te vervaardigen. Dit blijkt al uit de tweede foto, waarop we zien, dat het instructieapparaat figuur 4 heeft getekend.

Bij het vervaardigen van trochoiden laat men de graveernaald stilstaan en de tafel zowel de cirkel van Lissajous beschrijven (dus langs x - en y -as een harmonische trilling uitvoeren) als de eenparige draaiende beweging om zijn as.

In de guilloche van fig. 6, die met de guillocheermachine werd gemaakt, zien we nu hoe deze machine met groot gemak trochoiden van velerlei soort en grootte weet te maken. En bekijk nu maar eens een papieren rijksdaalder of een briefje van 25, dan zie je daarop ook de trochoiden, die de op-art vormen, die we in onze portemonnaie meedragen.

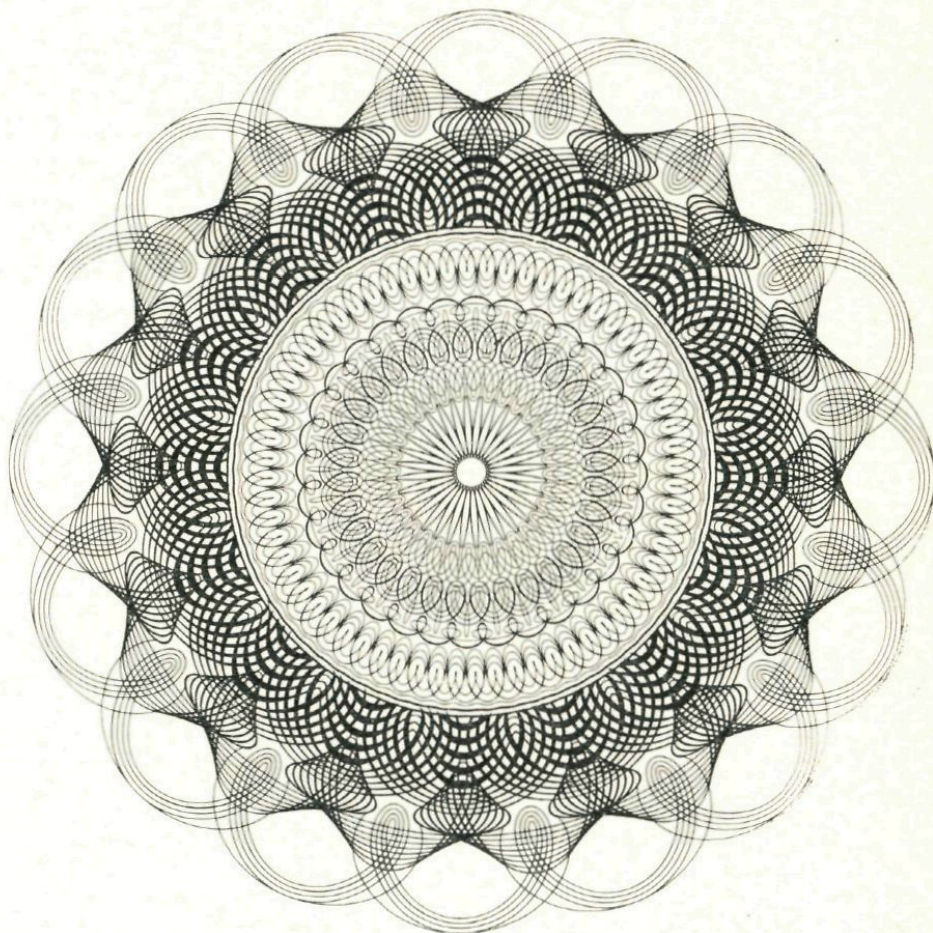


Fig. 6

°Kans

Stel je voor, dat je speelt met een cent. Je gooit hem op en wacht af of kruis of munt boven komt. Je gooit één keer, twee keer, drie, vier, vijf, zes, zeven, acht keer en ... al deze keren komt munt boven. Wat denk je wel van die cent?

Als een scheidsrechter tost met een munt, als iemand met een ander kruis of munt speelt, dan willen ze graag, dat dit spel of dat tossen gebeurt met een betrouwbare munt. Wat verstaan we daaronder? We zouden dat op een natuurkundige manier kunnen zeggen, bijv. door te eisen dat het zwaartepunt op de juiste plaats ligt. Maar wat verwachten we van zo'n betrouwbare munt? Hoe zou dat wiskundig te formuleren zijn?

Ieder verwacht, dat bij het opgooien van een betrouwbare munt de kans op het bovenkomen van kruis even groot is als de kans op het boven-

komen van munt. Het moet, om het eens populair te zeggen een zaak zijn van fifty-fifty. De wiskundige zegt, dat de kans op kruis bij een betrouwbare munt $\frac{1}{2}$ is. Betekent dat nu, dat we, als de munt 8 keer opgegooid wordt, 4 keer kruis en 4 keer munt zullen zien verschijnen? Niemand zal wel zo naief zijn om dat te verwachten. Maar als we nu eens 8000 keer zouden opgooien? Dan verwachten we zeker, dat het aantal keren kruis in de buurt van de 4000 zal liggen. Hoe groot is nu de kans, dat bij drie keer gooien drie keer kruis zal verschijnen? Bij drie keer gooien zijn er de volgende mogelijkheden: KKK, KKM, KMK, KMM, MKK, MKM, MMK, MMM. Dat zijn er dus 8. Eén daarvan is KKK, dus de kans, dat bij drie keer gooien zich KKK zal voordoen is $\frac{1}{8}$.

Nu keren we nog eens naar het begin van het artikel terug. We veronderstelden daar, dat bij 8 keer gooien 8 keer munt boven kwam. Hoe groot is de kans daarop? We zouden dat kunnen uittellen door alle mogelijkheden van de acht worpen op te schrijven, zoals we dat hierboven deden voor 3 worpen. Maar dat is nog al een karwei. We kunnen het aantal mogelijkheden gemakkelijk berekenen:

Bij 1 worp zijn er twee mogelijkheden, nl. K of M.

Bij 2 worpen worden er dat 4, omdat elk der zojuist genoemde mogelijkheden met K en met M gecombineerd kan worden:

KK	KM
MK	MM

Bij 3 worpen verdubbelt het aantal mogelijkheden weer, want elk van de vier bovengenoemde kan weer met K en M gecombineerd worden:

KKK	KKM	KMK	KMM
MKK	MKM	MMK	MMM

Bij 8 worpen zijn er daarom 2^8 mogelijkheden, bij n worpen is het aantal mogelijkheden 2^n .

Dat er bij 8 worpen 8 keer achtereen munt gegoooid wordt, heeft dus een kans van $\frac{1}{2^8}$. Het is geen wonder, dat men dit geval nogal onwaarschijnlijk vindt en zich afvraagt of er iets met de munt aan de hand is, als het zich voordoet. Maar dat hoeft natuurlijk helemaal niet zo te zijn. Het geval kán zich voordoen. De kans, dat bij 20 worpen 20 keer munt wordt gegoooid is $\frac{1}{2^{20}}$. En dus nogal klein. Maar het kan gebeuren.

Stel je nu eens voor, dat iemand een bedrag wint door goed te voorspellen of er kruis of munt gegoooid zal worden. Hij staat er bij, dat bij 8 keer gooien 8 keer munt wordt gegoooid. Hoe groot is nu de kans op kruis?

Zou hij door kruis te voorspellen een grotere kans op winst hebben dan door munt te voorspellen? Dat lijkt op het eerste gezicht nogal waarschijnlijk. De kans op 9 keer munt in 9 worpen is nl. heel wat kleiner dan op 8 keer munt in 8 worpen. Toch is bij iedere worp opnieuw de kans op kruis even groot, nl. $\frac{1}{2}$. We willen proberen, dat te doorzien.

Als we zeggen, dat de kans op 8 keer munt in 8 worpen $\frac{1}{2^8}$ is, dan bedoelen we, dat de mogelijkheid MMMMMMMM één maal voorkomt in de 256 combinaties van M's en K's die zich bij 8 worpen kunnen voordoen. Als we zeggen, dat de kans op kruis bij de 9e worp $\frac{1}{2}$ is, bedoelen we, dat bij een betrouwbare munt zich bij de 9e worp uit de twee mogelijkheden K en M er zich één van beide zal voordoen, zonder dat we er invloed op kunnen hebben.

Maar, zal een speler misschien denken, als bij een lange rij worpen ongeveer evenveel keren K als M moet voorkomen en M is al veel vaker voorgekomen dan K, dan zal het evenwicht zich toch op de een of andere manier moeten herstellen, doordat K zich vaker voor gaat doen. Is daarom toch niet bij de 9e worp de kans op K groter dan $\frac{1}{2}$? Deze redenering klinkt verleidelijk goed, maar is fout. Om dat te begrijpen geven we een voorbeeld uit de kansrekening, dat niet handelt over kruis of munt, maar dat er wel mee te vergelijken is.

Stel je voor, dat je een vaas hebt, waarin zich 50 witte en 50 zwarte ballen bevinden. Je moet er blindelings een bal uitpakken. De kans op een witte bal is even groot als die op een zwarte bal, nl. $\frac{1}{2}$. Wordt de witte bal nu niet in de vaas terug geworpen, dan is de kans op een zwarte bal iets groter geworden. Zijn er bij 8 keer trekken 8 witte ballen gepakt, dan is de kans, dat de negende keer een zwarte bal gepakt zal worden $\frac{50}{92}$, dus groter dan $\frac{1}{2}$. Maar wordt iedere keer na het trekken de bal weer in de vaas terug geworpen, dan is er iedere keer weer dezelfde situatie als bij het begin. Het trekken kan dan onbeperkt lang door gaan en dan is elke keer de kans op een zwarte bal $\frac{1}{2}$, ook al zijn er al de voorafgaande keren witte ballen gepakt. Met dit geval is het opgooien van de munt te vergelijken.



°Een handvol heelal

Wie met een gave kerstboombal in de hand op een klare sterrennacht buiten gaat staan, heeft in zijn hand een afbeelding van vrijwel het gehele, vanuit zijn standplaats zichtbare heelal.

Onze voorouders kenden de magische werking van de grote spiegellende tuinbal, waarin de tuin bijna geheel te overzien was onder een ruime hemel. Onze fotograaf heeft na veel moeite zo'n tuinbal gevonden en gefotografeerd. Op de binnenzijde van de omslag vindt men het resultaat van zijn werk.

Het is geen wonder, dat M.C. Escher gefascineerd werd door de spiegellende werking van zo'n bol. Hij tekende zich zelf met de bol in de hand in zijn litho „Hand met spiegellende bol”. Voor we die litho gaan bekijken, is het goed eerst even de beeldvorming bij zo'n bol na te gaan:

In fig. 7 is het beeld $A'B'$ van een pijltje AB geconstrueerd. Als het beeld eenmaal geconstrueerd is, kan men gemakkelijk nagaan, hoe de stralen van het voorwerp, via de spiegel, in het oog komen. (fig. 8).

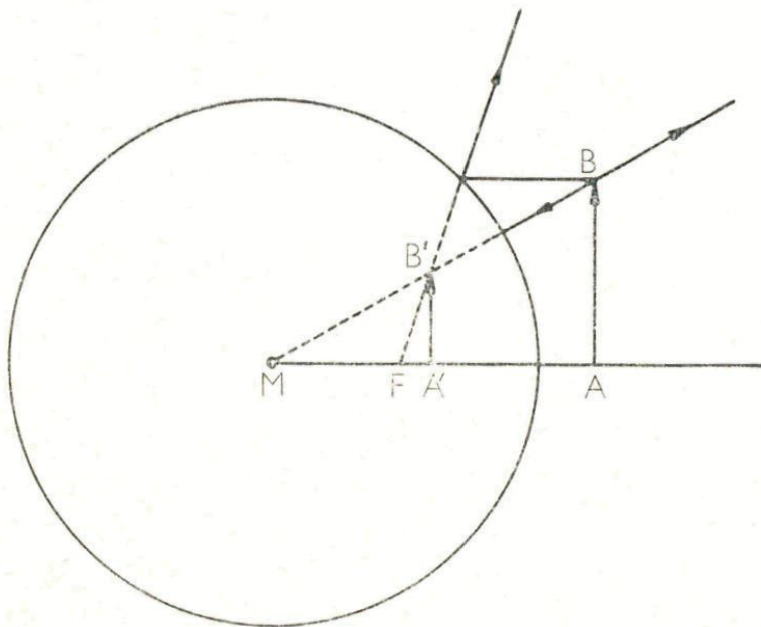
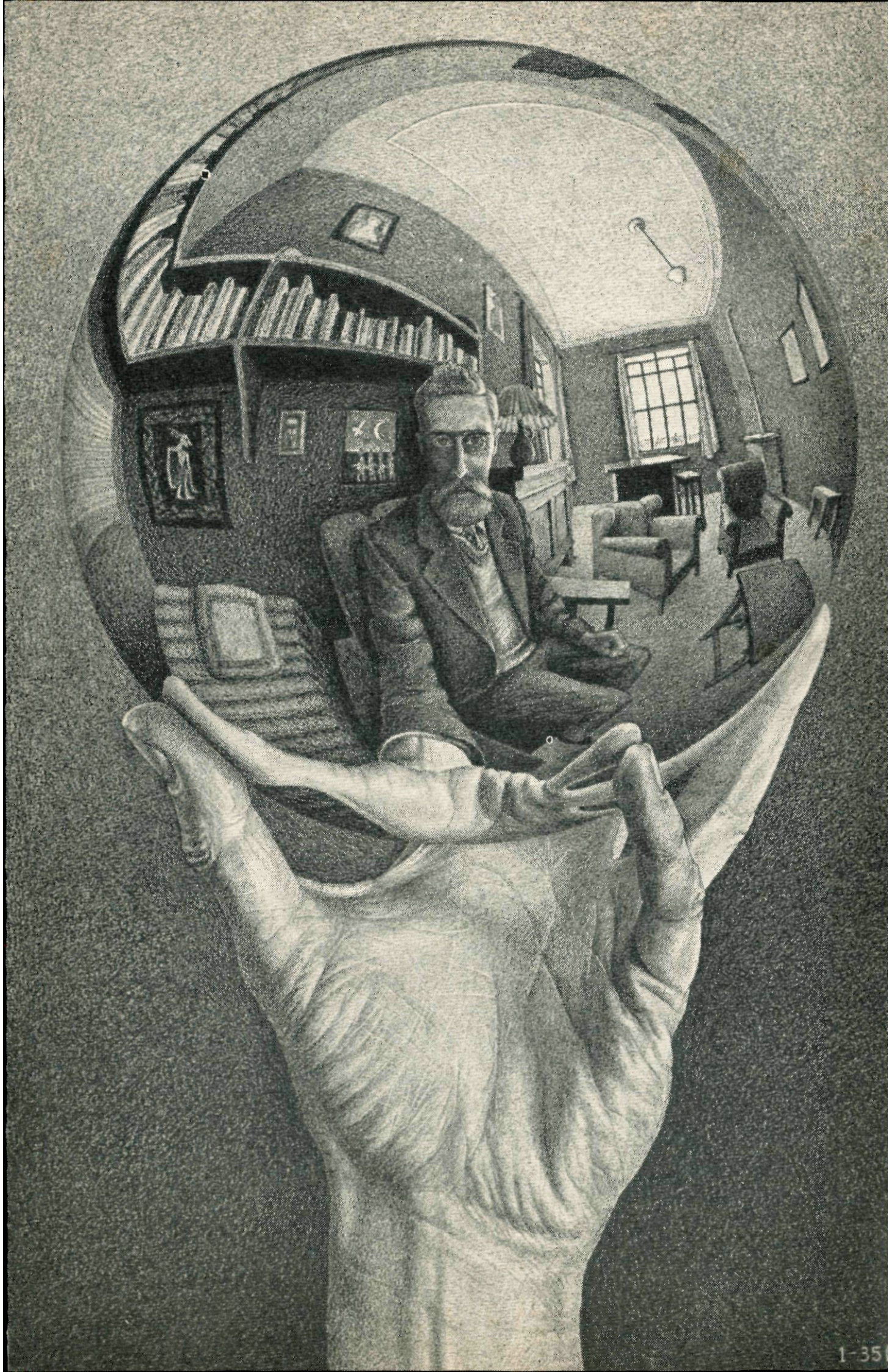


Fig. 7

In fig. 9 zien we, hoe een zelfde pijl steeds kleiner in de spiegel wordt afgebeeld, naarmate hij verder van de spiegel verwijderd is. Hoe verder de pijl van de spiegel af staat, hoe dichter zijn beeld zich bevindt bij het brandpunt F, dat op het mid-



den van de straal licht, die deel uitmaakt van de rechte door het oog van de beschouwer en het middelpunt van de bol.

In fig. 10 gaan we na, welke delen van de omgeving we nog in het beeld krijgen, als het oog zich in 0 bevindt. We zien, dat de kegel met 0 als top, die de bol omhult, het gebied begrenst, dat niet meer in het beeld komt. Het in figuur 11 gearceerde deel stelt dit niet zichtbare gebied voor. De spiegel staat zichzelf daar in de weg.

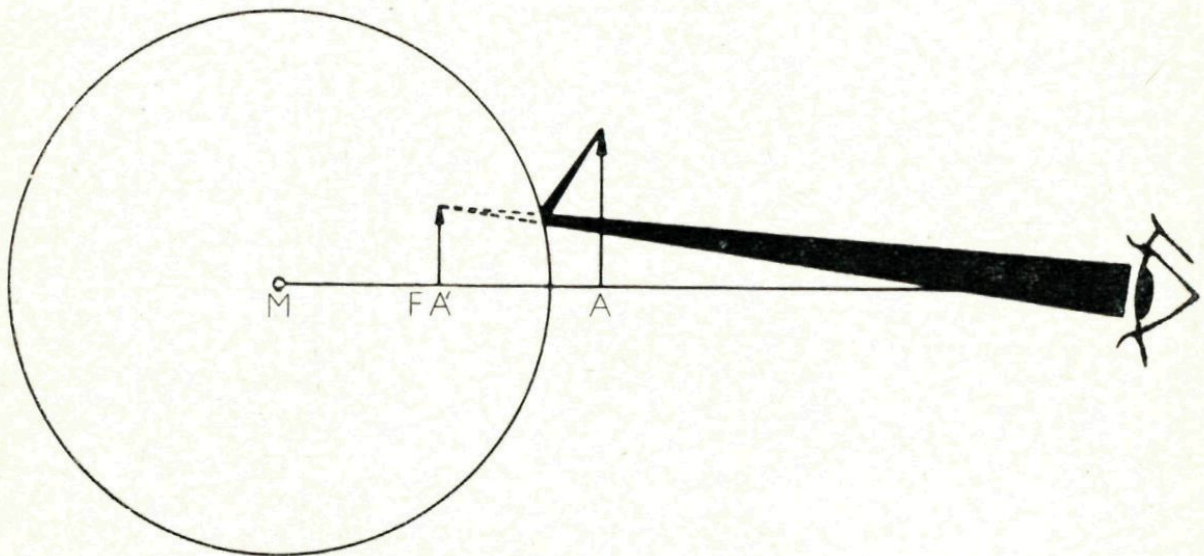


Fig. 8

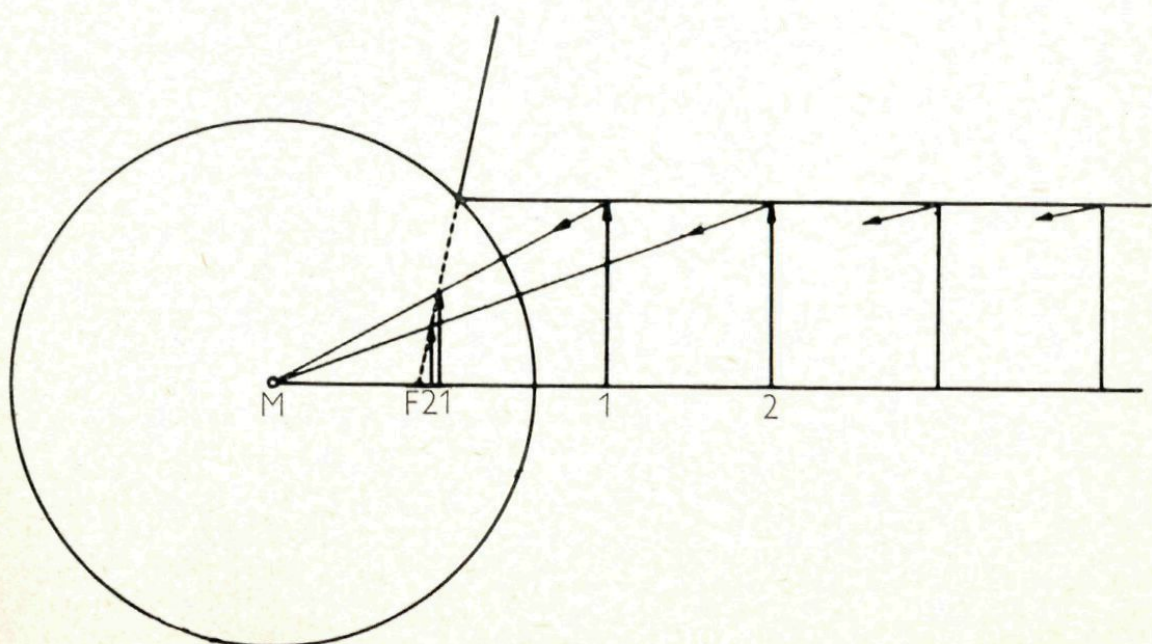


Fig. 9

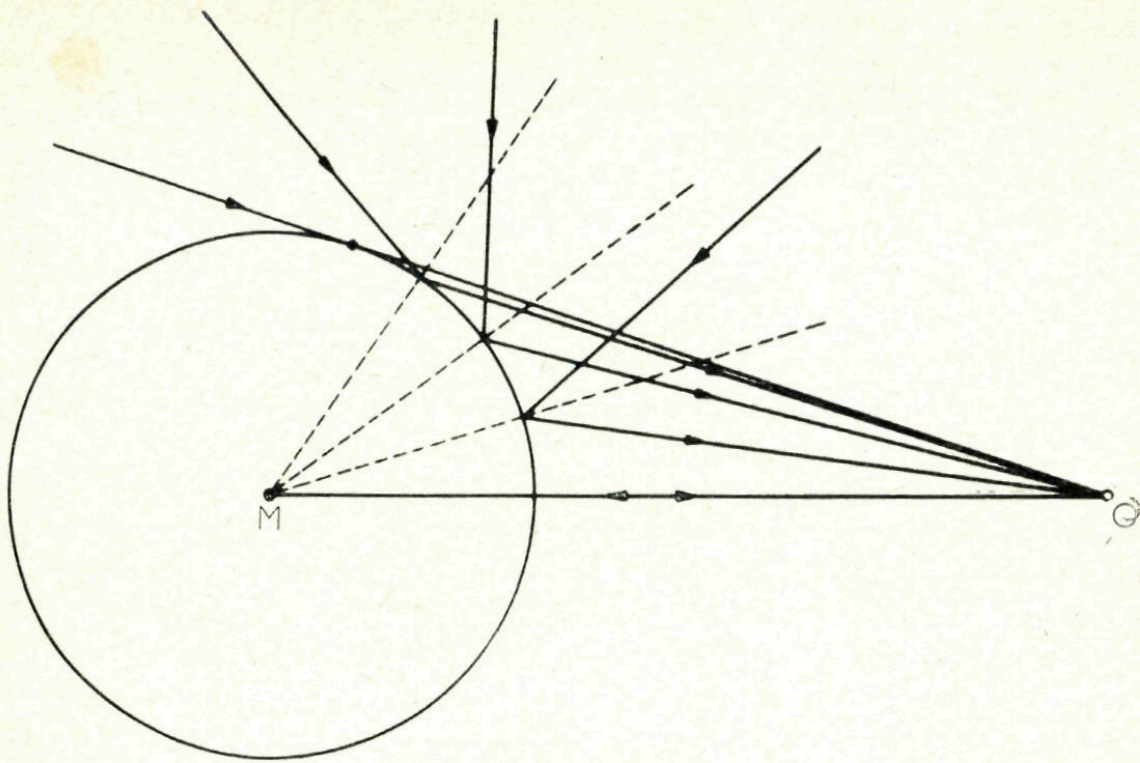


Fig. 10

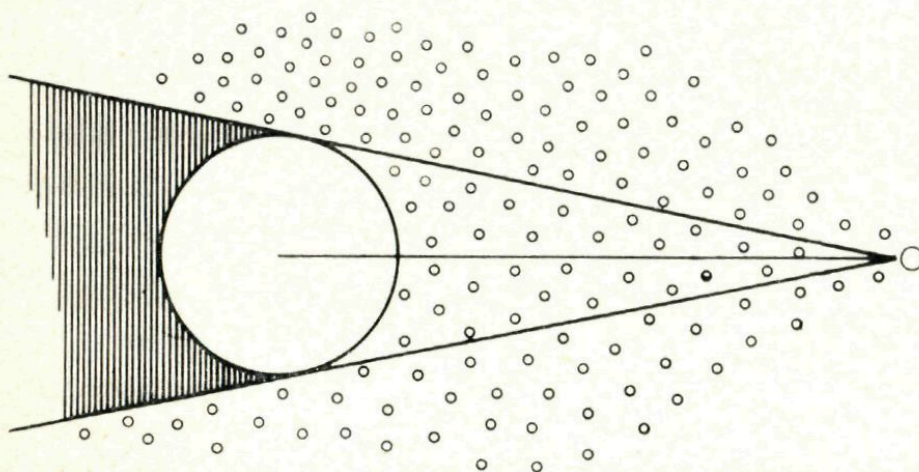


Fig. 11

De prent van Escher heeft de eigenaardigheid, dat de beschouwer, tegelijk de tekenaar, de bol zelf vasthoudt. Je ziet zijn hand dan ook in werkelijkheid (en hoe knap getekend, heb je ooit geprobeerd een hand te tekenen?) en het spiegelbeeld daarvan in de bol.

Escher zelf schrijft hierover:

„... alles is, zij het verwrongen, in een kleine cirkel gecomprimeerd. Zijn eigen hoofd (dat van de tekenaar), exacter uitgedrukt: het punt midden tussen zijn ogen, ziet hij precies in het centrum van de cirkel weerspiegeld. Hoe hij zich ook wendt of draait, het gelukt hem niet uit dat middelpunt te komen: het ego blijft onwrikbaar de kern van zijn wereld.”

Wimecos-prijsvraag II

De eerste astronaut, die op Mars landde, was een bioloog. Het verbaasde dan ook niemand dat de eerste berichten naar de aarde melding maakten van de ontdekking van een wonderlijke plantensoort, die op Mars hele velden bedekt en in vele verschillende kleuren voorkomt.

Een nadere studie van deze plantensoort bracht al gauw aan het licht, dat er twee totaal verschillende voortplantingsmechanismen werkzaam zijn. Behalve het voor ons bekende mechanisme van bestuiving en zaadvorming is er namelijk ook nog dat van de wortelversmelting: zodra de wortels van twee planten met elkaar in aanraking komen, laten ze los van die planten en vergroeien met elkaar, waarna zich uit dat samengroeisel een nakomeling ontwikkelt.

Ter onderscheiding zullen we de nakomelingen, al naar gelang van hun ontstaanswijze, „smelten” en „stuiven” noemen.

Door het bijzonder hoge voortplantingstempo was het al heel gemakkelijk vast te stellen, dat de kleur de belangrijkste erfelijkheidsfactor is. De kleur van een nakomeling wordt namelijk volledig bepaald door de kleuren van de beide ouderplanten en door de ontstaanswijze van die nakomeling. Zo is bijvoorbeeld een stuif van een rode en een gele plant altijd blauw en een smelt van een rode en een gele plant altijd groen.

Volgens een wat dieper gaand onderzoek bleken bovendien ook nog de volgende regels te gelden:

- I. Voor alle kleuren a, b, c geldt: de stuiven, die tot ouders hebben een a -plant en een stuif van een b -plant en een c -plant, hebben dezelfde kleur als de stuiven die tot ouders hebben een c -plant en een stuif van een a -plant en een b -plant.
- II. Voor alle kleuren a, b, c geldt: de smelten, die een a -plant en een stuif van een b -plant en een c -plant tot ouders hebben, hebben dezelfde kleur als de stuiven, die ontstaan zijn uit een smelt van een a -plant en een b -plant en een smelt van een a -plant en een c -plant.
- III. Voor alle kleuren a, b, c geldt: een stuif van een a -plant en een b -plant kan alleen dan dezelfde kleur hebben als een stuif van een a -plant en een c -plant, wanneer de kleuren b en c gelijk zijn.

Bewijs nu, zonder dat je ooit op Mars geweest bent, dat de volgende stellingen waar zijn.

1. Er is één kleur x met de eigenschap, dat de stuiven van een rode plant en een x -plant rood zijn. (Deze kleur x zullen we in de volgende stellingen „wit” noemen).
2. Voor elke kleur a geldt: een stuif van een a -plant en een witte plant is een a -plant.
3. Voor elke kleur a geldt: een smelt van een a -plant en een witte plant is een witte plant.

Oplossingen kunnen tot 27 februari 1966 gezonden worden naar A. van Tooren Nachtegaalplein 10, Den Haag.

°Schakelalgebra

In allerlei apparaten, zoals computers, schakelsystemen voor de telefoon, enz. vindt men onderdelen, die zich in twee verschillende toestanden kunnen bevinden. De eenvoudigste daarvan zijn o.a. schakelaars, die „in” of „uit” kunnen staan. Maar ook transistors, diodes, enz. behoren daartoe. Ze gehoorzamen alle aan eenvoudige wetten, analoog aan die van de operaties met getallen in de algebra. Daarom spreekt men bijvoorbeeld over een schakelalgebra.

Om te beginnen kan men aan de twee verschillende standen, die voor een enkelvoudige schakelaar mogelijk zijn, getallen toevoegen, bijv. 1 voor „in” en 0 voor „uit”. (fig 12)



Fig. 12

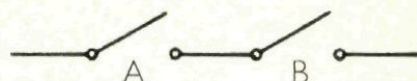
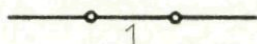


Fig. 13

Schakelaars kan men in een circuit achter elkaar (in serie) plaatsen of naast elkaar (parallel). In fig. 13 is een voorbeeld getekend van twee schakelaars, die in serie geplaatst zijn.

Men geeft een serieschakeling wel aan door het symbool $\wedge$. Dit symbool wordt in de logica en de wiskunde gebruikt voor het begrip „en”. Men zal gemakkelijk begrijpen, dat in serie geplaatste schakelaars de stroom in het circuit dan en alleen dan doorlaten, als de ene *en* de andere „in” staan. Voor de serieschakeling geldt daarom het volgende schema:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

De schakeling in fig. 14 is een parallelschakeling

Nu gaat de stroom door, als A *of* B „in” staan. Het teken, dat daarvoor gebruikt wordt, is $\vee$.

Voor de parallelschakeling geldt het schema:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

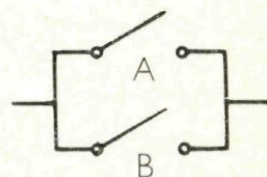


Fig. 14

In de algebra kennen we voor de operaties $+$ en $\cdot$ wetten, die voor alle reële waarden van de hieronder genoemde variabelen a , b en c gelden, nl.:

de *commutatieve* wet: $a + b = b + a$ en $a \cdot b = b \cdot a$.

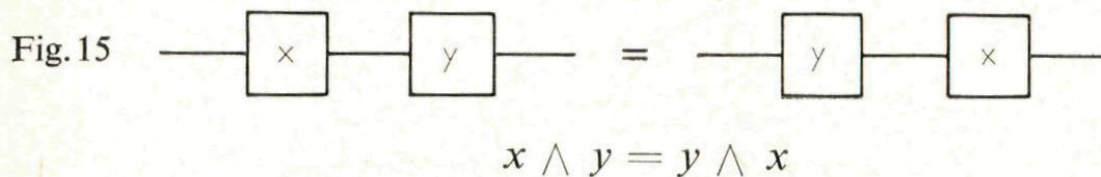
de *associatieve* wet: $a + (b + c) = (a + b) + c$ en
 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

Verder is de vermenigvuldiging *distributief* ten opzichte van de optelling:

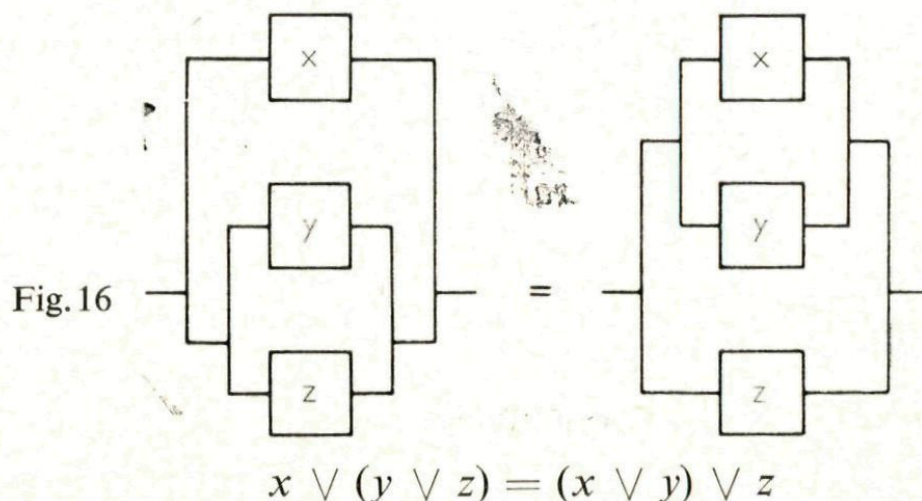
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Hieronder gaan we na, welke van deze wetten gelden voor het uitvoeren van de operaties $\wedge$ en $\vee$ op schakelingen. In de figuren hebben we daarbij de schakelaars vervangen door vierkantjes met een letter erin. Daarmee hebben we willen aanduiden, dat de keuze van het „in” of „uit” staan van de schakelaars nog mogelijk is. De variabelen x , y of z , die in de figuren staan kunnen dus naar believen nog de waarden 0 of 1 krijgen. Het is gewenst bij deze schakeling inderdaad deze waarden te substitueren en daarmee het gelden van de wetten te controleren. Overigens kunnen de wetten ook gecontroleerd worden zonder figuren nl. door gebruik te maken van de schema's voor $\wedge$ en $\vee$, die hierboven zijn gegeven. Voorbeelden:

De commutatieve wet voor de serieschakeling:



De associatieve wet voor de parallelschakeling:



Interessant is, dat in de schakelalgebra twee vormen van de distributiviteit voorkomen. Niet alleen is nl. de operatie $\wedge$ distributief ten opzichte van de operatie $\vee$, maar ook het omgekeerde is het geval. Hier wijkt de schakelalgebra af van onze vertrouwde schoolalgebra.

We kunnen dus opschrijven:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

en

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

voor alle waarden, die aan x , y en z gegeven kunnen worden, dat zijn dus de waarden 0 of 1. We controleren beide voor één keuze van x , y en z , nl. $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$. Je kunt zelf de controle wel voor andere waarden uitvoeren.

$$1 \wedge (0 \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1$$

$$(1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) = 0 \vee 1 = 1$$

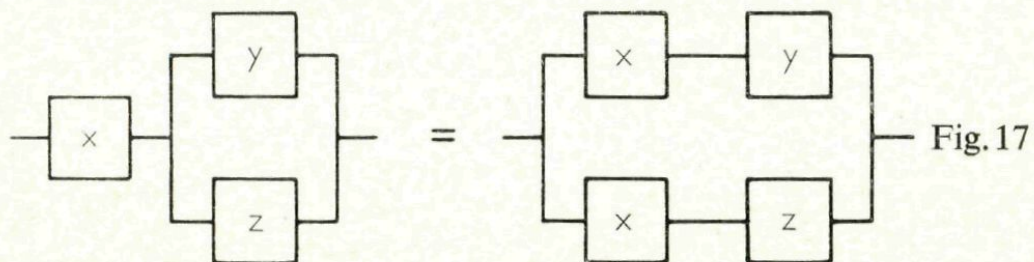
Dus
$$1 \wedge (0 \vee 1) = (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1).$$

Daarmee is de eerste van de beide regels voor dit geval gecontroleerd. Nu de tweede (gebruik hier en bij de eerste zonodig de schema's voor het rekenen met $\wedge$ en $\vee$)

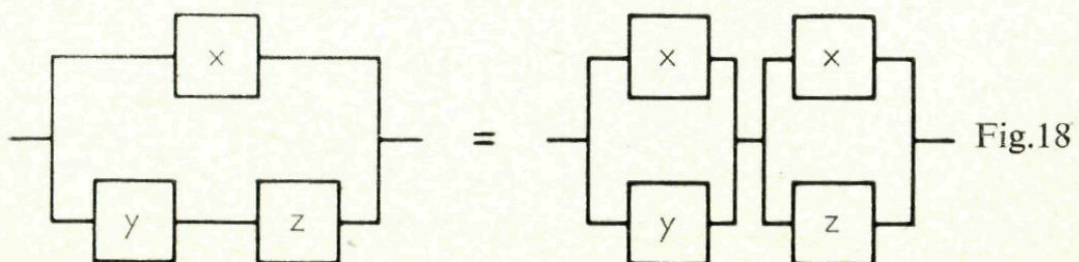
$$1 \vee (0 \wedge 1) = 1 \vee 0 = 1$$

$$(1 \vee 0) \wedge (1 \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1$$

Het is echter ook mogelijk de wetten te controleren door de schakelingen zelf te bestuderen. We geven hieronder de figuren voor de beide distributiviteiten:



$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$



$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Niet alle schakelaars zijn zo eenvoudig als de nu beschouwde. Bekijk bijvoorbeeld eens de beide figuren 19a en 19b. De schakelaar laat in de linkerfiguur de lamp L branden en in de rechterfiguur de lamp L'. Kijken we alleen naar de lamp L, dan zouden we kunnen zeggen, dat we te maken hebben met een schakelaar A, waaraan in de linkerfiguur de waarde 1 en in de rechterfiguur de waarde 0 toegekend moet worden. Letten we echter op lamp L', dan hebben we te maken met een schakelaar A', die in de linkerfiguur de waarde 0 en in de rechterfiguur de waarde 1 heeft. De schakelaars A en A' hebben dus een complementaire werking. Voor alle waarden van x is $x \wedge x' = 0$. Voor alle waarden van x is echter $x \vee x' = 1$.

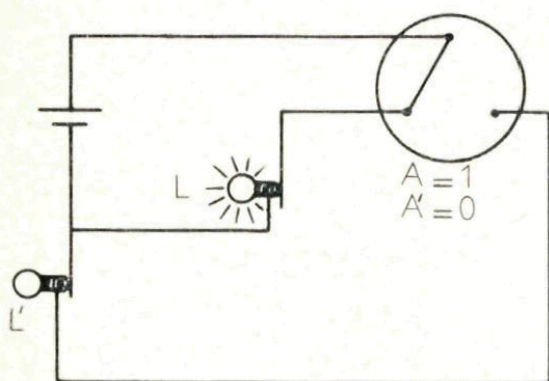


Fig.19a

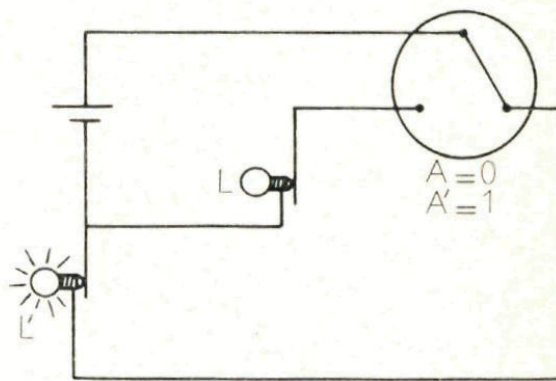


Fig.19b

Van deze complementaire schakelaar willen we tenslotte gebruik maken om een schema op te stellen voor de schakeling, die we vaak in trappenhuisen aantreffen. De lamp in het trappenhuis kan dan zowel boven als beneden ontstoken en gedoofd worden, onafhankelijk van de stand van elk der beide schakelaars. Noemen we de ene schakelaar A, de andere B en de lamp L dan kan het volgende schema gelden voor deze schakeling:

A	B	L
0	0	0
0	1	1
1	1	0
1	0	1

Als de beide schakelaars „uit” staan is het licht uit. Komt er nu iemand, die B „in” zet, dan brandt de lamp. Deze kan gedoofd worden door B weer „uit” te zetten. waardoor de beginsituatie terugkeert, maar ook door A „in” te zetten. Bij de situatie $A = 1, B = 1$ behoort dus $L = 0$.

We zien daarom: Het licht brandt, als A „uit” staat en B „in” of omgekeerd. We kunnen dat op de volgende manier in één formule samenvatten:

$$L = (A \wedge B') \vee (A' \wedge B)$$

Ga maar na: Als $A = 1$ is en $B = 0$, is $A' = 0$, en $B' = 1$. Vullen we dat in, dan vinden we:

$$L = (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) = 1 \vee 0 = 1$$

De gevonden formule zegt ons dus: Schakel een A en een B' in serie en een A' en B in serie en schakel deze beide combinaties parallel. Probeer ter oefening eens voor je zelf te vinden, dat de formule zou zijn geworden:

$$L = (A \wedge B) \vee (A' \wedge B')$$

wanneer we begonnen waren met de eis, dat L zou branden voor $A = 0$ en $B = 0$.

Zou je nog verder willen experimenteren met schakelalgebra probeer dan eens de eigenschappen van De Morgan te bewijzen, die zeggen:

$$(A \wedge B)' = A' \vee B'$$

en

$$(A \vee B)' = A' \wedge B'$$

en als sluitstuk van de onderzoeken, dat voor de hierboven gevonden trappenhuischakelingen geldt:

$$[(A \wedge B') \vee (A' \wedge B)]' = (A \wedge B) \vee (A' \wedge B').$$



21. Een kubusvormige doos heeft aan de binnenkant ribben van 5 cm. Er moeten staafjes in verpakt worden, die een vierkante doorsnede van 1 cm^2 hebben en 3 cm lang zijn. Hoeveel kunnen er maximaal in? Leg uit, hoe ze dan gepakt moeten worden.

22. Bewijs dat elke convexe vijfhoek minstens twee stompe hoeken heeft en dat elke convexe veelhoek hoogstens drie scherpe hoeken heeft. (Een veelhoek heet convex, indien geen enkele zijde gesneden wordt door een andere zijde of door het verlengde van een andere zijde).

23. Van een gegeven rechthoekige driehoek heeft de hypotenusa de lengte 5098 en een rechthoekszijde de lengte 4902. Bereken de lengte van de andere rechthoekszijde zo eenvoudig mogelijk.

De verkortingsrij

Constructie en berekeningen.
door Ir. H. M. Mulder, Breda.

Wie een serie bomen langs een weg in perspectief ziet, kan constateren, dat de afstanden tussen deze bomen kleiner worden, naarmate ze verder weg staan. Hetzelfde zien we bij cementlagen in tegelmuren, biels bij spoorrails, spijlen van hekken, ramen in flatblokken en randen van treden, zoals bij de afbeelding van de trap.

In werkelijkheid staan de bomen en liggen de treden even ver van elkaar; door perspectief werking zien we de afstanden steeds korter. Er dringen zich bij het zien van een dergelijke afbeelding direct een aantal vragen op, meetkundige en algebraïsche ofwel constructieve en rekenkundige.

1. *Is er een meetkundige constructie voor dit perspectiefisch beeld?*

Stel, dat we een aantal verticale palen a, b, c , enz. hebben, zoals in fig. 21. Alle palen zijn even groot en staan op gelijke afstanden van elkaar.

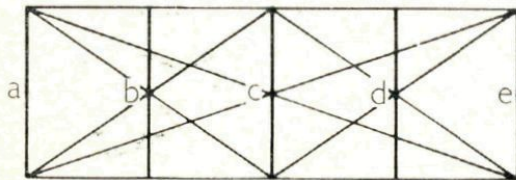


Fig. 21

In fig. 22 zien we, hoe ze in een perspectivische figuur afgebeeld worden.

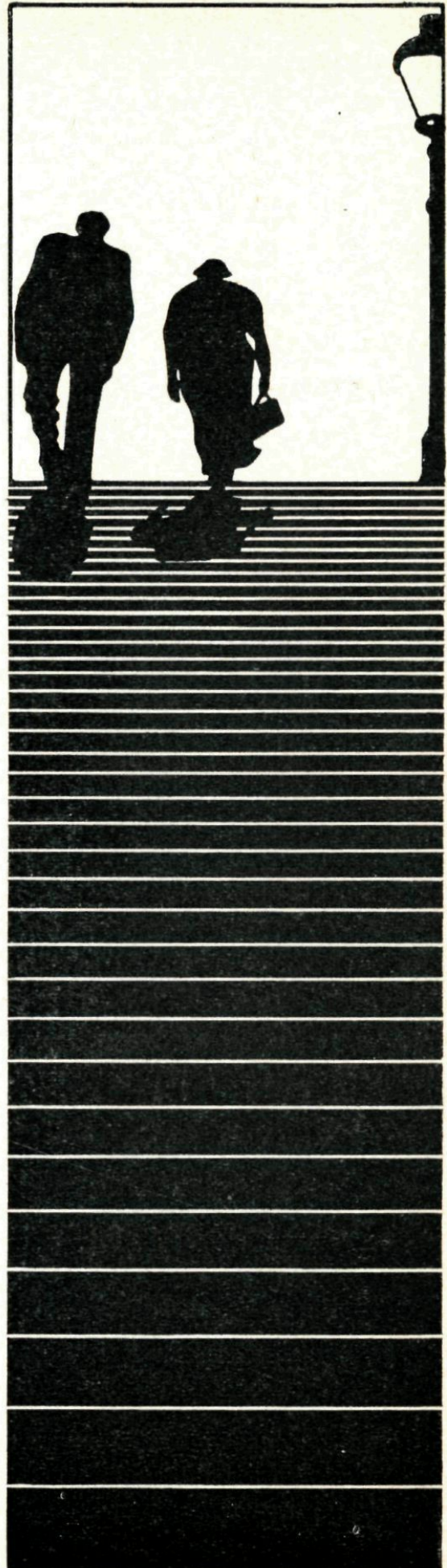


Fig. 20

De rechthoeken in fig. 21 zijn in fig. 22 trapezia geworden. Het is niet de bedoeling om in dit artikel de theorie van de perspectivische afbeelding te gaan bespreken, maar een paar feiten, die je uit ervaring wel kent (je ziet ze in tekeningen en foto's) willen we vermelden:

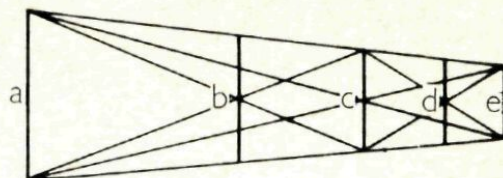


Fig. 22

- a. Verticale lijnen worden als verticale lijnen afgebeeld.
- b. Wanneer een verticale lijn *b* door het snijpunt gaat van de diagonalen in een rechthoek begrensd door o.a. *a* en *c* (fig. 21), dan gaat het beeld van *b* door het snijpunt van de diagonalen in het trapezium, dat het beeld is van de genoemde rechthoek. Zo gaat ook *c* door het snijpunt der diagonalen in de rechthoek, die begrensd wordt o.a. door *a* en *e* en we zien, dat nu het beeld van *c* weer door het snijpunt der diagonalen in het trapezium gaat.

We kunnen nu een perspectivische figuur, als fig. 22 op twee manieren opbouwen, nl. door „interpolatie” of door „extrapolatie”.

Interpolatie wil zeggen, dat we uitgaan van twee gegeven lijnstukken en een *tussenliggende* lijn construeren. Teken bijvoorbeeld de evenwijdige lijnstukken *a* en *e* ($a > e$). Met de diagonalen vind je dan *c*. Daarna kun je weer met diagonalen *b* en *d* construeren.

Extrapolatie betekent, dat we uitgaan van twee lijnstukken en er daarbuiten gelegen lijnstukken bij construeren. We kiezen bijvoorbeeld *a* en *b* ($a > b$). De diagonalen in het trapezium dat o.a. door *a* en *c* begrensd wordt, snijden elkaar in het midden van *b*. Construeer dus dat midden en trek daardoor deze diagonalen. Zet je deze constructie voort, dan zul je opmerken, dat de middens der lijnstukken *a*, *b*, *c*, enz. alle op één rechte liggen, die evenals de schuine zijden der trapezia door het verdwijnpunt *O* gaat.

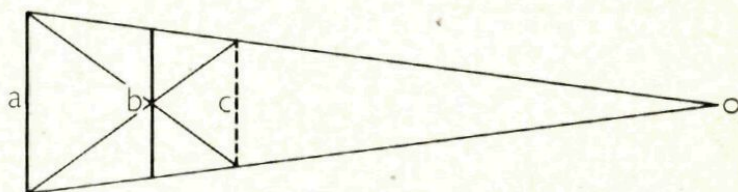


Fig. 23

2. Nu het rekenkundig aspect van de perspectivische afbeelding

Op welke manier nemen de lengten der verticalen of de afstanden van hun voetpunten af? In het trapezium $ACC'A'$ in fig. 24 geldt:

$$\frac{\frac{1}{2}b}{a} = \frac{l}{l+k} = \frac{c}{c+a} \quad (a > b)$$

Dus $2ac = ab + bc$, zodat $c = \frac{ab}{2a - b} = \frac{ab}{a + (a - b)}$

Evenzo vinden we in trapezium BDD'B'

$d = \frac{bc}{2b - c}$. Substitueren we hierin de zojuist gevonden waarde van c ,

dan vinden we

$$d = \frac{ab}{3a - 2b} = \frac{ab}{a + 2(a - b)}$$

Op dezelfde manier vinden we

$$e = \frac{ab}{4a - 3b} = \frac{ab}{a + 3(a - b)}$$

We zien dat er regelmaat in deze waarden zit. Elk der verticalen is gelijk aan een breuk met de constante teller ab , terwijl bij elke breuk de noemer $a - b$ groter is, dan de noemer van de voorgaande breuk.

We kunnen daarom ook zeggen, dat de omgekeerden van de lengten der verticalen een rekenkundige rij vormen met het verschil gelijk aan

$$\frac{a - b}{ab}$$

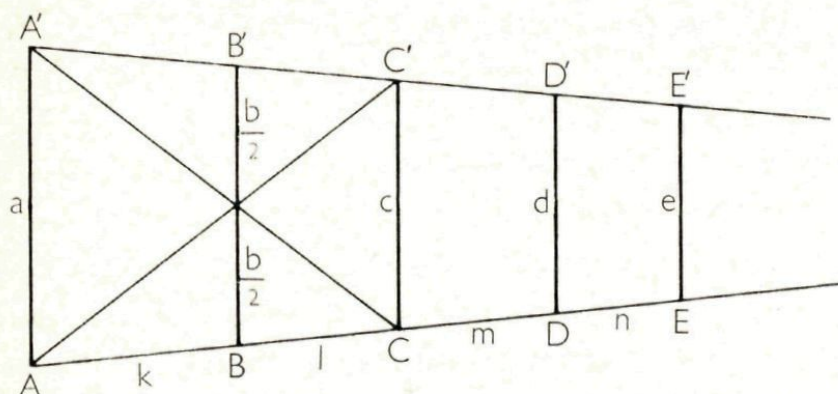


Fig. 24



24. Voor welke waarden van het natuurlijke getal n hebben 7^n en n hetzelfde eenhedencijfer en hetzelfde tientallencijfer?
25. Figuur 25 stelt een billard voor. De bal A moet zo gestoten worden, dat hij bal B treft na tegen drie banden (zijden van de rechthoek) teruggekaatst te zijn. Construeer een mogelijke baan van A onder de veronder-

stelling dat hij geen „effect” meekrijgt (d.w.z. dat bij het terugkaatsen telkens de hoek van inval gelijk is aan de hoek van terugkaatsing).

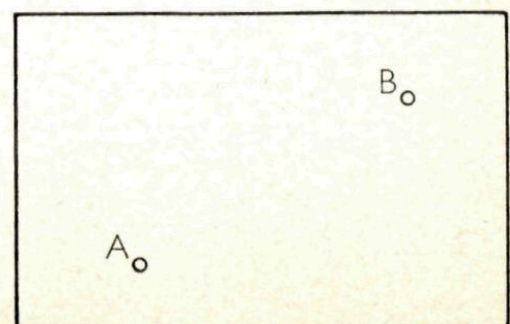


Fig. 25

26. Bewijs dat het stelsel vergelijkingen $x + y = 1$, $x^{200} + y^{200} = 1$ geen andere wortelstellen heeft dan $x = 0, y = 1$ en $x = 1, y = 0$.
27. Lijnstuk AB heeft een lengte van 6 cm. De rechte m snijdt de rechte AB onder 45° op een afstand van 8 cm van A op het verlengde van BA. Construeer het parallellogram ABCD, waarvan het hoekpunt C op de rechte m ligt, zodanig dat de langste diagonaal van dat parallellogram zo kort mogelijk is.
28. Als a en b gehele getallen zijn en $a^2 + b^2$ een zevenvoud is, dan is $a^2 + b^2$ zelfs een 49-voud. Bewijs dat.
29. We beschouwen rijen van natuurlijke getallen, die volgens het volgende recept gedefinieerd worden:
- het eerste getal van de rij wordt willekeurig gekozen;
 - elk ander getal van de rij is gelijk aan de som van de cijfers van de er aan voorgaande getallen van de rij.
- Bewijs, dat het getal 790 een van de eerste 4 getallen van zo'n rij kan zijn, maar niet een hoger rangnummer dan 4 kan hebben.
30. In een zekere stad hebben 70 % van de gezinnen een T.V.-toestel en 45 % van de gezinnen een auto. Heb je aan deze gegevens genoeg om met zekerheid te kunnen zeggen of de onderstaande beweringen waar of onwaar zijn:
- In elk gezin is er een T.V.-toestel of een auto.
 - De meeste auto bezitters hebben ook T.V.
 - Minder dan de helft van de T.V.-bezitters hebben een auto.
 - Als het aantal autobezitters met 60 % zou toenemen, dan zouden er meer autobezitters dan T.V.-bezitters zijn.

(Naar een Engelse examenopgave).

Oplossingen Denkertjes uit nummer 2

11. Bij een hoekpunt A van de kubus komen drie zijvlakken samen, die twee aan twee aan elkaar grenzen. We hebben dus op zijn minst drie kleuren nodig. Dit aantal is echter ook voldoende: geef elk zijvlak bij het tegenover A liggende hoekpunt G dezelfde kleur als zijn overstaande zijvlak bij A .
12. Maak bij elke heen- of terugreis een figuurtje, waarin de gegevens betreffende de vorige reizen ook verwerkt worden. Bij de zesde figuur blijkt je „ze allemaal op een rijtje te hebben”:

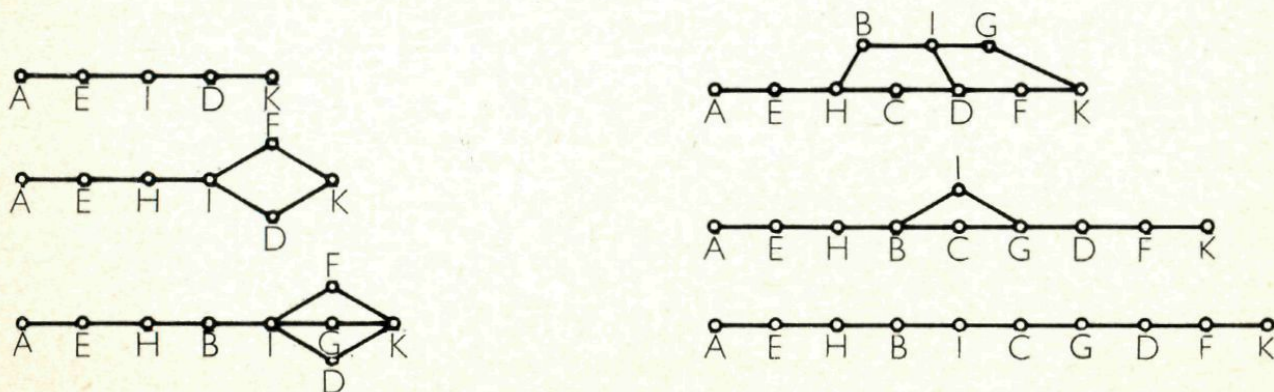


Fig. 26

13. In het eerste geval bevat de verzameling beslist oneindig veel punten. Omdat er twee verschillende punten tot de verzameling behoren, levert toepassing van het gegeven, dat er ook twee diametraal tegenover elkaar gelegen punten tot de verzameling behoren. Past men het gegeven op dat tweetal toe, dan vindt men er nog twee bij, die samen met die eerste een vierkant bepalen. Door herhaalde toepassing van het gegeven vindt men daarna de hoekpunten van een regelmatige achthoek, zestienhoek, tweendertighoek, enzovoorts.

In het tweede geval kan de puntenverzameling wel een eindige verzameling zijn, bijvoorbeeld het drietal hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek. Het minimale aantal punten is dus drie.

14. Uit de figuur zie je $p + q + v = r + s + v =$ de halve oppervlakte van het parallellogram; hieruit blijkt $p + q = r + s$. Verder is $(p + q + v) + (r + s + v)$ de hele oppervlakte van het parallellogram, dus gelijk aan $p + q + r + s + t + u + v$; hieruit blijkt $t + u = v$.

15. Noem het oorspronkelijke getal $x = \overline{abc}$. Het vierde deel van een geheel getal eindigt decimaal geschreven op $\cdot,5$ of op $\cdot,25$ of op $\cdot,75$ of is zelf geheel. Na de bewerking kan echter niet $\overline{pabc},5$ ontstaan, want dat zou meer dan x zijn. Dus moet er komen

$$\overline{pab},c5 = 100p + \frac{x}{10} + \frac{1}{20} = \frac{x}{4}. \text{ Hieruit vinden we } \frac{3}{20}x = 100p + \frac{1}{20}.$$

Of $x = (2000p + 1) : 3$. Alleen $p = 1$ geeft een x van drie cijfers, namelijk 667.

16. Indien $a = 1$, dan kan b de rij 2; 3; ...; 48; 49 doorlopen. Dit geeft 48 drietallen. Evenzo geeft $a = 2$ een totaal van 46 drietallen, $a = 3$ een totaal van 45 drietallen, en zo verder. Het aantal drietallen bedraagt dus $48 + 46 + 45 + 43 + 42 + 40 + \dots + 4 + 3 + 1$ (de driebouden plus één ontbreken) of 784.

17. Uit $x^2 = 1 - [x]$, blijkt dat x^2 een geheel getal moet zijn. Dit maakt het mogelijk om stelselmatig door substitutie de wortels te vinden. Het zijn er drie, namelijk -2 , $-\sqrt{3}$ en 1.

18.

1	2	3	4
8			5
			6
			7

19. Uit $x = ac + 2bd$ en $y = ad + bc$ leiden we het gevraagde antwoord af: a en c zijn allebei oneven, b en d zijn allebei even of allebei oneven.

Fig.27

20. Nee, dat kan niet. Het kwadraat van een geheel getal eindigt op een van de cijfers 0, 1, 4, 5, 6, 9; de vierde macht van een geheel getal eindigt dus op een van de cijfers 0, 1, 5, 6. Het gegeven onvolledige getal eindigt op 9 en kan dus niet een vierde macht zijn.

De oplossing van de eerste Wimecos-puzzel wordt geplaatst in nummer 5.

Verbetering

Dr. A. J. E. M. Smeur te Gouda wijst ons er op, dat er in het artikeltje Bianca op blz. 24 van het vorige nummer een redeneerfout is geslopen, hoewel het eindantwoord wel goed was. Op deze bladzijde, regel 2 van onderen, lezen we nl.

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

Dat moet zijn 32. Nu is 6 keer 32 niet 186 maar 192. Toch is 186 het juiste aantal, want op de zes halve diagonalen wordt iedere mogelijkheid twee keer geteld. Men moet dus 192 met 6 verminderen. Wat in het artikel als zesde deel van de figuur is genomen, is in feite meer dan dit zesde deel, omdat de randen dubbel geteld zijn.

Associatief

Uit het Latijn. *Ad* = *aan*, *socius* = *deelgenoot*.
Een bewerking $\circ$ in een verzameling heet associatief, als voor elk drietal leden a , b en c van de verzameling geldt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

Commutatief

Uit het Latijn. *Commutare* = *verwisselen*.
Een bewerking $\circ$ in een verzameling heet commutatief, als voor elk tweetal leden van de verzameling geldt $a \circ b = b \circ a$.

Cycloïde

Uit het Grieks. *Kyklos* = *cirkel*.

Distributief

Uit het Latijn. *Distribuere* = *verdelen*.
Men noemt een bewerking $\circ$ in een verzameling distributief ten opzichte van een tweede bewerking $\triangle$ in die verzameling, als voor elk drietal leden van de verzameling geldt $a \circ (b \triangle c) = (a \circ b) \triangle (a \circ c)$.

Extrapoleren

Uit het Latijn. *Extra* = *buiten*. Gevormd naar analogie van interpoleren.

Interpoleren

Uit het Latijn. *Interpolare* = *glad maken, opsieren, iets tussenvoegen*.

Perspectief

Uit het Latijn. *Perspicere* = *door heen zien*.

Trochoïde

Uit het Grieks. *Trochos* = *wiel*. Een trochoïde is de baan van een punt van een wiel, wanneer dat wiel langs een vaste cirkel rolt.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden. *Inzenden vóór 27 februari 1966.*

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,— per jaargang. Voor anderen f 3,50.

Abonnementen kan men opgeven bij J. B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J. B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.