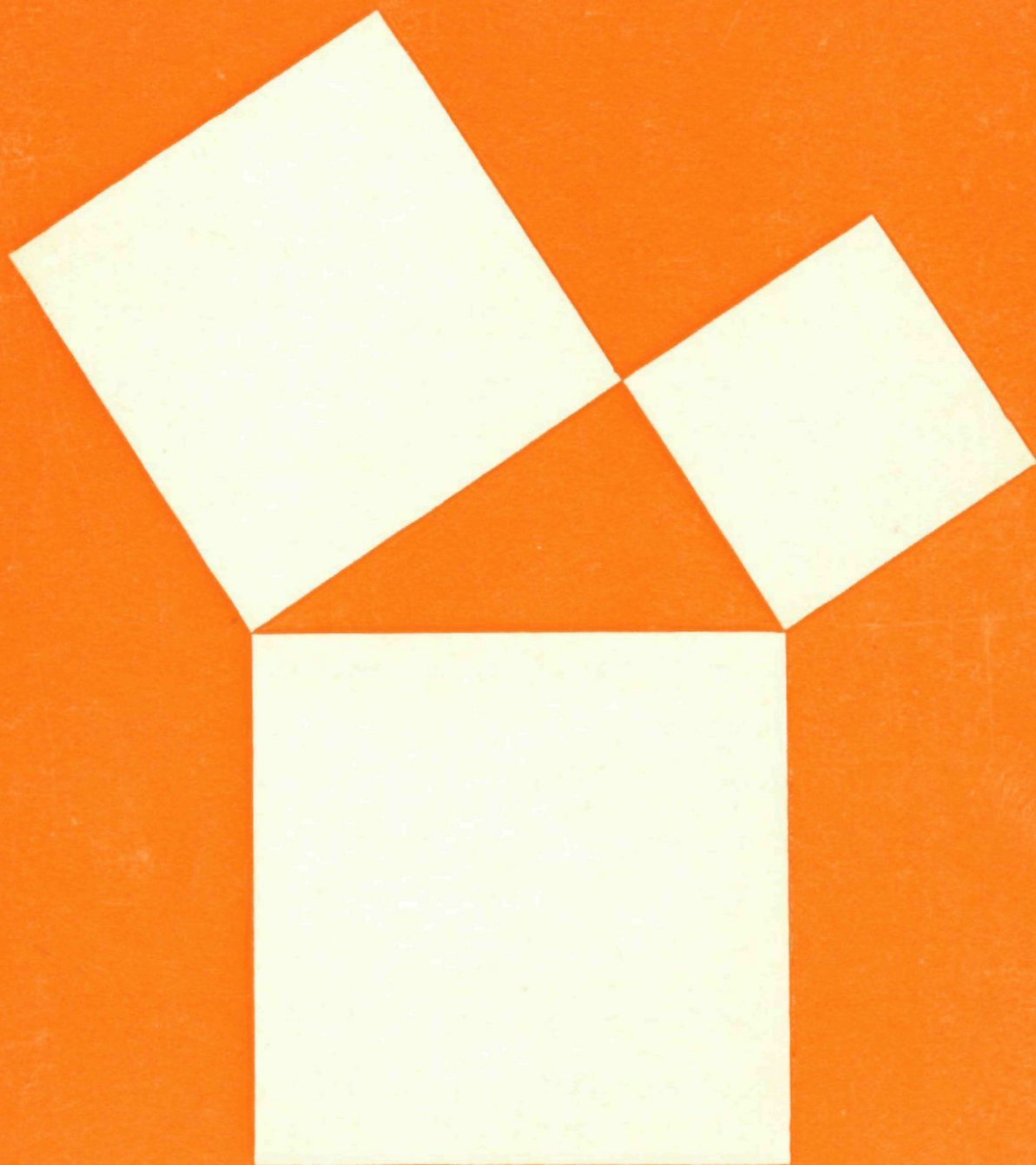


PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

5

Vijfde jaargang



°Houtmeetkunde III

In dit slotartikel over de houtmeetkunde willen we in de eerste plaats de aandacht vestigen op de merkwaardige gevolgen van onnauwkeurigheid bij meten en verder nog eens zien, hoe men het houtvolume van een heel bos schat.

In het „houtdictaat” wordt als methode van het berekenen van het volume van één boom o.a. gegeven: Meet de dikte van de boom op borsthoogte (1,30 m) en bereken daaruit de oppervlakte van deze doorsnede. Vermenigvuldig deze oppervlakte met de hoogte van de boom en met een voor iedere boomsoort verschillende factor, die vormgetal wordt genoemd. (De vorm van de boom is bepalend voor de grootte van dit vormgetal, dat zoals je gemakkelijk begrijpt kleiner dan 1 is. Immers was het gelijk aan 1, dan zou de boom behandeld worden alsof deze een cilinder was).

Nu is het merkwaardig, dat het meten van de diameter met veel groter nauwkeurigheid moet plaats vinden dan het schatten van de hoogte. De inhoud van de boom wordt berekend in kubieke meters. De diameter moet dus eveneens in meters worden gegeven. Stel dat deze x m is en stel de hoogte gelijk h m. Is f het vormgetal, dan wordt het volume van de boom dus berekend uit

$$V = \frac{1}{4}\pi f h x^2$$

Stel, dat we voor x vinden 0,50 m, maar dat de werkelijke diameter 0,51 m is, dus 1 cm groter. Hoe groot is dan de fout in de einduitkomst? We vinden $V = \frac{1}{4}\pi f h \cdot 0,25$ en behoren te vinden $V = \frac{1}{4}\pi f h \cdot 0,2601$. Het verschil van deze twee uitkomsten is ongeveer $0,01 \cdot \frac{1}{4}\pi f h$. Dat is ongeveer het 26e deel van het juiste antwoord, dus omstreeks 4 %.

Hoe groot mag nu de fout in de hoogtemeting zijn om ook een relatieve fout van ongeveer 4 % te vinden?

Zonder de hele berekening te maken, kun je waarschijnlijk wel inzien, dat bij een boom met een lengte van 25 m de fout de grootte van 1 m mag hebben. Waar dus bij de diktemeting een afwijking van 1 cm tot een procentuele fout van 4 % aanleiding geeft, is bij de hoogtemeting een fout van een hele meter pas even erg.

Om het houtvolume van een heel bos te berekenen is het niet nodig in het hele bos metingen uit te voeren. Het is genoeg hiervoor een proefvlak te nemen, dat bij jong hout bijvoorbeeld de grootte van een vierkant van 10 bij 10 meter kan hebben en bij een ouder bos van 20 bij 20 m. (Als het bos tenminste voldoende gelijkmatig is).

In het proefvlak wordt de diameter gemeten van elk der bomen en de uitkomsten van de metingen worden dan in een zg. „klemstaat” verzameld. (Men meet de diameter met een boomklem, zie het vorige artikel in nummer 2).

Hier is een voorbeeld van zo'n klemstaat, voor een bos bestaande uit grove den, 25 jaar oud, gemeten over een proefvlak van 20 bij 20 m.

Diameters (in cm)	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Aantal bomen	1	1	4	9	12	20	13	8	4

In de volgende tabel zie je nu de berekening van het houtvolume van dit proefvlak. In deze tabel is g de oppervlakte van de doorsnede. Die is daar gegeven in cm^2 , terwijl de einduitkomsten in m^3 zijn. Het blijkt, dat de 72 bomen samen een volume hebben van bijna $2\frac{1}{2} \text{ m}^3$.

$\varnothing$ in cm	Stamtal (n)	Grondvlak in cm^2 (g)	Hoogte in m (h)	Vormgetal (f)	Inh. van de boom (g $\times$ h $\times$ f)	Inh. van alle bomen per $\varnothing$ klasse
6	1	28	6	0.43	0.0072	0.0072
7	1	38	6	0.43	0.0098	0.0098
8	4	50	7	0.44	0.0154	0.0616
9	9	64	7	0.45	0.0202	0.1818
10	12	78	7	0.46	0.0251	0.3012
11	20	95	8	0.47	0.0357	0.7140
12	13	113	8	0.47	0.0425	0.5525
13	8	133	8	0.47	0.0500	0.4000
14	4	154	9	0.47	0.0651	0.2604
72						2.4885

Een methode, die wat minder rekenwerk geeft, maar ook minder nauwkeurig is, maakt gebruik van de zg. middenboom. Dat is de theoretische boom, die in het proefvlak als doorsnede heeft het gemiddelde van alle gevonden doorsneden. Deze gemiddelde doorsnede kan uit de bovenstaande tabel worden berekend door eerst telkens de naast elkaar staan-

de getallen uit de 2e en 3e kolom met elkaar te vermenigvuldigen en de uitkomsten daarna op te tellen. Controleer maar even, dat je dan 6827 vindt. Delen we nu dit getal door het aantal bomen (72) dan vinden we de gemiddelde oppervlakte van de doorsneden. Dan berekenen we de diameter van de zg. middenboom uit deze oppervlakte. De diameter blijkt 11 cm te zijn. (In de tabel zie je wel, dat er in het proefvlak 20 bomen met een diameter van 11 cm aanwezig zijn.) In het bos wordt nu een boom met deze diameter uitgezocht, deze wordt geveld, zijn hoogte en het vormgetal worden nauwkeurig vastgesteld. Het houtvolume van alle bomen is dan aantal bomen $\times$ hoogte modelboom $\times$ grondvlak modelboom $\times$ vormgetal modelboom.

De vorige aflevering van Houtmeetkunde lokte nogal wat reacties uit. Die van Martin Zwollo en van Kees Verhoeven verdienen bijzondere vermelding; de eerste om z'n uitgebreide stereometrische behandeling, de tweede omdat hij een constructie aangaf van een schuiflatje, waarop uit de gemeten omtrek en de lengte direkt de inhoud in m³ is af te lezen.

We bladeren dit nummer even door

De hoofdmoot van dit nummer wordt wel gevormd door het artikel over de Deen Piet Hein. Van een der lezers ontvingen we een zeer interessant ex-libris, dat we aan een nadere beschouwing onderwerpen. Een opgave van de Russische wiskunde-olympiade gaf ons aanleiding het artikel „Taart en tactiek” te fabriceren. De houtmeetkunde neemt weer zijn plaats in in dit nummer. Een bijzonder grappige manier om oppervlakten te berekenen, nl. door slechts roosterpunten te tellen, wordt besproken.

De lootprijs voor de denkertjes van nummer 3 is voor C. Sjenitzer, (Den Haag). Boven aan de ladder staan na nr. 3: Dennis Dieks (291), Hans Jonkers (290), Fr. Lambert (285), Gust. Rol (280) en A. de Bruin (275).

Wimecos I: 1e prijs Theo v. Ulm (Zaanlands Lyceum) en de 2e prijs M. Giepmans (Geleen).

Wimecos II: 1e prijs O. Ruysenaars (Leiden), 2e prijs J. Faddegon (Amsterdam). Voor Wimecos I en II samen: 1e prijs R. W. Soer (Leeuwarden), 2e prijs Hans Maassen (Arnhem).



41. In driehoek ABC is D het midden van BC en E het midden van AC. De zwaartelijnstukken AD en BE hebben opvolgend de lengten 12 cm en 15 cm. Welke waarde kan de oppervlakte van driehoek ABC ten hoogste hebben?

42. Bepaal alle rijen opvolgende gehele getallen, die 100 tot som hebben.

43. In de cirkeltjes van fig. 1 moeten de getallen van 1 tot en met 8 ingevuld worden; in twee door een lijnstuk verbonden cirkeltjes mogen geen getallen staan, waarvan het verschil slechts 1 bedraagt.

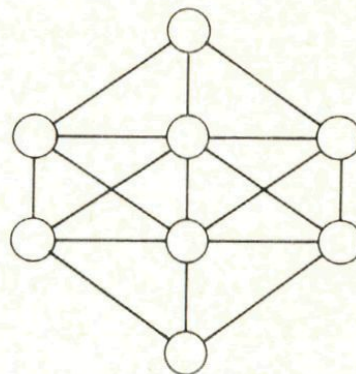


Fig. 1

Taart en tactiek

In het onderstaande artikel bespreken we een meetkunde-opgave, die opgegeven werd bij een Russische wiskunde-olympiade.

Peter en Paul mogen samen een driehoekige taart verdelen. Ze hebben van te voren afgesproken dat Peter met een rechte snede de taart in twee stukken mag snijden en dan ook mag kiezen welk van die twee stukken hij zal opeten. Paul heeft echter het recht om op die taart een punt aan te wijzen, waar de door Peter te maken snede doorheen zal moeten gaan. Nu is het bekend, dat Peter verschrikkelijk hebzuchtig is. We kunnen er dus op rekenen dat hij een zo groot mogelijk stuk taart in de wacht zal willen slepen. Paul vindt het niet erg om het kleinste stuk taart te

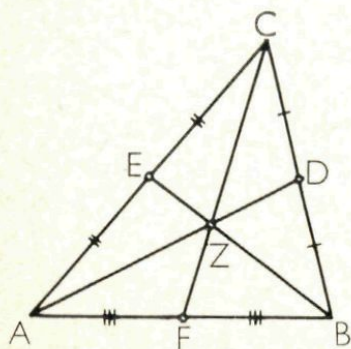


Fig. 2

krijgen, maar hij wil dat stuk dan toch wel graag zo groot mogelijk laten zijn. Zo ontstaat het probleem: *waar moet Paul dat punt kiezen om de hebzucht van Peter zo veel mogelijk te beteugelen?*

Vanzelfsprekend richt Paul zijn aandacht eerst op de „eerlijke” verdelingen van de taart. Het is een bekend feit dat elk van de zwaartelijnen van een driehoek zo'n eerlijke verdeling te weegbrengt; in figuur 2 hebben de zes kleine driehoekjes gelijke oppervlakten.

We zullen daarom eerst maar eens onderzoeken, hoe Peter er voor staat als Paul hem opdraagt zijn snede door het zwaartepunt van de driehoek aan te brengen.

Wanneer elke snede door dat zwaartepunt de driehoek zou verdelen in twee stukken met gelijke oppervlakte, dan zou ons probleem al opgelost zijn, omdat Paul in dat geval Peter zou dwingen tot eerlijk delen. Helaas is dat niet het geval. Het is zelfs zo, dat *geen enkele* andere snede door dat zwaartepunt de driehoek verdeelt in twee stukken met gelijke oppervlakte. Dit gaan we eerst bewijzen.

Een snede, die niet langs een zwaartelijn loopt, zal twee van de zes kleine driehoekjes uit figuur 2 treffen. Zonder de algemeenheid te schaden mogen we aannemen, dat dat de driehoeken AEZ en BDZ zijn. We bestuderen dus figuur 3, waarin PQ zulk een snede voorstelt.

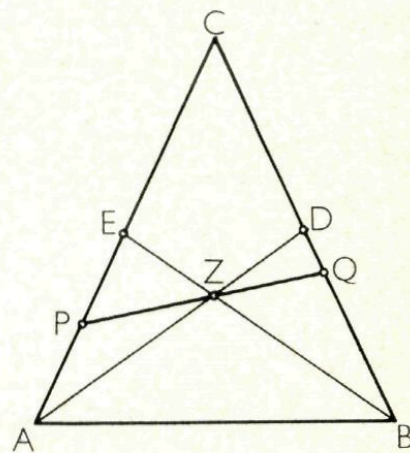


Fig. 3

Laat ons nu eens veronderstellen, dat de oppervlakte van driehoek CPQ de helft is van die van driehoek ABC.

Uit $\triangle CPQ = \triangle CAD$ volgt $\triangle ZPA = \triangle ZQD$ en dus $ZP \cdot ZA = ZQ \cdot ZD$. Wegens $ZA = 2 \cdot ZD$ leidt dit tot $ZQ = 2 \cdot ZP$. Uit $\triangle CPQ = \triangle CBE$ volgt $\triangle ZQB = \triangle ZPE$ en dus $ZQ \cdot ZB = ZP \cdot ZE$. Wegens $ZB = 2 \cdot ZE$ leidt dit tot $ZP = 2 \cdot ZQ$.

De resultaten $ZQ = 2 \cdot ZP$ en $ZP = 2 \cdot ZQ$ zijn met elkaar in strijd en dus is de veronderstelling, dat PQ de oppervlakte van driehoek ABC halveert, beslist fout.

Legt Paul het voorgeschreven punt dus in het zwaartepunt van de driehoek, dan kan Peter er heel gemakkelijk voor zorgen dat hij de „grootste helft” van de taart krijgt. Hij behoeft daartoe alleen maar de driehoek te verdelen in een driehoekig stuk en een vierhoekig stuk en kiest dan van die twee stukken het grootste.

Maakt Peter bijvoorbeeld een snede, die evenwijdig is met een zijde van de driehoek, dan heeft het driehoekige stuk een oppervlakte van $\frac{4}{9}$ van de oppervlakte van driehoek ABC (gelijkvormigheid met factor $\frac{2}{3}$). Hij kiest dan natuurlijk het vierhoekige stuk, dat $\frac{5}{9}$ van de taart is. Dit succes kan Peter op geen enkele andere manier boeken. Met andere woorden: een snede door het zwaartepunt, die niet evenwijdig met een zijde is,

geeft een driehoekig stuk, waarvan de oppervlakte niet $\frac{4}{9}$ is van de oppervlakte van de driehoek ABC zelf.

Om dit te bewijzen kunnen we ons weer beperken tot sneden, die de driehoeken AZE en BZD treffen. In figuur 4 is de snede KL evenwijdig met AB.

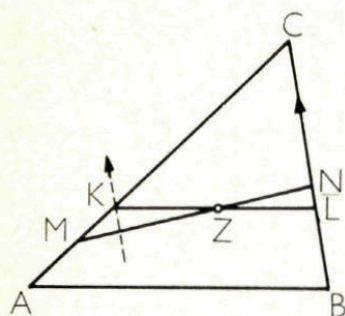


Fig. 4

met AB. Als nu de snede MN zodanig was, dat de driehoeken CKL en CMN gelijke oppervlakte hadden, dan zouden ook de driehoeken ZKM en ZLN gelijke oppervlakte hebben. De onmogelijkheid daarvan wordt aangetoond met behulp van een lijn door K, die evenwijdig met BC is; deze snijdt van driehoek ZKM een stuk af, dat congruent is met driehoek ZLN (bedenk, dat $ZK = ZL$ is).

We zijn nu in staat om Peter te helpen, wanneer Paul het zwaartepunt aanwijst: Peter krijgt dan een zo groot mogelijk stuk, indien hij zijn snede evenwijdig maakt met een zijde van driehoek ABC.

Om dit in te zien laten we een lijn om het punt Z draaien met de wijzers van de klok mee. De beginstand is de zwaartelijns AZD en de eindstand is de zwaartelijns EZB. We bekijken, hoe de oppervlakte van het driehoekige stuk zich gedraagt, dat door die draaiende lijn van driehoek ABC wordt afgesneden.

In de beginstand is die oppervlakte gelijk aan de helft van de taart. Is de draaiende lijn in de stand van KL uit figuur 4 aangekomen, dan is het driehoekige stuk gelijk aan $\frac{4}{9}$ van de taart. En in de eindstand is het weer opnieuw gelijk aan de helft van de taart.

We beweren nu, dat tijdens het draaien het driehoekige stuk nooit kleiner dan $\frac{4}{9}$ van de taart en nooit groter dan de helft van de taart is. Het verhoudingsgetal kan niet kleiner dan $\frac{4}{9}$ worden, omdat het dan de waarde $\frac{4}{9}$ een keer dalend en een keer stijgend zou moeten passeren en we hebben immers bewezen, dat de waarde $\frac{4}{9}$ slechts eenmaal wordt aangenomen tijdens de draaiing. Iets dergelijks geldt voor het verhoudingsgetal $\frac{1}{2}$. Tenslotte kunnen we de gehele redenering herhalen, wanneer we de draaiende lijn een ander paar van de driehoekjes uit figuur 2 laten treffen.

Het einde van onze tactische overwegingen is nu in zicht. Wanneer Paul een ander punt dan het zwaartepunt aanwijst, dan kan Peter meer dan $\frac{5}{9}$ taart verwerven. Hij maakt dan een snede, die evenwijdig is met een zijde en doet dat zo dat het zwaartepunt binnen het vierhoekige deel valt. Dat vierhoekige deel kiest hij dan om op te eten.

In figuur 5 is deze situatie toegelicht.

Daar Paul ons medeleven verdient, geven wij hem dus de raad het zwaartepunt aan te wijzen. Weliswaar neemt Peter dan $\frac{5}{9}$ van de taart, maar in alle andere gevallen komt Paul er nog slechter af.

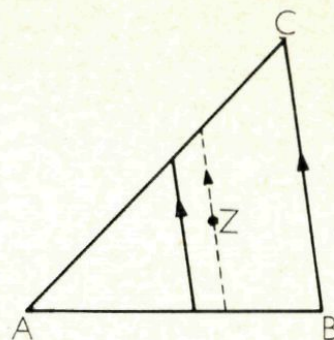


Fig. 5

°°Exlibris en Wiskunde 3

De Heer D. de Vries te Den Haag zond ons zijn exlibris, dat evenals die van Ir. Strens, een bijzonder mooi voorbeeld is van de toepassing van een wiskundige figuur als ornament. Daar komt nog bij, dat deze figuur voor de ontwerper van het exlibris een symbolische betekenis heeft. De heer De Vries schreef ons:

Het exlibris draagt als motief de kromme $r = \frac{\varphi}{\varphi - 1}$, die, zoals u weet,

een cirkel tot asymptoot heeft. Dit boeide mij: Ik zag er een streven in naar het volmaakte (de cirkel), dat voor ons nooit bereikbaar is, noch van binnen uit, noch van buiten af, omdat het onvolmaakte zowel in ons-zelf als in de buitenwereld niet is weg te denken.

Het tussenvoegsel „zoals u weet” zal wel niet voor alle lezers gelden en daarom moeten we, wil de figuur van het exlibris betekenis voor ons krijgen, de vergelijking

$$r = \frac{\varphi}{\varphi - 1}$$

aan een onderzoek gaan onderwerpen. De eerste vraag, die bij ons opduikt, is: Wat stellen die r en die φ voor. We hebben in de algebra of de analytische meetkunde kennis gemaakt met grafieken, maar in de meeste gevallen, waren daarin x en y de variabelen. We gebruikten twee coördinaatassen, de X -as en de Y -as en elk punt van het vlak van die coördinaatassen kon daardoor met behulp van een getallenpaar (x, y) zijn plaats aangewezen krijgen.

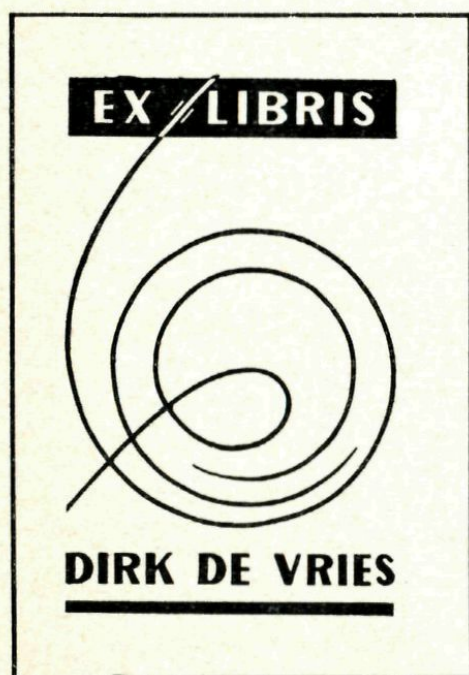


Fig. 6

De r en de φ in de formule van de heer De Vries wijzen er op, dat hij gebruikt maakt van een geheel ander soort coördinaten, nl. poolcoördinaten.

Poolcoördinaten

Kiezen we in een vlak ergens een punt M, dan is de plaats van elk ander punt in het vlak op de volgende manier vast te leggen:

Trek met M als beginpunt een halve rechte MA. De plaats van het punt P is nu bepaald door de lengte r_1 van MP en de grootte φ_1 van $\angle PMA$.

Het is mogelijk de hoeken φ te kiezen van en met -90° tot en met $+90^\circ$. De plaats van het punt Q wordt dan gegeven door de negatieve hoek φ_2 en de positieve lengte r_2 . Bij het punt R daarentegen is hoek φ_1 weer positief, maar wordt de lengte van r_3 van een minteken voorzien, omdat r_3 langs de halve rechte valt, die in het verlengde ligt van PM. De verzameling van alle

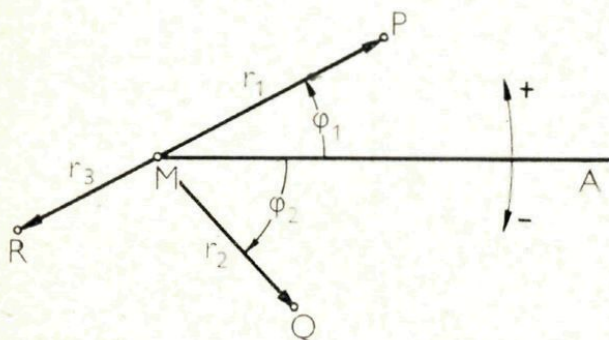


Fig. 7

punten, waarvoor hoek φ constant is, terwijl r variabel is, is een rechte door M. De verzameling van de punten, waarvoor r een constante waarde heeft en waarvoor φ variabel is, is een cirkel met M als middelpunt.

Radialen

De hoeken φ worden in het algemeen niet gegeven met graden, maar met radialen. Op elke cirkel is een boog van 1 radiaal een boog, waarvan de lengte even groot is als de lengte van de straal van de cirkel. Aangezien de lengte van de hele cirkel gelijk is aan 2π maal de lengte van de straal, bevat de cirkel 2π radialen. Een boog van 1 radiaal bevat daarom $\frac{360}{2\pi}$ graden, dat is ongeveer $57,3^\circ$. In fig. 8 zijn vanaf MA op de cirkel uitgezet bogen van 1, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, 4, 5, 6, 7 en 8 radialen.

De spiralen

Kiest men de straal van de in fig. 8 getekende cirkel als eenheid, dan kan men gemakkelijk op elk der stralen door de deelpunten op de cirkel de grootte van r afzetten, die volgt uit de gegeven formule

$$r = \frac{\varphi}{\varphi - 1}.$$

Op de straal door het punt P, dat behoort bij de boog van 1 radiaal, ligt echter geen punt van de kromme, omdat in de gegeven formule φ immers niet gelijk aan 1 gekozen mag worden. Laten we φ tot 1 naderen (van de grote kant), dan neemt r onbeperkt toe, zodat dus de punten op de stralen in de buurt van MP „heel ver weg” liggen. De kromme nadert asymptotisch tot MP.

Laten we φ voortdurend groter worden, dan zal het duidelijk zijn, dat dan op

den duur de breuk $\frac{\varphi}{\varphi - 1}$ steeds dichterbij 1 komt, zodat de kromme van de buitenkant gaat naderen tot de eenheidscirkel. Deze nadering kan ook weer asymptotisch worden genoemd, omdat men punten kan aanwijzen, die willekeurig dicht bij de cirkel liggen, als men φ maar groot genoeg kiest.

In fig. 9 zijn op de cirkel de punten geplaatst, die behoren bij de waarden 1, $\frac{1}{2}$, 0, $-\frac{1}{2}$, -1 , -2 , -3 , -4 en -5 van φ . De waarden van r die

Fig. 9

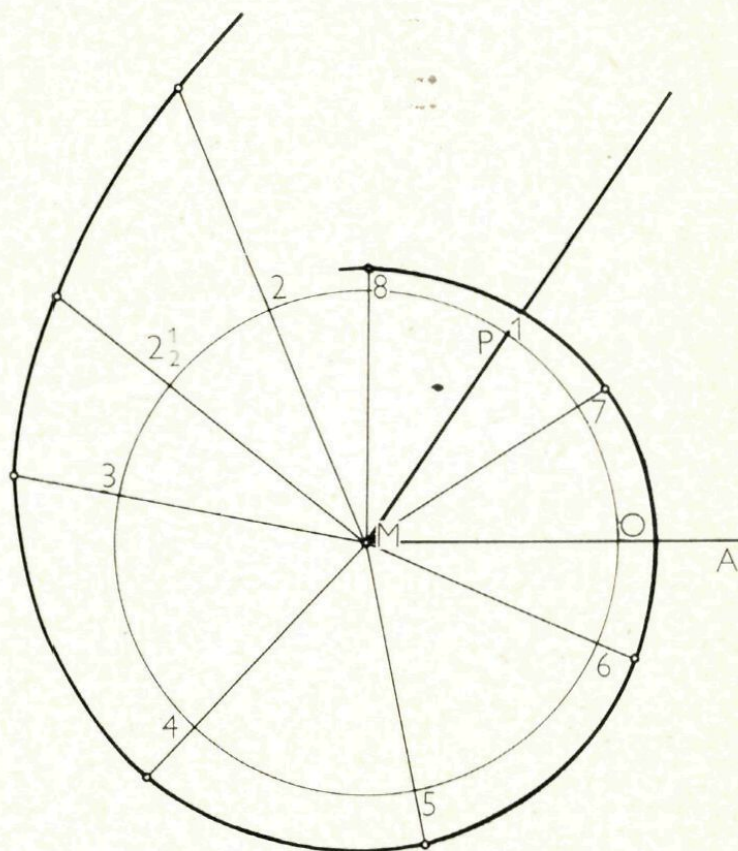
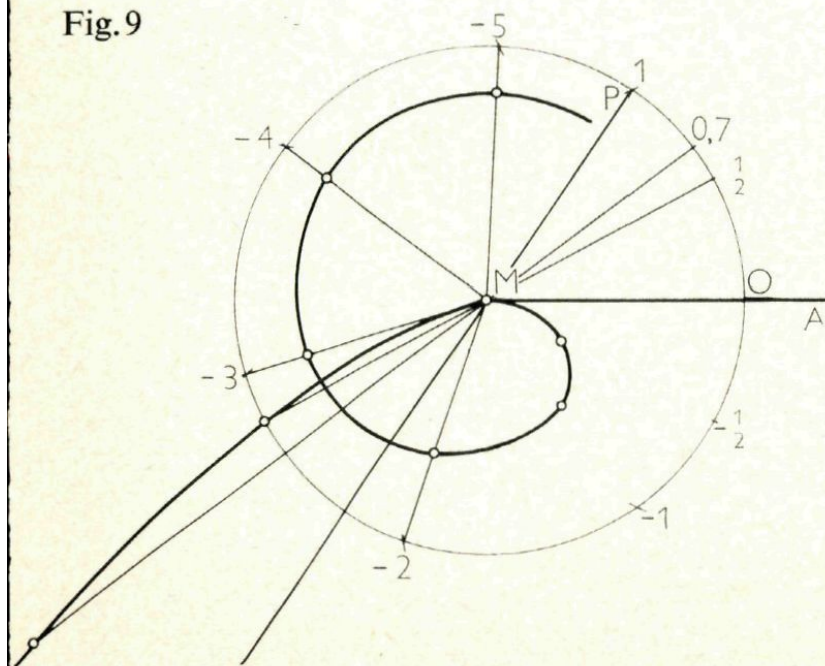


Fig. 8

behoren bij $0 < \varphi < 1$ zijn negatief, zodat de punten van de kromme telkens getekend moeten worden op de verlengden van de stralen door de daarbij behorende deelpunten op de cirkel. Nadert φ (nu van de kleine kant) tot 1, dan zien we de kromme asymptotisch naderen tot de halve rechte, die in het verlengde ligt van PM. Voor φ

$= \frac{1}{2}$ ligt het punt van de kromme op de eenheidscirkel. Voor alle waarden van $\varphi < \frac{1}{2}$ liggen ze binnen de cirkel. Laten we echter de absolute waarde van φ weer onbeperkt toenemen, dan zien we de kromme van binnen uit asymptotisch tot de eenheidscirkel naderen. De heer De Vries heeft deze cirkel in zijn exlibris niet getekend, maar de beide krommen suggereren de ligging daarvan duidelijk.



44. De oppervlakte van het vierkant in figuur 10 is tweemaal zo groot als de oppervlakte van de in dat vierkant getekende letter W. Bereken x .

45. Bij welke driehoeken zijn de middelpunten van de ingeschreven cirkel en de omgeschreven cirkel elkaars spiegelbeeld ten opzichte van een der zijden?

46. Zoek alle oplossingen van de vergelijking

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d},$$

waarin a, b, c, d verschillende natuurlijke getallen zijn.

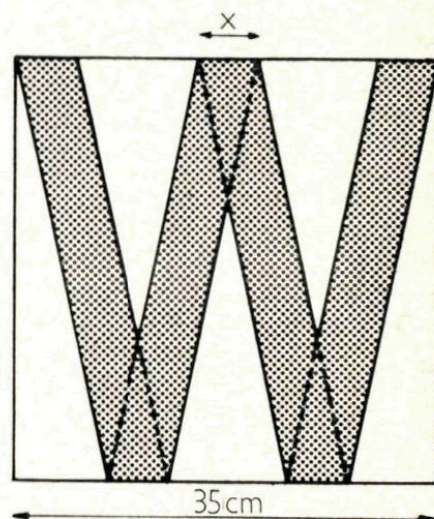


Fig. 10

°°DE „vierkante cirkels” VAN PIET HEIN

Een vierkante cirkel is wel een schoolvoorbeeld van een contradictio in terminis: het begrip cirkel sluit het begrip vierkant uit en omgekeerd. Piet Hein bedacht krommen, die in zekere opzichten het karakter van cirkels hebben, terwijl ze bijna vierkant zijn. Hij noemde ze supercirkels.

We realiseren ons meestal niet, dat ons leven zich afspeelt in een wereld van rechthoeken (kamers, schoollokalen, straten, tafels, bankbiljetten, schriften, boeken, enz.) en cirkels (munten, fietswielen, stuurwielen, borden, kopjes, enz.)

De cirkels zien we echter het meest in de vorm van ellipsen, als we ze van opzij bekijken. De vormen, die we gebruiken, zijn in het algemeen door de traditie bepaald. Men maakt nu eenmaal kamers rechthoekig, plattegronden van steden als rechthoekige netwerken, verkeerspleinen als cirkelvormige banen. Zijn deze vormen echter ook steeds het bruikbaarst? Vast staat, dat de rechthoekige wegkruisingen het de automobilisten niet gemakkelijk maken. Ze verhinderen een soepel rijden. Wie

toch een soepele bocht wil maken, komt daarbij dikwijls op de verkeerde weghelft terecht. In Stockholm stonden de stadsarchitecten, die bezig waren een grondige modernisering van de binnenstad te ontwerpen, voor de vraag, hoe ze op een groot rechthoekig verkeersplein de rijbanen zouden leggen rondom een cirkelvormige vijver in het midden van dat plein. Toen Piet Hein te hulp geroepen werd, vond hij de oplossing met behulp van krommen, die hij super-ellipsen noemde. Deze krommen willen we in dit artikel aan je voorstellen. Voor hen, die niet bekend zijn met de analytische meetkunde geven we een korte inleiding die dus door degenen, die weten wat de vergelijkingen $x^2 + y^2 = r^2$ en $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ons zeggen, kan worden overgeslagen. Zij kunnen dan verder gaan op blz. 109. (zie *)

De cirkel in fig. 11 heeft de straal 5. Dus $OA = OB = OD = 5$. De stel-

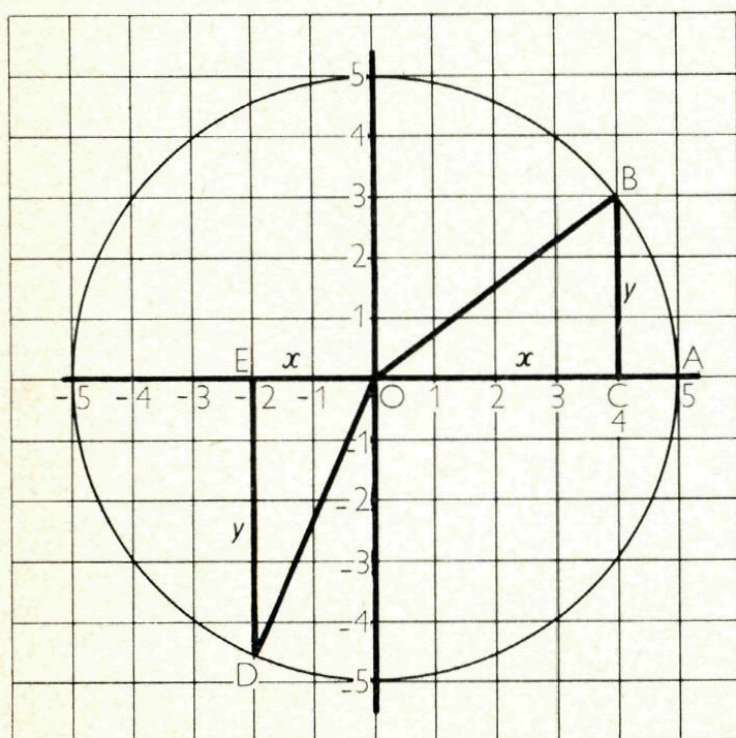


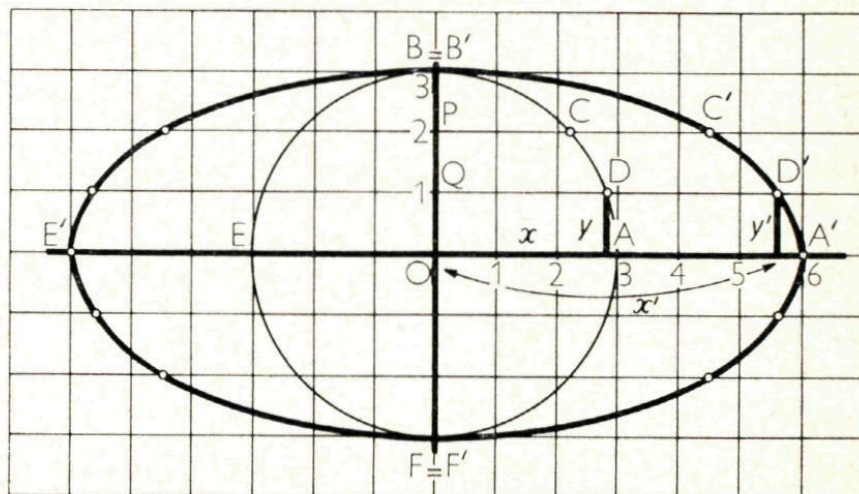
Fig. 11

ling van Pythagoras zegt nu, dat in de rechthoekige driehoeken OCB en OED de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk is aan het kwadraat van de schuine zijde, dat is dus 5^2 . En dat is niet alleen het geval bij deze driehoeken, maar bij elke rechthoekige driehoek, die ontstaat door uit een punt van de cirkel loodlijnen op de X- en Y-as neer te laten. Noemen we de lengte van de verticale rechthoekszijde steeds y , die van de horizontale rechthoekszijde steeds x , dan is blijkbaar voor elk punt van de cirkel $x^2 + y^2 = 5^2$.

Nemen we in plaats van de lengte 5 voor de straal een andere lengte, die we voorstellen door de letter r , dan kunnen we dus zeggen, dat voor elk punt van elke cirkel met de oorsprong 0 als middelpunt, geldt $x^2 + y^2 = r^2$. We noemen dit de vergelijking van de cirkels met 0 als middelpunt.

Stel je nu eens voor, dat we het vlak, waarin de cirkels zijn getekend, naar links en rechts gaan uittrekken. Na het topologienummer zal je dat wel niet zo vreemd meer voorkomen. We rekken het bijvoorbeeld zo uit, dat de Y -as op zijn plaats blijft, maar dat verder alle punten van het vlak *tweemaal* zo ver van de Y -as komen te liggen, dan ze oorspronkelijk lagen. Het punt A in fig. 12 komt dan op de plaats A' te liggen. $OA = 3$, dus $OA' = 6$. Vergelijk nu ook de ligging van de punten C en C' en de punten D en D' . Je ziet $PC' = 2 \cdot PC$ en $QD' = 2 \cdot QD$. Maar B' valt

Fig. 12



met B samen omdat de punten van de Y -as op hun plaats zouden blijven. De cirkel met straal 3, die in deze figuur getekend staat, (vergelijking $x^2 + y^2 = 3^2$), wordt nu uitgerekt tot een ellips. De coördinaten van het punt D hebben we x en y genoemd en die van D' noemden we x' en y' . We weten dat $x = \frac{1}{2}x'$ en daar D' even hoog ligt als D is $y = y'$. Ook weten we, dat $x^2 + y^2 = 3^2$.

Vervangen we nu in deze vergelijking de x door $\frac{1}{2}x'$ en de y door y' , dan zien we, dat voor de coördinaten van D' geldt

$$\left(\frac{1}{2}x'\right)^2 + (y')^2 = 3^2.$$

Je kunt waarschijnlijk wel beredeneren, dat deze betrekking ook voor de coördinaten van C' , zelfs voor elk punt van de ellips geldt.

De middellijn $A'E'$ van de ellips noemen we de lange as, de middellijn $B'F'$ de korte as. We kunnen de vergelijking $\left(\frac{1}{2}x'\right)^2 + (y')^2 = 3^2$ nu zo herleiden, dat de lengte van de halve lange as en die van de halve korte as er dadelijk uit af te lezen zijn. Een kleine herleiding geeft eerst

$$\frac{(x')^2}{2^2} + (y')^2 = 3^2$$

Daarna vinden we na deling door 3^2 :

$$\frac{(x')^2}{6^2} + \frac{(y')^2}{3^2} = 1.$$

Uit elke cirkel kan door uittrekken op deze manier een ellips worden voortgebracht. Is a de lengte van de halve lange as en b die van de halve korte as van die ellips, dan luidt de vergelijking daarvan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

De ellips is dan ontstaan uit de cirkel met straal a , waarvan de vergelijking is $x^2 + y^2 = a^2$.

* De supercirkels van Piet Hein

Piet Hein kreeg de gedachte, toen hij de vergelijkingen zag van de ellipsen en cirkels, die hierboven vermeld staan, deze algemener te maken door de kwadraten te vervangen door andere exponenten en te onderzoeken welke krommen het gevolg van deze verandering zouden zijn. In fig. 13 hebben we naast elkaar getekend een kwart van de cirkel met de vergelijking $x^2 + y^2 = 10^2$ en een kwart van de kromme met de vergelijking $x^3 + y^3 = 10^3$.

De punten van de laatstgenoemde kromme zijn verkregen door bij de waarden 1 tot en met 10 van x telkens de bijbehorende waarden van y te berekenen. De uitkomsten van die berekeningen vind je in de volgende tabel:

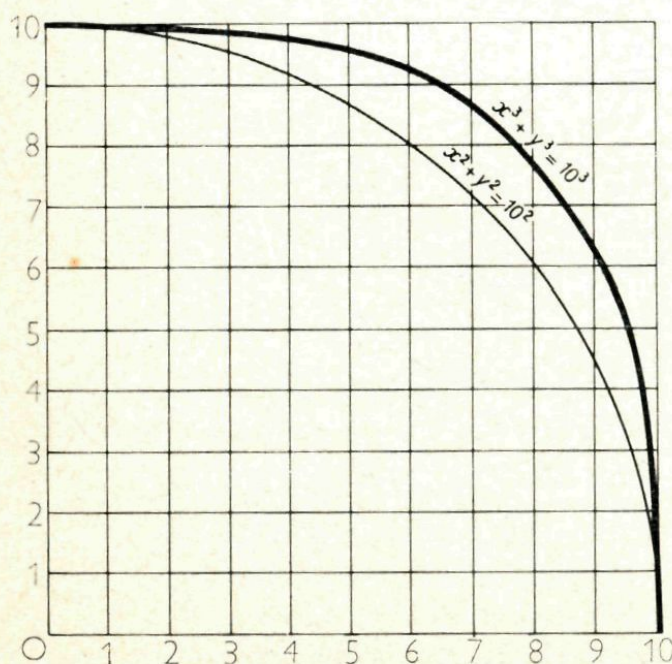


Fig. 13

$$x^3 + y^3 = 10^3$$

x	$y^3 = 10^3 - x^3$	y^3	y
0	$10^3 - 0^3$	10^3	10
1	$10^3 - 1^3$	999	9,997
2	$10^3 - 2^3$	992	9,973
3	$10^3 - 3^3$	973	9,909
4	$10^3 - 4^3$	936	9,782
5	$10^3 - 5^3$	875	9,565
6	$10^3 - 6^3$	784	9,221
7	$10^3 - 7^3$	657	8,693
8	$10^3 - 8^3$	488	7,873
9	$10^3 - 9^3$	271	6,471
10	$10^3 - 10^3$	0	0

We zien in de tabel hoe langzaam de rij van y -waarden in het begin daalt. De kromme, die bij de genoemde vergelijking hoort, is dan ook om te beginnen vlakker dan de kwart cirkel. Zo sterk is dat vlakker zijn, dat de eerste punten nog bijna op de zijde van het vierkant liggen. Nog sterker is dat het geval, wanneer we de krommen tekenen met vergelijkingen $x^4 + y^4 = 10^4$ of $x^5 + y^5 = 10^5$, enz.

In fig. 14 zien we een aantal van deze supercirkels, geconstrueerd door Piet Hein. Als exponenten gebruikte hij o.a. 2 (de cirkel), $\sqrt{5}$, $2\frac{1}{2}$, e (het getal van Euler, $e \approx 2,78$), 3, 4 en 8.

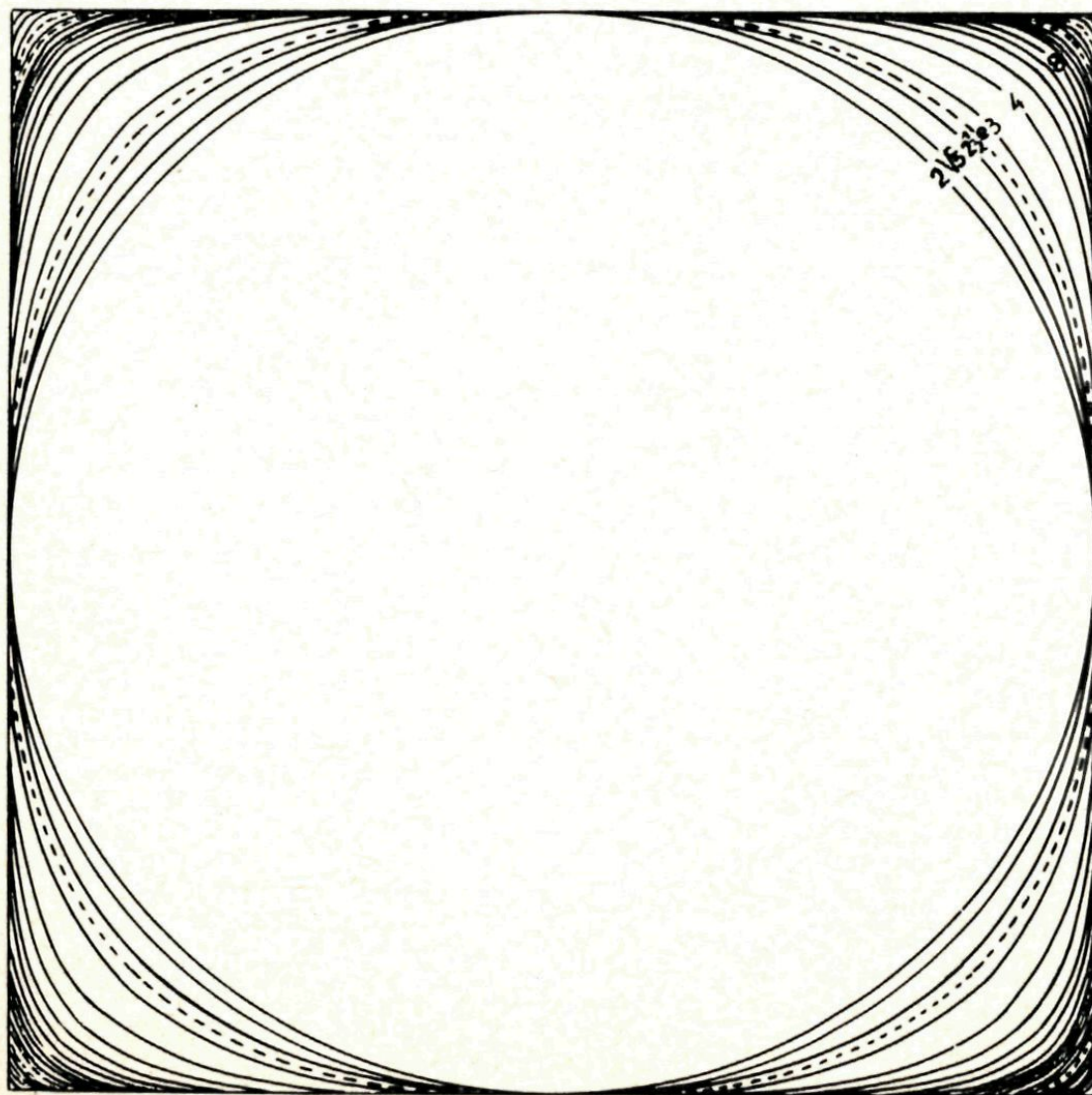


Fig. 14

Enkele opmerkingen over deze krommen.

1. De vergelijking van de cirkel is $x^2 + y^2 = 10^2$ als het vierkant een zijde heeft met lengte 20. We mogen echter niet schrijven, dat de vergelijking van één der supercirkels is $x^{2\frac{1}{2}} + y^{2\frac{1}{2}} = 10^{2\frac{1}{2}}$. De betekenis van $x^{2\frac{1}{2}}$ is nl. $\sqrt{x^5}$ en de waarden hiervan zijn alleen maar reëel als x positief is. Willen we dus ook punten met negatieve coördinaten toelaten, dan moeten we in de vergelijking de absolute waarden van x en y schrijven, zodat die dus wordt

$$|x|^{2\frac{1}{2}} + |y|^{2\frac{1}{2}} = 10^{2\frac{1}{2}}$$

2. Je moet door een tabel van tweede- en derde wortels te gebruiken, maar eens trachten de krommen

$$|x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}} \text{ en } |x|^{\frac{1}{3}} + |y|^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{1}{3}}$$

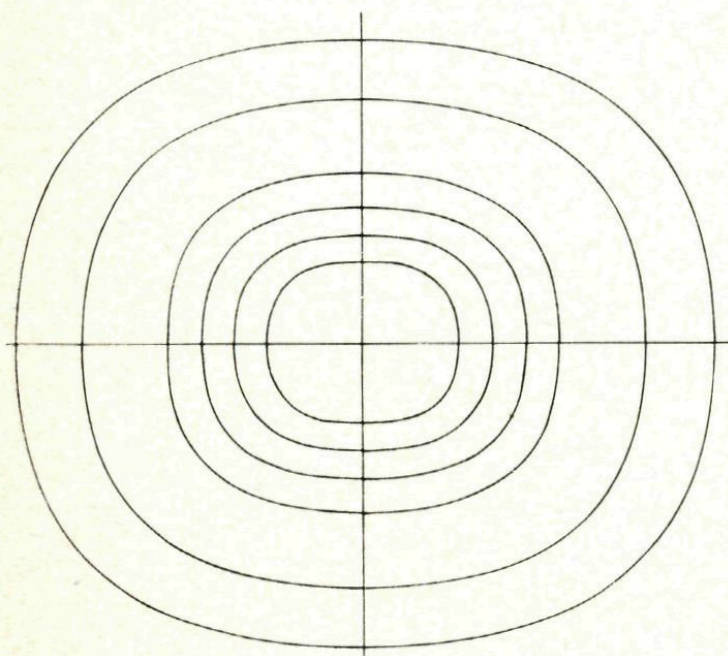
te tekenen. En hoe wordt de „supercirkel”

$$x^1 + y^1 = 10^1?$$

Die kun je zeker gemakkelijk construeren.

De verbouwing van het stadscentrum van Stockholm vroeg eigenlijk niet om een „vierkante cirkel” maar om een „rechthoekige ellips”. Piet Hein koos hiervoor de kromme met de vergelijking

$$\frac{|x|^{2\frac{1}{2}}}{|a|^{2\frac{1}{2}}} + \frac{|y|^{2\frac{1}{2}}}{|b|^{2\frac{1}{2}}} = 1$$



In de figuur 15 zijn een aantal van deze superellipsen voor verschillende waarden van a en b en voor de exponent $2\frac{1}{2}$ afgebeeld.

Fig. 15

Superellipsen worden nu ook gebruikt voor meubilair, bestek, licht-armaturen, enz. Vooral voor tafels geven ze een hele serie praktische en mooie vormen.

Laten we een supercirkel wentelen om een van zijn spiegelrechten, dan ontstaat een superbol (fig. 16). Een superellipsoïde ontstaat door het wentelen van een superellips (fig. 17). Inplaats van superellipsoïde wordt ook wel de naam super-ei gebruikt. Zonder de truc, die Columbus gebruikte, kan een super-ei op zijn „punt” staan, zonder om te vallen.

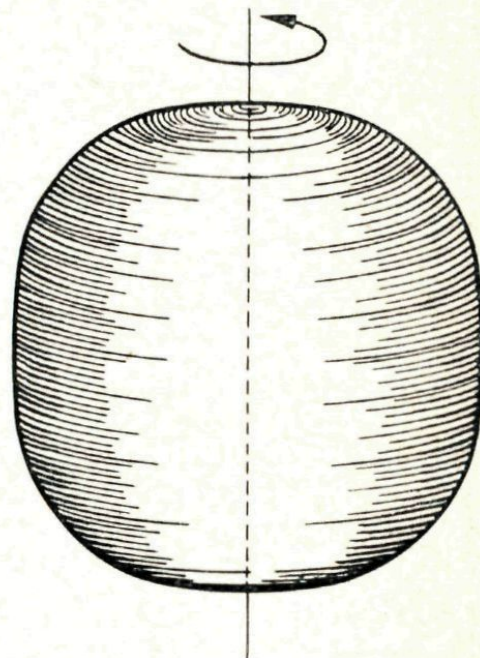


Fig. 16

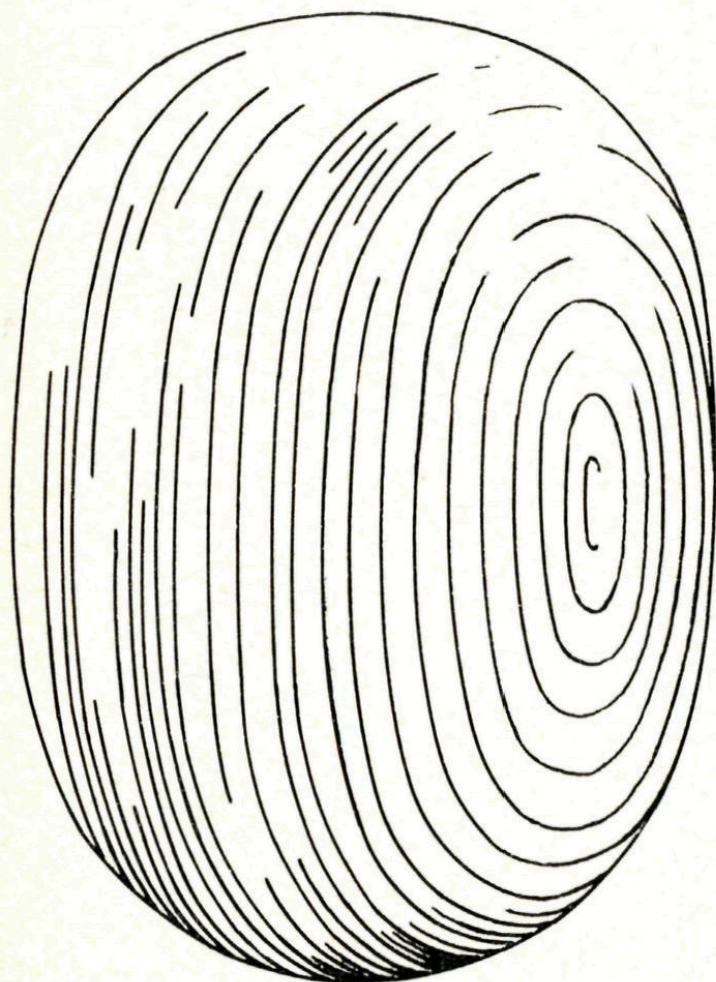


Fig. 17

En wie is nu PIET HEIN? Zijn naam is voor ons verbonden aan de zilvervloot en aan de dreun „Zijn daden waren groot”. Voor velen in de gehele wereld echter betekent deze naam die van een zeer bekende Deen. Dichter is hij, natuurkundige, wiskundige, bedenker van een aantal spelen en puzzels, bekend om zijn geniale invallen en zijn „Grooks”, dat zijn korte kernachtige gezegden (aphorismen). Hoe bekend Hein in de Skandinavische landen is, blijkt wel uit het volgende: Toen onze redacteur Br. Ernst, menende, dat Hein in Zweden woonde, een brief aan hem stuurde, geadresseerd Piet Hein, Stockholm, Zweden, kwam er na korte tijd antwoord uit Rungsted Kyst in Denemarken! En hoe kwam dat antwoord? Op een superellips. Op de bladzijde hiernaast is Piet Heins kaartje afgedrukt. Je ziet, dat hij informeert naar de aard van

What kind of periodicals are
they? Mathematical and physical?
What kind (if not number) of readers?
Sincerely yours

PIET HEIN

Piet Hein

Exponent: e →
Ratio of axes:

RUNGSTED $2/\sqrt{5}+1$
DENMARK (golden section)

de bladen Pythagoras en Archimedes en naar de soort lezers, die ze hebben. Rechts-
onder zie je staan, dat de superellips is geconstrueerd voor het geval, dat de exponent
gelijk is aan het getal e ($\approx 2,78$) en de verhouding van de assen gelijk aan die van de
getallen 2 en $(1 + \sqrt{5})$. (Verdeelt men de lange as volgens de „gouden snede”, dan is
het langste stuk daarvan gelijk aan de korte as).



47. Bepaal alle onvereenvoudigbare breuken $\frac{x}{y}$, waarin x en
 y natuurlijke getallen zijn, die voldoen aan

$$90 < x + y < 100 \text{ en aan } 0,9 < \frac{x}{y} < 0,91.$$

48. Bereken de vijf kleinste priemgetallen p , waarvoor aan
de vergelijking $x^3 - y^3 = p$ voldaan wordt door een
paar natuurlijke getallen x, y .

49. Binnen een gelijkzijdige driehoek ABC ligt een punt P, welks afstanden tot de
zijden AB, BC, CA opvolgend 3 cm, 4 cm, 5 cm bedraagt. Hoe lang zijn die zijden?

50. Het gewicht van een Friese staartklok, dat zowel het slagwerk als het uurwerk
aandrijft, wordt pas opgewonden wanneer het niet verder kan dalen. Op drie
achtereenvolgende dagen gebeurt dit op de tijdstippen 9.05, 14.45, 20.55. Wan-
neer vindt de vierde opwinding plaats?

(Ingezonden door A.J. Sytsma, Midlum).

Oppervlakten van figuren in een rooster

We beschouwen in dit artikel veelhoeken, waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn en waarvan de zijden buiten de hoekpunten geen verdere snijpunten hebben.

De zevenhoek in onderstaande figuur heeft een oppervlakte, die gelijk is aan 12 eenheidsvierkantjes, waarvan er één in de rechteronderhoek dubbel gearceerd is.

Deze oppervlakte kan worden berekend door van het vierkant, dat de

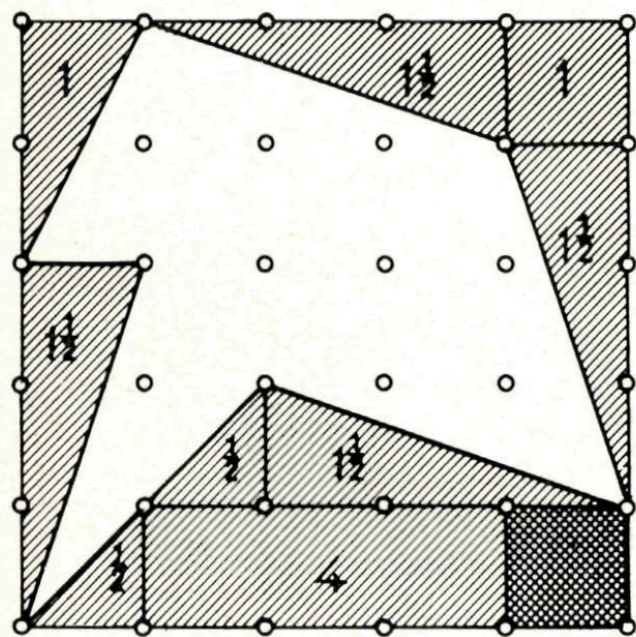


Fig. 18

zevenhoek omsluit, de gearceerde oppervlakten af te trekken. Deze bestaan uit vierkanten en driehoeken. De oppervlakten van de driehoeken kunnen beschouwd worden als de helften van die van rechthoeken.

Er is echter een merkwaardig eenvoudige manier om de oppervlakten te berekenen van veelhoeken, waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn. Je hoeft daarbij alleen maar roosterpunten te tellen en wel het aantal p , dat zich op de omtrek van de veelhoek bevindt en het aantal i , dat binnen de veel-

hoek ligt. We noemen deze de inwendige roosterpunten. Bij onze zevenhoek is $p = 8$ en $i = 9$.

Om het verband tussen de oppervlakte o van de veelhoek en de aantallen p en i te vinden, is het gewenst eerst eens die veelhoeken te be-

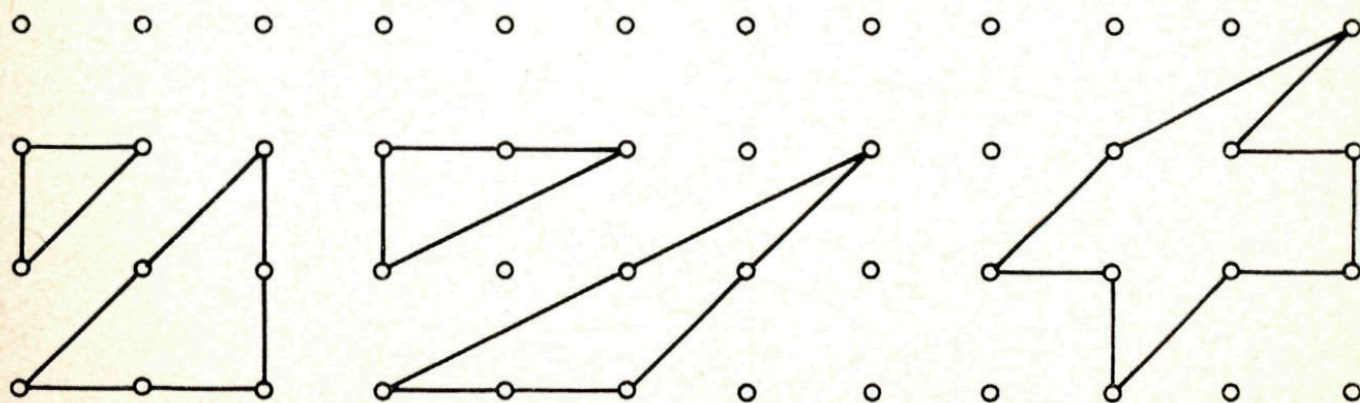


Fig. 19

kijken, waarbij $i = 0$ is. Eén der variabelen is dan uitgeschakeld en de kans op het ontdekken van een relatie tussen o en p is groter geworden. Een aantal figuren zonder inwendige punten zijn getekend in fig. 19. We maken even een schema voor p en o in deze figuren:

p	3	4	6	8	9
o	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$3\frac{1}{2}$

Het kost niet veel moeite hieruit de veronderstelling af te leiden, dat voor een figuur zonder inwendige punten

$$o = \frac{1}{2}(p - 2)$$

We gaan deze betrekking nu bewijzen:

Voor $\triangle ABC$ in fig. 20a, die de helft is van een eenheidsvierkant geldt de betrekking. Elke driehoek, die niet meer dan drie roosterpunten op zijn omtrek heeft, heeft een oppervlakte, die gelijk is aan die van $\triangle ABC$. We zullen het zo dadelijk bewijzen.

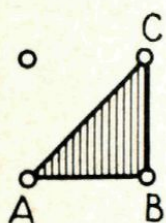


Fig. 20a

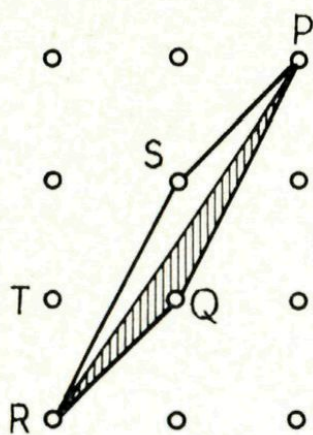


Fig. 20b

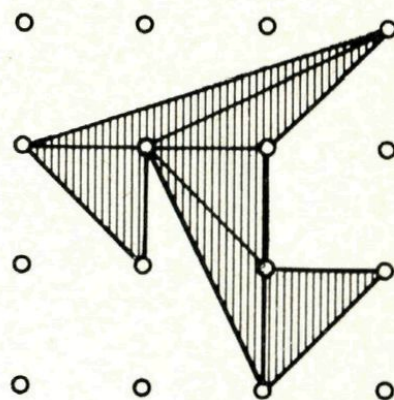


Fig. 21

Zie bijv. $\triangle PQR$ in fig. 20b. Deze is de helft van het parallellogram PQRS en heeft dus dezelfde oppervlakte als $\triangle QRS$, die er voor de duidelijkheid niet in getekend is. $\triangle QRS$ is weer de helft van het parallellogram RQST en dus evengroot als $\triangle TQR$ en die is congruent met $\triangle ABC$.

Heeft een veelhoek geen inwendige roosterpunten, zoals die van fig. 21, dan is het mogelijk hem in driehoeken te verdelen met de oppervlakte $\frac{1}{2}$. We zouden hem ook uit zulke driehoeken kunnen opbouwen door met één driehoek te beginnen. Voor deze ene driehoek geldt de betrekking dan.

Elke keer als er een driehoek bij getekend wordt, vermeerderd de oppervlakte met $\frac{1}{2}$ en het aantal roosterpunten op de omtrek met 1. Daardoor blijft de betrekking dus gelden.

Nu de veelhoeken met inwendige punten

Om het verhaal niet te lang te maken, delen we eerst maar de formule mee, die voor de oppervlakten van deze veelhoeken geldt. Je kunt hem dan alvast aan de gegeven zevenhoek controleren. Deze formule luidt:

$$o = \frac{1}{2}(p - 2) + i.$$

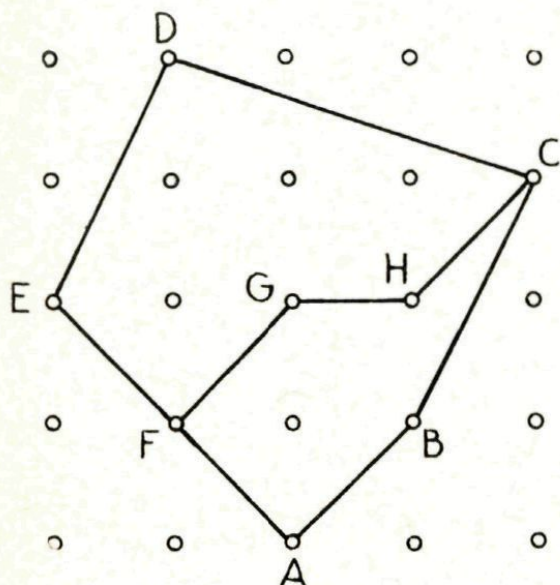


Fig. 22

We bewijzen nu eerst, wanneer een veelhoek uit twee andere wordt opgebouwd, waarvoor de formule al geldt, dat deze dan ook voor de gehele veelhoek geldt. (Zie fig. 22).

Stel, dat voor de veelhoeken

ABCHGF en DEFGHC

de formule al bewezen is. We moeten dan laten zien, dat ze ook geldt voor de vijfhoek ABCDE. Eerst een controle door berekenen:

Voor ABCHGF zegt de formule:

$$o_1 = \frac{1}{2}(6 - 2) + 1 = 3$$

Voor DEFGHC zegt ze:

$$o_2 = \frac{1}{2}(6 - 2) + 4 = 6$$

Passen we de formule toe op ABCDE, dan geeft deze

$$o = \frac{1}{2}(6 - 2) + 7 = 9.$$

Na deze controle het bewijs:

Is $o_1 = \frac{1}{2}(p_1 - 2) + i_1$ en $o_2 = \frac{1}{2}(p_2 - 2) + i_2$, terwijl p het aantal omtrekspunten en i het aantal inwendige punten van de totale veelhoek is, dan zijn er bij p_1 en p_2 een aantal roosterpunten, die behoren tot i . Stel dit aantal gelijk k .

We zien: $i = i_1 + i_2 + k$ dus $i_1 + i_2 = i - k$
 en $p = p_1 + p_2 - 2k - 2$ dus $p_1 + p_2 = p + 2k + 2$

immers de k punten vermeerderen gewoon het aantal inwendige punten $i_1 + i_2$, maar moeten tweemaal van het aantal $p_1 + p_2$ worden afgetrokken, omdat ze bij beide zijn meegeteld. Bovendien zijn er bij $p_1 + p_2$ nog twee omtrekspunten dubbel geteld.

$$\begin{aligned}\text{Nu is } o &= o_1 + o_2 = \frac{1}{2}(p_1 - 2) + i_1 + \frac{1}{2}(p_2 - 2) + i_2 \\ &= \frac{1}{2}(p_1 + p_2) + (i_1 + i_2) - 2 \\ &= \frac{1}{2}(p + 2k + 2) + (i - k) - 2 \\ &= \frac{1}{2}(p - 2) + i. \text{ (q.e.d.)}\end{aligned}$$

Omdat de formule geldt, zoals hierboven werd bewezen, voor veelhoeken zonder inwendige punten ($i = 0$) en elke veelhoek opgebouwd kan worden uit veelhoeken zonder inwendige punten, geldt de formule voor elke veelhoek, waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn (en waarvan de zijden geen andere snijpunten hebben).

Het hierboven gegeven bewijs is afkomstig van P. Puig Adam te Madrid en kan gevonden worden in het Belgische tijdschrift *Mathematica & Paedagogia*.

Oplossing Wimecos-prijsvraag I

Vraag a: Het aantal cijfers van n noemen we $k + 1$ en die cijfers zelf noemen we $x_k, \dots, x_3, x_2, x_1, x_0$; x_0 is het eenhedencijfer, x_1 het tientallencijfer, x_2 het honderdtallencijfer, en zo verder. Dus

$$n = 10^k x_k + \dots + 1000x_3 + 100x_2 + 10x_1 + x_0.$$

Het uit n afgeleide getal noemen we n' en daarvoor geldt

$$n' = (x_k^3 + x_k^2) + \dots + (x_3^3 + x_3^2) + (x_2^3 + x_2^2) + (x_1^3 + x_1^2) + (x_0^3 + x_0^2).$$

We willen, dat n' groter is dan n , dus dat $n' - n$ positief is. Daarom bestuderen we

$$\begin{aligned}n' - n &= (x_k^3 + x_k^2 - 10^k x_k) + \dots + (x_3^3 + x_3^2 - 1000x_3) + (x_2^3 + x_2^2 - 100x_2) + \\ &\quad + (x_1^3 + x_1^2 - 10x_1) + (x_0^3 + x_0^2 - x_0).\end{aligned}$$

In elk van de termen tussen haakjes, behalve in de eerste, kan de daarin voorkomende x elk van de getallen 0 t/m 9 zijn. We berekenen de waarden van die termen voor de verschillende x 'en en maken een tabel van de uitkomsten:

x	term met x_5	term met x_4	term met x_3	term met x_2	term met x_1	term met x_0
0	0	0	0	0	0	0
1	- 99998	- 9998	- 998	- 98	- 8	+ 1
2	- 199988	- 19988	- 1988	- 188	- 8	+ 10
3		- 29964	- 2964	- 264	+ 6	+ 33
4		- 39920	- 3920	- 320	+ 40	+ 76
5		- 49850	- 4850	- 350	+ 100	+ 145
6		- 59748	- 5748	- 348	+ 192	+ 246
7		- 69608	- 6608	- 308	+ 322	+ 385
8		- 79424	- 7424	- 224	+ 496	+ 568
9		- 89190	- 8190	- 90	+ 720	+ 801

Er komen in deze tabel gelukkig maar weinig positieve getallen voor; in elke regel vormen de getallen van rechts naar links een dalende rij en daarom behoeven we hem niet verder naar links uit te breiden.

Het gebruik van deze tabel blijkt uit een voorbeeld (zie de omrande getallen in de tabel): Als $n = 5608$ is, dan is $n' - n = -4850 - 348 + 0 + 568$ en dat is negatief, zodat n' kleiner dan de gekozen n is.

Bevat n vijf of meer cijfers, dan komen er in $n' - n$ negatieve getallen, die zo diep zijn dat de positieve termen aan de rechterzijde van de tabel dat niet kunnen opheffen.

Met vier cijfers kunnen we nog wel een positieve waarde van $n' - n$ maken, maar alleen indien het duizendtallencijfer 1 is.

Het gevraagde getal is dus blijkbaar 1999.

Vraag b: Kies een willekeurig getal n_0 , noem het daaruit afgeleide getal n_1 , noem het uit n_1 afgeleide getal n_2 , en zo verder. Door het afleidingsproces telkens weer te herhalen op het laatst berekende getal krijgen we zo een oneindige rij getallen $n_0, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, \dots$. Deze rij gaan we nu bestuderen.

Als hulpmiddel daarbij gebruiken we het getal, dat uit 1999 afgeleid wordt. We behoeven dat getal niet te kennen; we moeten er alleen van weten dat het groter dan 1999 is en dat bleek uit de *a*-vraag. We noemen dat getal y .

Bevat de rij $n_0, n_1, n_2, \dots$ ergens een getal dat groter dan y is, dan zal het volgens wat we hierboven vonden gevolgd worden door een getal dat kleiner is, dan hij zelf is. Is dat volgende getal zelf ook nog groter dan y , dan wordt het op zijn beurt ook weer door een getal gevolgd, dat kleiner is dan hij zelf is. En zo verder.

We kunnen er dus zeker van zijn dat ergens in de rij $n_0, n_1, n_2, \dots$ een getal staat dat hoogstens gelijk is aan y . Stel, dat n_p zo'n getal is.

De clou van het verhaal is nu, dat voorbij die n_p in onze rij geen enkel getal meer kan staan, dat groter dan y is. De grootste sprong, die we naar boven kunnen maken, is immers de sprong van 1999 naar y .

Dit heeft tot gevolg dat onze rij $n_0, n_1, n_2, \dots$ noodzakelijk repetent moet zijn. Als we n_p eenmaal gepasseerd zijn, dan is het aantal verschillende getallen, die nog kunnen komen, immers begrensd. We moeten dus eens op een n -zoveel stuiten, die al eerder voorgekomen is. En van die term af begint het deuntje weer van voren af aan. Bestaat de periode van de rij uit een enkel getal, dan is dat getal gelijk aan zijn eigen afgeleide. Bestaat de periode uit meerdere getallen, dan vormen die zo'n groep waarin ieder lid de afgeleide is van een ander lid. Ziedaar het gevraagde bewijs.

Vraag c: We hebben nu ook een middel om zulk een getal of zulk een groep te berekenen: we behoeven maar een of andere n_0 te kiezen en de rij $n_0, n_1, \dots$ zo ver te berekenen dat we de periode kennen.

Kies je $n_0 = 1$, dan vind je achtereenvolgens:

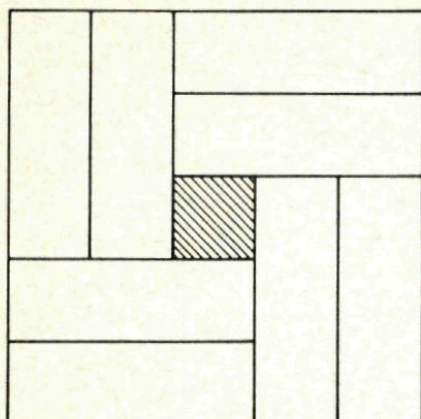
1, 2, 12, 14, 82, 588, 1302, 50, 150, 152, 164, 334, 152, $\dots$

Het drietal 152, 164, 334 voldoet dus aan de eisen.

Er werd niet gevraagd alle getallen of groepen met de bedoelde eigenschap te berekenen. Daarvoor moet namelijk nog al wat gerekend worden. De uitkomst is echter merkwaardig genoeg om hem hier nog even mee te delen: *elke* rij $n_0, n_1, n_2, \dots$ komt op den duur op het drietal 152, 164, 334 terecht.



Oplossingen Denkertjes uit nummer 3



21. Er kunnen 41 staafjes in de kubus, maar ze moeten wel zorgvuldig ingepakt worden. Bijvoorbeeld: vijf lagen zoals in figuur 23 plus een staand staafje in het overgebleven gat.

Fig. 23

22. a. De som van de hoeken van een convexe vijfhoek is 540° . Met vijf scherpe hoeken kan dit totaal niet bereikt worden. Bij vier scherpe en een stompe hoek is de som kleiner dan $4 \cdot 90^\circ + 180^\circ$, dus kleiner dan 540° , zodat dit ook onmogelijk is.
- b. Heeft een convexe n -hoek m scherpe hoeken en dus $n - m$ stompe hoeken, dan is de som van zijn hoeken kleiner dan $m \cdot 90^\circ + (n - m) \cdot 180^\circ$. Deze som bedraagt $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Uit $(n - 2) \cdot 180^\circ < m \cdot 90^\circ + (n - m) \cdot 180^\circ$ volgt $m < 4$.
23. Uit $x^2 = 5098^2 - 4902^2 = (5098 - 4902)(5098 + 4902) = 196 \cdot 10000$ volgt $x = 14 \cdot 100 = 1400$.
24. We berekenen van enkele machten van 7 het laatste cijferpaar:
 $7^1 = 07$, $7^2 = 49$, $7^3 = \dots 43$, $7^4 = \dots 01$, $7^5 = \dots 07$.
 Hieruit blijkt dat 7^n eindigt op 07 indien n een viervoud plus een is, op 49 indien n een viervoud plus twee is, op 43 indien n een viervoud plus drie is, op 01 indien n een viervoud is. Indien n een viervoud plus een is, dan kan n echter niet op 07 eindigen en evenmin eindigt n op 49 resp. 01 indien hij een viervoud plus twee resp. een viervoud is. Tenslotte is elk getal, dat op 43 eindigt, een viervoud plus drie. De gevraagde waarden van n zijn dus de 100-vouden plus 43.
25. Zie figuur 24. De punten B_1 , B_2 , B_3 worden verkregen door resp. B , B_1 , B_2 te spiegelen in een zijde van de rechthoek.

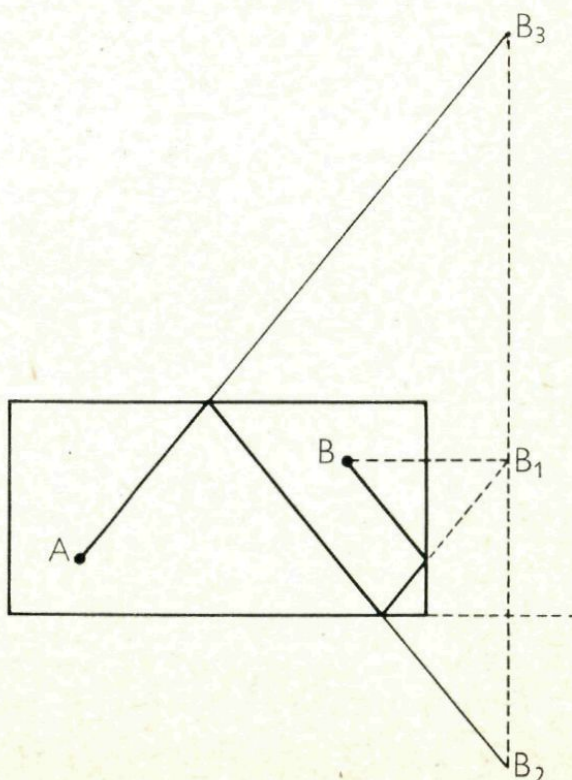


Fig. 24

26. Als $x > 1$, dan is $x^{200} > 1$. Omdat $y^{200} \geq 0$ voor elke waarde van y is dan $x^{200} + y^{200} > 1$ voor elke waarde van y . In geen enkel wortelstel is dus $x > 1$.
 Als $x < 0$ en $x + y = 1$, dan is $y > 1$.
 Evenals hierboven vinden we dan $x^{200} + y^{200} > 1$. In geen enkel wortelstel is dus $x < 0$.

Alle wortelstellen, waarin $x = 1$ of $x = 0$, waren al in de opgave vermeld. We behoeven dus alleen nog te zoeken naar wortelstellen waarin $0 < x < 1$.

Als $0 < x < 1$ en $x + y = 1$, dan is ook $0 < y < 1$. In dat geval is $x^{200} < x$ en $y^{200} < y$ dus $x^{200} + y^{200} < x + y = 1$. Zulke wortelstellen zijn er dus niet.

27. Zie figuur 25. Het snijpunt S van de diagonalen van $ABCD$ ligt op de rechte m' , die produktfiguur van m is bij vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van A . Ligt S op m' rechts van de middelloodlijn van AB , dus rechts van M , dan is ASC de langste diagonaal en die is dan langer dan $2 \cdot AM$. Ligt S echter links van M op m' , dan is BSD de langste diagonaal en die is zo kort mogelijk indien BSD loodrecht staat op m' . In dat laatste geval is de langste diagonaal van $ABCD$ zo kort mogelijk.

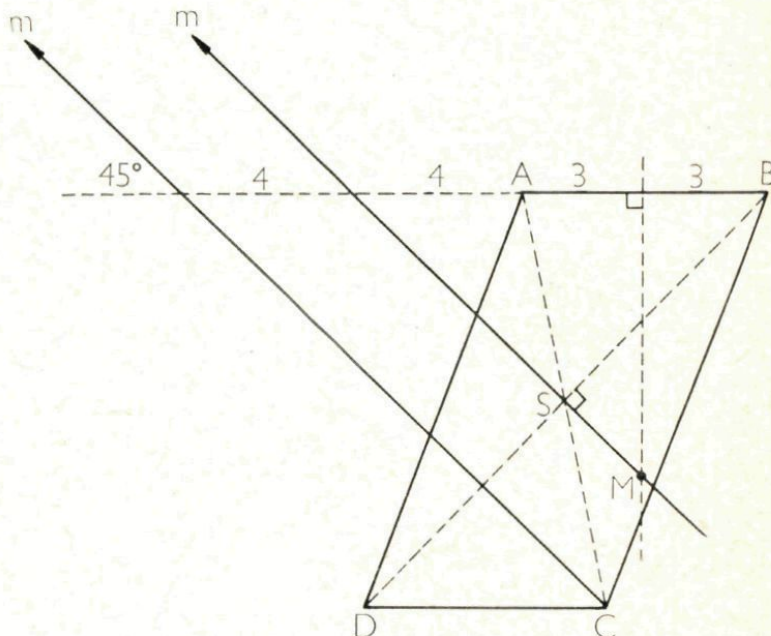


Fig. 25

28. Het kwadraat van een geheel getal is een zevenvoud of een zevenvoud plus een, plus twee of plus vier. Daar blijkt uit, dat de som van twee kwadraten alleen dan een zevenvoud is als die kwadraten zelf zevenvouden zijn. Dan zijn ze echter evenals hun som ook 49-vouden.
29. Het getal 790 kan als eerste getal van de rij gekozen worden; het kan ook het tweede getal van de rij zijn en wel wanneer als eerste getal gekozen wordt een getal dat 790 tot cijfersom heeft.
 Voldoet het tweede getal van de rij aan „ x plus de cijfersom van x is gelijk aan 790”, dan wordt 790 het derde getal van de rij. Alleen 773 kan als dat tweede getal gebruikt worden (het eerste getal heeft dan een cijfersom van 773). Zo zien we, dat het rangnummer van 790 ook drie kan zijn.
 Op dezelfde manier zien we in, dat 790 ook als vierde getal van de rij kan optreden. Het derde getal moet dan 773 zijn en het tweede getal moet voldoen aan „ x plus de cijfersom van x is gelijk aan 773”. Hieraan voldoet 760 en geen enkel ander getal. Verder kunnen we echter niet komen, omdat de vergelijking „ x plus de cijfersom van x is gelijk aan 760” vals is.
30. a. Niet genoeg gegevens; de bewering kan zowel waar als onwaar zijn.
 b. Niet genoeg gegevens.
 c. Niet genoeg gegevens.
 d. Wel genoeg gegevens; de bewering is waar. Noem het aantal gezinnen G , het aantal autobezitters is dan $0,45 G$. Neemt dit aantal met 60 % toe dan wordt het $0,45 G + 0,60 \cdot 0,45 G = 0,72 G$.

Asymptoot

Uit het Grieks. *Asymptotisch* = *niet ontmoetend*. Het woord werd oorspronkelijk in de Griekse wiskunde gebruikt voor twee evenwijdige rechten. Sinds Apollonius (3e eeuw voor Chr.) bezit het de nu nog gebruikelijke betekenis, nl. van een rechte (of kromme) ten opzichte waarvan een kromme de eigenschap heeft, dat de afstand van een veranderlijk punt van de kromme tot de asymptoot de limiet nul heeft, wanneer het punt de kromme doorloopt.

**Contradictio
in terminis**

Latijn. Een tegenspraak tussen de betekenis van twee woorden of uitdrukkingen in één uitspraak.

Radiaal

Uit het Latijn. *Radius* = *straal*. Één radiaal is de eenheid van boogmaat zo, dat de lengte van deze boog gelijk is aan de lengte van de straal van de cirkel. (1 radiaal is ongeveer gelijk aan $57,3^\circ$).

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden. *Inzenden vóór 15 mei 1966.*

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,— per jaargang. Voor anderen f 3,50.

Abonnementen kan men opgeven bij J. B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J. B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.