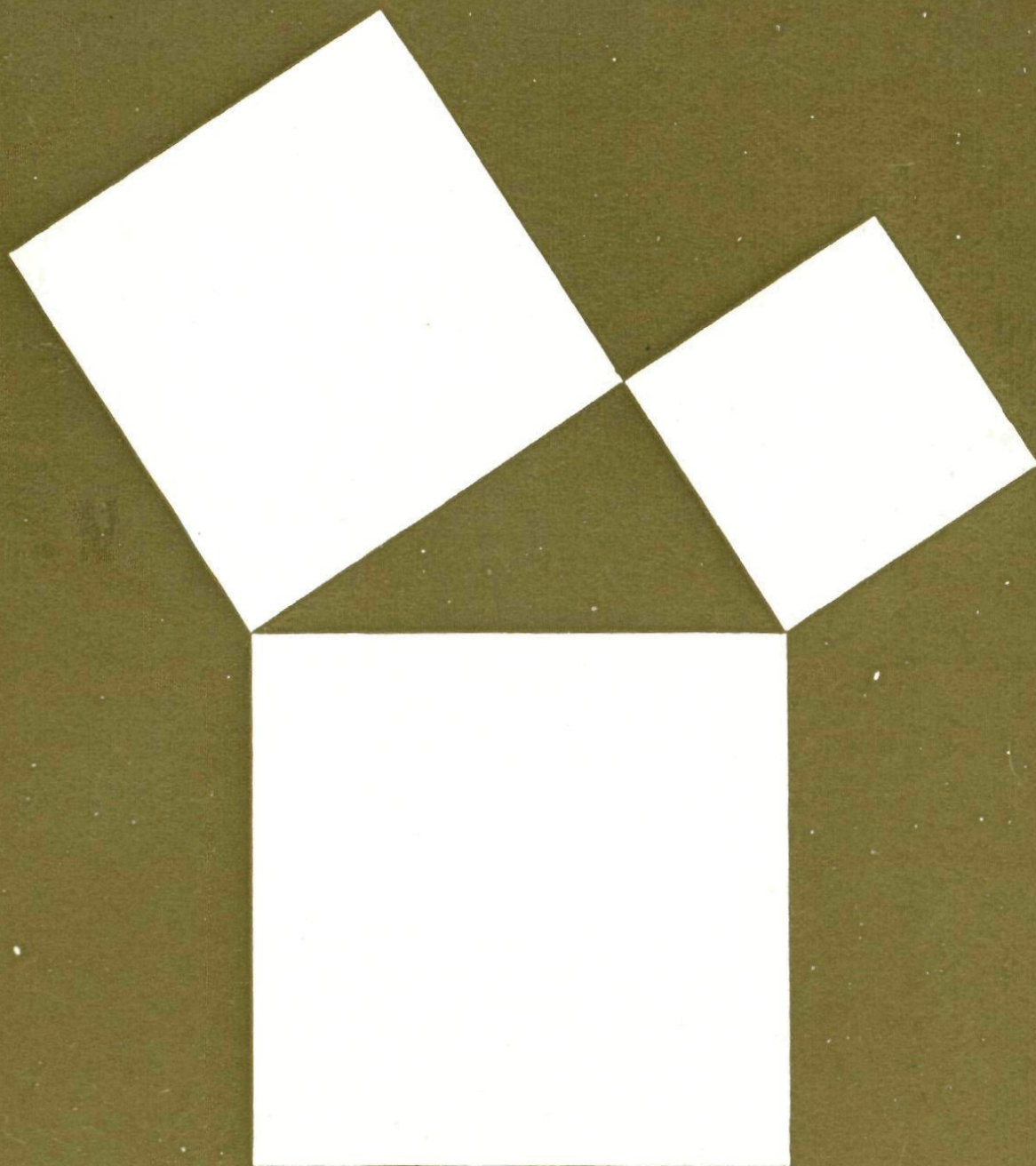


PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

6

Vijfde jaargang



Ontleend aan: Encyclopedie voor fotografie en cinematografie.

Tijdverdrijf of wiskunde?

pythagoras

jaargang 5 no 6

°Tijdverdrijf

Tijdverdrijf is een pessimistisch woord. Wie wil leven kan zijn „tijd toch niet verdrijven"! Toch zijn er ogenblikken, bijv. in de wachtkamer van de dokter, in de restauratie van een station, enz., dat een tijdverdrijf welkom is. En dat kan ook positief zijn, bijvoorbeeld in de vorm van een puzzel of een spel. Het volgende lucifersspelletje werd me voorgelegd in een wachtkamer in Ulm, waar ik twee uur moest wachten:

Vier lucifers vormen een stofblik, je weet wel zo'n blik behorende tot het paar „veger en blik". De schuinliggende vijfde lucifer is het vuil. Verleg nu twee lucifers zo, dat het vuil naast het blik komt te liggen.

Wiskunde? Nee, maar deze puzzel vraagt precies hetzelfde vermogen om figuren in gedachten een andere structuur te geven als vele planimetrie-opgaven. Je vindt de oplossing op blz.144.

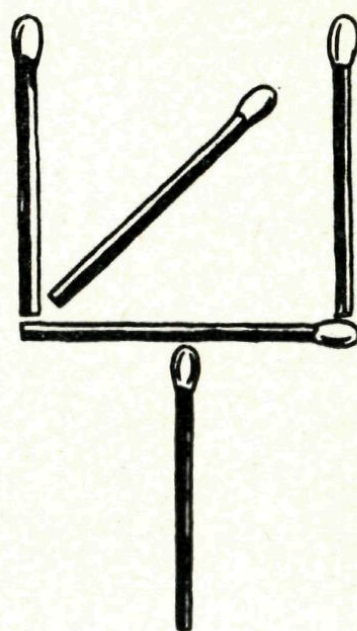


Fig. 1

Wij bladeren dit nummer even door

Misschien zal het bij vluchtig doorbladeren van dit nummer wel opvallen, dat de meetkunde er een belangrijke plaats in heeft veroverd. Passerconstructies (Mascheroni), merkwaardige rollen, oppervlakteberekeningen, oppervlakken opgebouwd uit rechte lijnen, al deze meetkundige onderwerpen vragen deze keer jullie aandacht. Raymond Wilson van de N.A.S.A. schreef over ruimtevaart en wiskunde in ons collegatijdschrift *The Mathematics Student Journal*. We bewerkten dit artikel voor *Pythagoras*. De prijs winnaars van onze wedstrijden zijn:

Lootprijs voor de Denkertjes uit no. 4: Dennis Dieks, Amsterdam.

Ladderprijs: 22 puzzelaars beklommen de ladder; de bovenste vijf: D. Dieks (379); F. Lamberts (375); H. Jonkers (367); A. de Bruin (362); K. Zom (357).

° Opgebouwd uit rechte lijnen, maar overal gebogen

We hoeven niet zo ver van ons af te zoeken naar oppervlakken, die opgebouwd zijn uit rechte lijnen en toch overal gebogen. Denk maar aan de kegelvormige kap van de schemerlamp, het cilindrische omhulsel van de geysers in de keuken, de bloempotten in de vensterbank, enz.

Er zijn echter veel meer van zulke oppervlakken. De meeste daarvan zijn niet zo erg bekend. In dit artikel stellen we er twee aan je voor: het zadeloppervlak en de wig van Wallis.

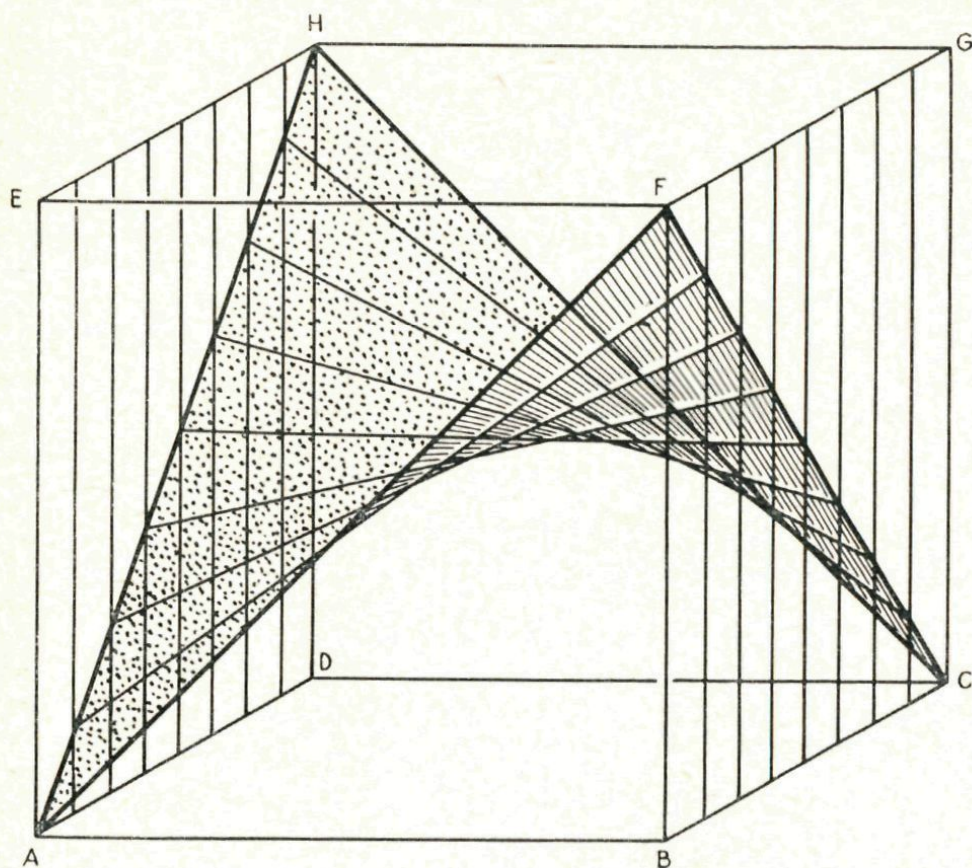


Fig. 2

Je kunt de beide oppervlakken wel gebruiken voor een oefening in het lijntekenen. Wil je het zadeloppervlak tekenen, dan hoef je niets anders dan rechte lijnen te trekken. Bij de wig van Wallis moet je in staat zijn een ellips als projectie van een cirkel te construeren.

In figuur 2 is een zadeloppervlak getekend. Het is geconstrueerd in een kubus door daarin lijnen te trekken evenwijdig met het voor- en achtervlak.

In het voorvlak ligt de eerste van de gebruikte rechten, nl. de diagonaal AF. De volgende rechten liggen in vlakken, die telkens een achtste deel van de lengte van de kubus verder naar achteren liggen. We eindigen dan met de rechte HC. Wie zelf deze figuur wil maken kan daarvoor het beste een kubus tekenen met een ribbe van 8 cm en de wijkende ribben 4 cm maken. Dan zijn de achtste delen gemakkelijk af te passen. Je ziet wel

in de figuur hoe telkens de richting van elk der lijnen gevonden wordt. Hoewel er maar negen lijnen getekend zijn, maakt dit vlak een duidelijk gebogen indruk. Het is beslist niet nodig meer lijnen te tekenen.

De officiële naam voor dit oppervlak, dat we hierboven zadeloppervlak hebben genoemd, is hyperbolische paraboloid. Je weet waarschijnlijk wel, dat een zadel, dat bij het paardrijden wordt gebruikt, net als het getekende oppervlak een kromming in twee hoofdrichtingen vertoont. Het is gebogen met de rug van het paard mee. Maar ook in de lengterichting is het enigszins hol. Net als bij het getekende oppervlak vind je dan een punt, dat voor de ene buigrichting het hoogste punt is en tegelijk voor de andere het laagste punt. Dit punt speelt in beide gevallen de rol van de top van een parabool. De vlakken van deze parabolen staan loodrecht op elkaar. Het zijn de diagonaalvlakken $ACGE$ en $BDHF$ van de kubus. Het valt buiten het kader van dit artikel om te gaan bewijzen, dat we hier met parabolen te doen hebben. Je zult het echter wel willen aanvaarden, als je bijvoorbeeld de snijkromme met het vlak $DBFH$ ziet, die in fig. 3 is getekend. Het feit, dat alle vlakken, die met deze diagonaalvlakken van de kubus evenwijdig zijn, het oppervlak volgens parabolen snijden, is de reden voor de naam paraboloid.

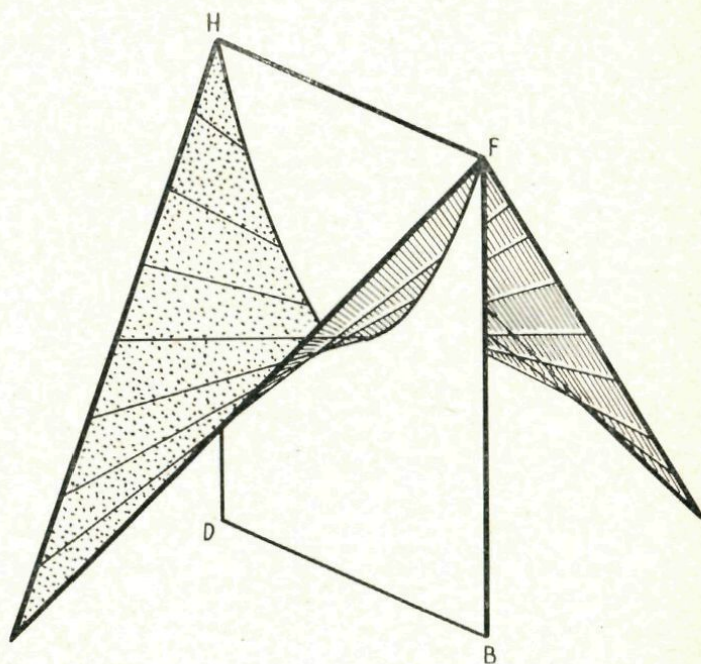


Fig. 3

Snijden we het oppervlak met vlakken, die evenwijdig zijn met het grondvlak van de kubus, dan bestaat de snijkromme telkens uit twee aparte delen. Die snijkromme is dan nl. een hyperbool. In figuur 4 zie je, hoe de takken van deze hyperbool liggen, als het snijvlak boven het midden van de kubus ligt. Laten we het snijvlak geleidelijk zakken, dan komen de takken van de hyperbool naar elkaar toe. Ligt het snijvlak precies midden tussen grond- en bovenvlak, dan wordt het oppervlak gesneden volgens twee loodrecht op elkaar staande lijnen. Ze snijden elkaar in het „zadelpunt”. We noemen dit stel lijnen wel een „ontaarde hyperbool”, al mag je daar niet een betekenis aan toekennen als aan een „ontaarde vader”.

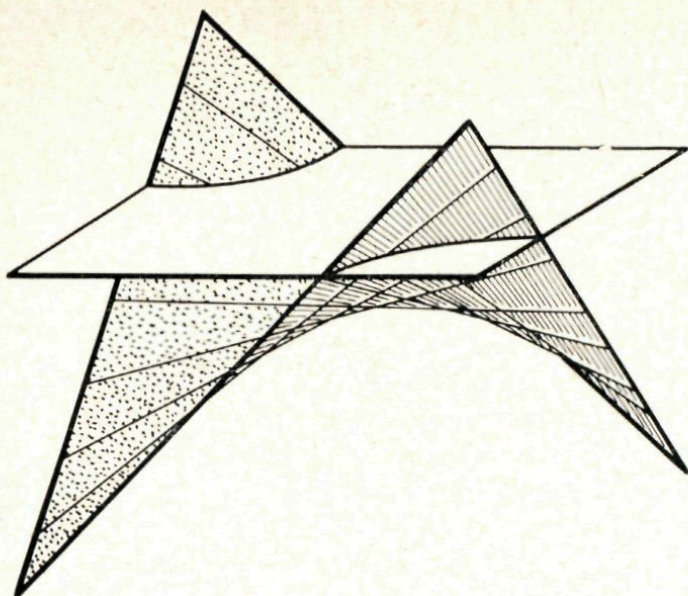


Fig. 4

ming in de richting van de bergrug het hoogste is, maar tussen de toppen aan weerszijden het laagste punt.

Wie het voorrecht heeft gehad in het Zwitserse bergland te wandelen, zal daar ongetwijfeld in een bergrug een „Sattel” hebben gezien of beklommen.

Dikwijls staat op zo’n Sattel een wegwijzer, omdat het gebruikt wordt om van het ene dal uit het andere te bereiken over de bergrug heen. De plaats, waar deze wegwijzer staat, is dan het „zadelpunt”, dat ten opzichte van de krom-

Het merkwaardige circustent-achtige geval, dat Wig van Wallis heet, is vrij wat moeilijker te tekenen dan het zadeloppervlak. Was het een echte circustent, dan zou deze op de grond cirkelvormig zijn, maar helemaal bovenaan rechtlijnig. Deze bovenlijn is evenwijdig met een der middellijnen van de cirkel en ligt daar precies boven. Richten we dus in

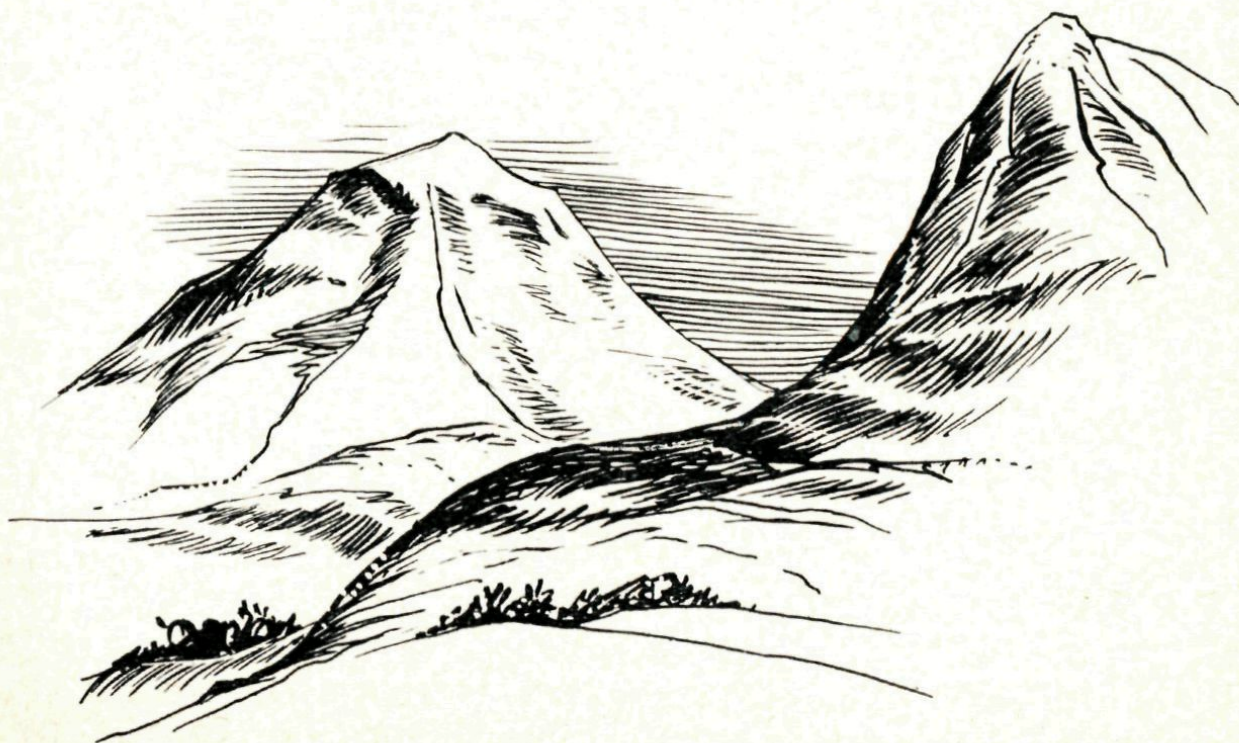
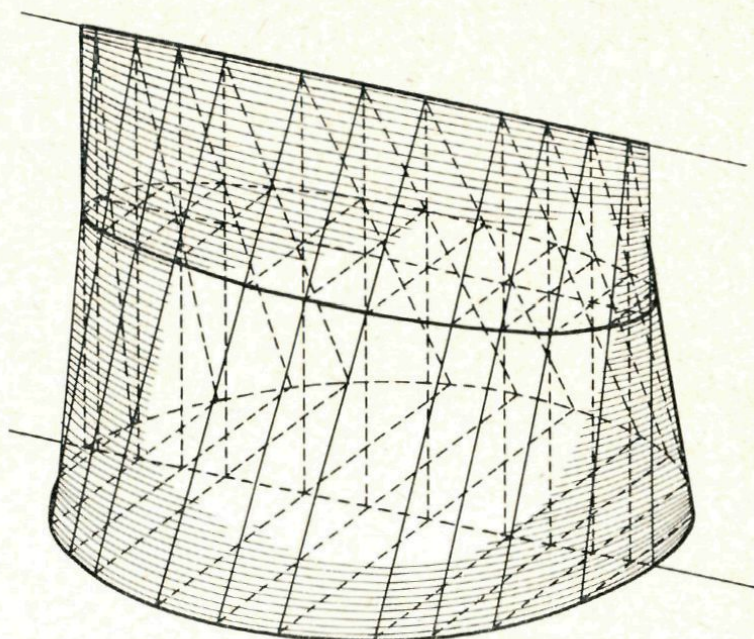


Fig. 5

de punten van deze middellijn palen op, dan ondersteunen deze de bovenlijn. In figuur 6 zou je de tent een dertienmaster kunnen noemen.

Fig. 6



We hebben nl. 13 loodlijnen opgericht. Je ziet nu wel, dat de uiterst linkse en rechtse loodlijn het oppervlak begrenzen en dat verder door elk der loodlijnen een vlak loodrecht op de bovenlijn is aangebracht, dat de wig snijdt volgens een gelijkbenige driehoek. De opstaande zijden van deze driehoeken zijn de rechten, waaruit het oppervlak is opgebouwd.



Denkertjes

De Denkertjes, die deze keer zijn opgenomen, zijn van een speciaal karakter. Ze hebben tot doel gedurende de komende vakantie onze lezers langdurig bezig te kunnen houden. Daarom zijn ze op enkele na (nummer 51 is zo'n uitzondering) nogal „pittig”. Sommige ervan zijn afkomstig van Wiskunde-Olympiaden uit Oost-Europa. De oplossingen kunnen *tot en met 31 augustus* worden ingezonden aan het bekende adres. Ze zullen gepubliceerd worden in nummer 1 van de zesde jaargang. De inzenders van goede oplossingen dingen weer mee naar de gebruikelijke boekenbon.

51. Uit een vierkante plaat blik met zijden van 111 centimeters moeten vijf vierkante stukken met zijden van 41 centimeters gesneden worden. Kan dat?
52. De som van n positieve getallen, die elk kleiner dan 1 zijn, wordt verminderd met het produkt van die n getallen. Bewijs, dat het verschil kleiner is dan $n - 1$.
53. De hoekpunten van een zeshoek ABCDEF liggen op een cirkel en de diagonalen AD, BE, CF gaan door een punt binnen die cirkel. Bewijs dat de zijden van die zeshoek te verdelen zijn in twee groepen van drie zo dat de produkten van de lengten van de zijden van die twee groepen gelijk zijn.

°Wiskunde en ruimtevaart

Nu ons zusterijdschrift Archimedes het laatste nummer van deze jaargang geheel aan de ruimtevaart heeft gewijd, willen we ook in Pythagoras enige aandacht aan dit onderwerp schenken. We bewerkten daarvoor een artikel, dat we vonden in het Amerikaanse wiskundetijdschrift voor jongeren "The Mathematics Student Journal". Het was geschreven door Raymond H. Wilson Jr., hoofd van de afdeling toegepaste wiskunde van de N.A.S.A. (N.A.S.A. betekent National Aeronautics and Space Administration. De N.A.S.A. heeft de leiding bij de ruimtevaartprojecten in de Verenigde Staten).

Ongeveer acht jaar geleden beschreef de eerste kunstmaan (de Spoetnik I) haar baan om de aarde. Op het ogenblik zijn er enige honderden, niet alleen in banen rondom de aarde, maar ook om de zon, echte kunstplaneetjes dus. Hoewel de ruimtevaart dus nog zeer jong is, waren enkele eeuwen geleden al berekeningen gemaakt over de banen van de natuurlijke planeten en manen. Geen wonder dus, dat wiskundigen steeds zeer belangrijke bijdragen hebben geleverd tot de ontwikkeling van de ruimtevaart. Omgekeerd echter hebben de problemen van de echte (en later kunst-)planeten de wiskundigen geïnspireerd om onderzoeken te doen in nieuwe gebieden van de zuivere en toegepaste wiskunde. Zo werd Isaac Newton (1642–1725) een der uitvinders van de differentiaal- en integraalrekening, die hij nodig had bij de berekening van de banen van hemellichamen. Karl Friedrich Gauss (1777–1855) werkte de waarschijnlijkheidsrekening verder uit, die hem in staat stelde een wiskundige behandeling te geven van de waarnemingsfouten, die optreden bij sterrekundige observaties.

Hoe snel?

Een van de eerste eisen voor de kunstmatige ruimtevlucht, een eis, die deze onderscheidt van het gewone vliegen, is dat de beginsnelheid van het ruimtevaartuig groot genoeg moet zijn om het in staat te stellen zonder verdere voortstuwing rondom de aarde te cirkelen. Hoe hoog moet die beginsnelheid wel zijn? Het zou vanzelfsprekend veel te duur en te gevaarlijk zijn om net zo vaak met verschillende snelheden projectielen en raketten af te schieten tot de juiste snelheid gevonden zou zijn. Dat is ook niet nodig. Driehonderd jaar geleden al berekende Newton, dat de beginsnelheid van een ruimteprojectiel ongeveer 8 km per sec. zou moeten zijn. Het is echter niet alleen de zwaartekracht, die de raket beïnvloedt. Ook de luchtweerstand, al is die nog zo gering, speelt een belangrijke rol, vooral bij de in de dampkring terugkerende bemande ruimte-

vaartuigen. De bestudering van de invloed daarvan vindt plaats in de aerodynamica (waarvoor Newton reeds de grondslagen legde). Er is dan een vrij ingewikkelde differentiaalvergelijking nodig om de beweging van het ruimtevaartuig te beschrijven.

Driedimensionale beweging

De bestudering van de ruimtevaart voert in afwijking van vrijwel alle andere bewegingen ons echt in de ruimte met drie dimensies. De andere bewegingen vinden zo dicht bij het aardoppervlak plaats, dat ze met twee dimensies wel beschreven kunnen worden (denk maar aan de plaatsbepaling op aarde, die met geografische lengte en breedte gegeven kan worden, dus met twee variabelen). Analytische meetkunde in drie dimensies, dus in een assenstelsel van drie onderling loodrecht op elkaar staande assen (X -, Y - en Z -as), is voor de ruimtevaart dus belangrijk. Maar de studie van de kegelsneden, die ook in de tweedimensionale analytische meetkunde zo'n grote plaats inneemt is een belangrijke basis voor de berekening van de banen van kunstmanen en planeten.

Welke kant uit?

De ruimtevaartuigen moeten nauwkeurig worden gericht op speciale doelen. Denk maar eens aan Mariner IV, die op weg naar Mars werd gestuurd, doordat een fotoelectrische cel zorgvuldig gericht werd op de ster Canopus. Deze cel beïnvloedde de kleine stuurraketten, die afwijkingen uit de baan moesten corrigeren. Er was o.a. bolmeetkunde nodig om de positie van het uiteindelijke doel van de Mariner ten opzichte van Canopus te berekenen.

Computers

Alle berekeningen, die nodig zijn voor het in de baan brengen en houden van ruimtevaartuigen zijn zo ingewikkeld en omvangrijk, dat ze niet uitgevoerd kunnen worden zonder het gebruik van snelle en grote rekenapparaten. Dit maakte het ontwikkelen nodig van een speciale tak van de wiskunde, die we computer-wiskunde zouden kunnen noemen. Daarin wordt onder meer bestudeerd hoe men een taal kan ontwerpen, die door de machine rechtstreeks kan worden „begrepen”, zodat opdrachten, die in deze taal aan de machine worden doorgegeven zonder onze tussenkomst door het apparaat worden uitgevoerd.

Een der problemen der ruimtevaart, die gewoonlijk door rekenkundige methoden worden opgelost, is de vraag naar de betrouwbaarheid van de stuwketten. Er zijn natuurlijk duizenden onderdelen, die aanleiding

kunnen zijn tot storingen en tot mislukken van een lancering of verdere vlucht. De studie van de statistiek is het, die de wiskundigen in staat stelt de waarschijnlijkheid van zulke storingen en fouten te berekenen. Zulke wiskundige onderzoeken, die vooraf gaan aan het lanceren, kunnen miljoenen dollars besparen en bij bemande ruimtevluchten mensenlevens redden.

Het zal wel duidelijk zijn geworden, dat de ruimtevaart de toepassing van de gehele wiskunde in al zijn aspecten nodig heeft. Niet alleen voor de ruimtevaarder zelf, maar ook voor de wiskundigen worden door het lanceren van de machtige raketten nieuwe werelden geopend. Deze nieuwe werelden te verkennen en te veroveren zal de taak zijn van de toekomstige wiskundigen onder onze lezers.

°Dat rolt wel

Een enkele maal zien we een foto- of televisiereportage van het verrollen van een groot bouwwerk, dat om de een of andere reden verplaatst moet worden. Wanneer het losgemaakt is van de fundamenteën, wordt het voortgeschoven over cilinders, die er onder door rollen. Telkens komen daarbij achteraan cilinders vrij, die er aan de voorkant weer onder gelegd kunnen worden. Het gebouw blijft daarbij voortdurend op gelijke hoogte, nl. de hoogte, die bepaald wordt door de diameter van de cilinders.

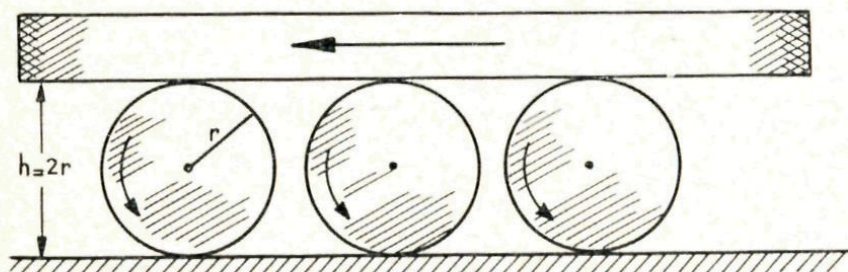


Fig. 7

Het is een verrassende ontdekking te bemerken, dat het niet nodig is voor dit doel cilinders te gebruiken. Er zijn verschillende vormen te construeren, die voor dit rollen evengoed gebruikt kunnen worden. Twee daarvan willen we in dit artikel bespreken. De eerste zie je toegepast in figuur 8.

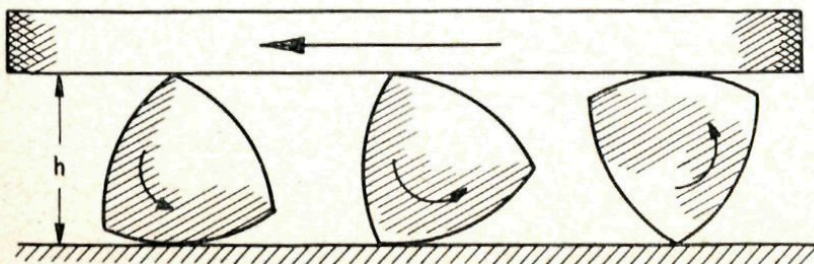


Fig. 8

Wat is nu het kenmerk van deze vorm, die hem voor dit rolwerk geschikt maakt? Het zal duidelijk zijn, dat bij het voortschuiven van het gebouw de hoogte boven de grond constant moet zijn. Dat is inderdaad het geval bij de „rollen” van fig. 8. Je ziet misschien wel hoe ze geconstrueerd zijn. Kijk anders maar naar fig. 9. $\triangle ABC$ in deze figuur is gelijkzijdig. De hoekpunten zijn de middelpunten van de bogen.

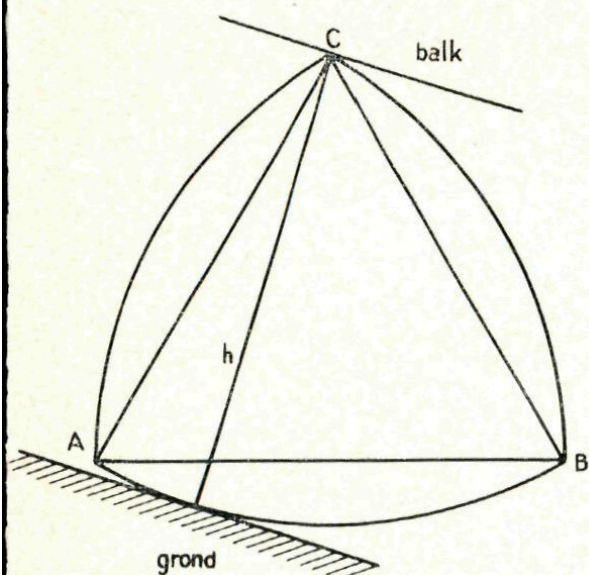


Fig. 9

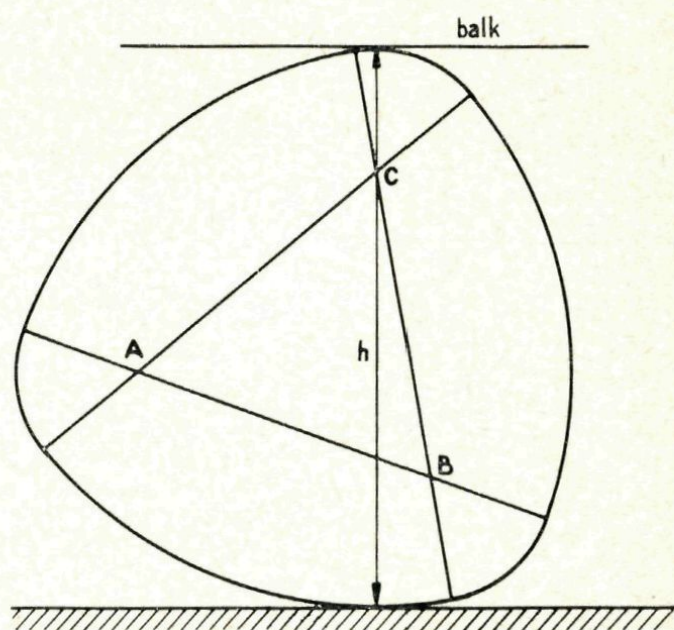


Fig. 10

Zolang boog AB ergens de grond raakt in een punt tussen A en B, is de hoogte van C boven de grond gelijk aan de zijde van $\triangle ABC$. De balk rust dan bij C op de „rol”. De balk is daardoor constant op de hoogte h boven de grond. Zodra A op de grond komt gaat de „rol” zodanig om A draaien, dat de balk ergens op boog BC komt te rusten. Voortdurend is dan weer de afstand van de balk tot de grond gelijk aan h . Je ziet dat deze rollen precies hetzelfde presteren als de cilinders. Let echter eens op de baan, die het middelpunt van elk der cirkels in fig. 7 doorloopt bij het rollen. Dat is een rechte evenwijdig met de grond. Hoe beweegt het middelpunt van de „driekantige” rol van fig. 8 zich?

In figuur 10 zie je nog een manier om een rol te maken, die niet cilindrisch is, maar toch de eigenschap heeft, dat er een constante afstand is tussen zijn hoogste en laagste punt. En als dat in orde is, dan rolt het wel.



Zie de opmerking boven Denkertje 51.

54. In een cirkel met 6 centimeter straal trekt men twee middellijnen a en b , die een hoek van 30° insluiten. Uit een willekeurig punt P van de cirkelomtrek laat men loodlijnen neer op a en b . Wat valt er nu te bewijzen omtrent de afstand van de voetpunten van die loodlijnen?
55. Een kwartcirkel wordt begrensd door de stralen AB en AC en door de boog BC . Op die boog liggen de punten P en Q zodanig, dat de bogen BP en CQ gelijk zijn. Worden P en Q met A verbonden, dan sluiten de verbindingslijnen een cirkel-sector in. Laat men uit P en Q loodlijnen neer op AB , dan ligt tussen die loodlijnen een half cirkelsegment. Laat zien, dat de sector en het halve segment gelijke oppervlakte hebben. Maak een legpuzzel zo, dat met de stukjes daarvan zowel de sector als het halve segment gevormd kunnen worden.
56. Uit een rechthoekige plaat blik met zijden van 80 en 90 centimeters moeten twee gelijke cirkels gesneden worden. Hoe groot kan de middellijn van die cirkels ten hoogste zijn?

°° Passermeetkunde I

Drs. A. B. Oosten, Groningen.

In de vlakke meetkunde mogen we bij het construeren alleen gebruik maken van een liniaal en een passer. In 1795 is door de Italiaanse wiskundige Lorenzo Mascheroni bewezen, dat de liniaal hierbij eigenlijk overbodig is. In de 17e eeuw verscheen in Amsterdam een door een Deen geschreven boek, getiteld *Euclides Danicus*. In dat boek werd er ook al op gewezen, dat alle constructies, die we met passer en liniaal kunnen uitvoeren, alleen met een passer kunnen worden uitgevoerd.

Daarbij kan men dan natuurlijk geen rechte lijnen trekken, maar je moet bedenken, dat twee punten al voldoende zijn om een lijn te bepalen.

Hiernaast zie je als voorbeeld van een passerconstructie in een vijftal figuren aangegeven, hoe je een cirkel door drie gegeven punten A , B en C kunt construeren.

Het „hoe” van deze constructie kun je zelf nagaan door de middelpunten en stralen van de diverse bogen op te zoeken.

Over het „waarom” ervan kun je eerst eens nadenken. Het wordt besproken in een artikel, dat begint op blz. 140.

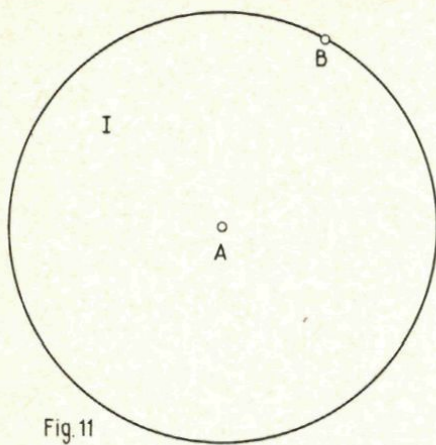


Fig. 11

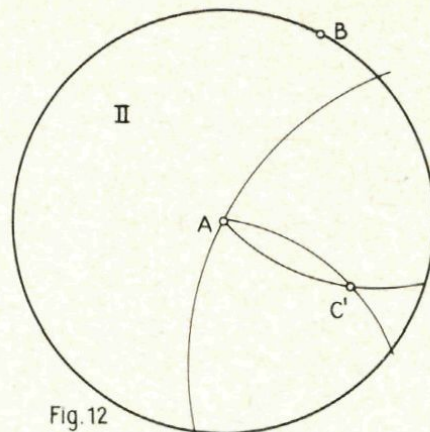


Fig. 12

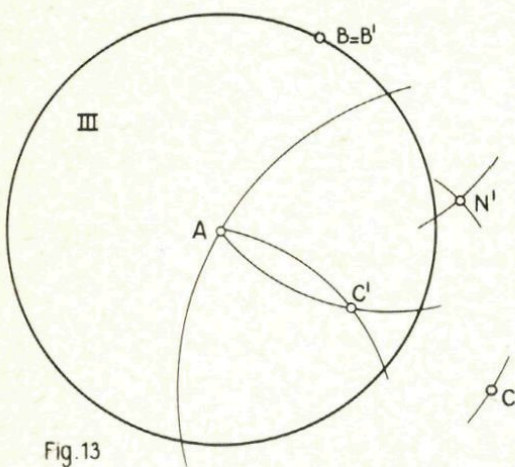


Fig. 13

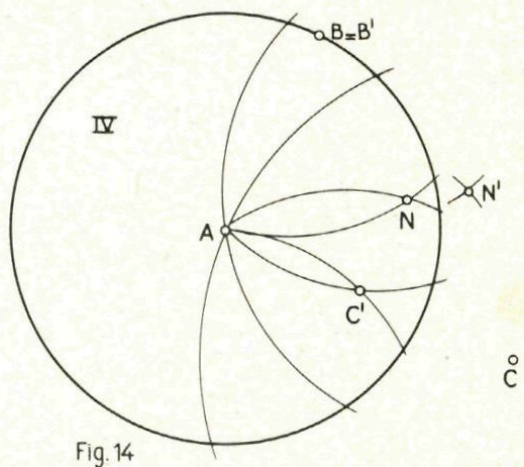


Fig. 14

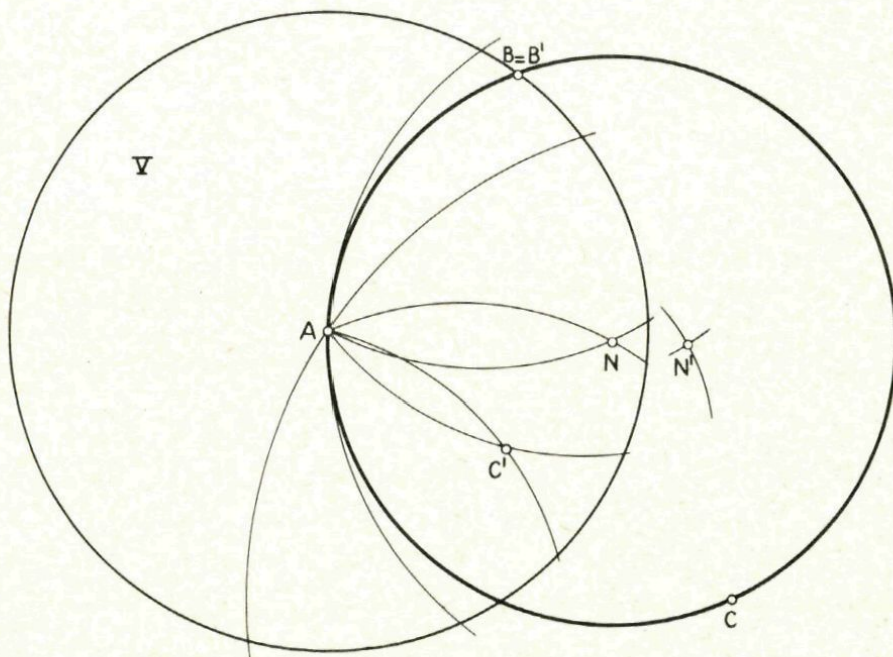


Fig. 15

°° De oppervlakten van driehoeken, waarvan de hoekpunten met coördinaten gegeven zijn

In het vorige nummer zagen we, hoe de oppervlakten van veelhoeken, waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn, berekend kunnen worden door alleen maar roosterpunten te tellen. In dit artikel wordt besproken, hoe oppervlakten berekend kunnen worden van driehoeken, waarvan de coördinaten van de hoekpunten gegeven zijn. Die hoekpunten behoeven dan geen roosterpunten te zijn.

In fig. 16 stellen we de coördinaten van de hoekpunten van $\triangle ABC$ als volgt voor:

$$A = (x_1, y_1); B = (x_2, y_2); C = (x_3, y_3).$$

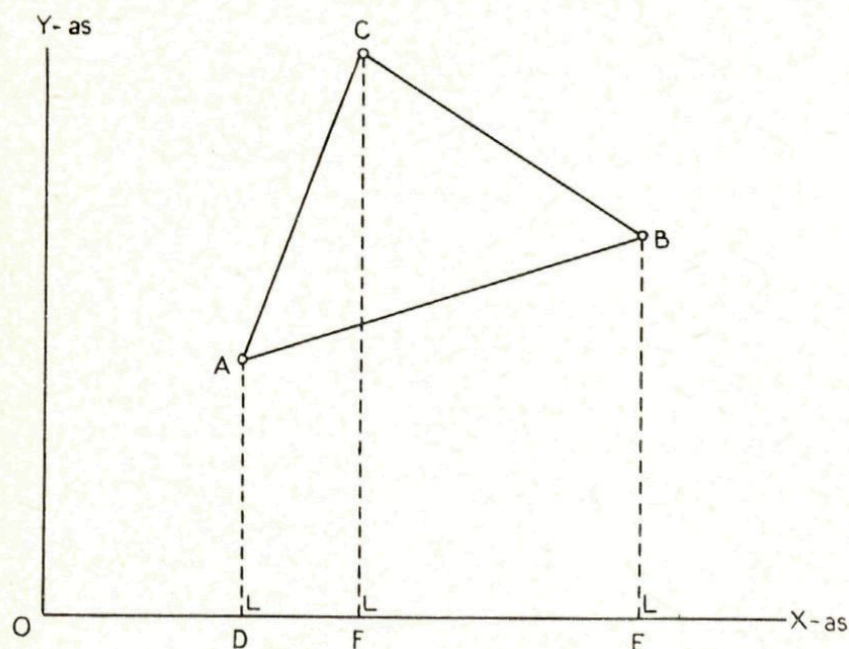


Fig. 16

De oppervlakte van $\triangle ABC$ is gelijk aan de som der oppervlakten van de trapezia DFCA en FEBC, verminderd met die van DEBA. Dus

$$\begin{aligned} \text{Opp. } \triangle ABC &= \frac{1}{2}DF(AD + CF) + \frac{1}{2}FE(CF + EB) - \frac{1}{2}DE(AD + BE) = \\ &= \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_1 + y_3) + \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_3 + y_2) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2). \end{aligned}$$

Dit antwoord is niet erg interessant. Het heeft nl. nog geen structuur, die ons veel informatie verschaft over de relatie tussen de grootte van de oppervlakte en de gegeven coördinaten.

Dat wordt al beter, als we het wat verder uitrekenen en opnieuw rangschikken. We vinden dan nl.:

$$\text{Opp. } \triangle ABC = \frac{1}{2}[(x_2y_3 - x_3y_2) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1)]$$

Nog duidelijker wordt de structuur, als we een andere schrijfwijze gaan gebruiken. Voor $x_2 y_3 - x_3 y_2$ kan men nl. schrijven:

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Men noemt zo'n vierkant getallenschema een determinant. Let op, hoe de waarde van deze determinant is gedefinieerd: het produkt van de getallen op de diagonaal-linksboven-rechtsonder wordt verminderd met het produkt van de getallen op de diagonaal-rechtsboven-links-onder. Zo betekent dus de determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 1$$

We kunnen nu schrijven:

$$\text{Opp. } \triangle ABC = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right). \quad (1)$$

Daar zit al veel meer structuur in. We gaan echter nog een stap verder. Voor de „drie-bij-drie-determinant”

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

heeft men o.a. de volgende rekenwijze afgesproken:

$$D = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Je ziet waarschijnlijk wel, hoe de berekening verloopt. Er zijn uit de getallen van de tweede en de derde kolom drie 2-bij-2-determinanten te vormen. Elk van deze wordt vermenigvuldigd met dat getal a uit de eerste kolom, waarvan de index niet in die 2-bij-2-determinant voorkomt. (Dus de a met index 1 wordt vermenigvuldigd met de determinant, waarin de b en c de indices 2 en 3 hebben). Verder worden deze produkten om en om van een $+$ en een $-$ voorzien. (Bij deze simpele aanduiding van het gebruik van determinanten moeten we het in dit artikel laten. Ze spelen een belangrijke rol in de wiskunde, ook die met meer rijen en kolommen. Een preciesere bespreking zou te veel ruimte vergen)

Kijk nu nog eens naar ons resultaat van de oppervlakte-berekening, dat is vermeld bij (1). Je kunt ervoor schrijven

$$2 \cdot \text{opp. } \triangle ABC = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

En dat is nu bijzonder overzichtelijk (en gemakkelijk te onthouden)

Voorbeeld 1: Neem A (2, 3); B (6, 5) en C (4, 7)

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{opp. } \triangle ABC &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 22 - 2 + (-8) = 12 \end{aligned}$$

Dus $\text{opp. } \triangle ABC = 6$.

Berekenen we echter $\text{opp. } \triangle ACB$, dat wil dus zeggen, dat we de driehoek in een andere zin doorlopen, dan worden daardoor in de determinant de tweede en de derde rij verwisseld. We vinden dan:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{opp. } \triangle ACB &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -22 - (-8) + 2 = -12. \end{aligned}$$

De oppervlakte van de driehoek blijkt dan de waarde -6 te krijgen. Het is voor allerlei doeleinden in de wiskunde wenselijk aan congruente driehoeken met een tegengestelde omloopszin inderdaad tegengestelde oppervlakten toe te kennen.

Voorbeeld 2: Neem A (18, 43); B (42, 81) en C (31, 24).

Omdat de oppervlakten van congruente driehoeken gelijk zijn, berekenen we die van de driehoek, die ontstaat door $\triangle ABC$ zo te verschuiven, dat een der hoekpunten in de oorsprong valt, bijv. het beeldpunt van C. De hoekpunten zijn dan:

$(-13, 19)$; $(11, 57)$ en $(0, 0)$.

We vinden

$$2 \cdot \text{opp. } \triangle ABC = \begin{vmatrix} 1 & -13 & 19 \\ 1 & 11 & 57 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Je zult gemakkelijk kunnen narekenen, dat dit gelijk is aan

$$\begin{vmatrix} -13 & 19 \\ 11 & 57 \end{vmatrix} = -741 - 209 = -950.$$

Dus $\text{opp. } \triangle ABC = -475$.



Denkertjes

Zie de opmerking boven Denkertje 51.

57. De zijde AB van de scherphoekige driehoek ABC is middellijn van een cirkel. Deze snijdt AC in A en P en BC in B en Q. In P en Q trekt men raaklijnen aan de cirkel. Bewijs, dat het snijpunt S van die raaklijnen ligt op de loodlijn uit C op AB.
58. Er wordt een groep van n natuurlijke getallen gezocht, zodat de som van de omgekeerden van die getallen en het produkt van de omgekeerden van die getallen samen gelijk zijn aan 1. Voor $n = 2$ is $(2; 3)$ zo'n groep, want $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1$. Bewijs, dat er ook voor elke grotere waarde van n zo'n groep bestaat.
59. Op een rechte lijn liggen drie verschillende punten A, B, C en buiten die rechte lijn ligt punt O. De middelpunten van de omschreven cirkels van de driehoeken OAB, OBC, OCA heten opvolgend O_1, O_2, O_3 . Bewijs, dat O, O_1, O_2, O_3 op een cirkel liggen.
60. In een plat vlak liggen 100 punten. Elke verbindingsrechte van twee van die punten bevat ook minstens een derde punt van het honderdtal. Bewijs, dat al die honderd punten op een rechte liggen.



°° Hoe een kunstenaar een vijfhoek construeerde

Aan Albrecht Dürer (1471–1528), de grote Duitse schilder, tekenaar, graveur en meetkundige, wordt de volgende constructie van een regelmatige vijfhoek toegeschreven. Het is een benaderingsconstructie en we zullen de fout, die erg klein is ook berekenen, maar de charme van de constructie is, dat er maar één passeropening in gebruikt wordt, zodat je je passer alleen maar even hoeft neer te leggen, als je zo nu en dan een rechte lijn moet tekenen.

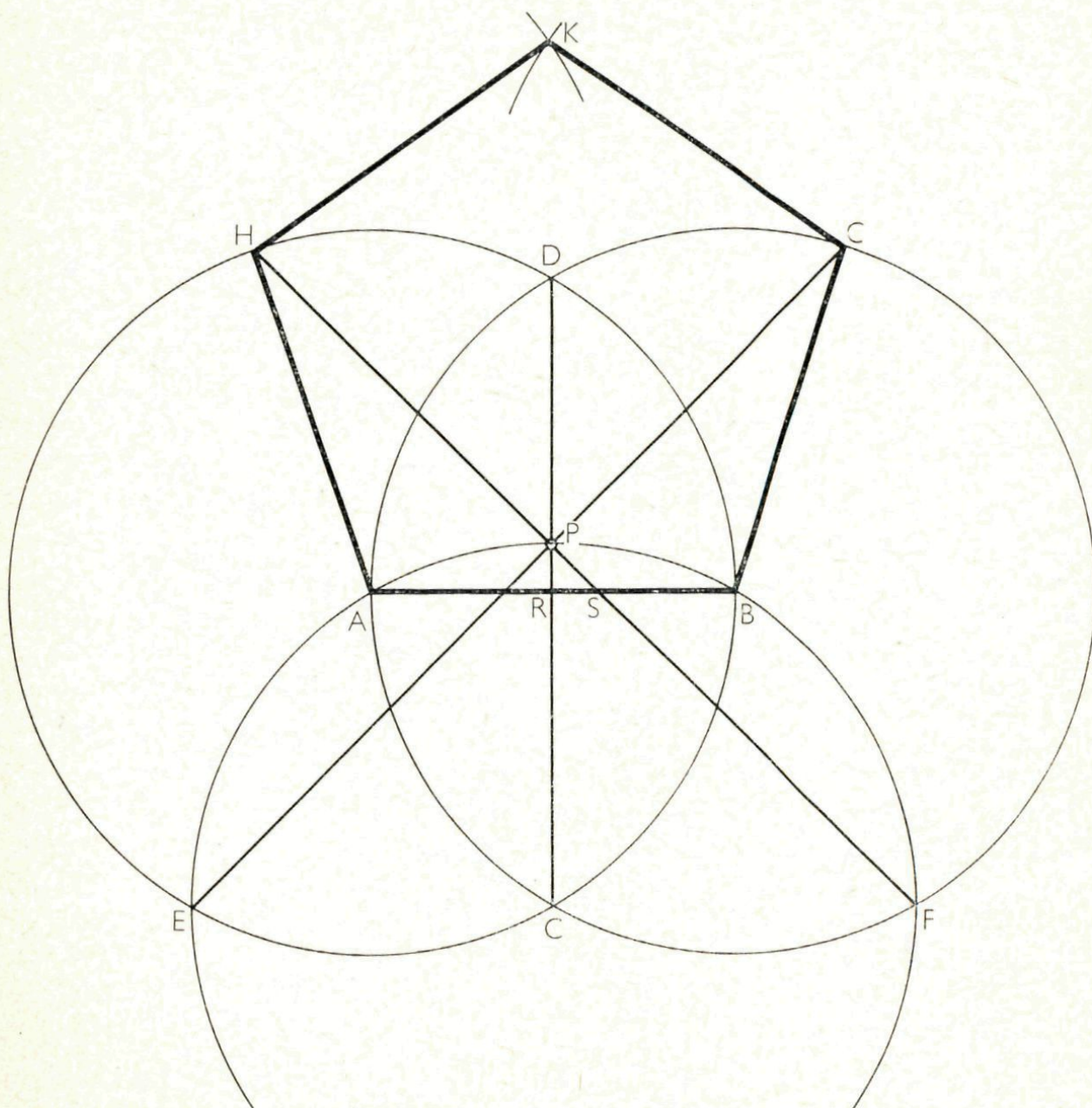


Fig. 17

Je kiest de zijde AB van de vijfhoek en neemt die in de passer. Dan voer je achtereenvolgens de volgende handelingen uit.

1. Cirkel (A, z), d.w.z. de cirkel met A als middelpunt en $z = AB$ als straal.
2. Cirkel (B, z), snijpunten met de vorige C en D.
3. Cirkel (C, z), snijpunten met de vorigen o.a. E en F.
4. Rechte CD, snijpunt met de laatstgetrokken cirkel P.
5. Rechte EP, snijpunt G met cirkel (B, z)
6. Rechte FP, snijpunt H met cirkel (A, z)
7. Cirkels (G, z) en (H, z), snijpunt K.

Nu is ABGKH de gevraagde vijfhoek.

Hoewel de vijf zijden gelijk zijn, is deze vijfhoek niet regelmatig. De hoeken zijn nl. niet alle evengroot. We berekenen hoek A.

In de figuur zie je, dat het snijpunt van DC met AB de letter R en het snijpunt van HF en AB de letter S heeft gekregen. Nu is, als we voor het gemak $z = 1$ stellen,

$$RP = CP - CR = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

In cirkel (C, z) is boog EA = boog AB = boog BF = 60° . Daaruit volgt, dat $\angle EPF = 90^\circ$ is en dus $\angle RPS = 45^\circ$. Dus is

$$RS = RP = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

En

$$AS = AR + RS = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3})$$

Passen we nu de sinusregel toe in $\triangle ASH$, dan zien we

$$AH : \sin ASH = AS : \sin AHS.$$

$$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}) : \sin AHS$$

Daaruit volgt

$$\sin AHS = \frac{1}{4}(3\sqrt{2} - \sqrt{6}) \approx 0,4482$$

We vinden

$$\angle AHS = 26^\circ 38'$$

En dus tenslotte $\angle A = 108^\circ 22'$.

Dat wil dus zeggen, dat $\angle A$ slechts $22'$ te groot is.

Moeilijk? Een kwestie van ordelijk denken!

$27 + 2 = 30$ en de wiskundige die een ei kookt.
--

Wie alles tegelijk, alles door elkaar wil doen, bereikt niets. Zelfs eenvoudige werkjes als het maken van een kippenhok en het bereiden van een maaltijd vragen ordelijk werken. Anders lopen ze op niets uit.

Iedereen weet dat en zo goed als iedereen handelt ernaar.

Maar als het gaat over „denkwerk”, vergeten veel mensen dat hier rustig, ordelijk en systematisch werken nog belangrijker is voor een goed resultaat.

Hier is zo’n denkwerkje:

Drie boeren kochten gezamenlijk kunstmest op de markt. De handelaar vroeg $f 30,-$. Ze betaalden ieder $f 10,-$ en gingen op weg naar huis. De handelaar kreeg er spijt van, dat hij de boeren had afgezet (de kunstmest kostte nl. maar $f 25,-$) en liet door zijn knecht $f 5,-$ terugbrengen. De knecht meende ook wel wat te mogen hebben, hield $f 2,-$ achter en gaf de boeren ieder $f 1,-$ terug.

Nu komt het: De boeren hadden dus $3 \times f 9,- = f 27,-$ betaald; bovendien nog $f 2,-$ voor de knecht, dat was in het geheel $f 29,-$. Waar is die ene gulden gebleven?

Als je hier niet systematisch denkt, kom je er nooit uit. Probeer het eens zonder het antwoord op bl. 144 te raadplegen.

Vele wiskundeproblemen blijken eenvoudig, als we ze met zin voor orde aanpakken. Een wiskundige is dan ook een zeer systematisch denker. Ter illustratie hiervan het volgende verhaal. Men vraagt een wiskundige: „Hoe kook je een ei?” Hij beschrijft het: Doe water in een pannetje, leg het ei er in, steek het gas aan en zet het pannetje erop. Na 4 minuten haal je het pannetje van het gas en het ei is klaar.

Nu vraagt men hem: Maar stel nu eens, dat er al water in het pannetje zit. Wat doe je dan? Antwoord: Gooi het water in de gootsteen. Daarmee is het nieuwe probleem tot het vorige teruggebracht!

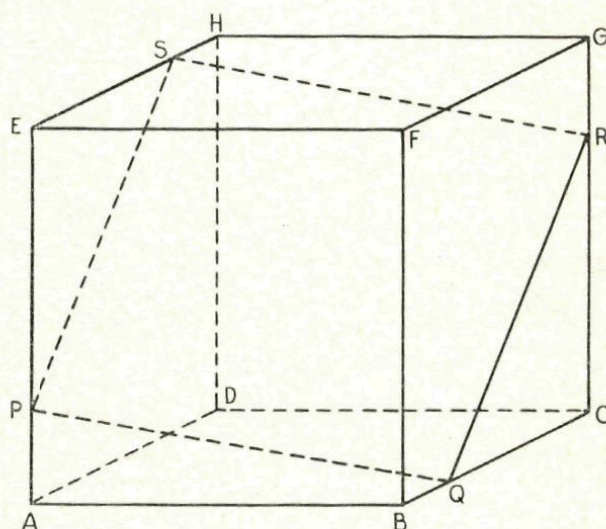
°°Het lijkt onwaarschijnlijk, maar ...

Het is mogelijk een gat te boren in een kubusvormig blok en daarna een tweede, grotere kubus door dat gat heen te duwen! Wie dat niet gelooft, moet de onderstaande redenering maar eens zorgvuldig volgen.

In figuur 18 zijn AP, BQ, GR, HS elk gelijk aan een vierde deel van de ribbe van kubus ABCD · EFGH; we noemen de lengte van die ribbe a , dus $AP = BQ = GR = HS = \frac{1}{4}a$.

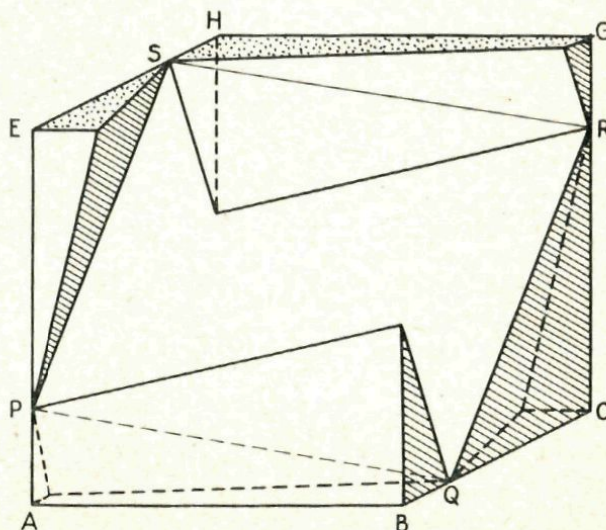
Uit berekening blijkt, dat de zijden van vierhoek PQRS elk de lengte $\frac{3}{4}a\sqrt{2}$ hebben, zodat die vierhoek een ruit is. Verder blijkt, dat de diagonalen PR en QS elk de lengte $\frac{3}{2}a$ hebben, zodat PQRS zelfs een vierkant is.

Fig.18



Wanneer we nu de kubus gaan doorboren in een richting, die loodrecht op vlak PQRS staat, en we kiezen de vierhoek PQRS zelf als dwarsdoorsnede van het boorgat, dan valt de kubus daardoor in vier stukken uiteen (zie figuur 19). Het is een aardig stereometrisch vraagstuk om te

Fig.19



bewijzen, dat de boorrichting gegeven wordt door de rechte, die D verbindt met het midden van EF, maar voor het onderhavige probleem is dat niet van belang.

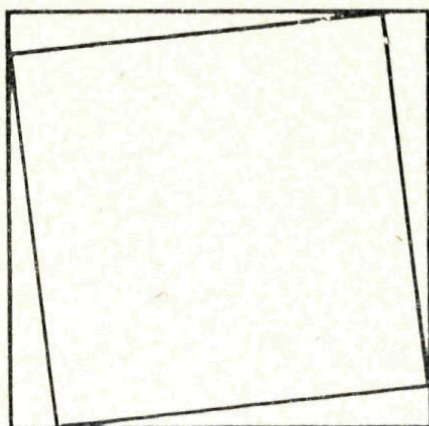


Fig. 20

Tekenen we echter binnen vierkant PQRS een iets kleiner vierkant, op de manier die in figuur 20 aangegeven wordt, en gebruiken we dat kleinere vierkant als dwarsdoorsnede van het boorgat, dan blijft het restant van de kubus een geheel vormen.

Omdat $\frac{3}{4}a\sqrt{2}$ iets groter is dan a , kunnen we dat zo doen, dat de zijden van het nieuwe vierkant ook nog net iets groter zijn dan a . En dan kunnen we dus door het gemaakte gat een kubus duwen, die groter is dan ABCD · EFGH.

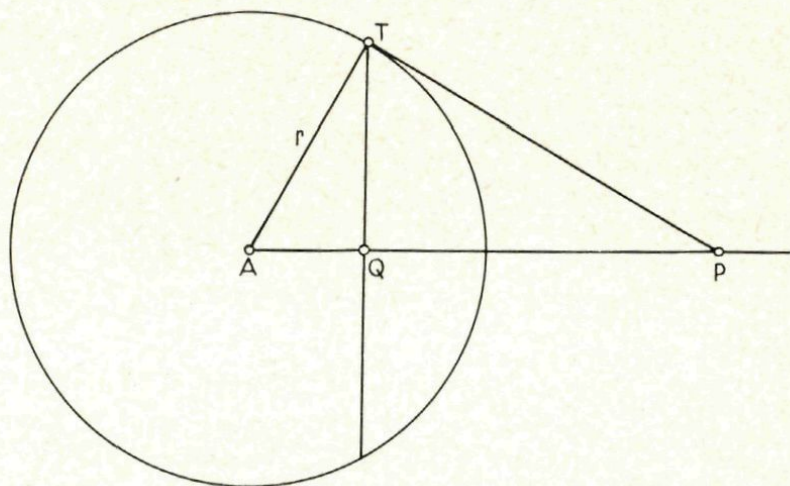
°°Passermeetkunde II

Misschien heb je de constructies, die op bladz. 130 beschreven zijn, al eens uitgevoerd. Voor de verklaring daarvan moeten we ons bezig houden met het begrip *inversie ten opzichte van een cirkel*. We verstaan daaronder een bepaalde manier van toevoegen van punten buiten een cirkel aan punten binnen die cirkel en omgekeerd. (Zie bijv. Pyth. 4e jrg., blz. 107 e.v.)

In fig. 21 zie je een cirkel met middelpunt A en straal r . Uit een punt P buiten die cirkel is een raaklijn PT getrokken. Uit T is de loodlijn TQ op AP neergelaten. Uit de gelijkvormigheid van $\triangle APT$ en $\triangle ATQ$ volgt $AP \cdot AQ = AT^2 = r^2$.

Punten, die op deze manier (dus zoals P en Q) aan elkaar worden toegevoegd heten elkaars inverse ten opzichte van de cirkel. Je kunt gemakkelijk nagaan, dat punten op de cirkel met hun inverse samenvallen. Het middelpunt A is het enige punt van het vlak, dat geen inverse heeft. In de betrekking $AP \cdot AQ = r^2$ kunnen nl. AP of AQ niet nul zijn.

Fig.21



Het is nu interessant te onderzoeken hoe de inversen van verschillende figuren uitvallen, bijv. van een rechte lijn of een cirkel. Voor het bespreken van de constructiefiguren op bladz. 131 zal het handig zijn, als we onderzoeken wat de inverse is van een cirkel S, die gaat door het middelpunt A van de inversiecirkel. We zetten N bij het middelpunt van cirkel S en D bij het snijpunt van deze cirkel met AN.

Laat nu X een willekeurig punt zijn van cirkel S, X' is de inverse van X en D' die van D. Nu geldt:

$$DA \cdot D'A = XA \cdot X'A = r^2$$

dus

$$DA : X'A = XA : D'A,$$

daarom is

$$\triangle ADX \sim \triangle AX'D'.$$

Omdat $\angle AXD = 90^\circ$ is, is ook $\angle AD'X'$ recht.

Voor alle punten X' , die inverse zijn van de punten X van cirkel S ($X \neq A$), geldt dus, dat ze liggen op de loodlijn, die in D' op AD kan worden opgericht. Aangezien de inversen van E en F ook op deze loodlijn liggen

en met E en F samenvallen, is EF dus deze loodlijn. Omdat ook omgekeerd gemakkelijk kan worden bewezen, dat elk punt van EF inverse is van een punt van cirkel S, is EF dus de inverse van die cirkel.

Voor onze constructies hebben we nog nodig de inverse N' van het middelpunt N van S. Daarvoor kunnen we een gemakkelijk toe te passen eigenschap bewijzen. N' is nl. het spiegelbeeld van A ten opzichte van de rechte EF.

Bewijs: (zie fig. 22). We weten, dat $AN \cdot AN' = AD \cdot AD'$.

Hierin is $AN = \frac{1}{2}AD$, dus $\frac{1}{2}AD \cdot AN' = AD \cdot AD'$

Daaruit volgt $AN' = 2AD'$

We hebben nu voldoende van de inversie bekeken om de constructies op blz. 131 te kunnen begrijpen.

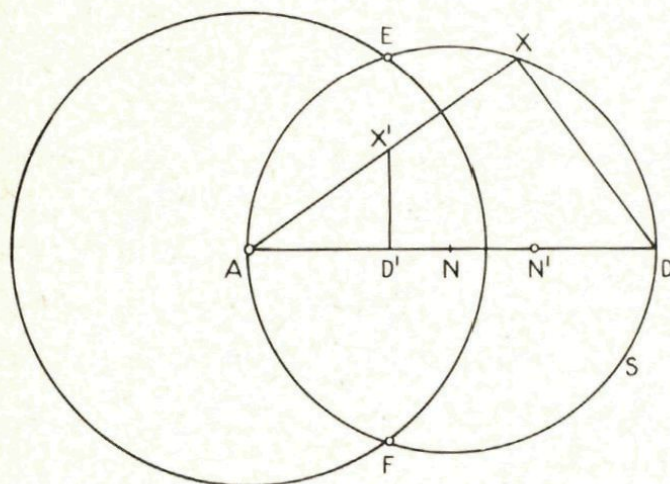


Fig. 22

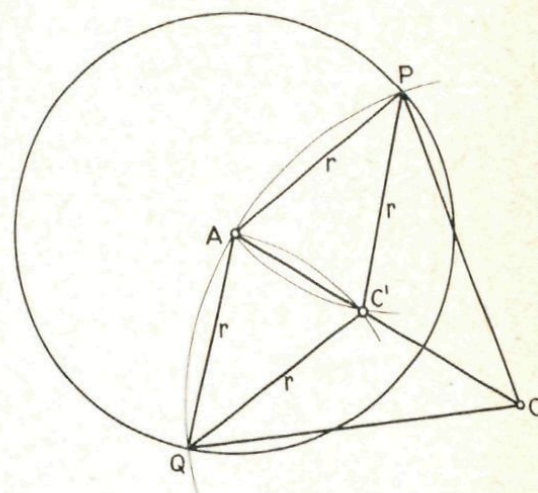


Fig. 23

De drie gegeven punten, waardoor de cirkel geconstrueerd moet worden zijn A, B en C. Is $\triangle ABC$ niet gelijkzijdig, dan kunnen de letters er steeds zo bij geplaatst worden, dat $AB < AC$.

In fig. I blijkt nu, dat we als inversiecirkel gekozen hebben de cirkel met A als middelpunt, die gaat door B. Bij de inversie is dan $B' = B$. In fig. 23 zie je nu hoe constructie II verklaard kan worden.

Eerst is boog QAP met C als middelpunt getrokken. Daarna de bogen met P en Q als middelpunt gaande door A. Deze snijden elkaar in C' . Wegens de congruentie van de driehoeken CAQ en CAP is CA de deel-
lijn van $\angle PAQ$. Omdat vierhoek APC'Q een ruit is, is $C'A$ eveneens

deellijn van deze hoek. Dus valt C' op AC . Verder volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken PAC' en CAP , dat $PA : AC' = AC : PA$, dus $AC' \cdot AC = r^2$. Daarmee is bewezen, dat C' de inverse is van C .

$B'C'$ speelt nu in fig. III de rol van EF in fig. 22. Dus is de inverse van het middelpunt N van de gevraagde cirkel het spiegelbeeld van A ten opzichte van $B'C'$. Dat spiegelbeeld is gevonden door de vlieger $AC'N'B$ te construeren. Tenslotte kan men (op dezelfde manier als in fig. II) de inverse N van N' construeren, waarna de gevraagde cirkel getrokken kan worden. In fig. V is de hele constructie nog eens uitgevoerd. Controleer eens, dat ook als $\triangle ABC$ gelijkzijdig is, dezelfde constructie toegepast kan worden.

Oplossing Wimecos-prijsvraag II

We voeren gemakshalve een paar tekens in voor de bestuiving en de wortelversmelting: In plaats van „een stuif van een rode en een gele plant is blauw” schrijven we $rood + geel = blauw$. In plaats van „een smelt van een rode en een gele plant is groen” schrijven we $rood \cdot geel = groen$. We hebben in het onderstaande de optelling en de vermenigvuldiging niet nodig, zodat we de bijbehorende tekens wel tijdelijk even voor een ander doel mogen lenen.

1. We noemen het aantal verschillende kleuren n en die kleuren zelf $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$. Nu beschouwen we de n kleuren $(rood + x_1); (rood + x_2); (rood + x_3); \dots; (rood + x_n)$. Op grond van regel III zijn deze n kleuren verschillend. Ze vormen dus een andere rangschikking van de rij kleuren $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$. In die andere rangschikking komt de kleur rood precies een keer voor. Met andere woorden: er is precies één x met de eigenschap $rood + x = rood$.

2. Voor elke kleur a geldt volgens regel I $(a + wit) + rood = a + (wit + rood)$ en dus $(a + wit) + rood = a + rood$. Met behulp van regel III volgt hieruit $a + wit = a$.

3. Nu komt regel II aan de beurt, die voor elke kleur a de geldigheid van $a \cdot (wit + rood) = (a \cdot wit) + (a \cdot rood)$ garandeert. In het linkerlid mogen we $wit + rood$ vervangen door $rood$, zodat er $a \cdot rood$ komt te staan. Het vorige bewijs wettigt de vervanging hiervan door $(a \cdot rood) + wit$. Het resultaat is dan $(a \cdot rood) + wit = (a \cdot wit) + (a \cdot rood)$. En alweer brengt regel III ons nu tot de conclusie, die ditmaal luidt $a \cdot wit = wit$.

Oplossingen Denkertjes uit no. 5

41. De oppervlakte van driehoek ABZ (Z is het zwaartepunt van driehoek ABC) is maximaal, indien de zwaartelijnen AZ en BZ loodrecht op elkaar staan; de grootte van dat maximum is 40 cm^2 . Omdat de oppervlakte van driehoek ABC drie maal zo groot is als die van driehoek ABZ , bedraagt het maximum van de oppervlakte van driehoek ABC 120 cm^2 .

42. Er zijn vijf dergelijke rijen: 18; ...; 22 en 9; ...; 16 en —8; ...; 16 en —17; ...; 22 en —99; ...; 100.
43. Zie figuur 24.
44. $x = 5$ cm.
45. Bij gelijkbenige driehoeken met basishoeken van 36° .
46. Er voldoen zes viertallen natuurlijke getallen:
 2, 3, 7, 42 en 2, 3, 8, 24 en
 2, 3, 9, 18 en 2, 3, 10, 15 en 2, 4, 5, 20 en 2, 4, 6, 12.
47. De gevraagde breuken zijn $\frac{46}{51}$ en $\frac{47}{52}$.
48. De gevraagde priemgetallen zijn 7, 19, 37, 61, 127.
49. De hoogtelijnen van deze driehoek zijn $3 + 4 + 5 = 12$ cm lang en zijn zijden zijn $8\sqrt{3}$ cm lang.
50. Op de vijfde dag om 1.35. Stel, dat het gewicht over een afstand x daalt voor elke minuut, dat het uurwerk loopt; stel ook, dat het over een afstand y daalt voor elke slag, die het slagwerk produceert. De tweede periode duurt 30 minuten langer, maar er komen 3 slagen minder in voor dan in de eerste. Dus $y = 10x$. Hierna kan het antwoord berekend worden.

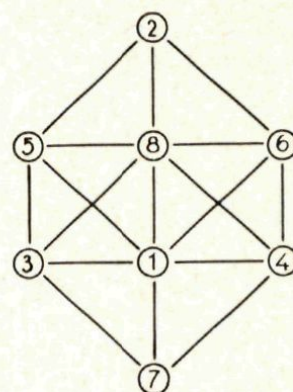


Fig. 24

Tijdverdrijf

(De verplaatste lucifers zijn met een kruisje (×) aangegeven.)

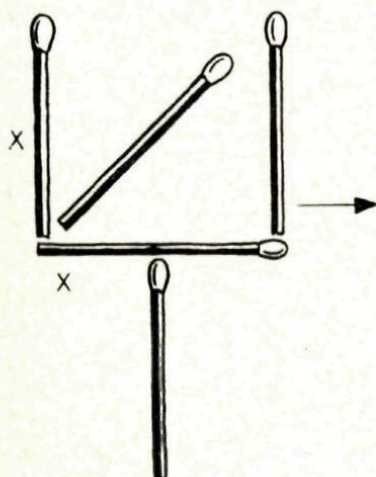


Fig. 25

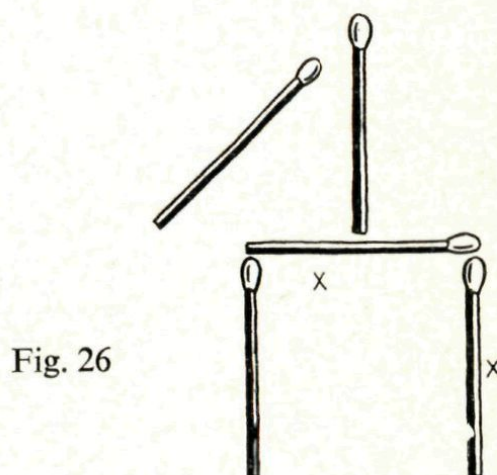


Fig. 26

Oplossing van $27 + 2 = 30$.

Het is onzin te veronderstellen, dat er een gulden „zoek” zou zijn. Waarom zou je die $f27,-$ en die $f2,-$ optellen? De 3 boeren betaalden samen $3 \times f9,- = f27,-$. De knecht kreeg hier van $f2,-$ (gestolen) en de overblijvende $f25,-$ waren voor de handelaar.

Determinant

Ellips

Hyperbool

Parabool

Uit het Latijn: *determinare* = *afbakenen, bepalen*.

Uit het Grieks:

ekleipein = *tekortschieten*

hyperballein = *overschieten*

paraballein = *er bij aanpassen*.

Men kan als vergelijking voor een parabool geven $y^2 = ax$.

Men kan deze zo lezen, dat er een rechthoek is met vaste lengte a en variabele breedte x , waarvan bij elke waarde van x (> 0) een vierkant hoort met zijde y , dat dezelfde oppervlakte als de rechthoek heeft. („Erbij aangepast is”)

De vergelijking $y^2 = x(a + x)$ stelt een hyperbool voor. Nu is telkens het vierkant (y^2) groter dan de rechthoek (ax). (Er „schiet wat over”).

De vergelijking $y^2 = x(a - x)$ stelt een ellips (cirkel) voor. Het vierkant is nu kleiner dan de rechthoek („schiet te kort”)

Inversie

Uit het Latijn, *invertere* = *omkeren*.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Bosschendijk 2, Oudenbosch.

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen.

A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden. *Inzenden vóór 1 september 1966.*

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,— per jaargang. Voor anderen f 3,50.

Abonnementen kan men opgeven bij J.B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.