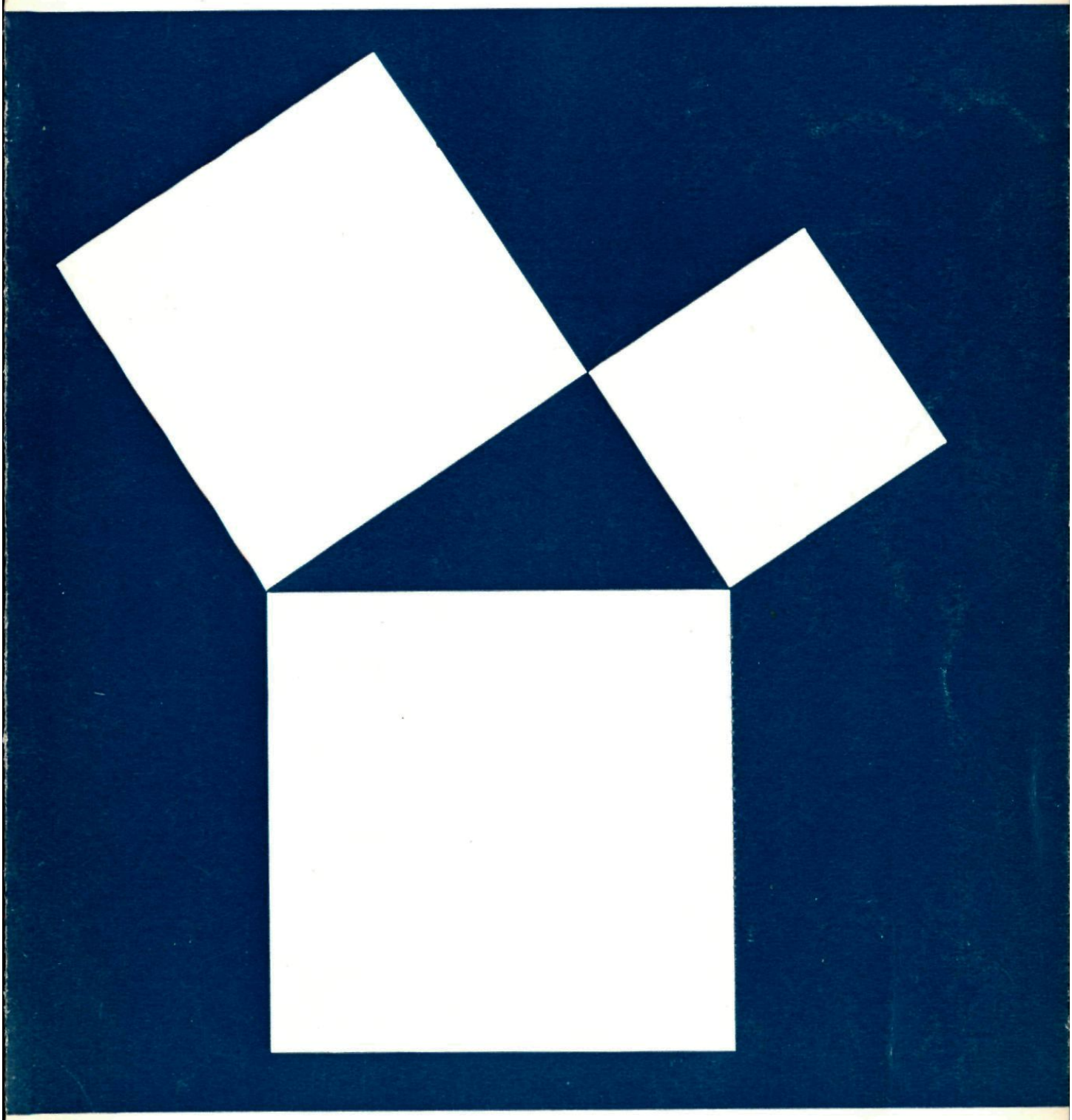
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

1

Zesde jaargang
1966/1967

pythagoras

jaargang 6 no 1

Ouverture

Aan het begin van de nieuwe jaargang van PYTHAGORAS wenst de redactie alle lezers een succesvol studiejaar. Bij de vele veranderingen die een nieuw schooljaar met zich meebrengt voegt PYTHAGORAS er ditmaal ook één, in de vorm van een redactiewijziging. Voortaan zal men de vertrouwde naam Krooshof niet meer op de achterzijde aantreffen. De heer Krooshof heeft vanaf de oprichting een zeer belangrijk aandeel gehad in het tot stand komen van ieder nummer. Door werkzaamheden op ander terrein heeft hij hier jammer genoeg een punt achter moeten zetten. Gelukkig zal de heer Krooshof nog wel bijdragen aan de inhoud blijven leveren. Een woord van dank is hier zeker op zijn plaats.

Voor de nieuwe lezers hebben we enkele opmerkingen. In de eerste plaats: verwacht niet dat elk artikel je zal boeien. We proberen „elk wat wils" te geven en wanneer in elk nummer één artikel je zal interesseren, dan zijn we al heel tevreden. Waarschijnlijk vind je dan zelf ook je abonnementsgeld wel goed besteed. Mocht je je toch „bekocht" voelen, dan is er een eenvoudige manier om je geld terug te krijgen. Bij ons hoef je geen spaarkaarten in te vullen, geen slagzinnen te bedenken, het enige wat je hoeft te doen is de Denkertjes, waarvan je er in ieder nummer 10 aantreft, op te lossen. Ook als je ze niet allemaal opgelost hebt kun je ze inzenden. Voor iedere oplossing krijg je (hoe kan het anders!) een cijfer. Met iedere 10 voor een Denkertje ding je mee naar de boekenbon die elke keer onder de goede inzenders wordt verloot.
Bovendien worden al je punten opgeteld en wie uit de eerste vier nummers een totaal van minstens 300 punten heeft behaald, krijgt eveneens een boekenbon. Het adres waar je de oplossingen naar toe kunt sturen vind je op de achterzijde.
Er valt nog meer te verdienen. De vereniging van Leraren in Wiskunde, Mechanica en Cosmografie (WIMECOS) schrijft een tweetal prijs-

vragen uit en looft een aantal boeken (tot een totale waarde van *f* 100) als prijzen hiervoor uit. In dit nummer staat de eerste van die prijsvragen. Inzendingen aan hetzelfde adres.

Waarschijnlijk heb je zelf nooit een telraam gehad, zoals je er één ziet afgebeeld op de binnenzijde van de omslag. Een jaar of veertig geleden hoorde een telraam min of meer tot de uitrusting van een kind dat nog net niet naar school ging. In Oosterse landen zijn telramen echter nog volop in gebruik. Zo staat men bij een reis door de USSR er van verbaasd overal naast moderne kasregisters telramen in gebruik te zien. Nog verbaasder is men bij de ontdekking dat zo'n telraam een geweldig hulpmiddel is bij het rekenen. Over het Russische telraam vind je in het volgende nummer een artikel. De foto toont een Chinees telraam. Ook de abacus, die ter sprake komt in het artikel over binair rekenen in dit nummer, is eigenlijk een soort telraam.
Verder tref je in dit nummer aan een beschouwing over het weer, een stukje geschiedenis, en iets over harmonische ligging.
Bij elk artikel vind je een seintje, nl. °, °° of °°°. Deze geven de graad van moeilijkheid aan, hoe meer nulletjes, hoe moeilijker het artikel is, maar het kan natuurlijk altijd meevallen.
Nieuwe Denkertjes (met oplossing!) zijn altijd welkom. Ook artikelen kun je insturen. Als de redactie ze goed genoeg vindt worden ze geplaatst, maar dan moeten ze ook inderdaad interessant zijn voor een groot publiek. Veel inzendingen die de redactie krijgt voldoen niet aan die eis.
Mocht je nog belangstelling hebben voor oude jaargangen, dan kun je schrijven naar de uitgever. Voor zover nog aanwezig kun je ze krijgen voor een gering bedrag.
Tenslotte: Ben je tevreden? Schrijf het ons! Ben je ontevreden? Schrijf ons dan zeker!

° Binair rekenen

Hovelingen zijn als steentjes op het rekenbord: al naar de rekenaar wil, zijn ze een chalkus waard of een talent. (Polybios, geciteerd in Ontwakende Wetenschap door Prof. Dr. B. L. van der Waerden)

Wanneer we een vermenigvuldiging uitvoeren, bijvoorbeeld

$$\begin{array}{r} 308 \\ 42 \\ \hline 616 \\ 1232 \\ \hline 12936 \end{array}$$

dan denken we er meestal niet bij na welk een geweldig hulpmiddel we hebben in de schrijfwijze van de getallen en het gebruik van het cijfer nul daarin. Stel je maar eens de Romein voor, die de getallen CCCVIII en XLII moest vermenigvuldigen. De Romeinen gebruikten bij het rekenen een abacus, een bord met richels, waarin steentjes of schijfjes heen en weer geschoven kunnen worden. Je kunt gemakkelijk een abacus nabootsen door een vel papier als een harmonica te vouwen. Als „steentjes" kun je erwten gebruiken. Elk steentje, dat

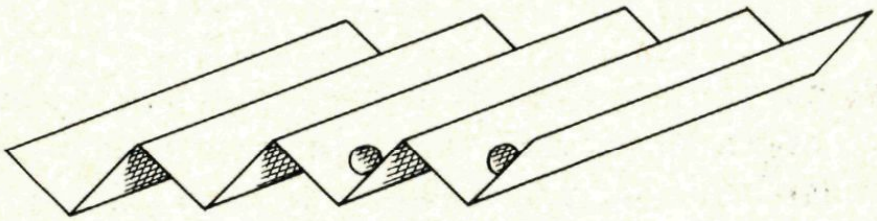


Fig. 1

in de meest rechtse richel ligt, heeft de waarde 1. Zodra er in deze richel 10 steentjes liggen, worden die vervangen door één steentje in de richel ernaast. Zo'n steentje heeft dan de waarde 10. Tien ervan worden weer vervangen door één in de volgende richel, dat de waarde 100 krijgt. Je kunt dus de waarden van de steentjes in elk der richels op de volgende manier aangeven:

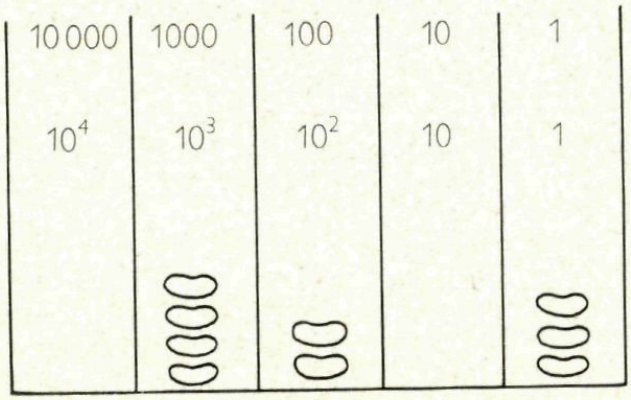


Fig. 2

Met de steentjes is het getal 4203 aangegeven, dat echter door de Romeinen niet zo werd geschreven, want ze kenden nog niet het prin-

cipe, dat elk cijfer in een getal zijn waarde krijgt naar de plaats, die het in dat getal inneemt. In Europa behaalde dit principe pas omstreeks het jaar 1500 de overwinning.
Het is natuurlijk niet nodig de abacus zo te gebruiken, dat elke keer een *tien*tal steentjes vervangen wordt door één steentje in de volgende richel. We zouden evengoed elk *zes*tal kunnen gaan vervangen. Het rekenen geschiedt dan in het zestallig stelsel. De waarden van de steentjes in de abacus zien we nu in de volgende figuur:

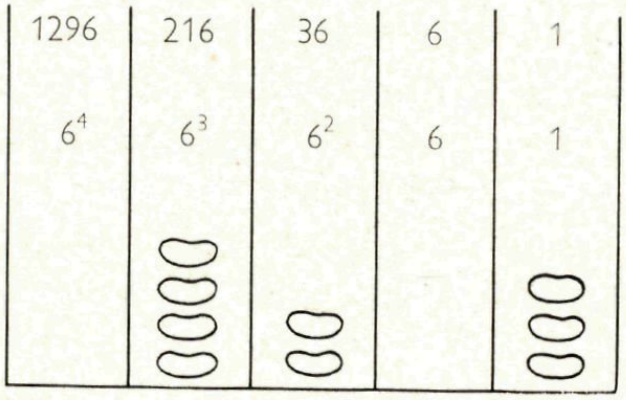


Fig. 3

Geven we het door de steentjes aangewezen getal opnieuw aan door 4203, dan mogen we daarvoor niet lezen vierduizend tweehonderd en drie. De waarde van het getal is dan nl. vier 216 tallen en twee 36 tallen en nog 3, dat is dus 939, geschreven in ons tientallig stelsel. In het zestallig stelsel worden alle getallen geschreven met de cijfers 0 tot en met 5, omdat er in elke richel hoogstens 5 steentjes kunnen liggen.
Interessant wordt het geval, als we elk *twee*tal steentjes in een richel vervangen door één in de volgende richel. Er kunnen dan in elke richel slechts nul of één steentje liggen, zodat elk getal dan kan worden voorgesteld met alleen maar cijfers 0 en 1. Zie fig. 4. Het getal, dat door de daarin aanwezige steentjes wordt voorgesteld heeft in ons tientallig stelsel de waarde $64 + 16 + 8 + 1 = 89$.

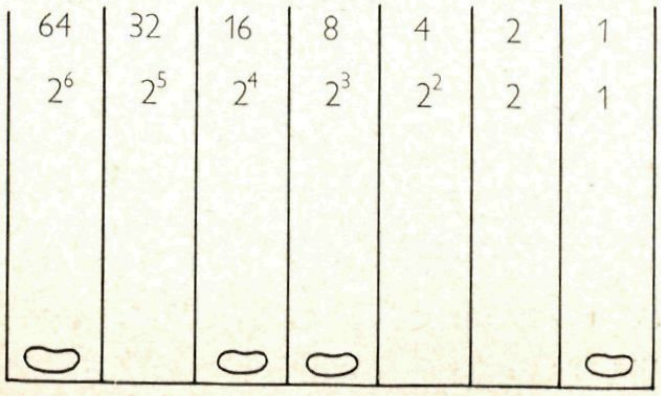


Fig. 4

In het tweetallige of *binaire* stelsel wordt het zo geschreven:

10110001

Men zou het echter ook op de volgende manieren kunnen schrijven:

ja, nee, ja, ja, nee, nee, ja

§△§§△△§

aan, uit, aan, aan, uit, uit, aan

$\alpha\beta\alpha\alpha\beta\beta\alpha$

en nog op vele andere, die men kan bedenken door voor wel een steentje in de richel of niet een steentje in de richel een teken af te spreken. Juist het feit, dat er maar twee tekens nodig zijn, maakt de binaire schrijfwijze tot een uiterst bruikbare. Vooral als er gerekend wordt met computers.

Hier volgen de getallen 1 tot en met 16 binair geschreven:

1 →	1	9 →	1001
2 →	10	10 →	1010
3 →	11	11 →	1011
4 →	100	12 →	1100
5 →	101	13 →	1101
6 →	110	14 →	1110
7 →	111	15 →	1111
8 →	1000	16 →	10000

Nu is er nog een moeilijkheid. Hoe spreek je de binaire getallen uit? Je kunt het getal 101 (= 5) natuurlijk uitspreken één nul één. Zo doet men dat dan ook meestal. In een Amerikaans artikel over binaire getallen werd de volgende uitspraak voorgesteld:

1 →	een	111 →	twenderd-twen-een
10 →	twen	1000 →	twenzend
11 →	twen-een	1001 →	twenzend-een
100 →	twenderd	10110 →	twentwenzend-twenderd-twen
101 →	twenderd-een		
110 →	twenderd-twen		enz.

Misschien merk je de analogie op met tien, honderd, duizend, tienduizend, enz. Je moet dit echter maar als een grapje beschouwen, want een officiële uitspraak is het niet. Hij is trouwens niet onaardig ge-

vonden. Je merkt er de Angelsaksische manier van tellen in, waarin men zegt twintig-een inplaats van een-en-twintig. Dat is eigenlijk logischer en praktischer, vooral bij het dicteren van een getal, bijvoorbeeld een telefoonnummer.

Je kunt een decimaal getal gemakkelijk omzetten in een binair getal: Deel het getal voortdurend door 2 en noteer telkens of de rest 0 of 1 is.

Bijvoorbeeld voor het jaartal 1966

1966		245		30		3	
983	0	122	1	15	0	1	1
491	1	61	0	7	1		
245	1	30	1	3	1		

Lees je de resten van boven naar beneden, dan heb je de cijfers van het binaire getal van achteren naar voren:

11110101110

Binair sorteren

We hebben al opgemerkt dat het feit dat er maar twee tekens nodig zijn het binaire stelsel zo bruikbaar maakt. Bijvoorbeeld in ponskaarten het al of niet hebben van een gaatje op een bepaalde plaats. We kunnen het stelsel ook gebruiken voor het sorteren van kaarten.

Omdat er niets zo overtuigend is als de eigen ervaring doe je er goed aan een vijftiental kaarten te maken, waarmee je het binair sorteren kunt demonstreren. Succes in de huiselijke kring is verzekerd. Alle kaarten voorzie je links boven van een schuin kantje. Dat dient om ze gemakkelijk in de goede stand te kunnen zetten. Heel nauwkeurig maak je in elke kaart vier gaatjes op precies dezelfde plaats. Leg je de kaarten op elkaar, dan moet je door alle gaatjes heen kunnen kijken. (Fig. 5).

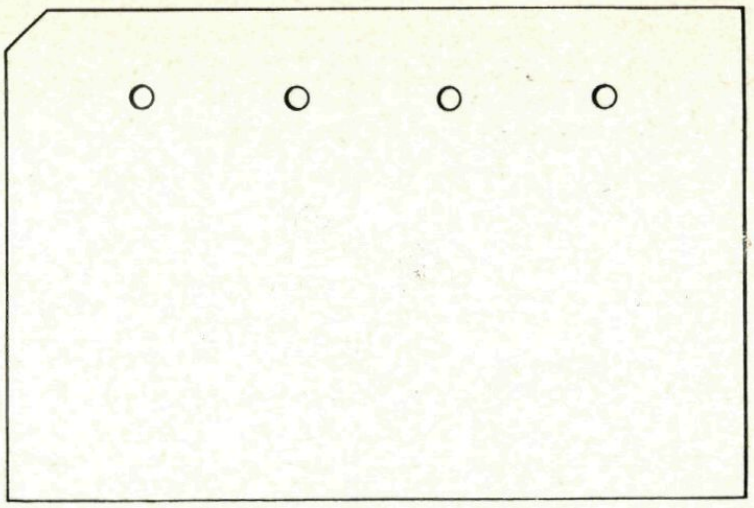


Fig. 5

Elk gaatje stelt een nul voor. Op de kaart van fig. 5 is dus het getal nul afgebeeld. Van een nul maak je een 1 door een sleuf te knippen van de bovenrand tot het gaatje. In fig. 6 zie je dat de kaart het nummer 5 draagt en als je nog eens even de binaire getallen 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, enz. de revue laat passeren, dan zie je, dat inderdaad de gaatjes en sleuven het binaire getal 0101, dus het decimale getal 5 voorstellen.

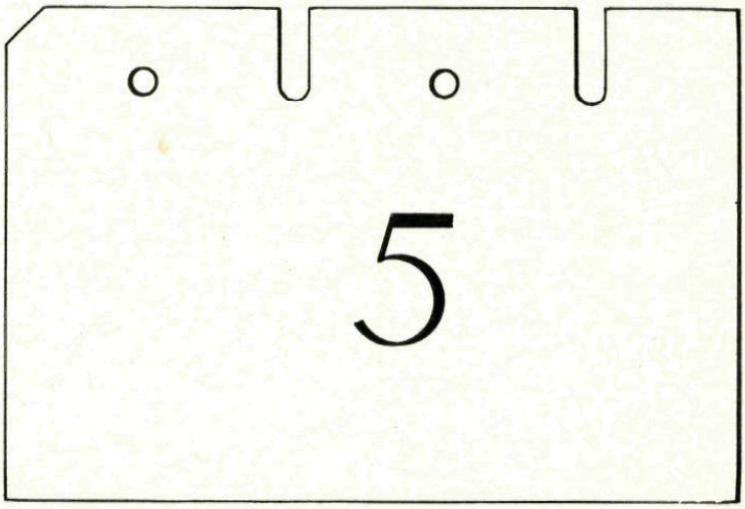


Fig. 6

Laten we nu eens aannemen, dat je 15 kaarten hebt klaargemaakt. Ze zijn dan op de volgende manier van gaten en sleuven voorzien:
0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000,
1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111.

Steek je nu — als je de kaarten allemaal zo op elkaar hebt liggen, dat het schuine kantje links bovenaan zit — een breipen door het meest rechtse gat, dan zullen er acht kaarten niet blijven hangen en de andere zeven wel.
Welke „getallen" zijn er af gevallen? Zeker de oneven getallen. Immers ze hadden allen rechtsboven een sleuf, dus een 1. De even getallen

hangen nog op de naald. Door een prik met de breipen heb je dus al een scheiding tussen even en oneven gemaakt.
Welke getallen blijven er hangen als je door het tweede gaatje van rechts van alle vijftien kaarten de breipen steekt?

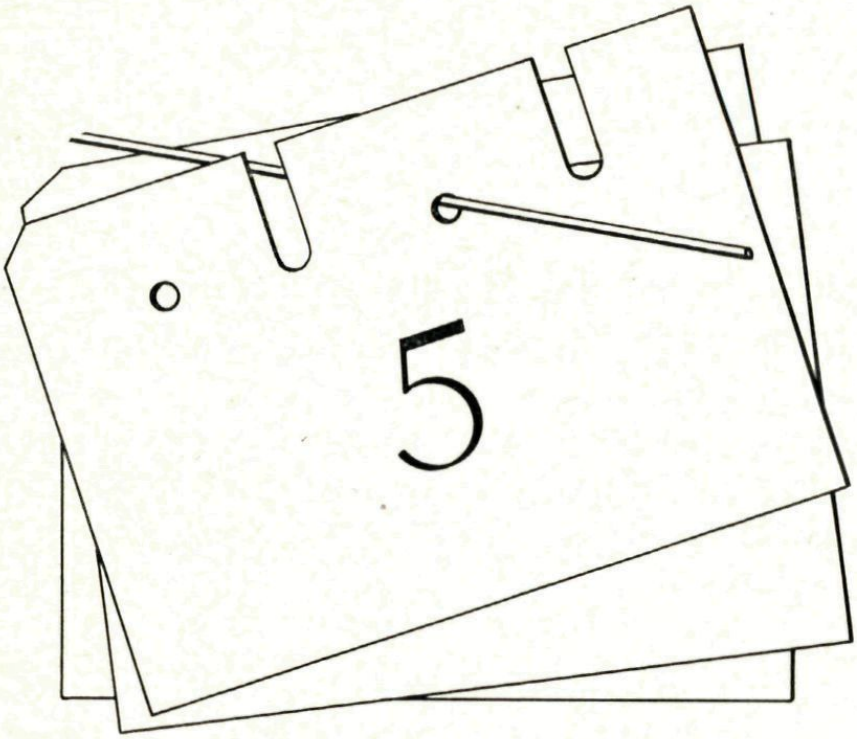


Fig.7

Je kunt ze gemakkelijk uit het bovenstaand overzichtje aflezen. Het zijn nl. de getallen, die op de tweede plaats een nul hebben. Dat zijn 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13. (De viervouden en de viervouden-plus-een).
Wil je nu, als je de vijftien kaarten in een willekeurige volgorde hebt liggen er één kaart snel uit sorteren, bijvoorbeeld de kaart 12, dan kan dat met vier „prikken".

1e prik: rechter gaatje, alle even kaarten blijven hangen. Daar is 12 bij. Ga dus verder met die kaarten. Dat zijn 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14.

2e prik: Tweede gaatje van rechts. We zagen al, dat de viervouden en de viervouden-plus-een blijven hangen. Daar we nog slechts even getallen hadden overgehouden van de 1e prik, hangen nu nog 4, 8 en 12 aan de naald.

3e prik: derde gaatje van rechts, ga maar na, dat nu alleen 8 blijft hangen en dat 4 en 12 van de naald vallen. Zonder te kijken kun je nu uit deze twee 12 vinden door de

4e prik: vierde gaatje, nu valt 12 van de naald.

Oefen je je goed, zodat je snel uit het hoofd kunt zeggen welke der vijftien kaarten bij elk der prikken blijft hangen, dan wekt de demonstratie steeds bewondering. Vooral als je de kaarten zo houdt, dat de toeschouwers de nummers niet kunnen lezen.
Er is nog een tweede manier, waarop je het binair sorteren mooi kunt laten zien. Dat is nl. de methode, waarop je met vier prikken de kaarten, als ze door elkaar geraakt zijn, alle netjes weer op volgorde kunt krijgen. Het aardigste demonstreer je dat door op de achterkanten van de kaarten telkens een woord te schrijven. Als die 15 woorden dan samen een zin vormen, dan blijkt het bereiken van het resultaat uit het feit, dat de woorden van de zin in de goede volgorde staan. Zo'n zin van 15 woorden (de komma ook als een woord meegeteld) is bijvoorbeeld: *Dank zij het binaire stelsel, liggen de woorden nu alle in de juiste volgorde.*
Bij het begin van het experiment liggen de kaarten dus willekeurig door elkaar. Je prikt eerst in het rechtergaatje. Je laat daarbij voorzichtig de kaarten, die van de naald afvallen, zakken, zodat ze in dezelfde volgorde blijven staan. De groep kaarten, die op de naald bleven hangen, zet je in zijn geheel achter de andere. Deze operatie herhaal je met een prik in het tweede, daarna het derde en dan het vierde gaatje en je zult merken, dat alle kaarten inderdaad in de goede volgorde zijn gekomen. Hoe dat kan, moet je zelf maar eens uitzoeken.

Niet-euclidische meetkunde

I. Geschiedenis

De meetkunde waar we ons dagelijks mee bezig houden wordt wel de Euclidische meetkunde genoemd, ter ere van Euclides, die tussen 330 en 320 voor Christus een aantal boeken, genaamd „Elementen" geschreven heeft, waarin de meetkunde wordt opgebouwd met stellingen die nauwkeurig worden bewezen, uitgaande van een vijftal postulaten of grondstellingen. Dit meetkundeboek is wel het beroemdste boek uit de geschiedenis van de wiskunde. Tot na 1900 heeft het als voorbeeld gediend voor alle meetkundeleerboeken die, waar dan ook, geschreven zijn.

Tegenwoordig kennen we ook niet-Euclidische meetkunde waarvan we een paar voorbeelden zullen geven in volgende artikelen. Voordat we dit kunnen doen moeten we echter nagaan wat het verschil is met de „gewone" meetkunde. Hiertoe zullen we ons met een paar grote stappen door de geschiedenis begeven, we komen dan vanzelf tot ons doel en kunnen misschien „en passant" belangstelling voor deze bijzonder interessante geschiedenis wekken.

We beginnen dus bij Euclides, meer in het bijzonder bij zijn vijf postulaten, tegenwoordig meestal axioma's genoemd. Vrij vertaald luiden deze:

1. Door twee punten gaat steeds een rechte lijn.
2. Een lijnstuk kan naar beide kanten onbeperkt worden verlengd.
3. Er kan met elk middelpunt en elke straal een cirkel getrokken worden.
4. Alle rechte hoeken zijn gelijk.
5. Als bij twee lijnen, gesneden door een derde, twee niet-verwisselende binnenhoeken samen kleiner dan 180° zijn, dan snijden die twee lijnen elkaar.

Euclides was hiermee niet volledig, zo gebruikt hij bijvoorbeeld zonder meer dat een lijn oneindig lang is.

Opvallend is dat het vijfde axioma er heel anders uitziet dan de eerste vier, het ziet er veel meer uit als een stelling. En juist dit zogenaamde parallellen axioma is zo belangrijk! We kunnen het ook zo zeggen: Als twee lijnen elkaar niet snijden (dus evenwijdig zijn), dan zijn twee niet verwisselende binnenhoeken samen 180°. Of nog anders gezegd: Door een punt P buiten een lijn *l*, gaat precies één lijn die evenwijdig loopt met *l*. Hierop berust een groot gedeelte van de Euclidische meetkunde, bijvoorbeeld dat de som van de hoeken van een driehoek 180°

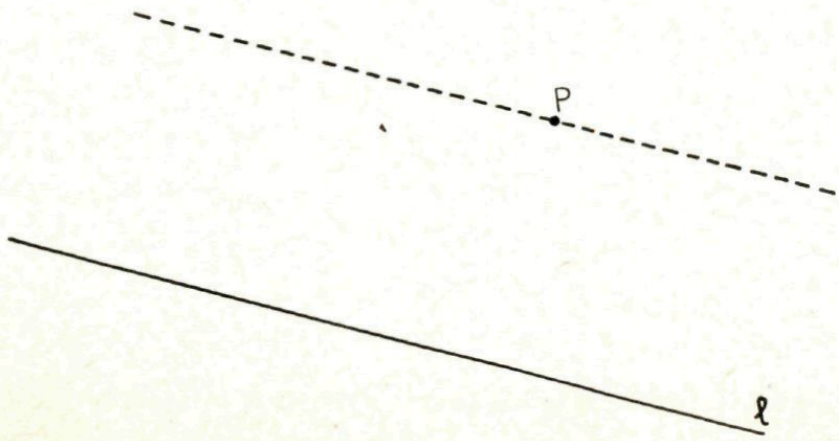


Fig. 8

is. (Dit wordt immers bewezen door een lijn te trekken die evenwijdig aan één van de zijden loopt.)
Het parallellenaxioma werd door de wiskundigen in de loop der eeuwen gezien als een vlek op het blazoen van Euclides. Ze dachten dat het als stelling bewezen moest kunnen worden, met behulp van de overige axioma's. We kunnen ons immers niet voorstellen dat door P van fig. 8 nog meer lijnen evenwijdig aan *l* zouden gaan. Maar onze voorstelling bedriegt ons wel eens! Meer dan 2000 (tweeduizend!) jaar hebben generaties van wiskundigen zich hiermee bezig gehouden. Zo ook Girolamo Saccheri (1667–1733), een Italiaans geestelijke. Hij redeneerde als volgt: Teken een lijnstuk AB en richt in de punten A en B gelijke loodlijnstukken AD en BC op. Als we CD trekken dan is ABCD een rechthoek (fig. 9) Maar als het parallellenaxioma niet geldt, dan is de som van de hoeken van een vierhoek ook geen 360°,

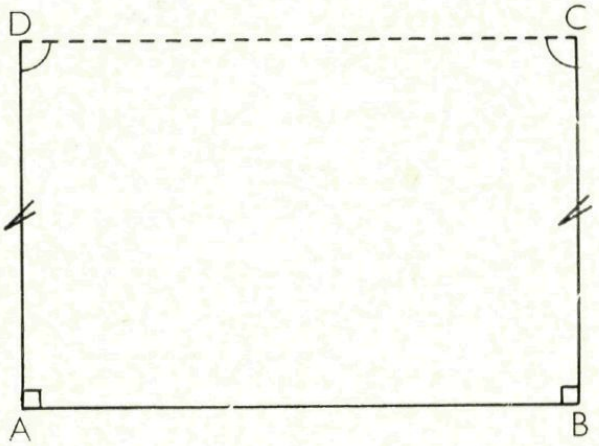


Fig. 9

zodat ABCD geen rechthoek is. Dat de hoeken C en D gelijk zijn, is zonder het axioma te bewijzen. Wel, dacht Saccheri, neem aan dat de hoeken C en D beide scherp zijn of beide stomp, dan moet ik tot een tegenspraak komen en dan heb ik uit het ongerijmde bewezen dat beide hoeken recht moeten zijn, zodat het parallellenaxioma bewezen is.
De veronderstelling dat de hoeken C en D stomp zijn leidde inderdaad spoedig tot een tegenspraak, de veronderstelling dat ze scherp zijn echter niet. Saccheri leidde hieruit de ene stelling na de andere af, zonder tot het verwachte resultaat te komen, tot hij tenslotte moedeloos besloot: De veronderstelling van de scherpe hoek is onwaar, daar zij met de natuur van de rechte lijn in strijd is. In feite had hij een heel stuk niet-Euclidische meetkunde afgeleid en was alleen zijn conclusie onjuist!

Het duurde niettemin nog weer meer dan honderd jaar voor het juiste inzicht er kwam en wel bij drie wiskundigen ongeveer gelijktijdig en waarschijnlijk onafhankelijk van elkaar, namelijk de Duitser Karl Friedrich Gauss, de Hongaar Johann Bolyai en de Rus Nicolaj Iwanowitsch Lobatschefsky. Johann Bolyai was de zoon van een wiskunde leraar die een studiegenoot van Gauss was en die een groot deel van zijn leven met het parallellenprobleem bezig geweest is. Toen zijn zoon zich er ook mee bezig besloot te houden kreeg hij van zijn vader de waarschuwing mee: „De pikdonkere duisternis van dit probleem kan wel duizend reuzen als Newton verslinden, het zal nooit licht op aarde geven".

Johann kwam echter tot het inzicht dat het mogelijk is een meetkunde op te stellen, waarin door het punt P van fig. 8 oneindig veel lijnen gaan die l niet snijden. Hij publiceerde zijn bevindingen als aanhangsel bij een boek van zijn vader in 1832. Deze was zeer verontrust door de denkbeelden van zijn zoon en schreef hierover aan Gauss. Het antwoord was zeer lovend voor Johann, Gauss schreef dat hij hem niet kon prijzen, daar hij dan zichzelf zou prijzen. Hij was al lang tot hetzelfde inzicht gekomen. Het verdroot Johann echter zeer dat hij dus niet de eerste was, en toen later bleek dat ook Lobatschefsky al eerder dezelfde resultaten had gepubliceerd en bovendien niemand er aandacht aan besteedde, was hij zo teleurgesteld, dat hij nooit meer iets geschreven heeft op het gebied van de wiskunde.

De niet-Euclidische meetkunde van dit drietal komt overeen met het geval van de scherpe hoek bij Saccheri. De som van de hoeken van een driehoek is dan kleiner dan 180°. We noemen dit de hyperbolische meetkunde.

Nog wat later is ontdekt dat ook het geval van de stompe hoek mogelijk is, echter alleen wanneer een lijn niet oneindig lang is, maar gesloten, als een cirkel. In dit geval is de som van de hoeken van een driehoek groter dan 180°. We noemen dit de elliptische meetkunde.

De „gewone" meetkunde (ook wel parabolische genoemd) is dus niet „de" meetkunde, maar „een" meetkunde. Als we andere axioma's nemen, dan krijgen we ook een ander soort meetkunde.

Onze tocht door de geschiedenis eindigt omstreeks 1900 toen volledige stelsels axioma's voor de Euclidische meetkunde zijn opgesteld, die met geringe wijzigingen ook voor de niet-Euclidische gelden, waarmee de afronding van een 2200 jarige ontwikkeling op het gebied der meetkunde tot stand kwam.

Oplossingen inzenden voor 1 november

1. Bewijs dat het mogelijk is binnen een gegeven vierkant met zijden van 12 cm een cirkel te tekenen, wiens afstanden tot de zijden van dat vierkant 1 cm, 3 cm, 4 cm en 6 cm bedragen. Hoeveel van dergelijke cirkels zijn er?

2. We beschouwen de natuurlijke getallen, die met ten hoogste zes cijfers geschreven worden en waarbij ten minste **een** van de cijfers een 7 is. Hoeveel van zulke getallen zijn er?

3. Teken vier cirkels, die elkaar twee aan twee snijden en dat zo doen dat elk drietal van die cirkels precies **een** gemeenschappelijk punt heeft. Er zijn twee principieel verschillende manieren om deze opdracht uit te voeren en deze moeten allebei getoond worden.

4. Het bestuur van een bridgeclub wil een onderlinge wedstrijd organiseren, waar 18 personen aan zullen meedoen. Elk van deze 18 deelnemers moet elk van de anderen precies voor één spel tot partner hebben. Het bestuur slaagt er niet in een speelschema op te stellen. Kun je helpen?

Wimecos-prijsvraag

Al een paar duizend jaren lang hebben de wiskundigen zich verdiept in de eigenschappen van de priemgetallen. Dat werk heeft vele vruchten opgeleverd, want er zijn vele wonderlijke eigenschappen van deze ogenschijnlijk zo onregelmatige rij getallen bekend geworden. Tot een afgerond geheel is men echter nog altijd niet gekomen; er zijn een aantal zeer sterke vermoedens, waarvan men de juistheid nog niet heeft kunnen bewijzen.
Na al die eeuwen kwam een paar tientallen jaren geleden de grote wiskundige Ramanujan met een min of meer verwante getallensoort voor de dag. Hij noemde ze de „highly composite numbers" en wij zullen ze de „rijke" getallen noemen. Die rijkdom heeft dan betrekking op het aantal delers van die getallen.

Zoals bekend is, is een priemgetal een getal dat precies twee verschillende delers bezit, namelijk zichzelf en 1 (we beperken ons tot natuurlijke getallen en natuurlijke delers daarvan); de priemgetallen zijn dus bijzonder „arm". Onder een rijk getal verstaat Ramanujan nu een getal > 2, dat meer delers bezit dan elk kleiner getal.

getal:	delers	aantal delers	
1	1	1	
2	1, 2	2	rijk
3	1, 3	2	
4	1, 2, 4	3	rijk
5	1, 5	2	
6	1, 2, 3, 6	4	rijk
7	1, 7	2	
8	1, 2, 4, 8	4	
9	1, 3, 9	3	
10	1, 2, 5, 10	4	
11	1, 11	2	
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6	rijk
13	1, 13	2	
14	1, 2, 7, 14	4	
15	1, 3, 5, 15	4	
16	1, 2, 4, 8, 16	5	
17	1, 17	2	
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	6	
19	1, 19	2	
20	1, 2, 4, 5, 10, 20	6	
21	1, 3, 7, 21	4	
22	1, 2, 11, 22	4	
23	1, 23	2	
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	8	rijk

Uit de bovenstaande tabel zien we, dat de rij van de rijke getallen begint met 2, 4, 6, 12, 24, . . .
De introductie van de rijke getallen door Ramanujan heeft nou niet bepaald grote deining verwekt in de wiskundige wereld. Maar toch is deze introductie wel een blijk van de grootheid van deze wiskundige uit India. Hij, die alleen maar de door anderen opgeworpen problemen oplost, is geen groot wiskundige, al zijn zijn antwoorden nog zo schrander. De werkelijke vooruitgang in een tak van wetenschap berust op het stellen van vragen, niet op het beantwoorden daarvan.

Deze laatste opmerking bepaalt eigenlijk het karakter van de onderstaande Wimecos-prijsvraag. Hieronder vind je een aantal opdrachten.

De eerste vier daarvan dienen alleen maar om je op gang te helpen, maar bij de volgende sta je op eigen benen. Daarbij hangt het er in de eerste plaats van af of je een paar verstandige vragen weet te stellen.

1. Elk natuurlijk getal n is zelf een priemgetal of is in machten van priemgetallen te ontbinden (bijvoorbeeld $360 = 2^3.3^2.5$). Hoe hangt het aantal delers van n af van de exponenten in die ontbinding?
2. Breid de rij 2, 4, 6, 12, 24, . . . van de rijke getallen een eindje uit.
3. Als een rijk getal r deelbaar is door het priemgetal p, dan is r ook deelbaar door elk priemgetal dat kleiner is dan p. Bewijs dat.
4. Rangschikt men de priemfactoren in de ontbinding van een rijk getal naar opklimmende grootte, dan vormen de bijbehorende exponenten een niet-stijgende rij. Bewijs dat.
5. Stel een paar vragen op, die betrekking hebben op de rij van de rijke getallen. Kun je een of meer van die vragen zelf beantwoorden, doe dat dan. Heb je een sterk vermoeden, waarvan je de juistheid niet kunt bewijzen, vermeld dat dan.

Oplossingen voor 1 november inzenden.

°° Harmonische ligging

1. *Een harmonisch viertal*

Je kent waarschijnlijk de zg. bissectricestelling. Zoek hem anders in je boek even op. Van de situatie in fig. 10 zegt deze stelling, dat DA : DB = EA : EB = $b : a$.

We zullen ons in dit artikel bezighouden met puntenviertallen, die net zo liggen, als A, D, B en E in deze figuur, nl. zo dat de verhoudingen DA : DB en EA : EB gelijk zijn. Liever nog willen we ons aansluiten

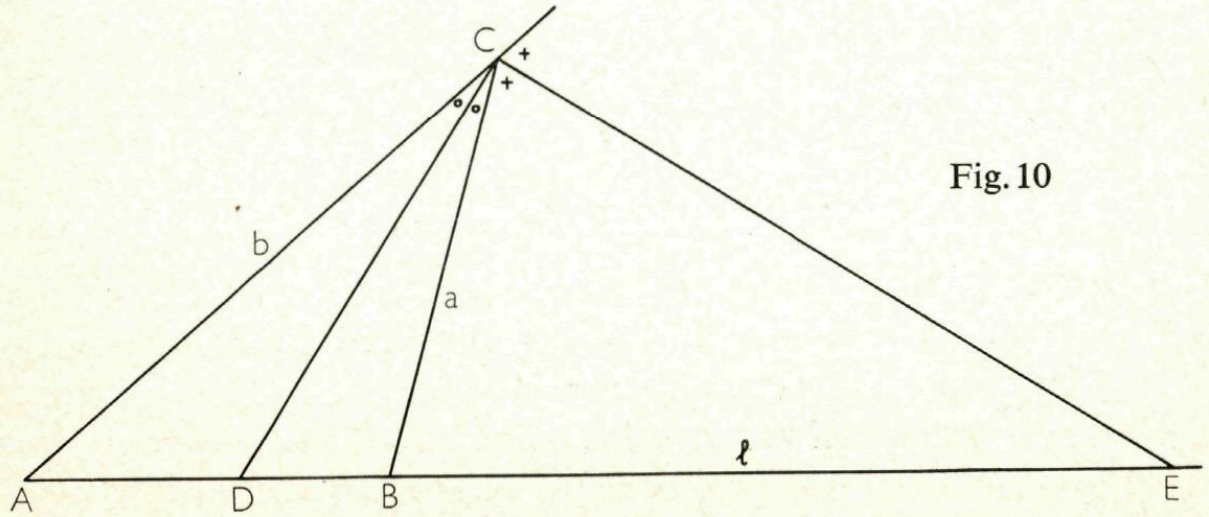


Fig. 10

bij het wiskundige gebruik tegengesteld gerichte lijnstukken van een tegengesteld teken te voorzien. DA en DB zijn tegengesteld gericht (DA naar links, DB naar rechts). Daarentegen zijn EA en EB gelijk gericht (beide naar links). Daarom zullen we zeggen, dat

$$DA : DB = -(EA : EB)$$

Een viertal punten, dat op een rechte ligt net als A, B, D en E in fig. 11 heet een *harmonisch viertal.*

2. *Constructie*

We gaan ons eerst bezig houden met de constructie van het vierde harmonische punt, als drie ervan gegeven zijn. De vraag is dus bijvoorbeeld om in fig. 11 het punt Q op de rechte *l* er zo bij te construeren, dat PA : PB = —(QA : QB).

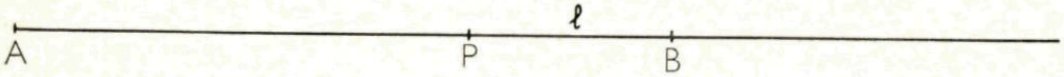


Fig. 11

Deze constructie kan bijvoorbeeld op de volgende manier plaats vinden: (fig. 12).

1. Trek door A en B in een willekeurige richting twee evenwijdige rechten *m* en *n*.
2. Trek door P een rechte p, die *m* in C en *n* in D snijdt.
3. Verleng DB met BE = DB.
4. Trek CE. Deze snijdt *l* in het gevraagde punt Q.

De juistheid van de constructie wordt gemakkelijk bewezen met gelijkvormigheid van driehoeken.

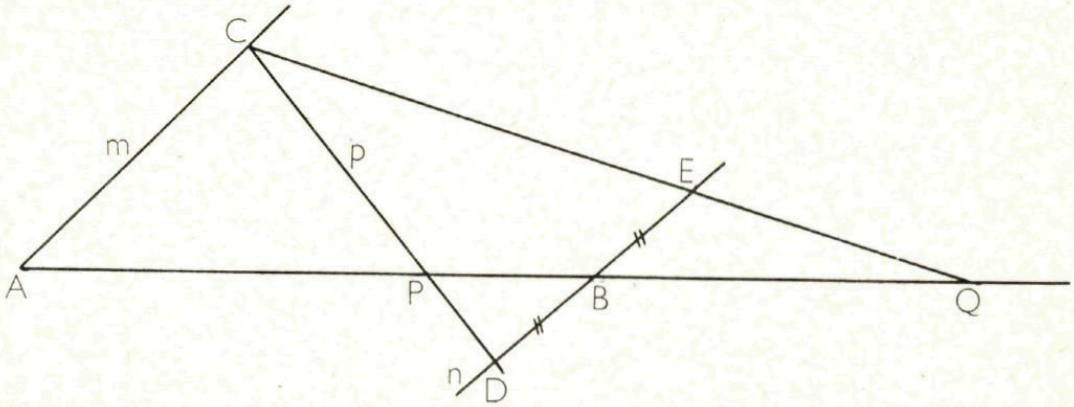


Fig. 12

Laten we even nagaan, wat er gebeurt, als we A en B vasthouden, maar P zich over *l* laten verplaatsen. We kunnen daarbij de rechten *m* en *n* en ook het punt C vasthouden, zodat met P zich alleen het punt D verplaatst en met D natuurlijk ook E. Gaat P naar B toe, dan wordt

BD en dus BE kleiner, dan komt daardoor ook Q dichter bij B. P en Q komen gelijktijdig in B aan.
Verplaatst P zich in de richting van A, dan worden DB en BE groter. Q verwijdert zich van B. Valt P in het midden van AB dan zijn DB en BE gelijk aan AC en loopt CE evenwijdig met *l*. Dan is er dus geen punt Q. *Er is geen vierde harmonische punt, als AP = PB.*
Gaat P voorbij het midden van AB nog verder naar A, dan komt Q links van A te liggen. Eerst heel ver weg. Maar met grote snelheid loopt het naar A toe, als P naar A gaat en gelijktijdig arriveren ze daar.

3. *Een harmonische vierstraal*
We gaan nog eens even terug naar fig. 10. A, D, B en E vormen een harmonisch puntenviertal. Maar trekken we een rechte *l'*, waarop de punten A', D', B' en E' komen te liggen, dan vormen die opnieuw een harmonisch viertal, hoe en waar we *l'* ook trekken. Immers ook in △ A'B'C geldt de bissectricestelling.

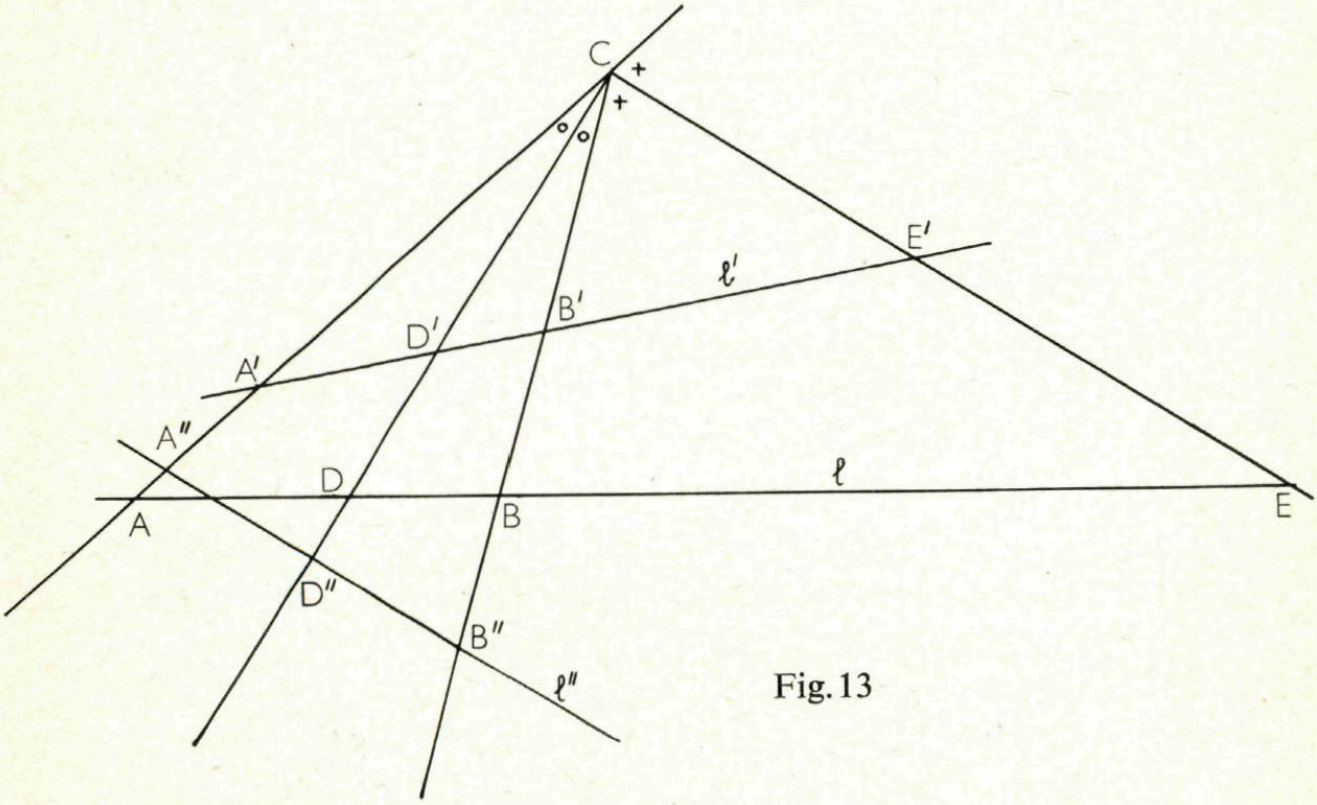


Fig. 13

Wanneer we l'' evenwijdig trekken met CE, dan vinden we wel de punten A'', D'' en B'', maar een punt E'' is er dan niet. Wat concludeer je daaruit voor de punten A'', D'' en B''? Kun je dat op een eenvoudige manier bewijzen?
We noemen de vier van C uitgaande rechten in deze figuur een *harmonische vierstraal.*

Het is echter helemaal niet nodig van de figuur van een driehoek met zijn bissectrices uit te gaan om een harmonische vierstraal te krijgen. Neem maar eenvoudig een harmonisch puntenviertal (A, P, B, Q) op een rechte *l*. Kies buiten *l* een punt O. Dan vormen de rechten OA, OP, OB en OQ een harmonische vierstraal. Dat betekent dus, dat elke rechte l′, die dit viertal snijdt, een harmonisch puntenviertal A′, P′, B′, Q′ oplevert. We bewijzen dat: (fig. 14).

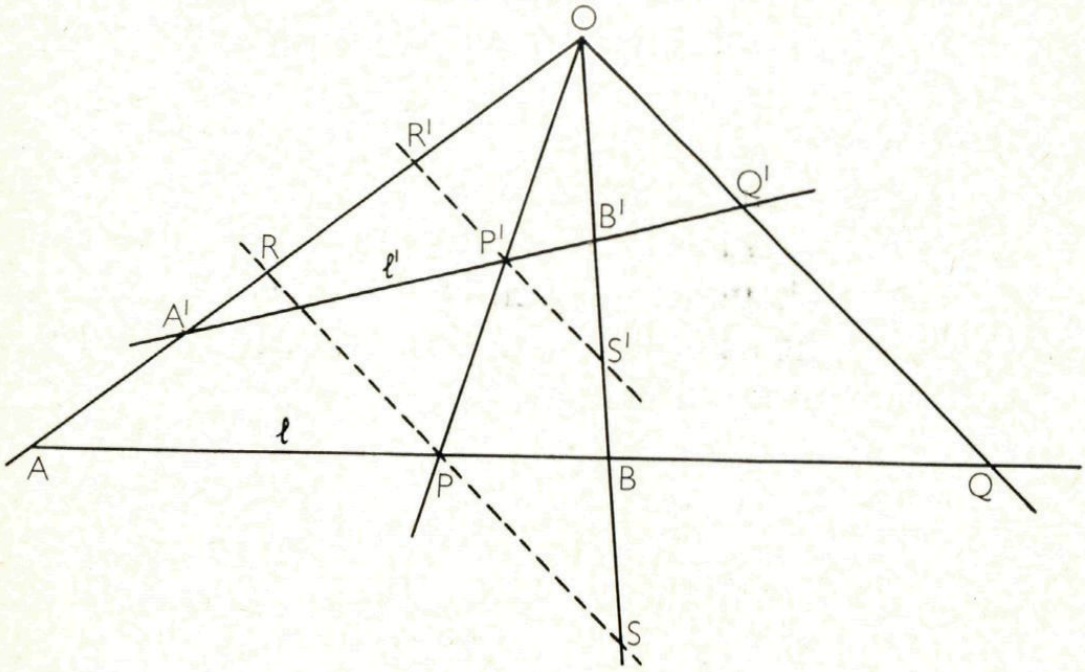


Fig. 14

Gegeven is PA : PB = — (QA : QB)
en te bewijzen P′A′ : P′B′ = — (Q′A′ : Q′B′)
Trek door P en P′ rechten evenwijdig met OQ. We vinden
(△ APR ~ △ AQO) PR : QO = PA : QA
(△ PBS ~ △ QBO) PS : QO = —(PB : QB)
Nu volgt uit het gegeven, dat de rechterleden in deze beide betrekkingen tegengesteld zijn, dus ook de linkerleden en daaruit volgt

$$PR = -PS.$$

Met behulp van gelijkvormige driehoeken of de evenredigheidsstelling is nu gemakkelijk te bewijzen, dat ook P′R′ = —P′S′.
Uit △ A′P′R′ ~ △ A′Q′O en △ P′B′S′ ~ △ Q′B′O volgt dan zonder moeite het gestelde.
Uit het bovenstaande bewijs leiden we af:
Trekken we een rechte evenwijdig met een der stralen van een harmonische vierstraal, dan snijden de drie andere stralen op deze rechte twee gelijke lijnstukken in. Omgekeerd: Trekken we een rechte evenwijdig met een der stralen van een vierstraal en snijden de andere drie

op deze rechte twee gelijke lijnstukken in, dan is de vierstraal harmonisch.
Een bijzondere harmonische vierstraal wordt verkregen, als men door A, P, B, en Q vier evenwijdige rechten trekt.

---

5. Driehoek ABC is gelijkbenig (CA = CB). Door het hoekpunt A is een rechte getrokken, die driehoek ABC in twee kleinere driehoeken verdeelt. Die twee deeldriehoeken zijn allebei gelijkbenig, maar geen van hen is gelijkvormig met driehoek ABC. Bereken de hoeken van driehoek ABC.

6. Van de natuurlijke getallen a, b, c, d is gegeven dat $ad - bc = 1$ is. Bewijs, dat de drie gebroken getallen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{a+c}{b+d}$ onvereenvoudigbaar zijn.

7. Een willekeurige scherphoekige driehoek kan men in drie gelijkbenige driehoeken verdelen door de stralen van zijn omgeschreven cirkel naar de hoekpunten te trekken. Voor een stomphoekige driehoek is deze verdeelmethode niet bruikbaar. Vandaar de vraag: hoe groot is het minimale aantal gelijkbenige driehoeken, waarin elke stomphoekige driehoek verdeeld kan worden?

°° Het weer bij tegenvoeters

Het karakter van het weer wordt bepaald door een fiks aantal grootheden (temperatuur, luchtdruk, relatieve vochtigheid van de lucht, bewolkingspercentage, enzovoorts). Op ieder moment zijn er oneindig veel plaatsen op aarde, waar de temperatuur gelijk is aan die bij de tegenvoeters. Dit wordt in het onderstaande artikel wiskundig bewezen. We gaan zelfs nog verder en tonen aan, dat er altijd paren diametraal tegenover elkaar liggende punten bestaan met gelijke temperatuur èn gelijke barometerstand. Het bestaan van plaatsen op aarde, waar het weer in meer dan twee factoren overeenstemt met dat bij de tegenvoeters, blijkt mogelijk en onwaarschijnlijk te zijn.

Laten we eens aannemen dat we voor een bepaald tijdstip de temperatuur van elke plaats op aarde kennen. We kunnen dan voor elk punt van de aardbol de temperatuur vergelijken met die in het tegenpunt. Blijken die twee temperaturen verschillend te zijn, dan versieren we in gedachten het punt met de hoogste temperatuur met een PLUS en dat met de laagste temperatuur met een MIN. Blijken die twee temperatu-

ren echter gelijk te zijn, dan plaatsen we bij beide punten een NUL. Op die manier wordt de aardbol één groot veld van tekens, waarbij diametraal tegenover elke PLUS een MIN staat en omgekeerd, en tegenover elke NUL een NUL staat.
Onze eerste stelling houdt nu in, dat in zo'n tekenveld stellig oneindig veel NULLEN voorkomen. Dit is zeker het geval, indien het gehele tekenveld louter uit NULLEN bestaat (een theoretisch denkbaar, maar praktisch hoogst onwaarschijnlijk geval). Voor het bewijs van de stelling nemen we dus aan, *dat er op de aardbol een PLUSpunt A en een MINpunt B voorkomt*; A en B zouden elkaars tegenpunten kunnen zijn, maar nodig is dat niet (zie figuur 15). Ook is het niet nodig dat het in A warmer is dan in B.

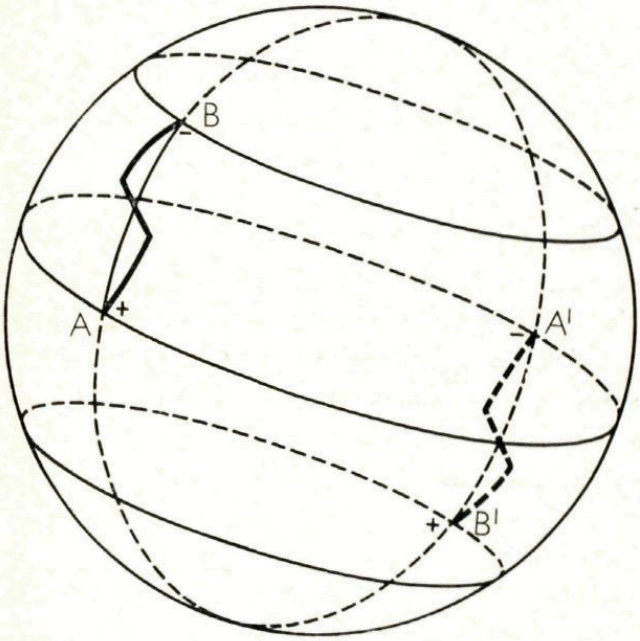


Fig. 15

A en B liggen op de voorkant van de bol, A′ en B′ diametraal daartegenover op de achterkant. De lijn A′B′ ligt ook diametraal tegenover AB.

We tekenen nu op de aardbol een of ander verbindingslijntje van A naar B van willekeurige vorm en bestuderen het temperatuursverloop langs die lijn. Daarvan valt een grafiek te maken, die er zou kunnen uitzien zoals in figuur 16; denk je maar in, dat het lijntje AB in „gestrekte" toestand langs de x-as gelegd is.
We richten nu onze aandacht op de tegenpunten A′ en B′ van A en

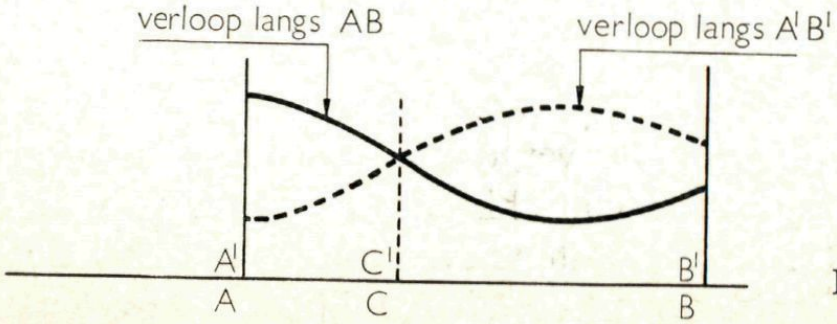


Fig. 16

B èn op een verbindingslijn A′B′, die punt voor punt diametraal tegenover de lijn AB ligt. De grafiek, die we van het temperatuursverloop langs A′B′ maken, wordt even breed als de grafiek van het verloop langs AB. We leggen die twee grafieken op elkaar, zodat op de x-as A met A′ samenvalt en B met B′ (in figuur 16 is dat al gebeurd).
Omdat A een PLUSpunt was, is de temperatuur in A hoger dan die in A′. Dat wil zeggen, dat de tweede grafiek aan de linkerkant *onder* de eerste begint. Omdat B een MINpunt was, is de temperatuur in B lager dan die in B′. Dat wil zeggen, dat de tweede grafiek aan de rechterkant *boven* de eerste eindigt. Het beginpunt en het eindpunt van de tweede grafiek liggen dus aan verschillende zijden van de eerste grafiek. Daaruit volgt, dat de twee grafieken elkaar beslist moeten snijden. Dat snijpunt correspondeert nu met een punt C op de lijn AB en met een punt C′ op de lijn A′B′; C en C′ liggen diametraal tegenover elkaar op de aardbol en hebben gelijke temperaturen, dus C en C′ zijn allebei NULpunten.
Het gewenste bewijs is nu snel te voltooien (zie figuur 17): er zijn oneindig veel verbindingslijnen van A met B te maken en elk daarvan bevat volgens het voorgaande een NULpunt; het tekenveld bevat dus oneindig veel NULpunten.

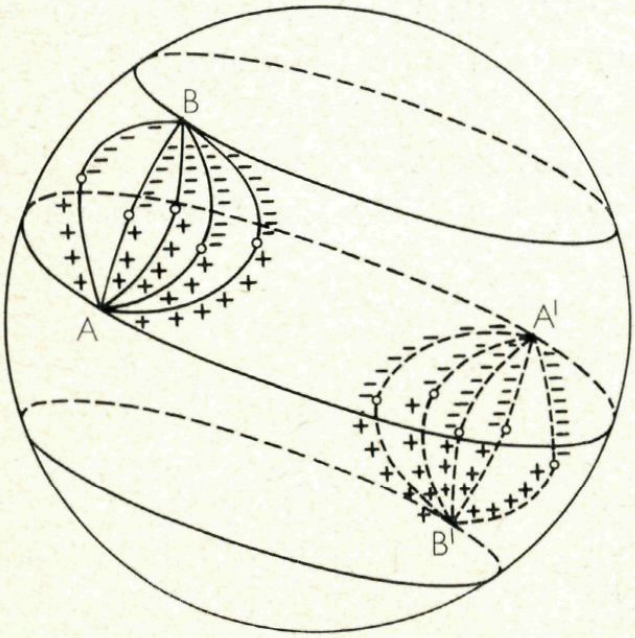


Fig. 17

We onderbreken het geleverde betoog nu voor een kritische terugblik. Dat is wel nodig, want we hebben in het voorgaande stilzwijgend een veronderstelling gemaakt en gebruikt, die misschien niet voor iedereen vanzelfsprekend juist is.

We hebben namelijk aangenomen, dat de temperatuur tussen A en B continu verloopt en niet met sprongen verandert. Indien de temperatuur sprongsgewijze kon veranderen, dan zou figuur 16 misschien vervangen moeten worden door figuur 18 en dan zou er van onze conclusie geen spaan heel blijven.

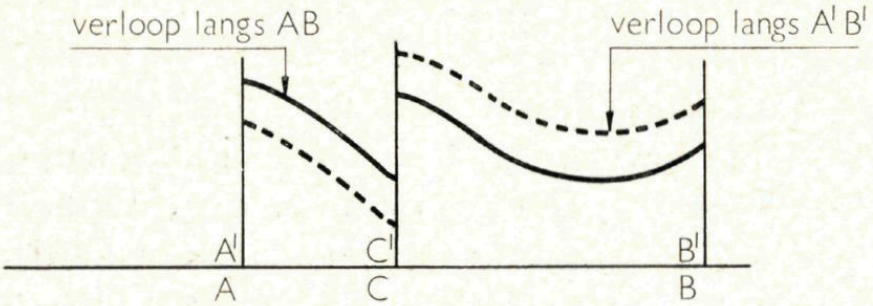


Fig. 18

Onweerstaanbaar moeten we nu denken aan de meneer van het weeroverzicht van de televisie, die altijd over „fronten" praat en ons daarbij vertelt dat de temperaturen aan beide zijden van zo'n front aanmerkelijk van elkaar verschillen. Niettegenstaande de suggestie, die van hem uitgaat, menen we toch onze veronderstelling over het continue verloop van de temperatuur te mogen maken. Zelfs bij zo'n front, zo stellen we ons voor, zal er toch wel een uiterst dunne overgangslaag zijn waarin de temperatuur geleidelijk van de lage waarde aan de ene zijde toeneemt tot de hoge waarde aan de andere zijde.
En dus houden we ons ook verder in dit artikel aan onze veronderstelling, dat alle weersgrootheden zich als wiskundig „nette" continue functies gedragen.
Nu moeten we ons voor het vervolg wel goed realiseren, dat de situatie uit figuur 16 maar een voorbeeld was. We nodigen je dus uit om eens

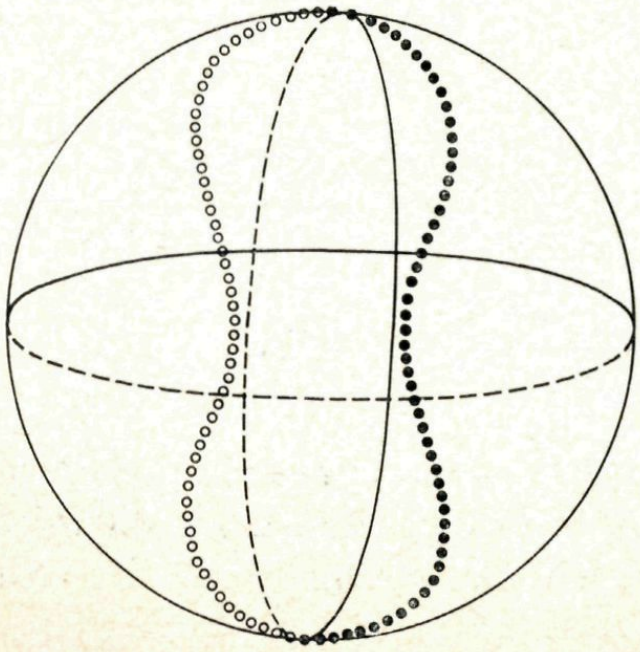


Fig. 19

wat zelfwerkzaamheid aan het tekenveld te besteden. Probeer daarbij de volgende vragen te beantwoorden: Is het mogelijk dat ergens een geisoleerde + voorkomt? En een geisoleerde NUL?
De zoëven van je gevraagde activiteit heeft tot doel je de kennis te bezorgen, die je in de volgende aflevering in staat moet stellen de sprong naar onze tweede stelling te nemen. Om het verhaal spannend te maken, tonen we je in figuur 19 nog even in welke richting we verder zullen gaan. Wat denk je: is in ons tekenveld op het aardoppervlak zo'n gordel van NULpunten, die louter uit paren diametraal tegenover elkaar liggende punten bestaat, onmogelijk of mogelijk? En als je vindt, dat zo'n gordel wel mogelijk is, vind je het dan waarschijnlijk of onwaarschijnlijk dat hij optreedt?

(wordt vervolgd).

---

8. We zoeken een groep van n verschillende natuurlijke getallen, waarvan de omgekeerden een som van 1 hebben. Voorbeelden voor $n = 3$ en $n = 4$ zijn (2; 3; 6) en (2; 4; 6; 12). Bewijs dat er ook voor elke $n > 5$ zulk een groep bestaat.
9. In een plat vlak is een cirkelboog van 180° met een straal van 6 cm getekend. Bepaal de verzameling van de middelpunten van de cirkels met een straal van 2 m, die precies één punt met die boog gemeen hebben.
10. Bereken de laatste twee cijfers van het getal 13^{1966}.

Oplossingen Denkertjes uit no. 6 van jaargang 5

51. Ja, dat kan. Schikt men de vijf vierkanten zoals in figuur 20 is aangeduid, dan heeft men slechts een (groot) vierkant met zijden van $82 + \frac{41}{2}\sqrt{2}$ nodig en dit is iets minder dan 111.

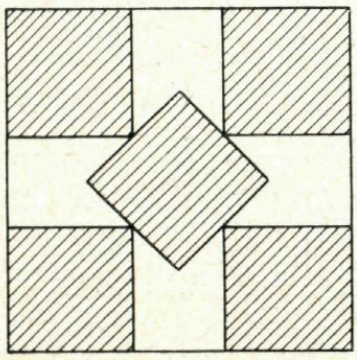


Fig. 20

52. Het bewijs wordt het gemakkelijkste met volledige inductie geleverd. Daarbij is een belangrijk onderdeel als volgt:

$$\begin{aligned} P_n &= x_1 + \ldots + x_n - (x_1 . \ldots . x_n) \\ &= x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n (1 - x_1 \ldots x_{n-1}) \\ &< x_1 + \ldots + x_{n-1} + 1 (1 - x_1 \ldots x_{n-1}) \\ &= P_{n-1} + 1 \end{aligned}$$

53. Noem het gemeenschappelijke punt van AD, BE, CF eerst S. Uit gelijkvormigheid volgt dan $\frac{AB}{DE} = \frac{AS}{ES}$ en $\frac{CD}{FA} = \frac{CS}{AS}$ en $\frac{EF}{BC} = \frac{ES}{CS}$. Door de overeenkomstige leden van deze drie gelijkheden met elkaar te vermenigvuldigen vinden we $\frac{AB.CD.EF}{DE.FA.BC} = \frac{AS.CS.ES}{ES.AS.CS} = 1$.
54. Noem het middelpunt van de gegeven cirkel M en de twee voetpunten A en B. Dan vormen A, B, M, P de hoekpunten van een koordenvierhoek. Diens omgeschreven cirkel heeft MP = 6 cm tot middellijn en hij wordt door AB verdeeld in een boog van 300° en een boog van 60°; hieruit blijkt AB = 3 cm.
55. Zie figuur 21. De gelijkheid van de sector en het halve segment blijkt uit de congruentie van de driehoeken APR en QAS en uit:
sector + drieh. APR = half segment + drieh. QAS.

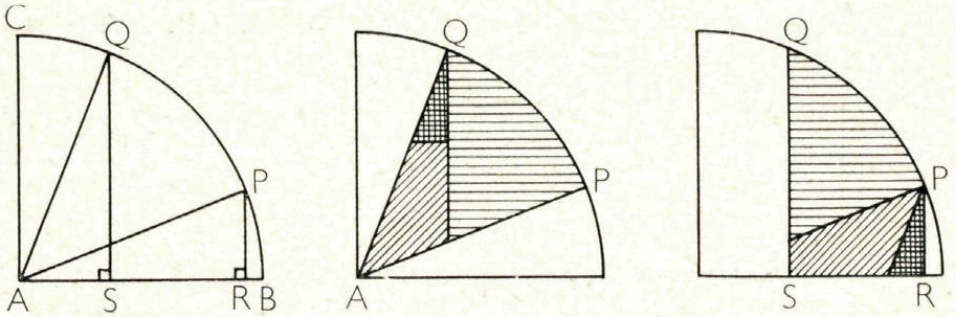


Fig. 21

56. Zie figuur 22. Noemen we de gevraagde middellijn x, dan geldt $x^2 = (80-x)^2 + (90-x)^2$ volgens Pythagoras, waaruit x = 50 volgt.

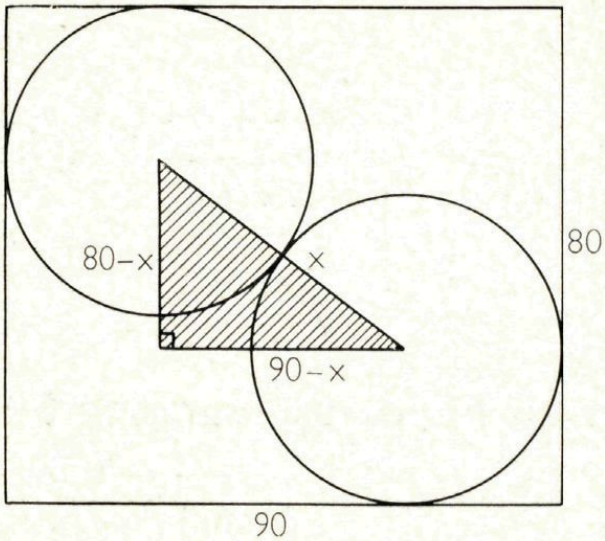


Fig. 22

57. P, Q, S en het midden M van AB zijn de hoekpunten van een koordenvierhoek (rechte hoeken bij P en Q), wiens omgeschreven cirkel MS tot middellijn heeft. Deze omgeschreven cirkel is de befaamde negenpuntscirkel van drie hoek ABC, die de voetpunten van zijn hoogtelijnen en de middens van zijn zijden bevat. Omdat SM middellijn is van die cirkel, is de projectie van S op AB het tweede snijpunt van AB met die negenpuntscirkel, dus tevens de projectie van C op AB.
58. Als $(x_1; \ldots; x_n)$ een groep met de bedoelde eigenschap is, dan is ook $(x_1; \ldots; x_n; y)$ zulk een groep wanneer $y = x_1 \ldots x_n + 1$.
59. O_1 en O_3 liggen op de middelloodlijn van OA en O_2 en O_3 liggen op die van OC. Daarom is hoek $O_1O_3O_2$ het supplement van hoek AOC en dus ook van hoek O_1OO_2.
60. Neem aan, dat het gestelde onjuist is. Uit alle paren, gevormd door een punt van het honderdtal en een rechte die niet door dat punt gaat, kiest men dan een paar met minimale afstand. Laat dat paar bestaan uit het punt A en de rechte a. Op de rechte a liggen minstens drie punten van het honderdtal. Men kan dus twee van die punten, zeg B en C, zo kiezen dat ze niet aan weerszijden van de loodlijn uit A op a liggen. Nu heeft of het paar (B; AC) of het paar (C; AB) een kleinere afstand dan het paar (A; a); dit is ongerijmd.

WOORDENBOEK

Abacus uit het Grieks: *Abax* = *plaat, tafel.*

Binair uit het Latijn: *Bini* = *telkens twee.*

Continu uit het Latijn: Continuatio = onafgebroken voortzetting.

Harmonisch verwant met het Griekse werkwoord „harmozein", dat „passen" of „overeenstemmen" betekent; uit de mathematische muziekleer.

Limaçon Frans, betekent: slak.

Postulaat uit het Latijn: eis, verlangen.

Priemgetal uit het Latijn: primus = eerste.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Markt 34, Oudenbosch.
Drs. A. B. OOSTEN, Turftorenstraat 11A, Groningen.
A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.
Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden. *Oplossingen inzenden uiterlijk 1 november.*
Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.
Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, *f* 2,50 per jaargang. Voor anderen *f* 4,—.
Abonnementen kan men opgeven bij J. B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J. B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.