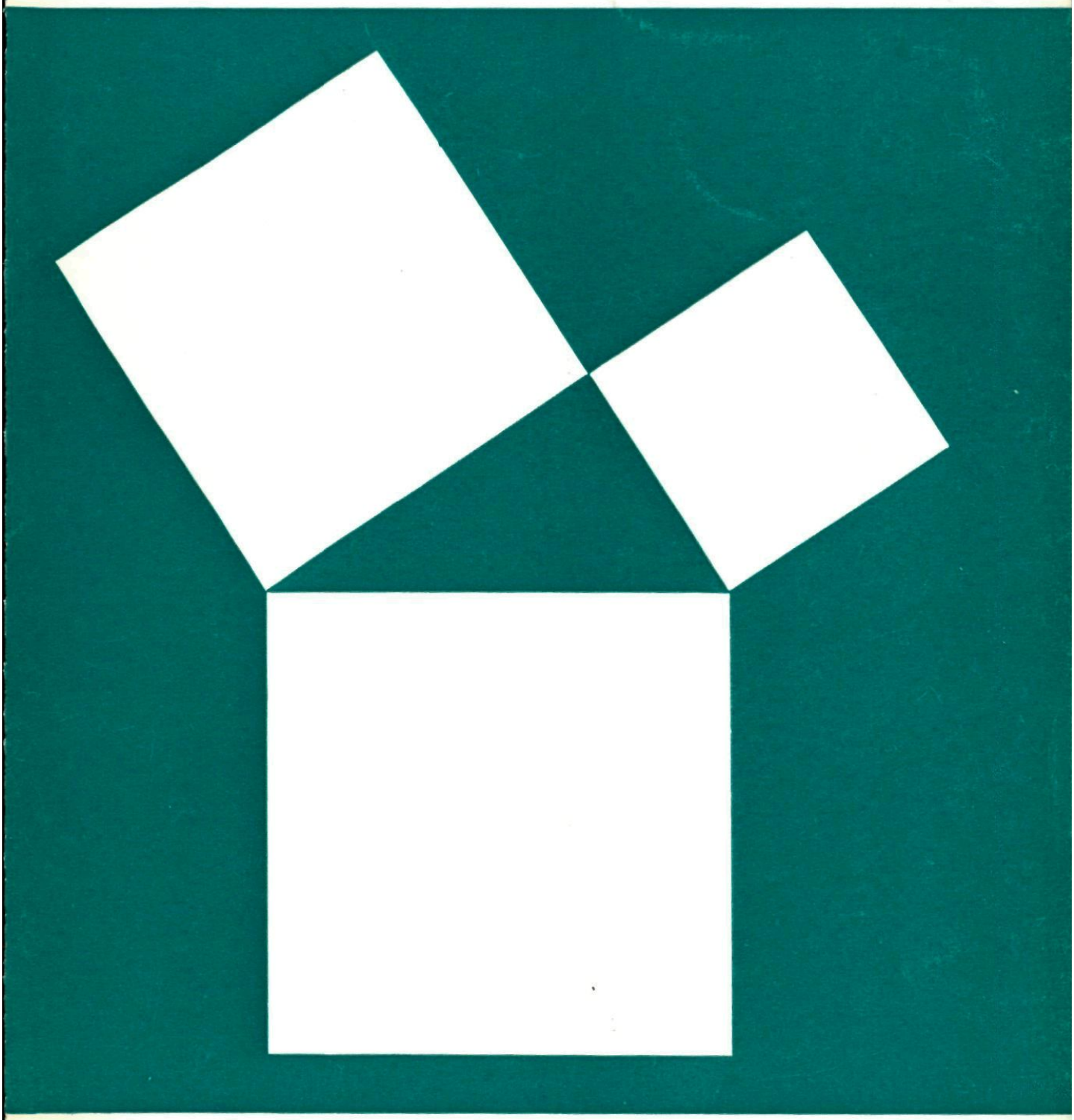
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

2

Zesde jaargang
1966/1967

draaien maar ..... (blz. 31)

pythagoras

jaargang 6 no 2

°Wees zuinig en win een prijs

We organiseren een wedstrijd, waaraan alleen leerlingen van die klassen kunnen deelnemen, waar de vlakke meetkunde een verplicht vak is. Bij je inzending moet je daarom niet alleen naam en adres, maar ook je klas en het schooltype (U.L.O., H.B.S., Gymnasium) duidelijk vermelden.
De wedstrijd bestaat uit twee stukken, waarvan je het eerste hieronder vindt. Je moet je oplossingen inzenden binnen een maand na het verschijnen van dit nummer. Adresseer ze aan A. van Tooren, Nachtegaalplein 10, Den Haag.
De stichting „Jeugd en Wiskunde" stelt voor elk van de twee delen van de wedstrijd *f* 50,— aan prijzengeld beschikbaar.

De opdrachten bestaan uit het uitvoeren van meetkundige constructies met passer en liniaal. Andere tekenhulpmiddelen (bijvoorbeeld gradenboog of tekendriehoek) mogen niet gebruikt worden.
Bij zulk een constructie verricht je drie soorten handelingen:

a. het kiezen van een punt telt voor 0 punten;
b. het trekken van een rechte lijn telt voor 1 punt;
c. het trekken van een cirkel of een deel daarvan telt voor 2 punten.

Het tekenen van de gegevens kost geen punten.

Bij elke opdracht is het doel je „score" zo laag mogelijk te houden; het gaat er dus om zo zuinig mogelijk te construeren. Zo wordt bijvoorbeeld opdracht 1 in vrijwel elk meetkundeboek uitgevoerd volgens een methode, die 7 punten kost (drie cirkels en dan de gevraagde loodlijn). Maar wij kennen een constructie met een score van 5 punten. Jij ook?

Opdracht I: Gegeven zijn een lijn a en een punt A, dat niet op die lijn ligt.
Construeer de loodlijn door A op a.

Opdracht II: Gegeven is een ongelijkbenige driehoek ABC. Construeer van die driehoek de zwaartelijn die door A gaat.

Opdracht III: Gegeven is een ongelijkbenige driehoek ABC. Construeer van die driehoek de zwaartelijnen die door A en B gaan.

Opdracht IV: Construeer een vierkant.

IN DIT NUMMER

zetten we onze weerkundige beschouwingen voort, gaan we de kermis op, bekijken we het Russische telraam, beschouwen we de bol elliptisch en de ligging harmonisch.

e

Een kortere titel voor een artikel is haast niet denkbaar. Maar voor een wiskundige is hij veelzeggend. *e* is nl. een buitengewoon belangrijk getal. Op allerlei manieren kan het te voorschijn gebracht worden. In dit artikel willen we het doen met behulp van faculteiten.

Het produkt $1.2.3.4.\ldots.n$ wordt n-faculteit genoemd. Men schrijft ervoor $n!$. Zo zijn dus de eerste tien faculteiten:

$1! = 1$ (Bij wijze van afspraak, want dit is geen produkt)
$2! = 1.2 = 2$
$3! = 1.2.3 = 6$
$4! = 1.2.3.4 = 24$
$5! = 1.2.3.4.5 = 120$
$6! = 1.2.3.4.5.6 = 720$
$7! = 1.2.3.4.5.6.7 = 5040$
$8! = 1.2.3.4.5.6.7.8 = 40\,320$
$9! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9 = 362\,880$
$10! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 3\,628\,800$

Je ziet, dat de grootte van de faculteiten snel toeneemt. Even snel nemen dus de waarden van de breuken in de volgende som af:

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

We kunnen dus verwachten, dat bij het groter worden van n het getal a_n wel toeneemt, maar op den duur maar zeer weinig. Het zal dus waarschijnlijk wel zo zijn, dat er een grenswaarde is, waar de grootte van a_n bij toenemende n niet bovenuit komt. We zullen deze grenswaarde gaan opsporen.
In de eerste plaats bewijzen we, dat (hoe groot we n ook maken) de waarde van a_n kleiner dan 3 blijft.
$k!$ is groter dan $1.2.2.2.2.\ldots.2 = 2^{k-1}$.
Daarom is $\frac{1}{k!}$ kleiner dan $\frac{1}{2^{k-1}}$.
Dientengevolge is a_n kleiner dan $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots +$
$+ \frac{1}{2^{n-1}}$. Van de tweede term af, zien we hier een meetkundige rij staan met reden $\frac{1}{2}$. We weten, dat de grenswaarde, waartoe de som van het eerste n-tal termen bij onbeperkt toenemende n nadert, gelijk is aan $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$. Dus is bij onbeperkt toenemende n het getal a_n zeker kleiner dan $1 + 2 = 3$.

De waarden van de getallen a_n zijn dus begrensd. Een stelling zegt nu, dat er dan een grenswaarde is, dat wil zeggen een getal, dat de eigenschap heeft, dat in elke omgeving van dat getal, hoe klein ook, een der getallen a_n ligt. Die grenswaarde noemen we e.
Door a_{12} te berekenen vinden we, dat $e \approx 2{,}7182818$. Het verschil van dit getal met de werkelijke waarde van e is slechts heel klein.

We hebben nl. verwaarloosd (door a_{12} te berekenen) de som
$\frac{1}{13!} + \frac{1}{14!} + \ldots$
Deze som is kleiner dan
$$\frac{1}{13!}\left(\frac{1 + 1}{13} + \frac{1}{13^2} + \ldots\right) = \frac{1}{13!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{13}} = \frac{1}{12.12!}$$
De waarde van dit getal is zo klein, dat het geen invloed meer heeft op de achtste decimaal in de benadering van e.
Het getal e is vooral bekend als grondtal van de zg. natuurlijke logarithmen.

°°Niet-euclidische Meetkunde

II Elliptische meetkunde

In het vorige nummer hebben we ons bezig gehouden met de geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde, en daarbij gezien dat een centrale plaats wordt ingenomen door het parallellenaxioma. We herhalen dit nog even in de vorm: Door een punt P buiten een lijn *l* gaat precies één lijn evenwijdig met *l*.
In de elliptische meetkunde wordt dit axioma vervangen door:
Elk tweetal lijnen heeft een snijpunt.
Evenwijdige lijnen komen dus niet voor. Wanneer we in de punten A en B van een lijn *l* loodlijnen *m* en *n* oprichten, dan snijden deze elkaar in een punt O. (fig. 1). Spiegelen we de figuur in AB, dan krijgen we nog een snijpunt O′ (fig. 2).

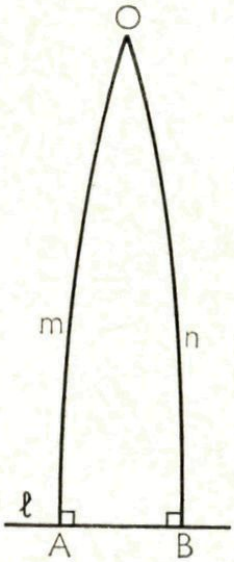


fig. 1

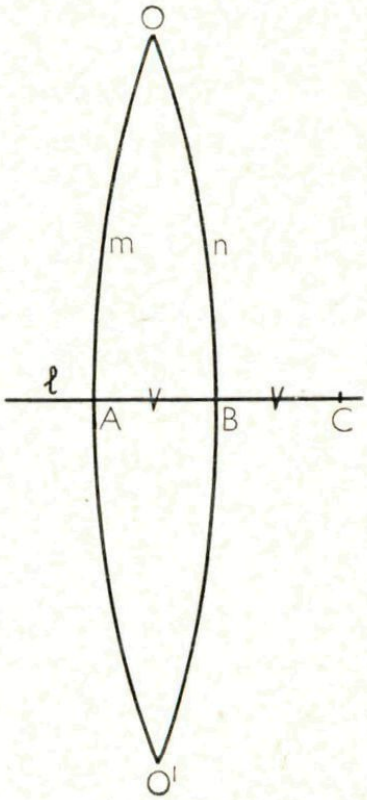


fig. 2

Maar . . . mogen we wel spiegelen in de elliptische meetkunde? En als dat mag zijn de punten O en O′ dan inderdaad verschillend, of kunnen ze ook samenvallen? Om deze vragen te kunnen beantwoorden zouden we van de grond af moeten beginnen, zoals Euclides dat deed voor de gewone meetkunde.
We zouden moeten beginnen met enkele ongedefinieerde begrippen, zoals punt en lijn, waarvoor we een aantal grondstellingen zonder be-

wijs aanvaarden. Hiervan uitgaande zouden we op logische wijze onze meetkunde moeten opbouwen met stellingen en definities.
Eigenlijk is een meetkunde niet meer dan een dergelijk abstract bouwwerk van stellingen en definities. We willen ons echter ook graag een aanschouwelijke voorstelling maken van de meetkunde, we willen er een *model* van maken.
De hele opbouw van de elliptische meetkunde kunnen we hier niet geven, dat zou een boekwerk worden. Ook een model ervan is niet gemakkelijk te vinden, maar wel iets dat daar zeer veel op lijkt, namelijk de bolmeetkunde.
Als lijnen moeten we dan beschouwen de grote cirkels van een bol, dat wil zeggen, de cirkels die de bol in twee gelijke delen verdelen.
Denk maar eens aan de evenaar om de aarde. Alle „lijnen" die hier loodrecht op staan zijn de meridianen, en deze snijden elkaar in twee punten, de noordpool en de zuidpool. We vinden hier dus inderdaad de situatie van fig. 2.
Twee „lijnen" snijden elkaar op een bol in twee punten die diametraal tegenover elkaar liggen.
Alle „lijnen" hebben dezelfde lengte $2\pi r$, als r de straal van de bol is.
Een belangrijke stelling is dat de som van de hoeken van een boldriehoek groter dan 180° is. We zullen dit bewijzen.

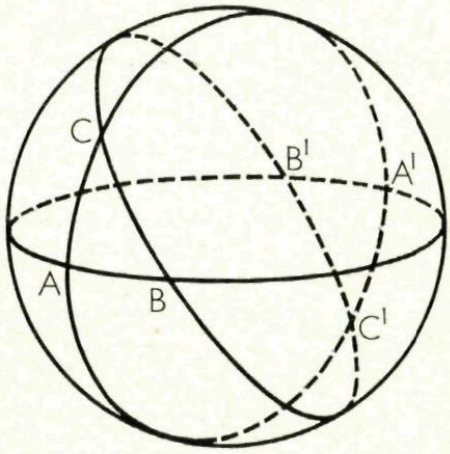


fig. 3

De zijden van $\triangle$ ABC in fig. 3 snijden elkaar nog eens in A′, B′, en C′. Tussen de lijnen CAC′ en CBC′ ligt een deel van het boloppervlak, waarvan de oppervlakte zich verhoudt tot die van de hele bol als de hoek C tot 360°.

Dus: $$\frac{\angle C}{360^\circ} = \frac{\text{opp } \triangle \text{ ABC} + \text{opp } \triangle \text{ ABC}'}{\text{Opp. bol}}$$

Net zo: $\dfrac{\angle A}{360^\circ} = \dfrac{\text{opp } \triangle \text{ ABC} + \text{opp. } \triangle \text{ A'BC}}{\text{opp. bol}} =$

$$= \frac{\text{opp. } \triangle \text{ A'B'C'} + \text{opp. } \triangle \text{ AB'C'}}{\text{opp. bol}}$$

$$\frac{\angle B}{360^\circ} = \frac{\text{opp. } \triangle \text{ ABC} + \text{opp. } \triangle \text{ AB'C}}{\text{opp. bol}}$$

Dus: $\dfrac{\angle A + \angle B + \angle C}{360^\circ} =$

$$\frac{\text{opp. } \triangle \text{ AB'C'} + \text{opp. } \triangle \text{ ABC'} + \text{opp. } \triangle \text{ A'BC'} + \text{opp. A'B'C'}}{\text{opp. bol}} +$$

$$+ \frac{2 \text{ opp. } \triangle \text{ ABC}}{\text{opp. bol}}$$

$$\frac{\angle A + \angle B + \angle C}{360^\circ} = \frac{\text{opp. halve bol}}{\text{opp. bol}} +$$

$$+ \frac{2 \text{ opp. } \triangle \text{ ABC}}{\text{opp. bol}} > \tfrac{1}{2}$$

dus: $\angle A + \angle B + \angle C > \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$

Het bedrag waarmee de som van de hoeken van de driehoek de 180° te boven gaat noemt men het *exces* van de driehoek. Hoe groter de zijden van de driehoek, des te groter is het exces. (Je kunt zelfs een driehoek met drie rechte hoeken tekenen.)

Ook in de elliptische meetkunde geldt dat de lengte van een lijn een bepaalde, eindige, constante is en is de som van de hoeken van een driehoek groter dan 180°. *Om uit de bolmeetkunde de elliptische meetkunde te krijgen behoeft men slechts elk tweetal diametraal tegenover elkaar liggende punten op de bol als één punt te beschouwen.* Hierdoor wordt het grootste bezwaar van de bolmeetkunde opgeheven, namelijk dat door twee punten niet steeds één lijn bepaald is. Door twee dia-

metraal tegenover elkaar liggende punten op een bol gaan immers oneindig veel grote cirkels.
De situatie van figuur 2, waarbij O en O′ gescheiden punten zijn, kan in de elliptische meetkunde dus niet voorkomen. O en O′ moeten worden geïdentificeerd. Hierbij doen we echter een te zwaar beroep op ons voorstellingsvermogen.

Oplossingen inzenden voor 1 december

11. Verdeel met behulp van een met passer en liniaal uit te voeren constructie een gegeven cirkel in negen delen met gelijke oppervlakte.

12. Ik ga met een geheel aantal guldens op zak de stad in om een bepaald vijftal artikelen te kopen. Helaas blijkt mijn bezit ontoereikend te zijn. Wel zou ik vier van die vijf artikelen kunnen kopen. En dat zou me dan, afhankelijk van de keuze van dat viertal, 37 of 41 of 47 of 50 of 57 guldens kosten. Hoeveel geld heb ik op zak?

13. In figuur 4 heeft de vierkante doos ABCD zijden van 17 cm, de twee kleine cirkelvormige schijven hebben elk een middellijn van 5 cm en de grote heeft een middellijn van 12 cm. Is het mogelijk de schijven zodanig over de bodem van de doos te verschuiven, dat de situatie van figuur 5 ontstaat?

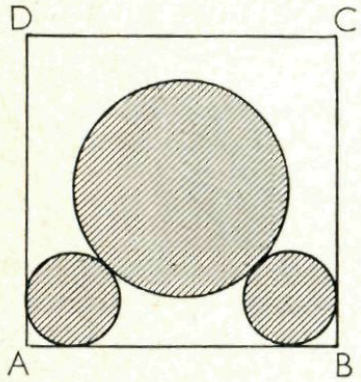


fig. 4

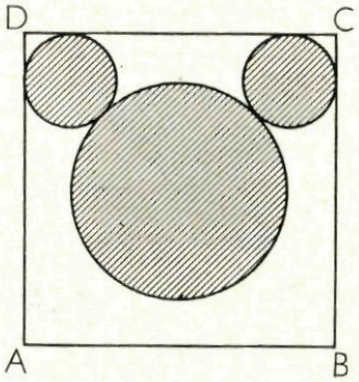


fig. 5

°°Draaien maar

Bij een rondgang over de jaarlijkse kermis, werd mijn aandacht getrokken door een attractie genaamd „Calypso". Behalve uit een grote

hoeveelheid aan en uit flitsende lampen en een groot aantal luidsprekers die hun naam eer aan deden, bestond deze attractie uit een enigszins hellende, draaiende schijf. Op de schijf bevonden zich kleinere schijven, die dus meedraaiden en die bovendien nog om hun eigen middelpunt draaiden. Op de kleine schijven bevonden zich bakjes, waarin het geëerd publiek kon plaatsnemen. De beweging die een bepaalde passagier uitvoert is de samengestelde van de twee rotaties en maakt dus een tamelijk ingewikkelde indruk. Bij nadere beschouwing blijkt dit echter erg mee te vallen, de passagier blijkt namelijk een ellipsvormige baan te beschrijven, tenminste als de draaisnelheden zo gekozen worden als dat op de kermis het geval was.
Een en ander zullen we in het onderstaande op wat meer wiskundige wijze bekijken. Een eenvoudige abstractie voert daarbij de schijven over in cirkels en de passagiers in punten.
In figuur 6 is een grote cirkel getekend, die we voor het gemak

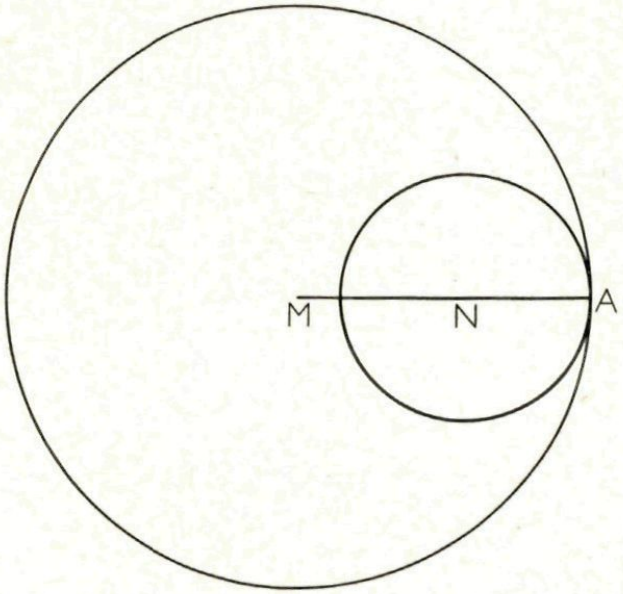


fig. 6

straal 1 geven, en daarin een kleinere die inwendig raakt aan de grote. De afstand van de middelpunten noemen we a, zodat de straal van de kleine cirkel $r = 1 - a$ is.
We laten nu de zaak draaien en volgen daarbij het punt A. Fig 7. geeft de situatie weer als de grote cirkel over een hoek φ (spreek uit: fi) gedraaid is. De kleine cirkel is dan over een hoek ϑ (spreek uit: thèta) om N gedraaid.
Welke coördinaten heeft het punt A nu ten opzichte van de getekende x en y as?
We zien gemakkelijk dat

$$MB = a.\cos\varphi \quad \text{en} \quad MC = a.\sin\varphi$$

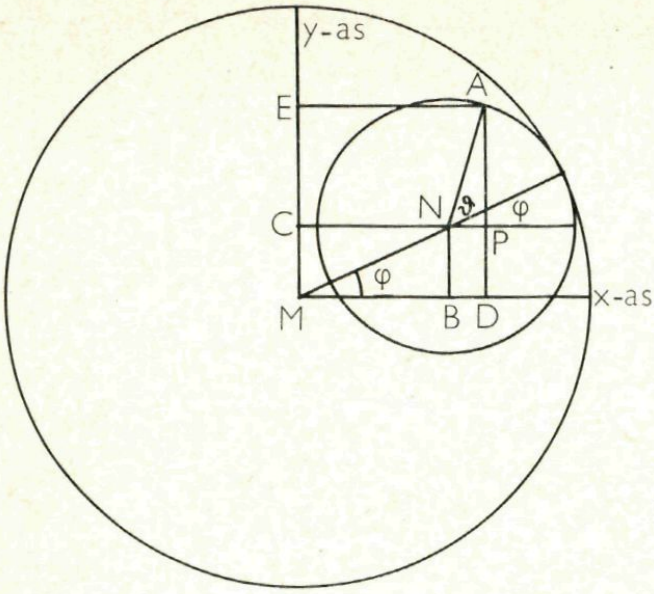


fig. 7

Verder is
$BD = NP = (1—a) \cos (\varphi + \vartheta)$ en
$EC = AP = (1—a) \sin (\varphi + \vartheta)$
zodat de coördinaten van A zijn:

$$x = a.\cos \varphi + (1—a) \cos (\varphi + \vartheta)$$

en $y = a.\sin \varphi + (1—a) (\varphi— a) \sin (\psi + \vartheta)$.
Door φ en ϑ van 0 naar 2π te laten lopen vinden we de kromme welke door A doorlopen wordt.

We keren nu even terug naar de kermis. De beweging die de passagiers in de bakjes maken, hangt af van de onderlinge verhouding van de draaisnelheden van de grote en de kleine schijf. Bovendien kunnen deze dezelfde kant om draaien, of in tegengestelde richting. We zullen voor het vervolg echter aannemen dat, als de grote schijf één omwen-

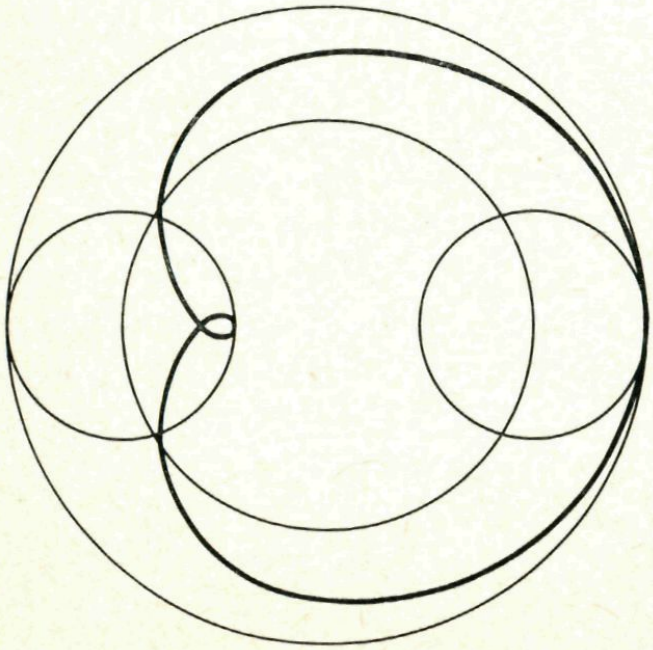


fig. 8

teling heeft gemaakt, dan ook de kleine een geheel aantal keren rondgedraaid is, zodat de situatie van het begin terug keert. Dit betekent dat $\vartheta = k.\varphi$, met k geheel. Als $k>0$ dan draaien ze dezelfde kant op als $k<0$, verschillende kanten.

We bekijken nu een paar wiskundig interessante gevallen:

1. $\vartheta = \varphi$ dus $x = a.\cos\varphi + (1-a)\cos 2\varphi$
$y = a.\sin\varphi + (1-a)\sin 2\varphi$

A doorloopt nu een kromme die getekend is in fig. 8 en die bekend staat onder de naam: limaçon van Pascal. De vorm van de kromme hangt nog af van de afstand a. Je kunt aantonen dat er geen lus ontstaat als $a > 2/3$ is, (fig. 9).

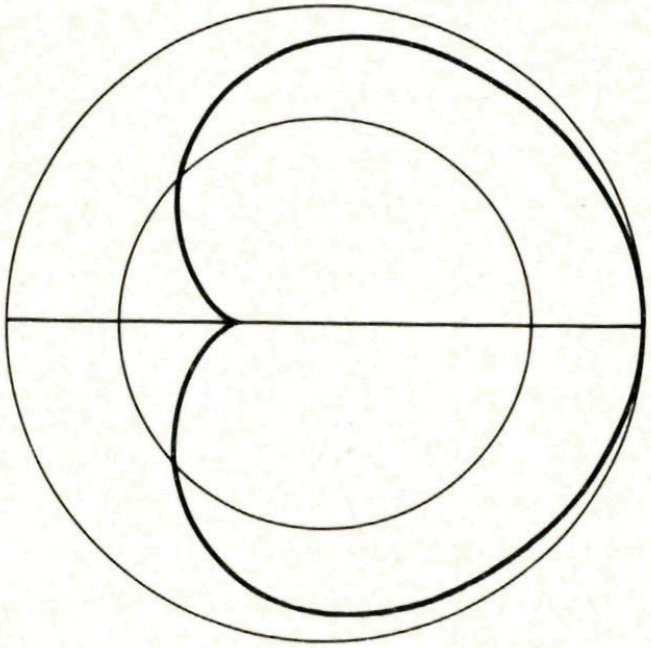


fig. 9

2. $\vartheta = -\varphi$ dus $x = a.\cos\varphi + 1-a$
$y = a.\sin\varphi$

Je kunt nu gemakkelijk laten zien dat A een cirkel beschrijft, met middelpunt $x = 1-a$, $y = 0$ en straal a. Voor de kermis is dit geen interessant geval. De schijven draaien nu met dezelfde snelheid verschillende kanten om, zodat de passagiers steeds dezelfde kant op kijken.

3. $\vartheta = -2\varphi$ $x = a.\cos\varphi + (1-a)\cos(-\varphi) =$
$= a.\cos\varphi + (1-a)\cos\varphi \quad = \cos\varphi$
$y = a.\sin\varphi + (1-a)\sin(-\varphi) =$
$= a.\sin\varphi - (1-a)\sin\varphi \quad = (2a-1)\sin\varphi$

Dit is een ellips. Het was juist deze figuur die ik de kermisgangers zag beschrijven, hoewel ze daar zelf waarschijnlijk geen notie van hadden! (fig. 10).

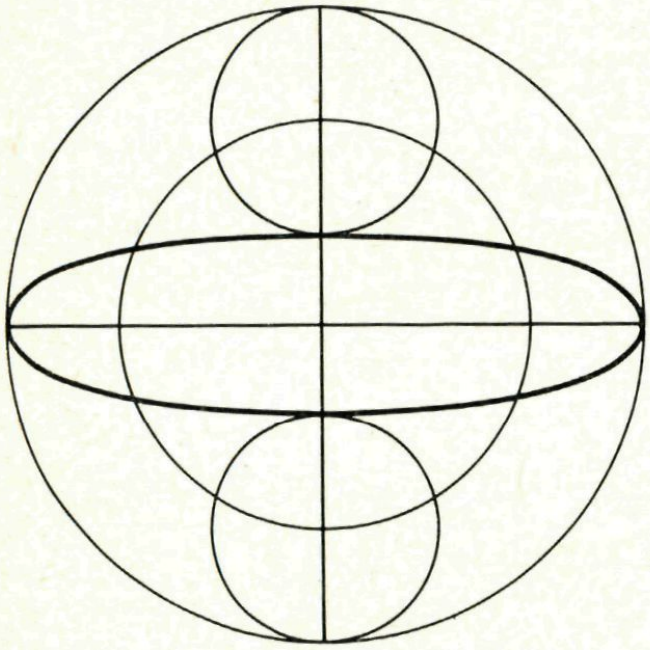


fig. 10

°°Toch wel handig zo'n telraam!

Het is nog niet zo lang geleden, dat een telraam behoorde bij de uitrusting van een kleuter. De kleuter speelde met de kraaltjes en werd er in de meeste gevallen niet wijzer van. Op het ogenblik is het niet eens zo eenvoudig een winkel te vinden waar je een telraam zou kunnen kopen.
Ik was dan ook heel verwonderd op een reis door de USSR bijna in alle winkels en kantoren een telraam te zien. Het deed me erg primitief aan, tot ik merkte hoe verbazend snel er mee gerekend kon worden. Op de foto zie je hoe het telraam tussen een kippenboutje en een schaal met suikerklontjes ligt.
Het bestaat uit een raam waarin 13 metalen staafjes bevestigd zijn. De onderste drie staafjes dragen 10 kralen, dan komt er een met slechts 4 kralen, terwijl de overige negen weer 10 kralen hebben. Sommige kralen hebben een andere kleur (zie figuur 11).
Hoe je met zo'n telraam optelt en aftrekt is natuurlijk zonder meer duidelijk. Een voordeel daarbij is, dat je geen getallen hoeft op te schrijven.

We waren echter nieuwsgierig naar het vermenigvuldigen met behulp van het telraam. Bij nader inzien was ook dit eenvoudig. Hier volgt een voorbeeld:

54	
32	
× ——	→ 2 × 4 = 8; 8 kralen worden naar rechts geschoven.
108	
1620	2 × 5 = 10. zeggen wij, maar we schrijven eigenlijk 100 op. Zo gebeurt het ook op het telraam: één kraal die twee regels hoger staat wordt naar rechts verschoven. Zie verder figuur 12.
——	
1728	

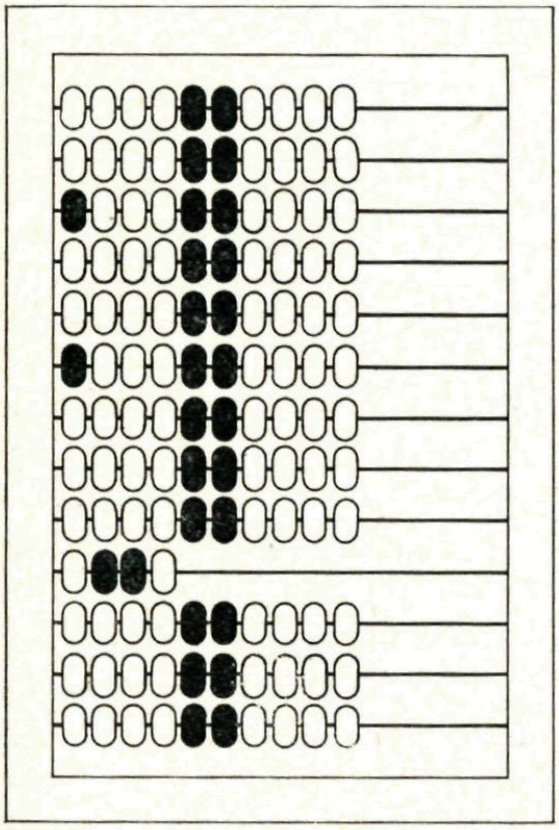


fig. 11

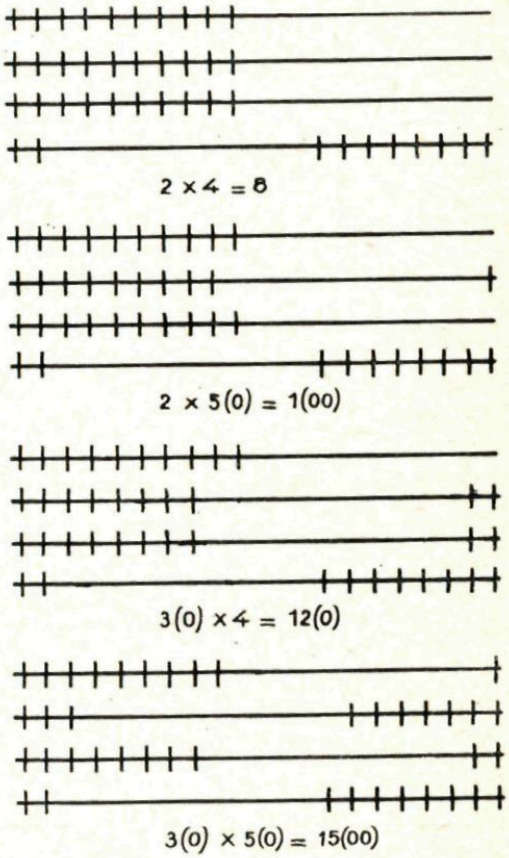


fig. 12

Het gaat eigenlijk op dezelfde manier als wij het doen. Alleen worden de deeluitkomsten niet opgeschreven maar door middel van kralen vastgelegd, terwijl de optelling aan het slot van de deelvermenigvuldigingen reeds automatisch gebeurt door het bijschuiven van de kralen.
Nu weten we nog niet of *delen* ook zo eenvoudig gaat en bovendien vragen we ons af waarom er op het vierde staafje maar 4 kralen zitten. Optellingen, aftrekkingen en vermenigvuldigingen voert men op de bovenste negen rijen uit. Waarvoor dienen de onderste drie en de rij met 4 kralen? Iemand die ons zijn telraam demonstreerde, zei dat de

onderste vier rijen gebruikt werden voor procentberekeningen. Helaas stond toen een bus klaar die ons naar het vliegveld zou brengen, zodat we het fijne ervan niet te horen kregen. Misschien kan een van de lezers ons verder helpen?

Wimecos-prijsvraag II

We bestuderen getallenpatronen met de volgende eigenschappen:

a. het patroon bevat n^2 getallen, die in een vierkant gerangschikt zijn (n rijen met elk n getallen);

b. elk van die getallen is gelijk aan +1 of aan —1;

c. de n rijen van het patroon zijn verschillend;

d. vermenigvuldigt men de boven elkaar staande getallen van twee willekeurige verschillende rijen, dan krijgt men n produkten die 0 tot som hebben.

Hieronder staan twee voorbeelden van dergelijke patronen, namelijk voor n = 2 en voor n = 4:

		+1	+1	+1	+1
+1	+1	—1	+1	—1	+1
—1	+1	+1	+1	—1	—1
		—1	+1	+1	—1

Ter toelichting van eigenschap d nemen we in het tweede voorbeeld de tweede rij en de derde rij:

—1	+1	—1	+1
+1	+1	—1	—1
—1	+1	+1	—1

zijn de vier produkten; ze hebben inderdaad 0 tot som.

Opdracht 1: Toon aan, dat dergelijke patronen voor oneven waarden van n niet bestaan.

Opdracht 2: Als de bovenste rij van een dergelijk patroon niet louter uit getallen +1 bestaat, dan kun je daaruit een andere patroon afleiden (voor dezelfde waarde van n) dat ook de vier hierboven genoemde eigenschappen heeft en waarvan de bovenste rij wel uit n getallen +1 bestaat. Laat zien, hoe dat gebeuren kan.

Opdracht 3: Bewijs, dat n = 2 de enige waarde van n is, waarvoor zulk een patroon bestaat en die geen viervoud is.
Opdracht 4: Bewijs, dat er voor elke waarde van n, die een macht van 2 is, zulk een patroon bestaat.
Opdracht 5: Construeer zulk een patroon voor n = 12.

Beredeneerde oplossingen kunnen tot 1 januari 1967 gezonden worden aan A. van Tooren, Nachtegaalplein 10, Den Haag. Als prijzen zijn een aantal boeken beschikbaar gesteld door de docentenvereniging WIMECOS.

---

14. Gegeven is, dat n een oneven, geheel getal is dat geen drievoud is. Bewijs, dat n^2-1 een 24-voud is.

15. In een plat vlak zijn n punten gegeven. Men nummert die punten in de een of andere volgorde van 1 tot en met n; daarna trekt men de verbindingslijnstukken van 1 met 2, van 2 met 3, van 3 met 4, . . ., van (n—1) met n. Zo ontstaat er dan een gebroken lijn. Toon aan dat de kortste van alle gebroken lijnen, die men op die manier met de gegeven punten kan maken, zichzelf niet „kruist".

16. Bewijs eerst: als x een positief getal is, dan is $x + \frac{1}{x}$ minstens gelijk aan 2.
Bewijs daarna: als de som van n positieve getallen kleiner is dan n, dan is de som van de omgekeerden van die getallen groter dan n.

°Het weer bij tegenvoeters II

Aan het eind van het eerste deel van dit artikel hebben we onderzocht, hoe in het tekenveld op de aardoppervlakte de PLUSpunten, MIN-

punten en NULpunten langs een lijn gerangschikt kunnen zijn. We komen daarbij tot de volgende conclusies:
Een geïsoleerd PLUSpunt is niet mogelijk. Met andere woorden: als er PLUSpunten aanwezig zijn, dan vullen ze altijd een gebied (dat eventueel wel bar klein kan zijn, natuurlijk). Voor MINpunten geldt hetzelfde. Met NULpunten is het anders gesteld, want die kunnen zowel geïsoleerd voorkomen als gebieden of krommen vullen. Bovendien vinden we, dat NULpunten de dwingende taak hebben om PLUSpunten van MINpunten te scheiden.

Uit deze conclusies kunnen we nu in grote lijnen afleiden, hoe het gehele tekenveld er uit zal zien. De PLUSpunten en de MINpunten vormen *gebieden*, de NULpunten kunnen *gebieden* vormen en ook *geisoleerd* optreden. Een gebied van PLUSpunten en een gebied van MINpunten moeten van elkaar gescheiden worden door een gebied of een lijn van NULpunten. Bovendien kunnen de gebieden of lijnen van NULpunten of de geïsoleerde NULpunten ook door louter PLUS-

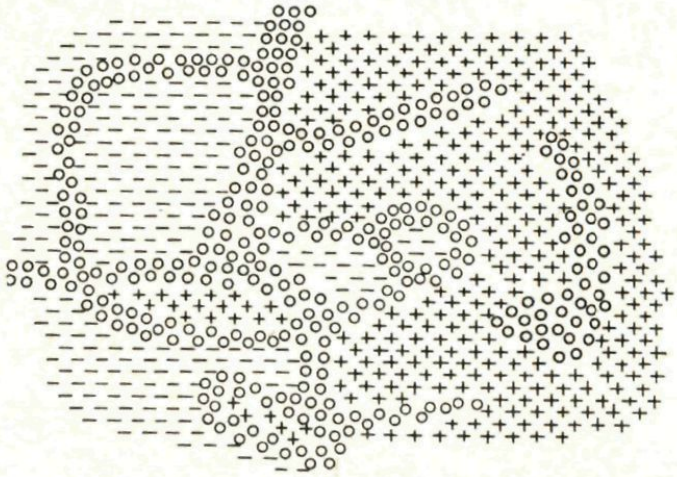


fig. 13

punten of door louter MINpunten omgeven zijn. In figuur 13 vind je een gedeelte van een mogelijk tekenveld afgebeeld.
Nu is het beeld, dat we ons gaandeweg van het tekenveld gevormd hebben, nog tamelijk ingewikkeld. Een grote moeilijkheid is daarbij bijvoorbeeld ook nog, dat we ons slecht de konsekwenties kunnen realiseren van het feit, dat op de aardoppervlakte tegenover elk PLUSpunt een MINpunt ligt en omgekeerd en tegenover elk NULpunt een ander NULpunt ligt. We zullen het beeld moeten gaan vereenvoudigen om diepere conclusies te kunnen trekken, we zullen de hoofdzaken van de bijzaken moeten gaan scheiden.
In de eerste plaats gaan we alle NULpunten verwijderen die geen PLUS punten en MINpunten van elkaar scheiden. We vervangen ze door

PLUSpunten of MINpunten. We doen dat zodanig, dat nergens de PLUSpunten aan de MINpunten gaan grenzen, zodat er weer een mogelijk tekenveld ontstaat. Het resultaat van deze bewerking, uitgevoerd op een deel van figuur 13, zie je in figuur 14.

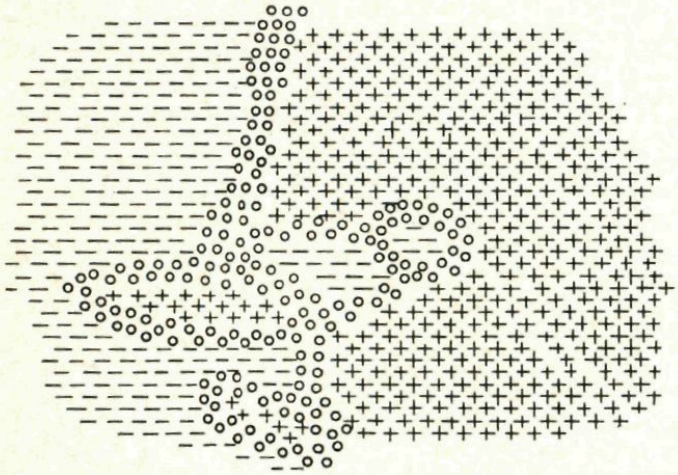


fig. 14

Wat we na deze eerste bewerking overhouden, is al wat overzichtelijker geworden: een verzameling van gebieden PLUSpunten en gebieden MINpunten, van elkaar gescheiden door NULpunten. Daarbij ligt tegenover elk gebied van PLUSpunten een gebied van MINpunten en omgekeerd.

Uit alle gebieden van PLUSpunten en MINpunten kiezen we er nu een uit, *wiens grens van NULpunten niet alleen maar uit paren diametraal tegenover elkaar gelegen NULpunten bestaat.* Alle punten van dat gebied voorzien we van het tegenovergestelde teken, was het een gebied van PLUSpunten, dan maken we er een gebied van MINpunten van of omgekeerd. De grens van NULpunten laten we nu weg voorzover deze geen PLUSpunten en MINpunten meer scheidt.

Nu is een onmogelijk tekenveld ontstaan. We bedenken echter, dat het gebied dat diametraal tegenover het zojuist behandelde ook aan de eis voldoet, dat zijn grens niet louter uit paren diametraal tegenover elkaar gelegen NULpunten bestaat. Behandelen we dat tegenoverliggende gebied meteen ook op dezelfde manier, dan is weer een mogelijk tekenveld ontstaan (van een iets eenvoudiger structuur). Deze tweede bewerking nu wordt herhaald, zolang dat mogelijk is. Telkens weer kiezen we een gebied met een niet-diametrale grens (zo zullen we dat nu maar kortweg noemen) en laten dat met zijn omgeving versmelten, evenals het daar tegenover liggende gebied. Gaandeweg wordt de structuur van het tekenveld daardoor eenvoudiger. De gebieden met PLUSpunten en MINpunten worden groter en groter en er verdwijnen steeds meer NULpunten. (fig. 15).

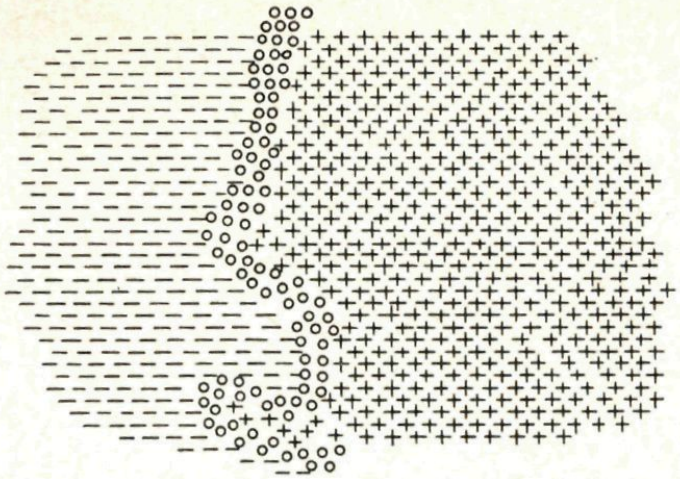


fig. 15

We zullen echter eens met dit proces moeten ophouden, namelijk als er geen gebieden meer over zijn met een niet-diametrale grens. Hoe is de toestand dan geworden?
Wel, er zijn nog altijd zowel PLUSpunten als MINpunten aanwezig (zelfs meer dan er oorspronkelijk waren) en nog altijd ligt tegenover elk PLUSpunt een MINpunt en omgekeerd. Bovendien is het aanmerkelijk vereenvoudigde veld nog steeds een mogelijk tekenveld, dus de PLUSpunten vormen gebieden en de MINpunten ook. En nog altijd worden die gebieden van elkaar gescheiden door NULpunten.
Neem nu eens zo'n gebied van PLUSpunten en bekijk zijn grens eens. Die grens bestaat louter uit paren diametraal tegenover elkaar gelegen punten, want als dat niet zo was hadden we onze vereenvoudigende bewerking nog wat voort kunnen zetten. Het is dus een grens, zoals aan het eind van het vorige artikel al werd afgebeeld. We herhalen die afbeelding hier nog eens (figuur 16). Het zal dan nu ook wel

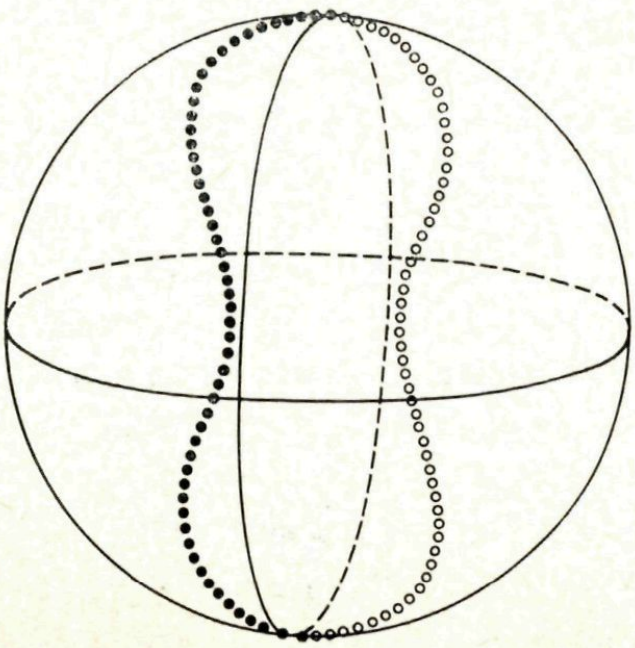


fig. 16

duidelijk zijn, dat de vereenvoudiging geleid heeft tot één gebied van PLUSpunten en één gebied van MINpunten, van elkaar gescheiden door een diametrale gordel.
Misschien is het je ontgaan, maar die gordel moet ook al aanwezig zijn in het ingewikkelde tekenveld, waar we ditmaal mee begonnen geweest zijn. En zo komen we dus tot het uitspreken van onze tweede stelling: Op elk moment bestaat er op aarde een gordel van punten, die twee aan twee diametraal tegenover elkaar liggen en de eigenschap hebben dat in elk van die punten dezelfde temperatuur heerst als bij de tegenvoeters.
We naderen nu het einde van onze meteorologische beschouwingen. Er moet alleen nog even opgemerkt worden, dat die beschouwingen niet alleen maar gelden voor temperaturen maar ook voor alle andere (continu veranderende) weergrootheden. Zo is er dus ook een diametrale gordel van punten, waar dezelfde luchtdruk heerst als bij de tegenvoeters. En een diametrale bewolkingspercentage-gordel, enzovoorts. Beschouwen we nu twee van die gordels tegelijkertijd, dan is het zonneklaar dat ze elkaar moeten snijden (in diametraal tegenover elkaar gelegen punten). Dit betekent, dat er stellig punten op aarde zijn, waar de temperatuur èn de luchtdruk gelijk zijn aan die bij de tegenvoeters. Nemen we echter drie gordels, dan behoeven die niet gemeenschappelijke punten te bevatten. Dus is het niet zeker, dat er punten zijn op aarde, waar het weer in drieërlei opzicht overeenstemt met dat bij de tegenvoeters.

---

17. In figuur 17 zie je twee evenwijdige rechten, a en a′. Hun afstand bedraagt 1 cm. Op a ligt een lijnstuk PQ van 2 cm lengte, op a′ ligt een lijnstuk P′Q′ eveneens van 2 cm lengte. Het lijnstuk PQ moet tot dekking gebracht worden met het lijnstuk P'Q'. Daartoe wordt het eerst uit de beginstand (1) naar de stand (2) verschoven, daarna laat men het uit de stand (2) oversteken naar de eindstand (3). Bij de eerste handeling beschrijft het bewegende lijnstuk geen oppervlakte, bij de tweede handeling beschrijft het de oppervlakte van de gearceerde rechthoek en die bedraagt 2 cm².

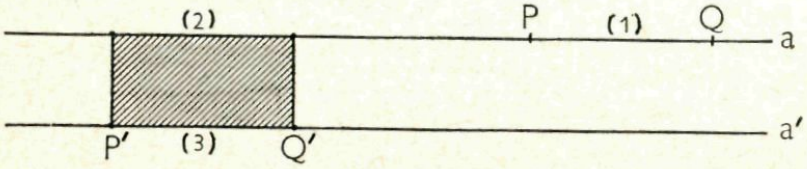


fig. 17

Als de rechten a en a′ een afstand hebben van 1 km in plaats van een afstand van 1 cm, dan is het nog steeds mogelijk om PQ naar P'Q' te brengen zonder daarbij een oppervlakte te beschrijven van meer dan 2 cm². Bewijs dat.

18. Van een functie f is gegeven, dat

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

voor elk getallenpaar a;b waar is. Bewijs, dat ook

$$f\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)+f(c)+f(d)}{4}$$

voor elk viertal a; b; c; d waar is.

19. De doorsnede van een kubus met een plat vlak kan een vijfhoek zijn; kan zulk een vijfhoekige doorsnede zelfs een regelmatige vijfhoek zijn?

20. Een rij getallen a_1; a_2; a_3; . . . wordt gedefinieerd door: $a_1 = 7$ en voor elke waarde van n geldt $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. De eerste drie getallen van die rij zijn dus 7; 43; 1807. Welk is het eerste getal van die rij na a_1, dat een zevenvoud is?

○○○Harmonische ligging II

In het vorige artikel zagen we, dat een puntenviertal A, P, B, Q op een rechte *l* harmonisch ligt, als $\frac{PA}{PB} = -\frac{QA}{QB}$. We zullen nu zien, dat deze harmonische ligging aangetroffen wordt bij pool en poollijn, waarmee je kennis maakte in de analytische meetkunde. Voor we dat kunnen aantonen, moeten we nog een bijzonderheid van de harmonische ligging bespreken.
Laat in fig. 18 het puntenviertal A, P, B, Q een harmonisch viertal zijn

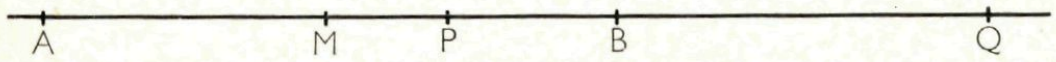


fig. 18

en M het midden van AB. We letten op de richting van de lijnstukken en spreken af, dat MB = — MA zal zijn en bijvoorbeeld MP = — PM.
Er is nu gegeven:

$$\frac{PA}{PB} = -\frac{QA}{QB}$$

Daarvoor kunnen we schrijven:

$$\frac{PM + MA}{MB - MP} = -\frac{QM - MA}{QM + BM}$$

en dat is hetzelfde als:

$$\frac{-MP + MA}{-MA - MP} = -\frac{-MQ + MA}{-MQ - MA}$$

Door „kruislings vermenigvuldigen" vinden we daaruit:

$$MP.MQ - MA.MQ + MP.MA - MA^2 =$$
$$-MA.MQ + MA^2 - MP.MQ + MP.MA$$

Tenslotte blijkt hieruit:

$$MA^2 = MP.MQ$$

Je moet zelf maar eens proberen te bewijzen, dat als omgekeerd deze betrekking gegeven is, het viertal A, P, B en Q een harmonisch viertal is.

Pool en poollijn

Het is niet onze bedoeling uitvoerig het verband tussen pool en poollijn en harmonische ligging te laten zien. Dan zouden we bijvoorbeeld ook moeten kijken naar de kegelsneden. We beperken ons dus tot de cirkel. Het zal je bekend zijn, dat de poollijn van een punt A, dat buiten een cirkel ligt, gevonden wordt door de raakkoorde van A te construeren.

In fig. 19 is de rechte door R loodrecht op AM dus de poollijn van A

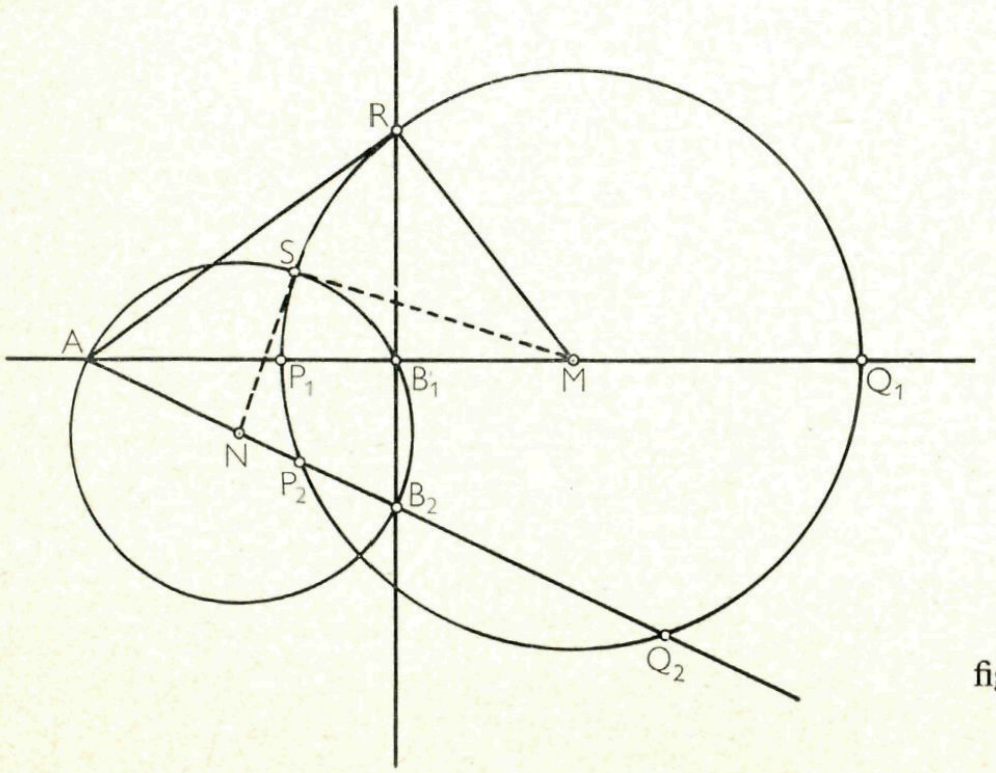


fig. 19

ten opzichte van cirkel M. In de rechthoekige $\triangle$ AMR is nu, volgens een bekende stelling, $MR^2 = MB_1.MA$, dus ook $MP_1{}^2 = MQ_1{}^2 = MB_1.MA$. Daaruit volgt, dat A, P_1, B_1, Q_1 een harmonisch viertal is. Trek nu een rechte door A, die de cirkel in P_2 en Q_2 en de poollijn in B_2 snijdt en trek de cirkel met AB_2 als middellijn. Deze snijdt cirkel M in S loodrecht, immers uit $MR^2 = MB_1.MA$, volgt $MS^2 = MB_1.MA$ en daaruit volgens de machtstelling, dat MS cirkel N raakt. Maar dan raakt omgekeerd NS aan cirkel M en dus is

$NS^2 = NA^2 = NP_2.\ NQ_2$

en dat zegt, dat het viertal A, P_2, B_2, Q_2 een harmonisch viertal is. Elke rechte door A, die de cirkel met M als middelpunt snijdt, snijdt dus de poollijn in een zodanig punt, dat dit met A en de beide snijpunten P_i en Q_i met de cirkel een harmonisch viertal vormt. En aangezien het vierde harmonische punt behorende bij A, P_i en Q_i door deze punten ondubbelzinnig wordt vastgelegd, kunnen we zeggen, dat de verzameling der punten B_i het deel van de poollijn is, dat tussen zijn beide snijpunten met de cirkel ligt. Wanneer we afspreken, dat ook dan nog van een harmonisch viertal sprake is, wanneer de punten P_i, B_i en Q_i voor zekere waarde van i alle met het punt R samenvallen, dan kunnen we ook de snijpunten van de poollijn met cirkel M nog tot de verzameling rekenen.

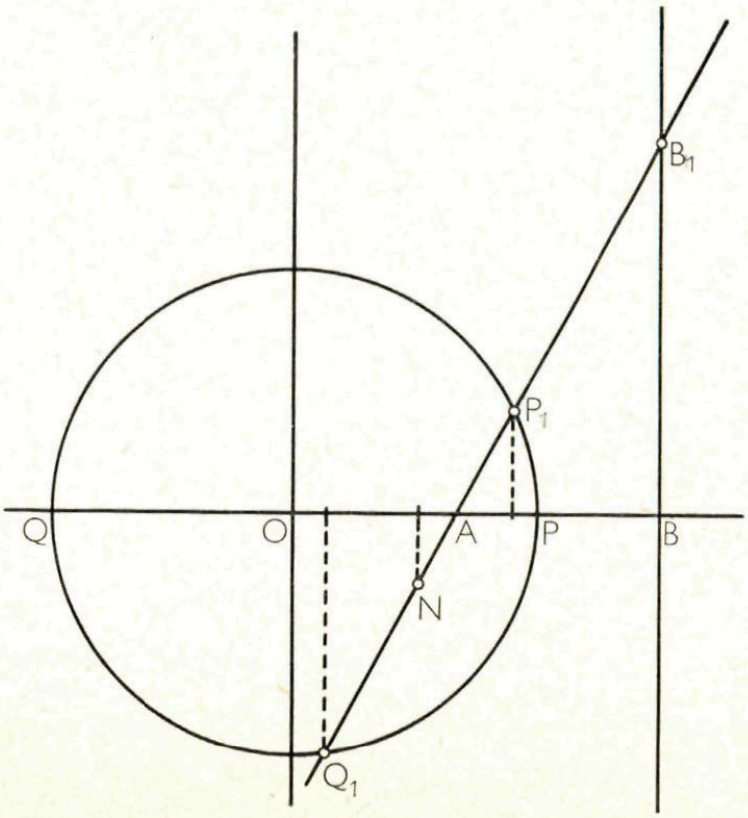


fig. 20

Een analytische aanpak

Ook als we analytisch te werk gaan, blijkt gemakkelijk hoe de harmonische puntenviertallen te maken hebben met pool en poollijn. Laat de gegeven cirkel zijn $x^2 + y^2 = r^2$.

De poollijn van het punt $(a, 0)$ heeft als vergelijking $ax = r^2$. Dat wil dus zeggen, dat de poollijn loodrecht op de X-as staat in het punt B zo, dat $OA.OB = OP^2$. En dat is nu juist de betrekking, die ons vertelt, dat Q, A, P en B een harmonisch viertal vormen.

Een willekeurige rechte door A heeft als vergelijking $y = m\,(x - a)$

De abscis van het punt B_1 is dezelfde als van B, dus $\frac{a}{r^2}$.

De abscissen van de punten P_1 en Q_1 worden gevonden uit de vergelijking $x^2 + m^2\,(x - a)^2 = r^2$

Dat is $(1 + m^2)x^2 - 2m^2ax + m^2a^2 - r^2 = 0$

De som van de wortels van deze vergelijking is $\dfrac{2m^2a}{1 + m^2}$

Dus is de abscis van het punt N gelijk aan $x_N = \dfrac{m^2a}{1 + m^2}$

Wanneer nu Q_1, A, P_1 en B_1 weer een harmonisch viertal vormen, dan moeten we voor hun abscissen kunnen bewijzen, dat

$$(x_N - x_1)^2 = (a - x_1)\left(\frac{r^2}{a} - x_1\right)$$

als x_1 de abscis van Q_1 is.

Werken we deze betrekking uit, dan vinden we, dat we moeten bewijzen, dat

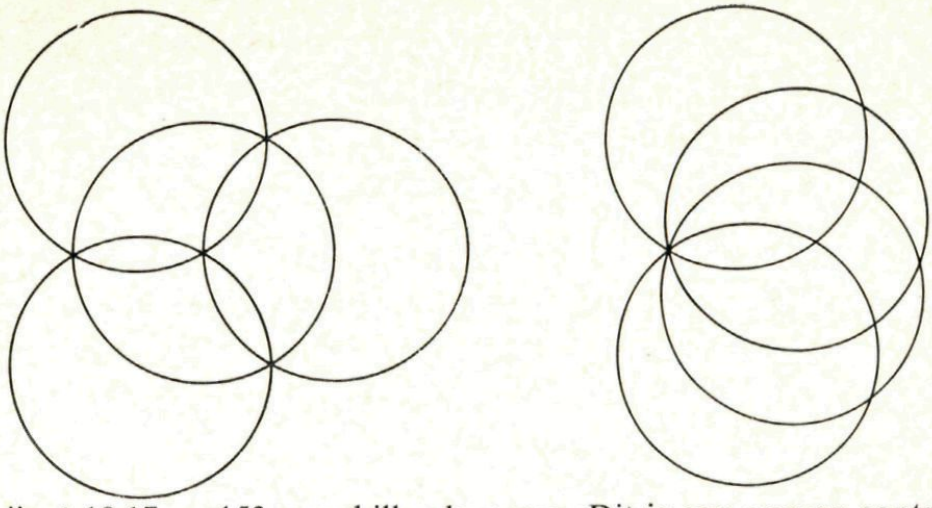
$(1 + m^2)x_1^2 - 2m^2ax_1 + m^2a^2 - r^2 = 0$

En dat is inderdaad het geval, als x_1 een wortel is van de hierboven genoemde vierkantsvergelijking.

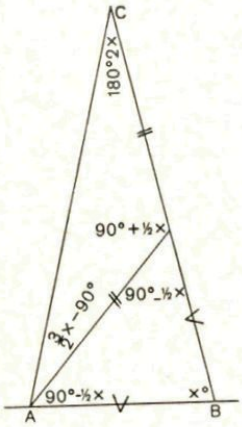
Oplossingen Denkertjes uit het vorige nummer

1. De clou van dit probleempje is, dat $1 + 6 = 3 + 4$ is. Men moet de afstanden tot het ene paar overstaande zijden 1 cm en 6 cm laten bedragen, die tot het andere paar overstaande zijden 3 cm en 4 cm. Dan blijft er ruimte over voor een cirkel met een middellijn van 5 cm. Er zijn 8 dergelijke cirkels binnen het vierkant te maken.
2. Door vooraan nullen bij te plaatsen geven we alle beschouwde getallen een lengte van 6 cijfers. In totaal zijn er 10^6 van die getallen, omdat op elk van de 6 plaatsen een keuze gemaakt moet worden uit 10 cijfers. Mogen we geen enkele 7 gebruiken, dan tellen we 9^6 getallen. Het aantal getallen met een of meer zevens erin bedraagt dus $10^6 - 9^6 = 468559$.

3.



4. Er zijn $\frac{1}{2}.18.17 = 153$ verschillende paren. Dit is een oneven aantal, terwijl er per spel twee paren moeten aantreden. Het arme bestuur is dus niet te helpen.

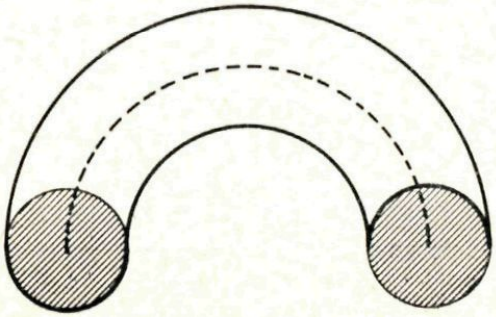


5. Zie figuur. We noemen de basishoeken van driehoek ABC $x°$ groot. Omdat driehoek ABD niet gelijkvormig is met driehoek ABC, is hoek B zijn tophoek. Daar volgt uit, dat de hoeken DAB en ADB elk $90° - \frac{1}{2}x°$ zijn. Nu blijken de hoeken CAD, ADC en ACD resp. $\frac{3}{2}x° - 90°$, $90° + \frac{1}{2}x°$ en $180° - 2x°$ groot te zijn. Onder dit drietal komen twee gelijke voor indien $x = 180$ of $x = 36$ of $x = \frac{540}{7}$. Het laatste getal is alleen maar bruikbaar.

6. Een gemeenschappelijke deler van a en b is ook deler van ad en van bc, dus van $ad - bc = 1$; alleen het getal 1 is dus gemeenschappelijke deler van a en b. Voor $\frac{c}{d}$ geldt een analoge redenering. Schrijven we $ad - bc = 1$ als $a(b + d) - b(a \times c) = 1$, dan blijkt evenzo dat $\frac{a + c}{b + d}$ onvereenvoudigbaar is.

7. Het minimale aantal is 4: verdeel de stomphoekige driehoek door een hoogtelijn te trekken in twee rechthoekige driehoeken; verdeel elk van die twee door een zwaartelijn naar de hypothenusa te trekken in twee gelijkbenige driehoeken.

8. Uit elke groep kan je een nieuwe groep fabriceren, die een cijfer meer bevat: maak elk getal van de eerste groep twee maal zo groot en voeg dan tenslotte het getal 2 toe. Uit (2; 3; 6) ontstaat zo (2; 4; 6; 12) en daaruit weer (2; 4; 8; 12; 24), enzovoorts



9. Zie figuur. De gevraagde verzameling bevat de punten van de dik getekende bogen en van de grijze gebieden. In de figuur is aangenomen, dat het linker eindpunt wel en het rechter eindpunt niet tot de gegeven boog behoort.

10. Berekent men de laatste twee cijfers van de opeenvolgende machten van 13, dan constateert men dat deze cijferparen in groepen van 20 repeteren. (Men behoeft daarvoor die machten van 13 natuurlijk niet helemaal te becijferen). De laatste twee cijfers van 13^{1966} zijn dus dezelfde als die van 13^6: 09.

Faculteit: uit het Latijn, *facultas = vermogen om iets te doen.* De term faculteit werd in de wiskunde ingevoerd in 1791 door de wiskundige Kramp, naar analogie van *potentia = macht.*
Een macht is een product van gelijke factoren, een faculteit is een product van factoren die telkens met 1 toenemen.

$$n! = 1.2.3.4.5. \ldots\ldots\ldots n$$

Limaçon: Frans, betekent *slak*

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Markt 34, Oudenbosch.
Drs. A.B. OOSTEN, Turftorenstraat 11A, Groningen.
A.F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.
Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden. *Oplossingen inzenden uiterlijk 1 januari 1967.*
Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.
Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, *f* 2,50 per jaargang. Voor anderen *f* 4,—.
Abonnementen kan men opgeven bij J.B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.