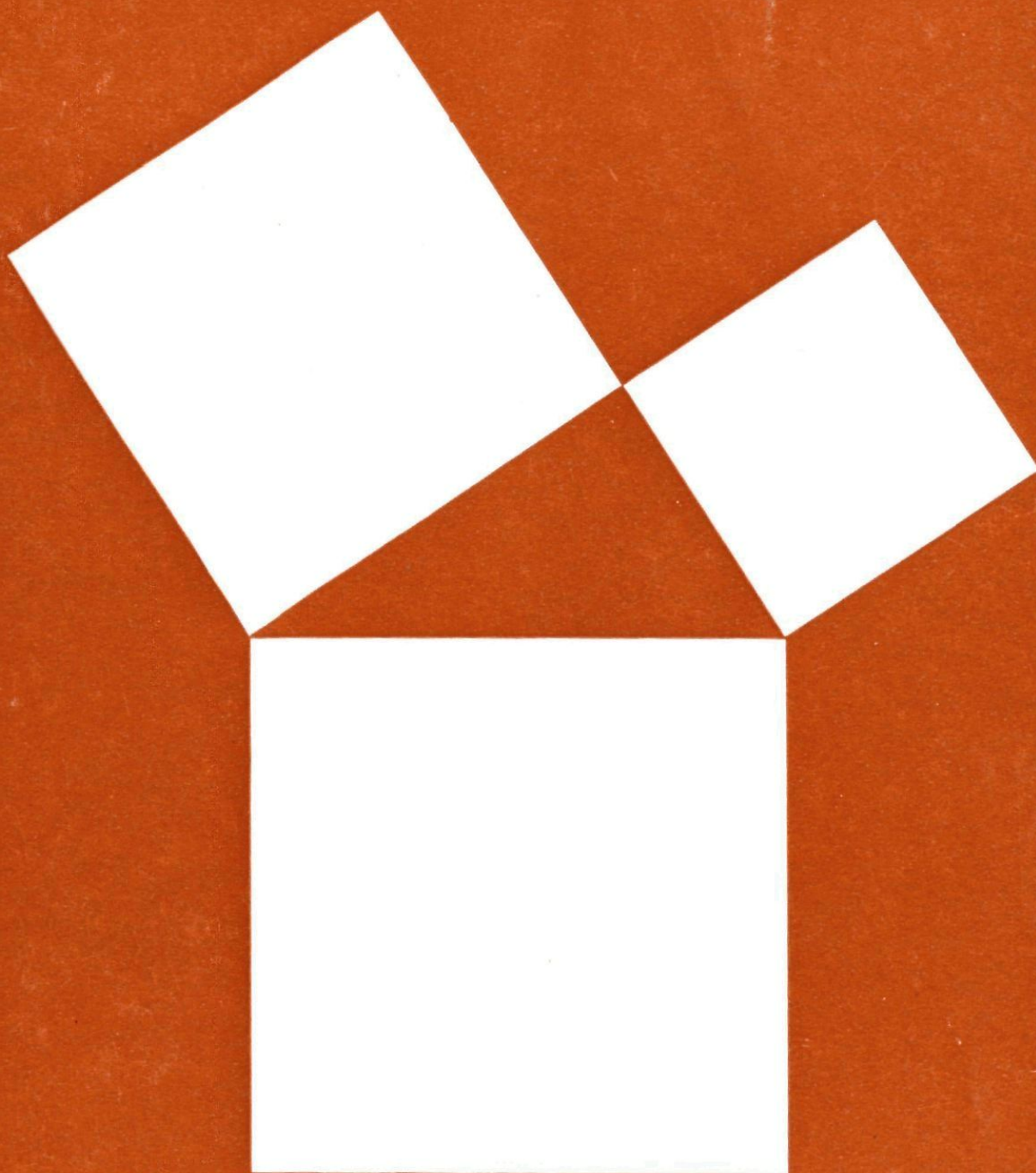


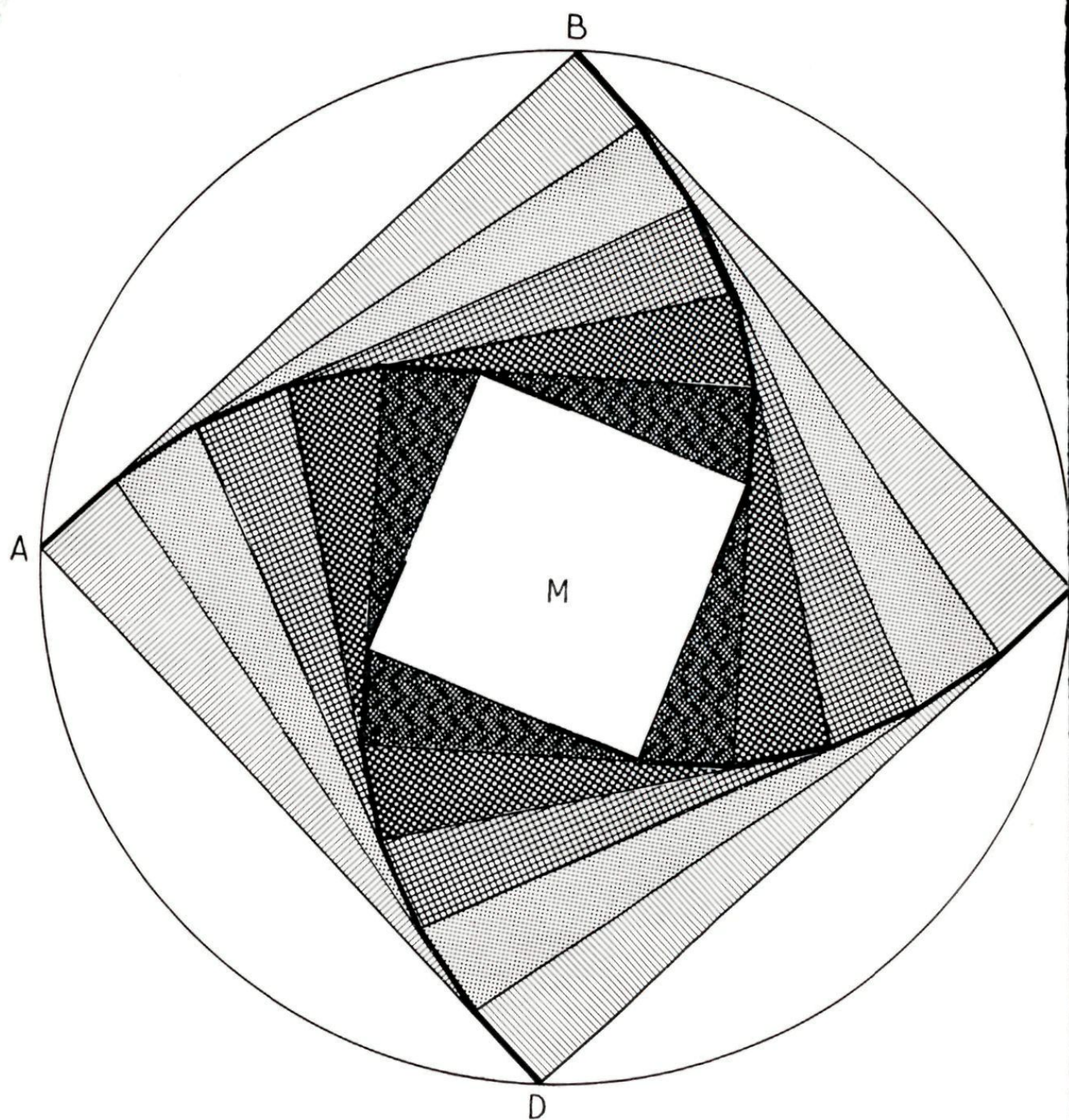
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

3

*Zesde jaargang
1966/1967*



Ik wou dat ik vier hondjes was, dan
kon ik samen spelen. (pag. 62-64)

naar
Godfried Bomans

In dit nummer

vind je het tweede deel van de prijsvraag Wees zuinig en win een prijs, die bestemd is voor de lezers die de vlakke meetkunde als vak op school hebben. Ook de oplossing van het eerste deel is opgenomen. Prijswinnaars waren bij het ter perse gaan van dit nummer nog niet bekend, maar wat in het vat zit verzuurt niet. De oplossing van de Wimecos prijsvraag I komt de volgende keer, waarbij de beste inzendingen gebruikt zullen worden. Die van Wimecos prijsvraag II staat in dit nummer.

De boekenbon voor de Denkertjes uit het laatste nummer van de vorige jaargang gaat naar Lambert van Stratum te Geldrop, die voor de Denkertjes uit nummer 1 van deze jaargang gaat naar Bert de Vries te Hengelo.

De treingrafiek die op de middenste beide bladzijden staat is niet bedoeld als deel van een spoorboekje (hij is trouwens al weer verouderd) maar je kunt er wel van alles uit aflezen over de treinen van Alkmaar naar Amsterdam en vice versa, op blz. 60 en 61.

Als je beschikt over een hond en een haas, dan kun je ze eens een paar aardige achtervolgingskrommen laten beschrijven. Je moet ze dan wel eerst het artikel hierover laten lezen dat op blz. 62 begint.

De niet-euclidische meetkunde wordt deze keer afgesloten met iets over de hyperbolische meetkunde. Verder laten we zien hoe de Indianen een hoek in drieën zouden kunnen delen, en hoe de electriciteitsleer een hulpwetenschap van de wiskunde is (blz. 56).

En natuurlijk zijn er weer tien Denkertjes.

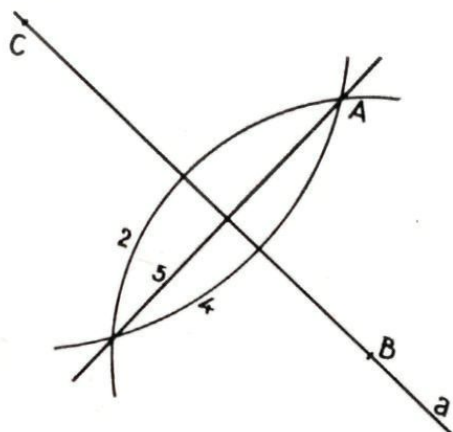
°Wees zuinig en win een prijs

Oplossingen

In de figuren is het aantal punten aangegeven.

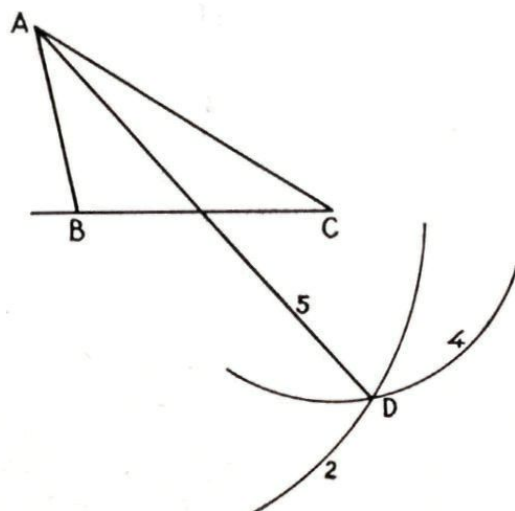
Opdracht I: Laagste score: 5 punten.

B en C zijn de middelpunten van de twee cirkels; ze worden willekeurig op de rechte a gekozen.



Opdracht II: Laagste score: 5 punten.

De cirkel, waar 2 bij staat, heeft B tot middelpunt; zijn straal is gelijk aan AC. De cirkel, waar 4 bij staat, heeft C tot middelpunt; zijn straal is gelijk aan AB. Na het trekken van CD en BD zou vierhoek ACDB een parallellogram zijn, omdat de overstaande zijden twee aan twee gelijk zijn. In een parallellogram halveren de diagonalen elkaar en daarom halveert AD de zijde BC en is dus zwaartelijns van driehoek ABC.



Opdracht III: Laagste score: 7 punten.

Het begin van de constructie gaat net eender als bij opdracht II.

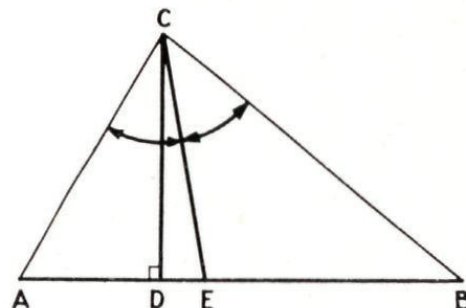


Construeer een hoek A van 30° , waarvan een been langs de rechte a valt.

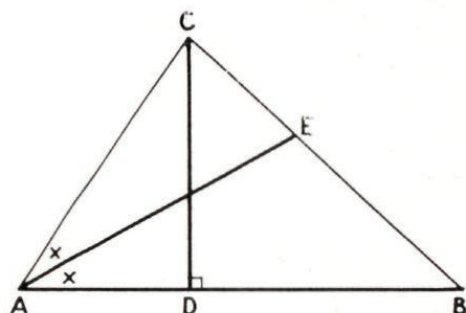
°° Bepaald – Construeerbaar

De heer W. Braafhart uit Rotterdam zond ons een brief met drie constructieproblemen. Twee daarvan handelden over het construeren van driehoeken, nl.

1. Van $\triangle ABC$ zijn gegeven: de basis AB
de hoogtelijn CD
de bissectrice CE



2. Van $\triangle ABC$ zijn gegeven: de basis AB
de hoogtelijn CD
de bissectrice AE



In beide gevallen luidde de opdracht: Construeer die driehoek. Onze lezer schreef erbij, dat hij voor de eerste opgave een oplossing had gevonden, maar niet voor de tweede. „Het tweede probleem”, schreef hij,

„was bij mij opgekomen, nadat ik het eerste had opgelost. En omdat ik de mening was toegedaan, dat met 3 onafhankelijke gegevens een driehoek te construeren is, meende ik ook daarvoor een oplossing te moeten vinden. Alle pogingen bleven echter vruchteloos. U zult kunnen begrijpen, dat me dit dwars zit en ik zou dan ook gaarne van u vernemen of deze opgave wel op te lossen is. Blijkt het inderdaad een onoplosbaar probleem, dan is ook de stelling, dat met drie onafhankelijke gegevens een driehoek te construeren is, in zijn algemeenheid onhoudbaar.”

De eerste opgave is niet zo erg eenvoudig, maar inderdaad is een constructie van $\triangle ABC$ in dit geval mogelijk. Bij de tweede is dat, voor zover wij kunnen nagaan niet het geval. Hoe zit het nu met de in de brief genoemde stelling? Dat is heel eenvoudig: Het is geen stelling! Onze lezer haalt twee dingen door elkaar nl. het *bepaald* zijn door drie onafhankelijke gegevens en het *construeerbaar* zijn. Over beide willen we nu nog iets zeggen.

Eerst maar het construeerbaar zijn. Er is in onze schoolmeetkunde een

traditie, dat alleen dan iets construeerbaar genoemd wordt, als de constructie kan worden uitgevoerd met de passer (om er cirkelbogen mee te trekken) en met het liniaal (om er rechte lijnen langs te trekken, dus niet om er afstanden mee af te meten). Men zegt wel, dat al in de oudheid de Grieken geen andere constructies toelieten dan deze. De drie zogenaamde klassieke problemen van de meetkunde zijn: De kwadratuur van de cirkel, (dat is het construeren van een vierkant, waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van een gegeven cirkel) de verdubbeling van de kubus (het maken van een kubus, waarvan de inhoud twee maal die van een gegeven kubus is), en de trisectie van een hoek.

Geen van de drie problemen is oplosbaar met passer en liniaal, maar ook hier geldt dat het zoeken naar een oplossing die er niet is, een bron van inspiratie voor vele wiskundigen is geweest.

De verdubbeling van de kubus (het Delische probleem) en de trisectie van de hoek komen neer op het oplossen van derdegraadsvergelijkingen. Trisectie van de hoek betekent: een willekeurige hoek in drie gelijke delen verdelen. Is α de gegeven hoek, dan is ook $\cos \alpha$ bekend. Stellen we $\alpha = 3\beta$, dan is

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos (2\beta + \beta) = \cos 2\beta \cos \beta - \sin 2\beta \sin \beta = \\ &= (2\cos^2\beta - 1) \cos \beta - 2\sin^2\beta \cos \beta \\ &= 4 \cos^3\beta - 3\cos \beta\end{aligned}$$

Is $\cos \alpha = k$ en stellen we $\cos \beta = x$, dan moeten we de vergelijking $4x^3 - 3x - k = 0$ oplossen. Het trekken van een cirkel komt analytisch overeen met geven van een tweedegraadsvergelijking, het trekken van een lijn met een eerstegraadsvergelijking. Het bepalen van snijpunten van lijnen en cirkels is analytisch het oplossen van eerste of tweedegraadsvergelijkingen. Worden de coördinaten van het te construeren punt gevonden door het oplossen van een derdegraadsvergelijking, die niet te ontbinden is, dan is het punt niet met passer en liniaal te construeren. Een hoek is dus niet met passer en liniaal in drie gelijke delen te verdelen.

Dit wil echter nog niet zeggen dat het derde deel van een hoek niet *bepaald* is. Om terug te keren tot het uitgangspunt: In het algemeen is door drie onafhankelijke gegevens een driehoek bepaald. Dat wil dan o.a. zeggen dat alle driehoeken die in deze drie gegevens overeenstemmen, congruent zijn. Of de driehoek ook met passer en liniaal geconstrueerd kan worden is een tweede.

°Trisectie met de Tomahawk

Wie voor het eerst hoort dat je een willekeurige hoek met behulp van passer en liniaal niet exact in drieën kunt delen, komt gauw in de verleiding het toch eens te proberen. We hebben in de loop van de jaren heel wat brieven van lezers gekregen die meenden een oplossing gevonden te hebben. Een veel voorgestelde oplossing zie je in fig. 3.

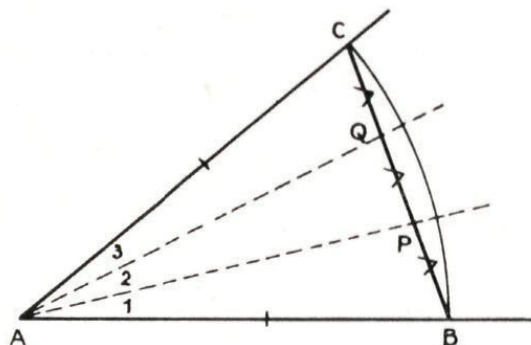


Fig. 3

De koorde BC is heel exact in drie gelijke delen verdeeld. Dat op deze manier de hoek A niet in drie gelijke delen wordt verdeeld, zie je duidelijk in fig. 4.

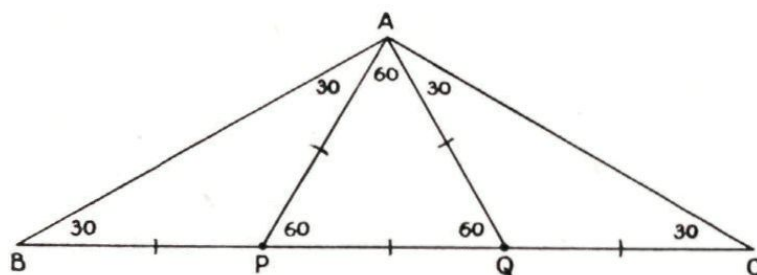


Fig. 4

Er zijn wel exacte oplossingen mogelijk, maar die vereisen meer hulpmiddelen dan een passer en een liniaal (die alleen gebruikt mag worden om er lijnen langs te trekken, niet om afstanden te meten).

Een heel exacte manier is die met behulp van een „tomahawk”. De naam wordt je duidelijk als je het instrumentje van fig. 8 bekijkt, het heeft de vorm van een Indiaanse strijdbijl.

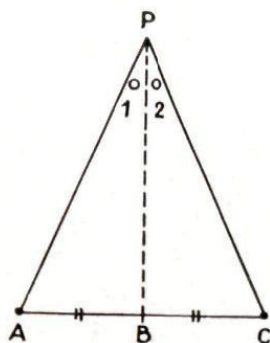


Fig. 5

De methode is eigenlijk een combinatie van twee verschillende manieren om een hoek in tweeën te delen. In fig. 5 is de tophoek van een gelijkbenige driehoek door midden gedeeld, in fig. 6 zijn de raaklijnen

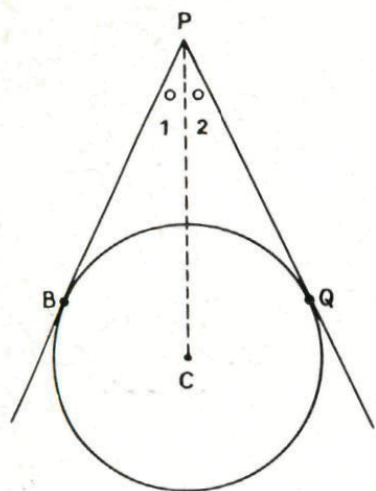


Fig. 6

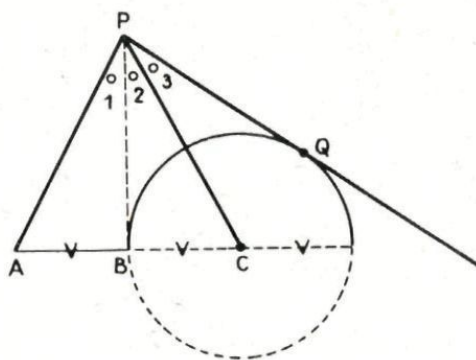


Fig. 7

aan een cirkel getrokken. In fig. 7 zijn deze figuren in elkaar geschoven, de tomahawk wordt hier al een beetje zichtbaar. We hebben voor de driedeling alleen de lijn PB, de gelijke lijnstukken AB en BC en een deel van de halve cirkel nodig. In fig. 8 zie je hoe deze elementen zijn gecombineerd in een houten of metalen voorwerp, en hoe hiermee een gegeven hoek keurig in drie gelijke delen wordt verdeeld.

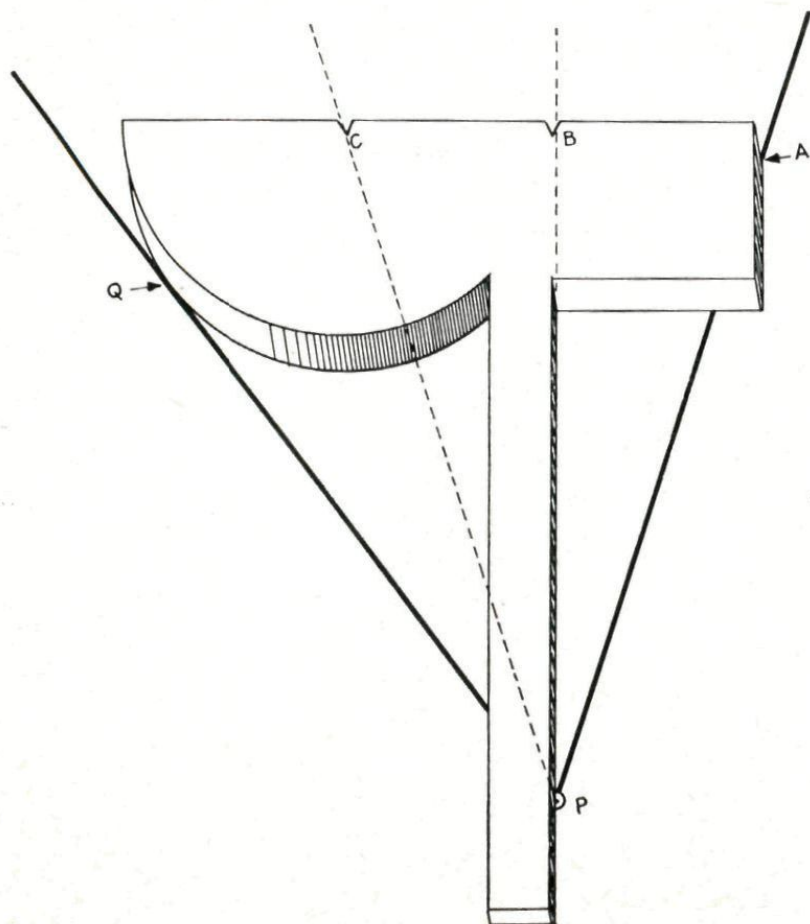


Fig. 8



- 21 Maak een waarheid van de onderstaande regel door toevoeging van plus-, min-, maal- of deeltokens of haakjes (naast elkaar staande cijfers mogen als één getal beschouwd worden):

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 10

- 22 Welk getal van twee cijfers is gelijk aan de som van zijn tientallencijfer en het kwadraat van zijn eenhedencijfer?
- 23 Iemand neemt zes touwtjes in zijn hand, zodat aan elke kant van zijn vuist zes uiteinden te voorschijn komen. Jij krijgt de opdracht die zes uiteinden aan de eerste kant paarsgewijze aan elkaar te binden en dat daarna ook te doen met de zes uiteinden aan de andere kant.
Op hoeveel verschillende manieren kan jij je opdracht uitvoeren; bij hoeveel manieren blijkt er na het openen van de vuist een ring gevormd te zijn?

◦◦Stroom- en andere verdelingen

Dat in de natuurkunde een dankbaar en veelvuldig gebruik wordt gemaakt van de wiskunde, zal je bekend zijn. (Boze tongen beweren zelfs dat dit het doel is van de wiskunde.) We zullen hier een veel groter zeldzaamheid bekijken, namelijk een zuiver wiskundig probleem, dat met behulp van natuurkundige overwegingen wordt opgelost.

Het probleem is dit: Vul een rechthoek op met vierkanten, zodanig dat geen twee aangrenzende vierkanten gelijk zijn en geen der vierkanten de hele breedte van de rechthoek in beslag neemt.

In fig. 9 zie je een rechthoek die opgevuld is met 9 vierkanten.

Voor het vinden van dergelijke verdelingen doen we een beroep op de electriciteitsleer. We denken ons de rechthoek van een plaat homogeen geleidend materiaal, bijvoorbeeld koper. Boven en onderkant denken we aangesloten op een stroombron, zodat er een stroom loopt, bijvoorbeeld van boven naar beneden. Daar de weerstand van de plaat evenredig is met de lengte en omgekeerd evenredig met de breedte, hebben alle vierkanten dezelfde weerstand.

In plaats van de koperplaat kunnen we dus ook 9 gelijke weerstanden nemen en die verbinden, zoals in fig. 10 is aangegeven.

De weerstand van de verbindingsdraden wordt verwaarloosd. We berekenen de stroomsterkten in de verschillende weerstanden en bedenken daarbij:

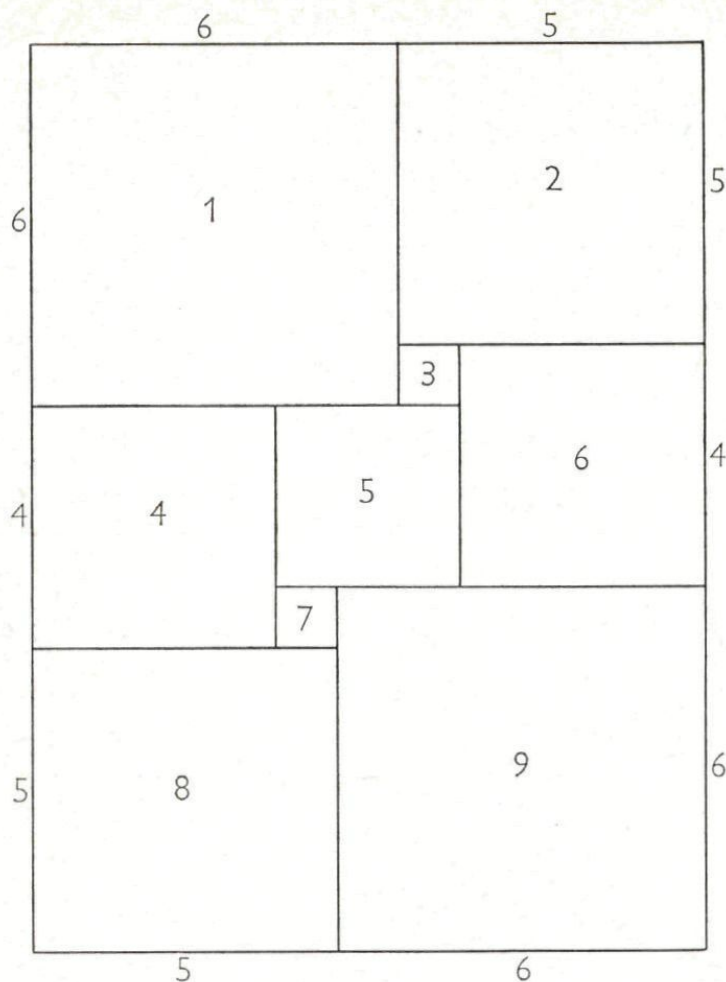


Fig. 9

1° De stroom loopt bv. van A naar C via twee verschillende wegen, langs beide wegen is het spanningsverval hetzelfde, zodat de stroomsterkte door 1 gelijk is aan die door 2 en 3 samen.

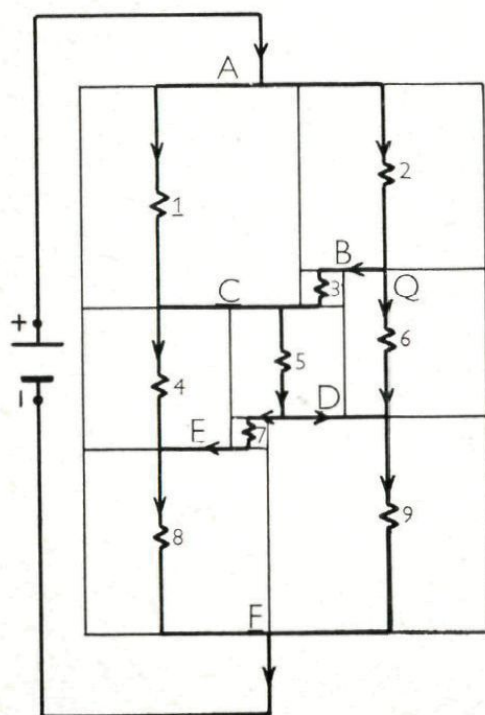


Fig. 10

2° In ieder vertakkingspunt is de „binnenkomende” stroom gelijk aan de „uitgaande”.

Stellen we de stroomsterkte in 1 gelijk aan a en die in 2 gelijk aan b , dan is volgens 1° de stroomsterkte in 3 gelijk aan $a - b$. In Q is de binnenkomende stroomsterkte b , de stroom door 3 is $a - b$, die door 6 is dan volgens 2° $-a + 2b$.

Volgens 1° is de stroomsterkte in 5 nu $-2a + 3b$. Hiervan is $a - b$ afkomstig van 3, dus $-3a + 4b$ van 1, zodat voor 4 een stroomsterkte $4a - 4b$ overblijft. Je kunt zelf gemakkelijk nagaan dat door 7 een stroom $6a - 7b$ gaat en door 8: $10a - 11b$.

Als we opmerken dat de stroomsterkten door 1, 4 en 8 samen gelijk zijn aan die door 2, 6 en 9 samen vinden we voor de stroomsterkte door 9: $16a - 18b$, als we de uitgaande stroom langs D en Q samen berekenen vinden we echter $-9a + 12b$.

Er moet dus gelden: $16a - 18b = -9a + 12b$, of

$$25a = 30b \text{ met als eenvoudigste oplossing}$$

$$a = 6 \text{ en } b = 5.$$

Substitueren we dit in de verschillende stroomsterkten dan vinden we precies de maten van de vierkanten. Wanneer we het stroomnet schematisch tekenen, met weglating van overbodige verbindingsdraden, vinden we fig. 11. Iedere zijde stelt een vierkant voor, behalve AF,

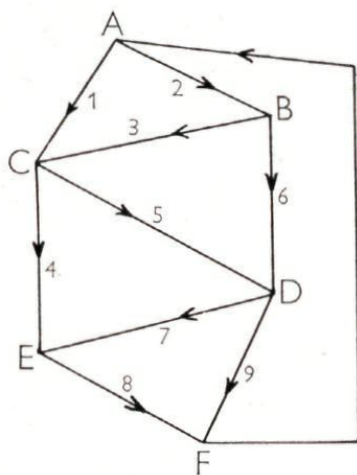


Fig. 11

waarin de stroombron is opgenomen. Door de stroombron in andere zijden te plaatsen kunnen twee andere oplossingen gevonden worden, die van fig. 12 als de bron in AB of BD staat, die van fig. 13 als de bron in BC of AC staat.

Het zal duidelijk zijn dat door het maken van andere netwerken andere verdelingen van rechthoeken gevonden kunnen worden. Een verdeling in minder dan 9 vierkanten blijkt onder de gestelde voorwaarden ech-

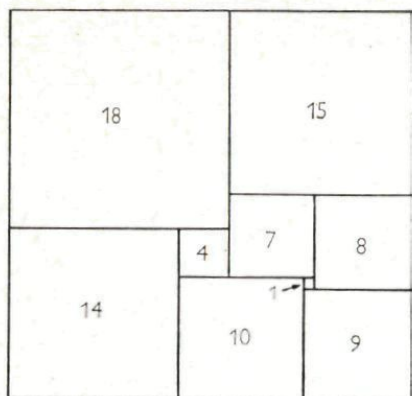


Fig. 12

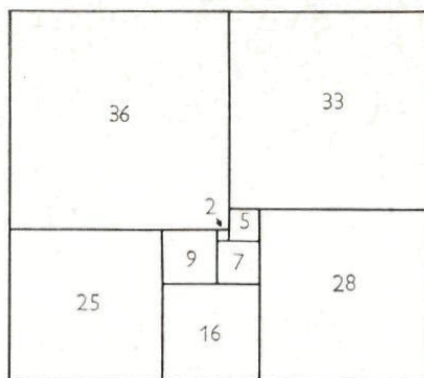


Fig. 13

ter niet mogelijk te zijn. Een aantal mensen over de hele wereld houdt zich met deze problemen bezig, speciaal ook met de vraag in hoeveel ongelijke vierkanten een vierkant verdeeld kan worden ¹. Het kleinste aantal dat tot nu toe gevonden is 24 (zie fig. 14) maar het is niet bekend of het ook met minder kan.

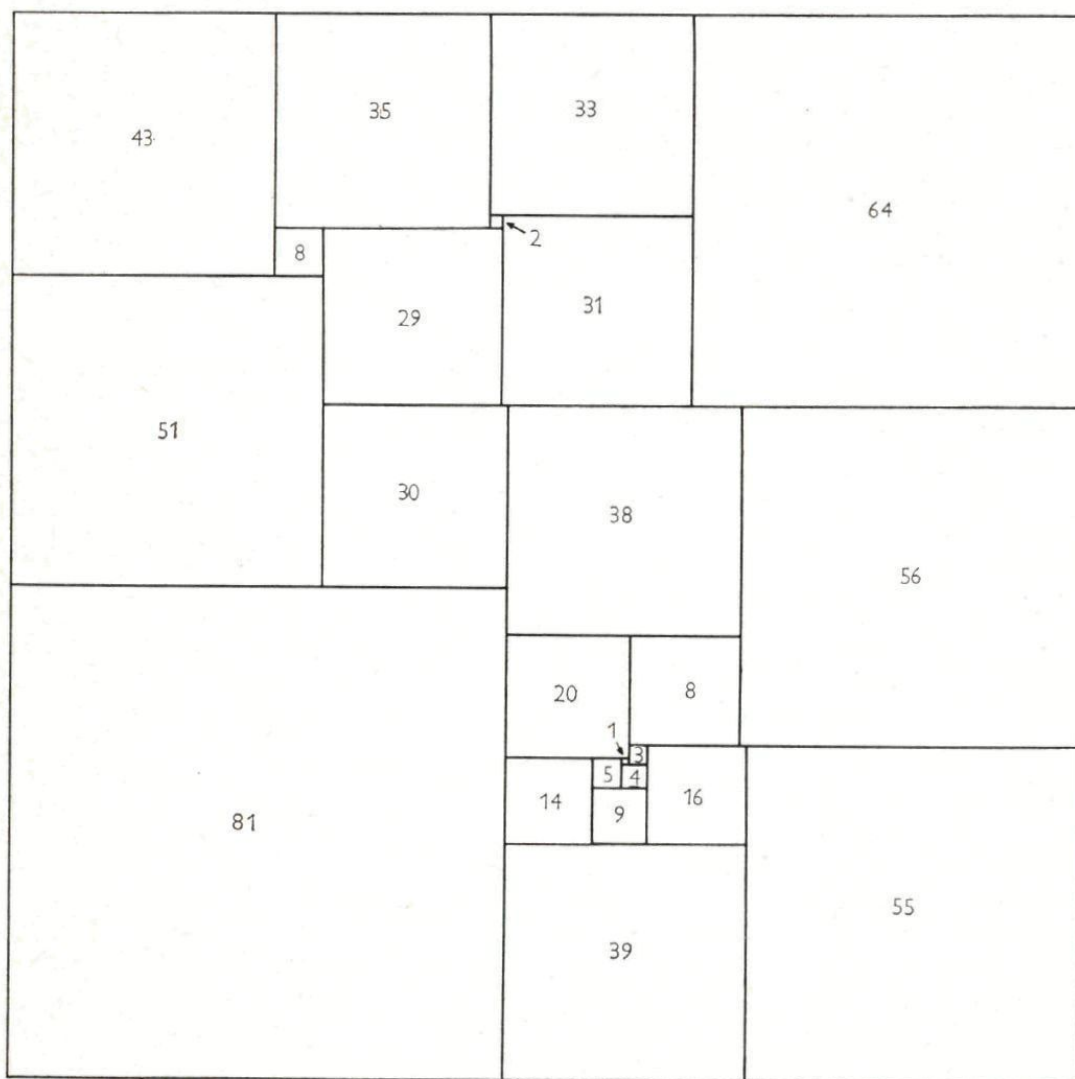


Fig. 14

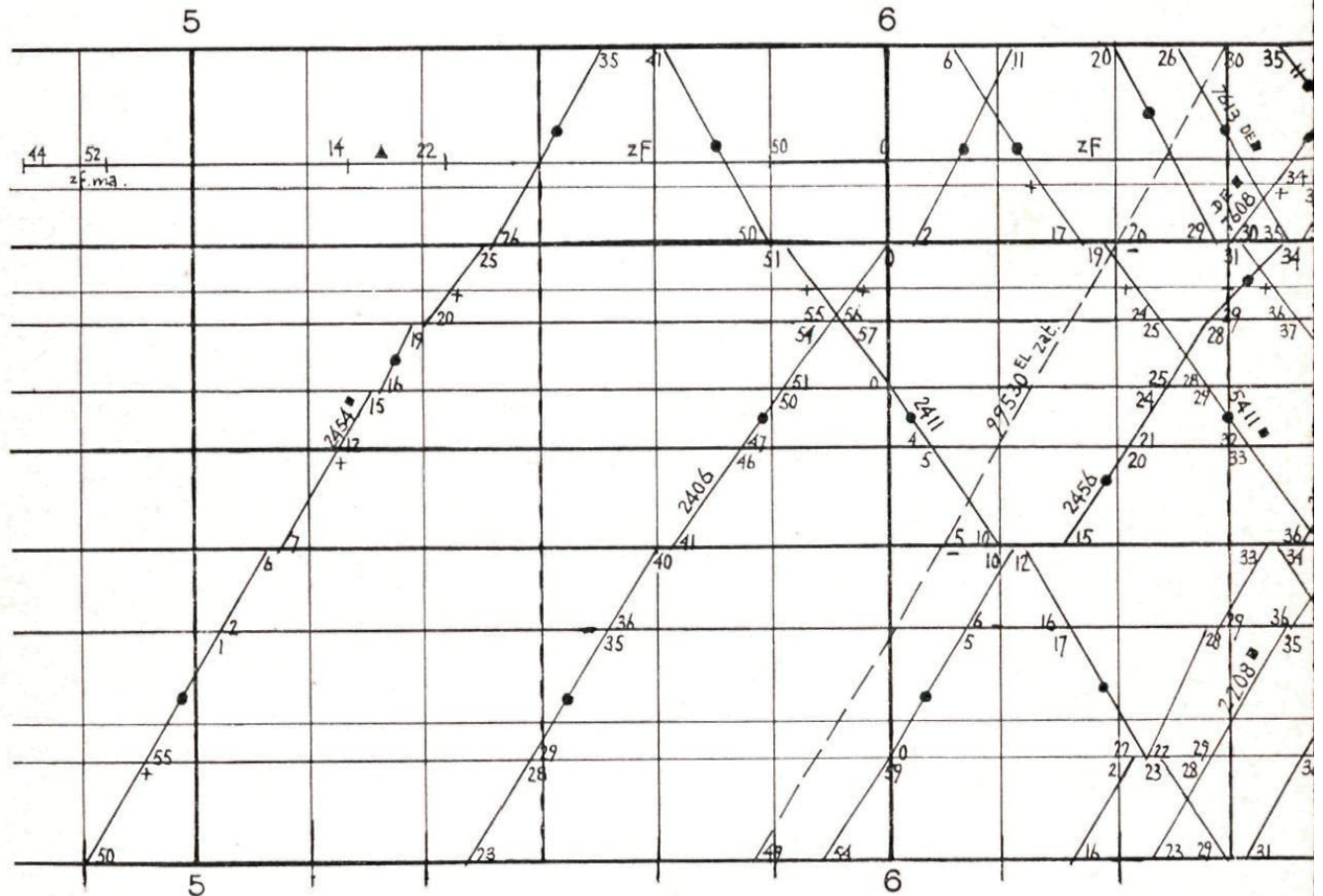
¹ Eén van hen is prof. dr. C. J. Bouwkamp te Eindhoven. Bovenstaande is gebaseerd op een lezing die hij gehouden heeft, waarbij gebruik gemaakt is van hetgeen dr. P. G. C. Vredenduin daarover in Euclides heeft geschreven.

°Treingrafiek

door Ir. H. M. Mulder

Amsterdam CS—den Helder

diens



Hierboven staat een treingrafiek, die de loop van de treinen aangeeft, die gaan van Amsterdam naar Alkmaar en terug in de vroege morgen van 5 tot 8 uur.

Probeer maar eens of je zo'n grafiek kunt lezen.

Horizontaal is de tijd uitgezet en verticaal de afgelegde weg.

Kun je nu de volgende vragen beantwoorden?

(antwoorden achterin).

1. Hoe laat vertrekt de eerste trein uit Alkmaar naar Amsterdam?
2. Als je maar een uur in Amsterdam blijft, hoe laat ben je dan weer terug?
3. Waarom is de helft van de lijnen tegengesteld gericht?

Hembrug

Zaandam

Koog Bloemwijk

Koog-Zaandijk

Wormerveer

Krommenie:
Assendelft

Uitgeest

Castricum

Onze Lieve Vrouwe
ter Nood

Heilo

Alkmaar

7.506	9.903	13.012
2.397		
2.089		
1.101		
2.570		
2.183		
5.069		15.970
4.022		
5.020		
1.881		
5.047		

- 61



- 27 Driehoek ABC is stomphoekig in B en hoek A is de kleinste scherpe hoek. De buitenbisectrices van de hoeken A en B zijn elk gelijk aan de zijde AB. Bereken hoek A.

°Achtervolgingskrommen oftewel de hond en de haas

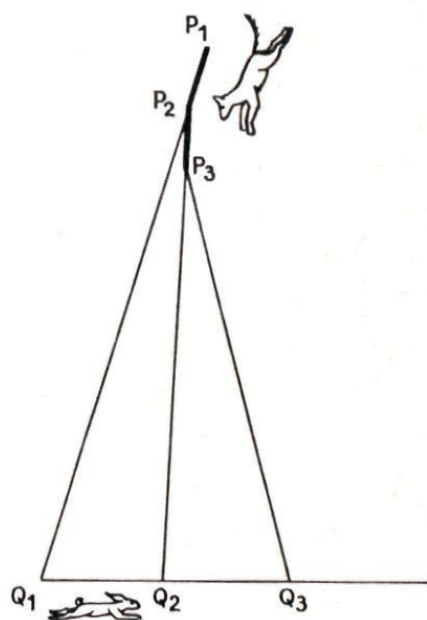
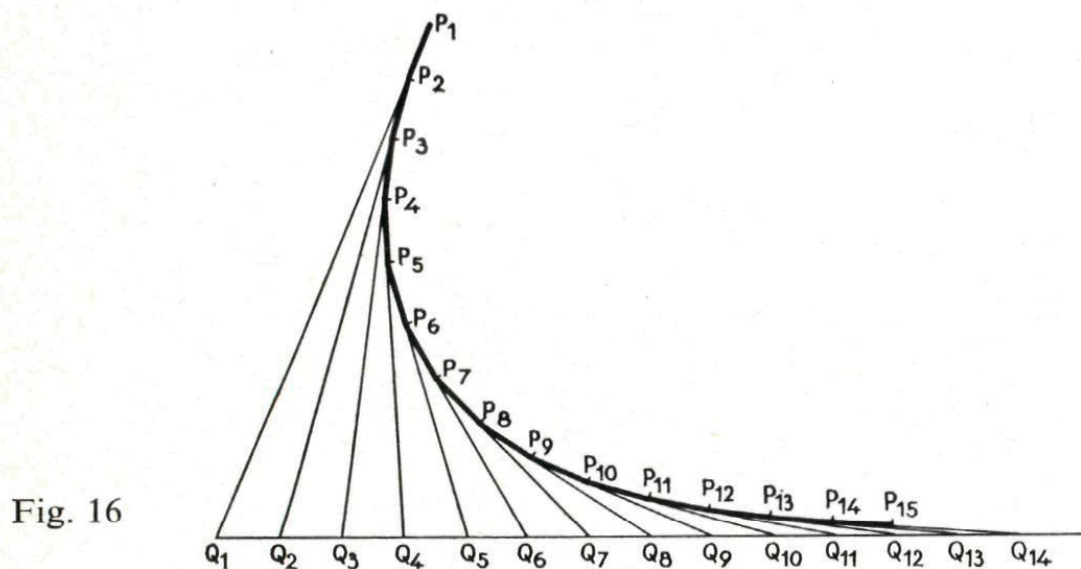


Fig. 15

Dit artikel heeft vooral de bedoeling je aan het experimenteren te zetten. Bekijk dus niet alleen de figuren, maar probeer ze ook te tekenen en dan vooral groter dan we ze hier kunnen afdrucken. Het probleem is eenvoudig te stellen. Ergens in het veld bevinden zich een hond en

een haas. De hond bij P_1 , de haas bij Q_1 in figuur 15. De hond rent naar de haas toe langs de lijn P_1Q_1 , maar deze blijft niet zitten wachten en rent weg in de richting van Q_2 . Nu veronderstellen we voortdurend, dat hond en haas lopen met een vaste snelheid en dat ze dus in gelijke tijden gelijke afstanden afleggen. Natuurlijk kan het zijn dat de haas harder loopt dan de hond of omgekeerd, dat geeft je juist de kans om te experimenteren. Maar laten we kijken, wat ze doen. We zagen dus de hond van P_1 uit in de richting Q_1 rennen.



Maar in P_2 aangekomen, ziet hij, dat de haas dan in Q_2 is. Dus verandert hij van richting en rent naar Q_2 . Maar de haas (je snapt het al) loopt door en na precies dezelfde tijd als de eerste keer ziet de hond, dat hij in de verkeerde richting gaat en wijzigt hij zijn koers naar Q_3 . In fig. 16 zie je nu wat het gevolg is. Iedere keer na een gelijk stukje afgelegd te hebben, moet de hond zijn koers wijzigen. En is het nu niet



sprekend zo, alsof hij een gebogen baan doorloopt? Toch bestaat deze uit allemaal rechte stukjes P_1P_2 , P_2P_3 , P_3P_4 , enz. Het is beslist verrassend de figuur zelf te tekenen en dan voor verschillende gevallen. Je kunt de hond bijvoorbeeld een iets grotere snelheid geven (de rechte stukjes worden dan wat langer) of de haas wat sneller laten voortgaan. Ook hoeft je de haas niet langs een rechte lijn te laten lopen. In fig. 17 loopt hij langs een cirkel. De hond zat oorspronkelijk bij het middelpunt. Zou hij ooit de haas bereiken? Geef de haas anders eens een kleinere snelheid. Hoe loopt de „hondebaan” dan?

In de figuur op de binnenzijde van het omslag zien we, dat op gelijke afstanden van elkaar op een cirkelomtrek vier hondjes A, B, C en D zitten. Op een seintje van de baas beginnen ze, alle met dezelfde snelheid, naar elkaar toe te hollen.

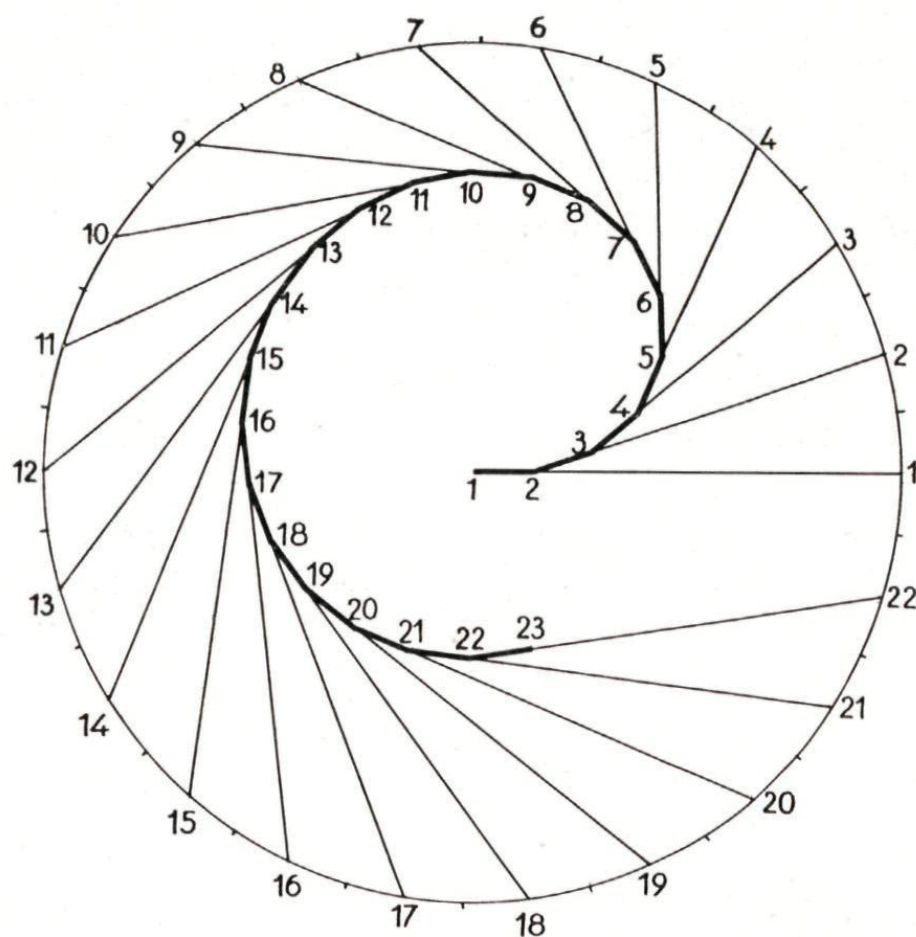


Fig. 17

Precies op gelijke momenten bemerken ze, dat ze hun koers moeten wijzigen. Een deel van hun banen is in de figuur getekend.

Het loont de moeite deze figuur tweemaal zo groot over te tekenen. Je doet er daarbij goed aan ze sneller van koers te laten wijzigen. Ontmoeten de vier elkaar in het middelpunt?

°° Niet-euclidische meetkunde

III Hyperbolische meetkunde

Nadat eeuwenlang vruchteloos pogingen waren gedaan het zogenaamde parallellenaxioma van Euclides te bewijzen, kwamen omstreeks 1820 Gauss, Bolyai en Lobatschewsky tot het inzicht dat het mogelijk is een meetkunde op te bouwen, waarbij door een punt P buiten een lijn l oneindig veel lijnen gaan die l niet snijden. Deze meetkunde noemen we tegenwoordig hyperbolische meetkunde.

In de Euclidische vlakke meetkunde is „niet snijden” hetzelfde als „evenwijdig zijn met”, in de hyperbolische meetkunde wordt het begrip „evenwijdig” iets anders gebruikt. Tussen alle lijnen die door P gaan en die l snijden of niet snijden liggen namelijk twee die l *net* niet snijden. In fig. 19 zullen dit de lijnen p en q zijn. Deze maken een hoek α met de loodlijn uit P op l . Alle lijnen door P die een kleinere hoek met de loodlijn maken zullen l snijden; p en q heten nu evenwijdig met l . Alle lijnen door P die een grotere hoek maken met de loodlijn worden wel ultra-parallel genoemd met l .

Door ieder punt buiten een lijn gaan dus precies twee lijnen evenwijdig met die lijn.

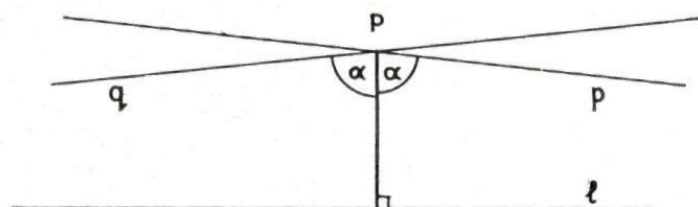


Fig. 19

Een volledige axiomatische opbouw van de hyperbolische meetkunde zullen we hier natuurlijk niet geven, we merken alleen nog op dat deze uitsluitend op het punt van de evenwijdigheid afwijkt van de Euclidische meetkunde. Alle andere axiomas kunnen worden gehandhaafd. Om de hyperbolische meetkunde te illustreren maken we gebruik van het zogenaamde model van Poincaré, een Frans wiskundige die overleed in 1912.

We kunnen ons geen plat vlak voorstellen waarbij door een punt P oneindig veel lijnen gaan die een lijn l niet snijden. Dit komt omdat we met de begrippen „lijn” en „vlak” vast zitten aan een bepaalde voorstelling. Wanneer we bereid zijn deze voorstelling wat te veranderen dan kan bovengenoemde situatie wel voorkomen.

Bij het model van Poincaré is het hyperbolische platte vlak (h-vlak)

een deel van het Euclidische platte vlak, namelijk het gebied binnen een gegeven, vaste cirkel, de fundamentealcirkel. Punten op of buiten die cirkel zullen, hyperbolisch gezien, niet bestaan.

Hyperbolische lijnen (h-lijnen) zijn: alle bogen van cirkels die de fundamentealcirkel loodrecht snijden, voorzover gelegen binnen de fundamentealcirkel, alsmede de middellijnen van de fundamentealcirkel.

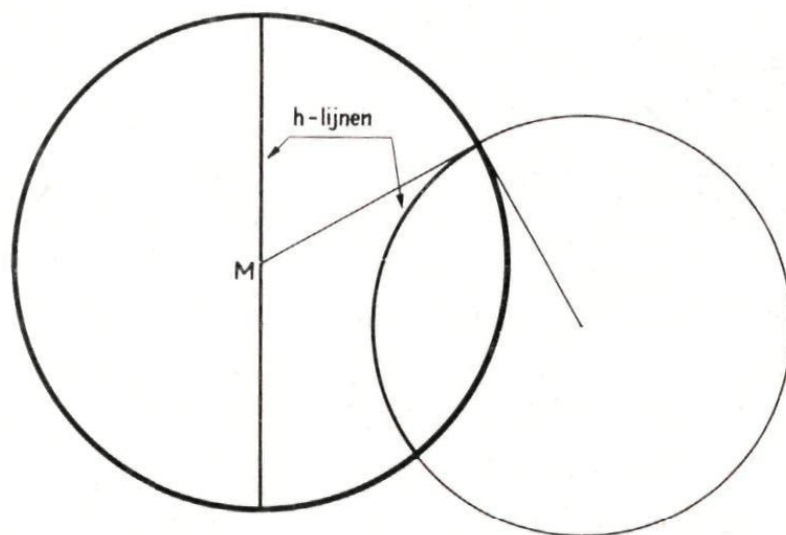


Fig. 20

Aangetoond kan worden dat bij deze opvatting van „lijn” en „vlak” en een passende keuze voor andere begrippen zoals „congruentie” en „lengte”, wordt voldaan aan alle axiomas van de hyperbolische meetkunde. Bijvoorbeeld gaat er door twee punten A en B van het h-vlak precies één h-lijn.

Om dit in te zien bekijken we fig. 21 Euclidisch. Hier is getekend een

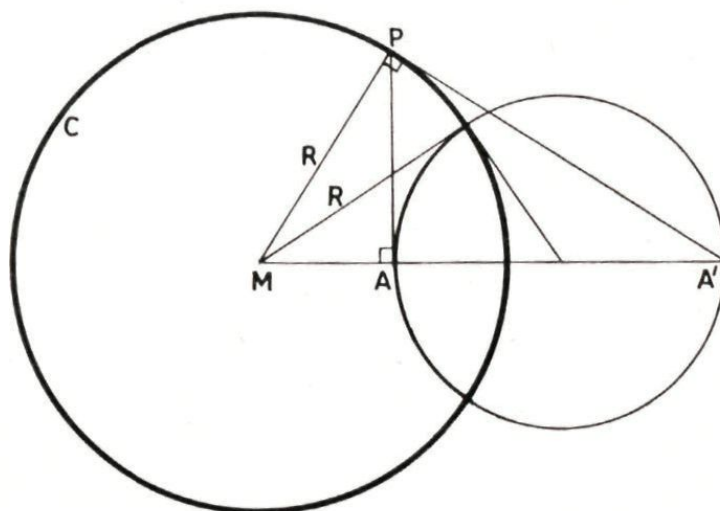


Fig. 21

cirkel door A die de fundamentealcirkel C loodrecht snijdt. M is het middelpunt van C. De loodlijn in A op MA snijdt C in P. De raaklijn in P snijdt MA in A'. Nu is, omdat $\angle P = 90^\circ$, $R^2 = MA \cdot MA'$. Omdat R^2 ook de macht van M t.o.v. de cirkel door A is, volgt hieruit

dat A' ook op deze cirkel ligt. De cirkels door A die C loodrecht snijden vormen dus een bundel die ook door A' gaat. Van deze bundel is er precies één exemplaar dat ook door B gaat, tenzij A en B op een middellijn liggen. (Maar ook dan gaat door A en B precies één h -lijn, namelijk die middellijn zelf).

We kunnen nu ook inzien dat twee h -lijnen elkaar in ten hoogste één punt snijden. Immers alle h -lijnen die elkaar in A snijden zouden elkaar ook snijden in A' , maar dit is geen punt van het h -vlak!

In fig. 22 zijn een punt P en een h -lijn l getekend. De h -lijnen door P die

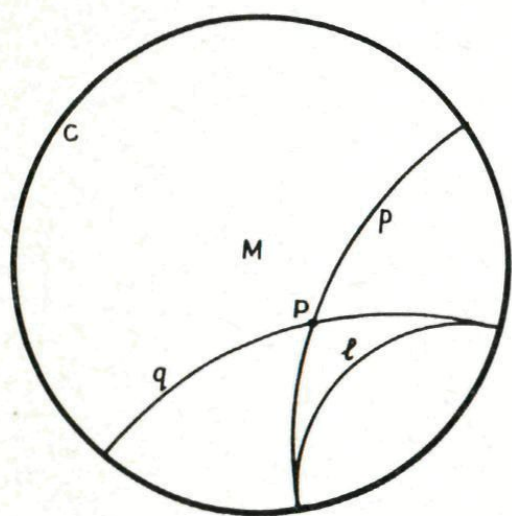


Fig. 22

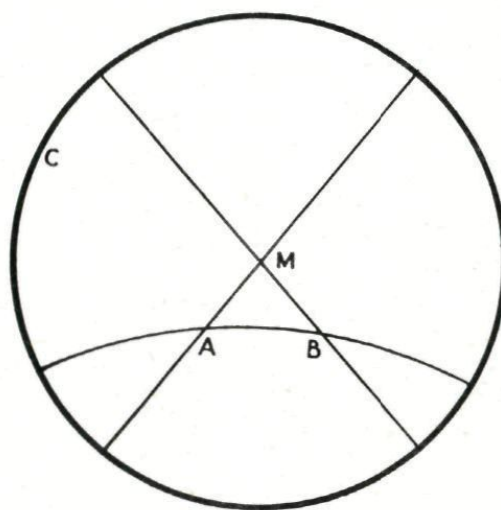


fig. 23

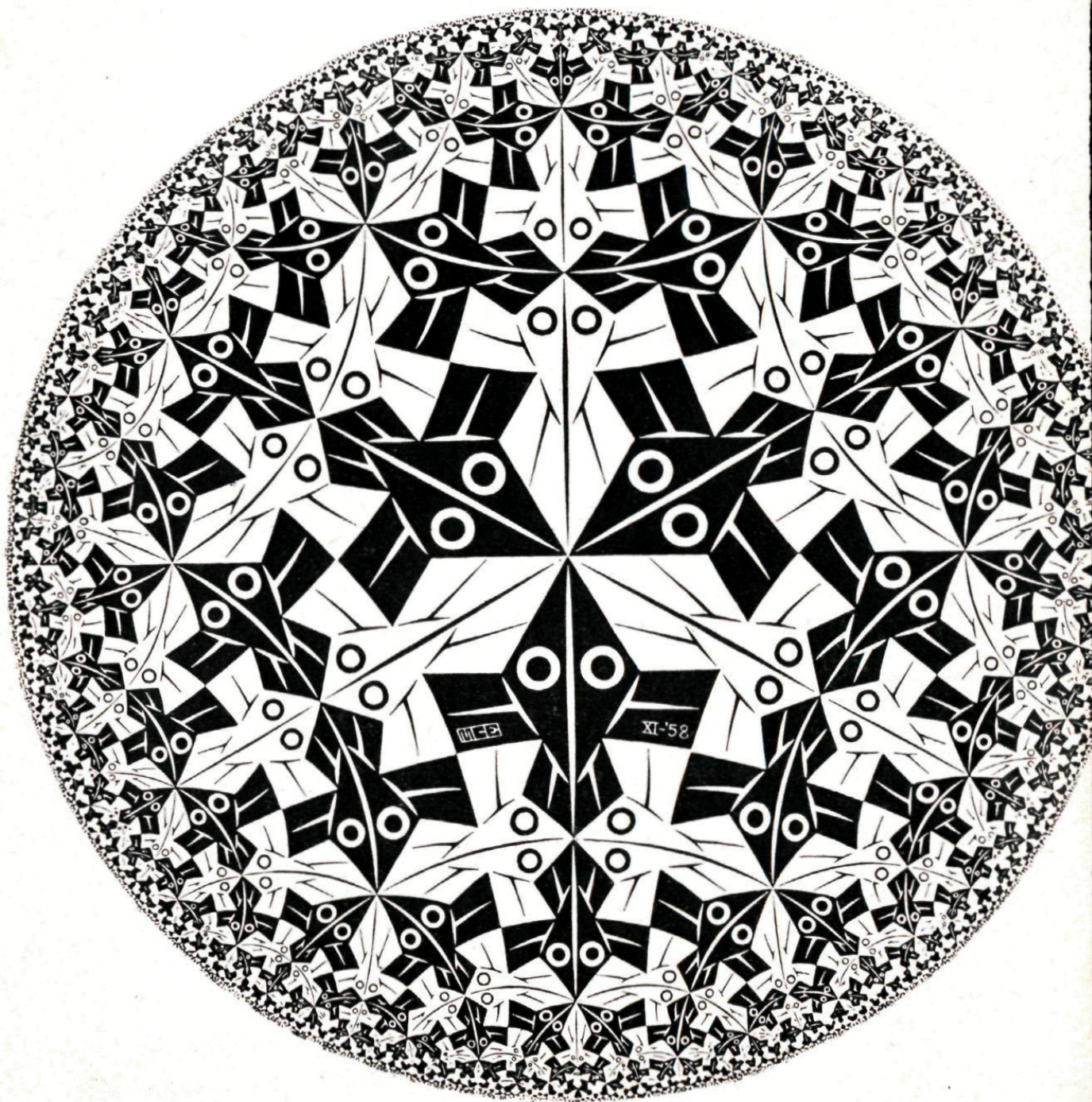
l snijden of niet worden gescheiden door de h -lijnen p en q die l , Euclidisch gesproken, raken op de fundamentealcirkel. Hyperbolisch gesproken zijn p en q evenwijdig met l .

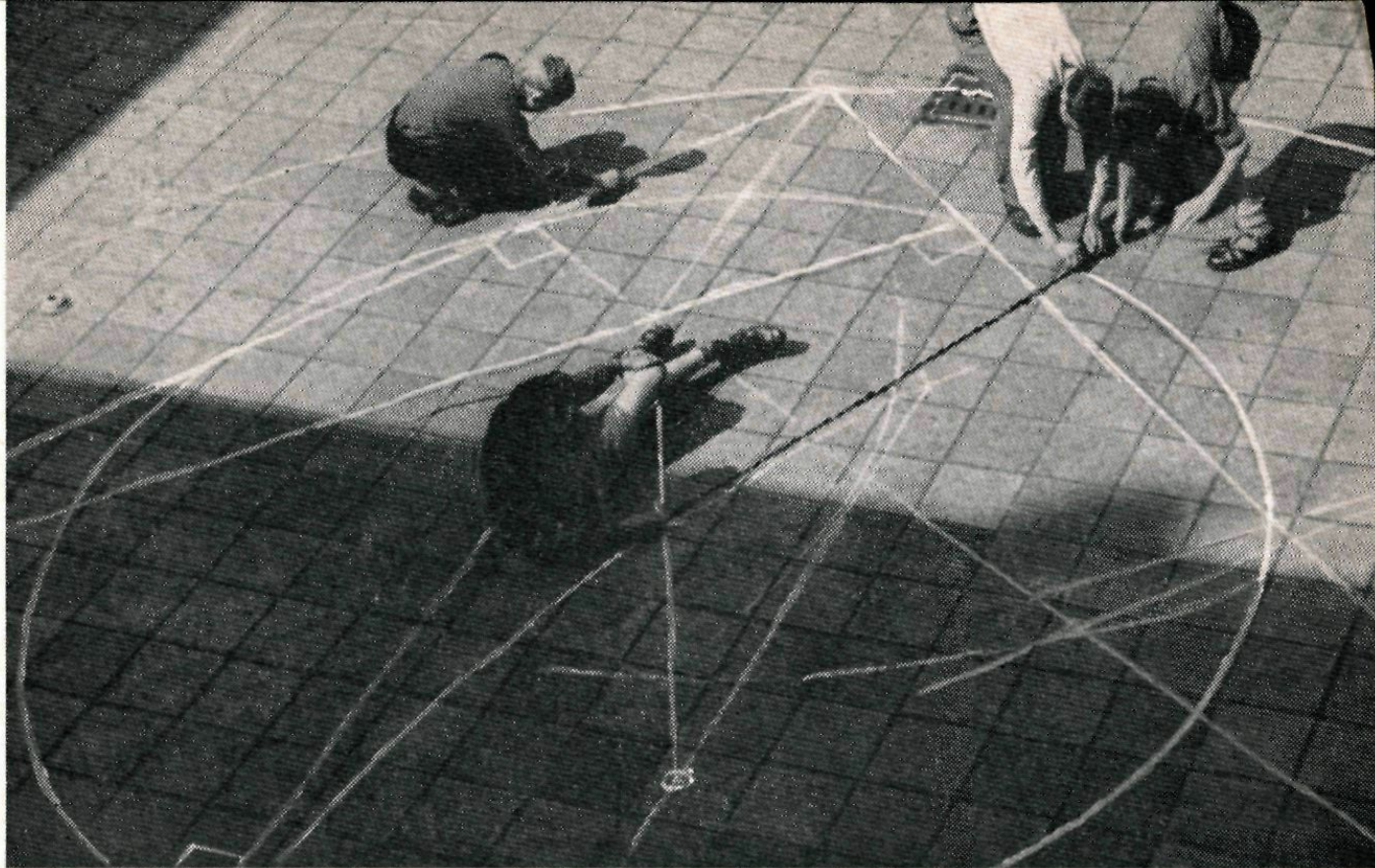
Onder de hoek tussen twee snijdende h -lijnen verstaan we de hoek die de Euclidische raaklijnen met elkaar maken in het snijpunt.

Uit fig. 23 is nu wel af te leiden dat de som van de hoeken van een driehoek kleiner is dan 180° , ook als M één van de hoekpunten is. De afstand van twee punten in het h -vlak wordt zo gedefinieerd, dat deze oneindig groot wordt als één van de punten naar de fundamentealcirkel gaat. Dit is op prachtige wijze gedemonstreerd door de graficus M. C. Escher. De figuren in de vlakvulling op blz. 68 zijn, hyperbolisch gesproken, congruent.

Zo oud als de niet-euclidische meetkunde is de vraag welke van de drie meetkonden nu de „juiste” is, dat wil zeggen, welke van de drie van toepassing is op het heelal waarin we leven.

Wanneer we in ons voorbeeld van de elliptische meetkunde de straal van de bol, of in ons voorbeeld van de hyperbolische meetkunde de straal van de fundamentealcirkel laten toenemen, dan wordt de „kromming” van de lijnen steeds kleiner. En als deze straal gelijk geworden is aan de afstand van de aarde tot de zon, maak dan nog maar eens uit of je te maken hebt met een elliptische, een Euclidische of een hyperbolische lijn! Het probleem is nog niet opgelost en misschien ook niet oplosbaar. Maar wel staat vast dat de „kromming van het heelal”, zo deze bestaat, zo klein is, dat we ons op aarde rustig aan de Euclidische meetkunde kunnen houden.





Doe het eens in 't groot!

Schuttingen en trottoirs werden vanouds gebruikt als ondergrond van de grafische expressie van naamlozen. Door het organiseren van wedstrijden in schutting- en trottoirtekenen worden deze „kunstuitingen” gelegaliseerd.

Misschien is het ook wel eens leuk wedstrijden in meetkunde constructies te houden op straten en pleinen. Dat dit al eens gebeurd is zie je op bovenstaande foto.



28 De vier punten ABCD liggen in een vlak en zijn verschillend. Gegeven is dat elke cirkel door A en B minstens één punt gemeen heeft met elke cirkel door C en D. Bewijs dat A, B, C, D op één rechte liggen of op één cirkel liggen.

29 Na afloop van een bal wordt vastgesteld, dat geen enkele heer met alle dames heeft gedanst en dat geen enkele dame de gehele avond langs de kant heeft gezeten zonder te dansen. Bewijs dat er twee dames D_1 , D_2 en twee heren H_1 , H_2 te vinden moeten zijn, zo dat de paren D_1 , H_1 en D_2 , H_2 wel gedanst hebben en dat de paren D_1 , H_2 en D_2 , H_1 niet gedanst hebben.

30 Tussen de vijf getallen, a , b , c , d , e bestaan de volgende betrekkingen:
 $a > e$, $b < c$, $c > e$, $d < e$, $a > b$, $b < d$, $c > a$, $a > d$.
 Rangschik deze getallen naar afdalende grootte.

Oplossingen Wimecos-prijsvraag II

Opdracht 1: Vormt men de n produkten van boven elkaar staande getallen uit twee rijen, dan is elk van die produkten gelijk aan $+1$ of gelijk aan -1 . Omdat die produkten samen 0 zijn, komen daaronder de getallen $+1$ en -1 even vaak voor. Het totale aantal van die n produkten is daarom even.

Opdracht 2: Beschouw ditmaal eens kolommen in plaats van rijen. Kies een kolom uit, waarvan het bovenste getal -1 is. Vervang alle getallen van die kolom door hun tegengestelde. Je hebt dan een nieuw patroon gekregen, dat nog steeds de vier veronderstelde eigenschappen heeft (de in eigenschap d genoemde produkten veranderen niet, omdat beide factoren van zo'n produkt of onveranderd bleven of tegengesteld werden). Zo kan je achtereenvolgens alle getallen -1 van de bovenste rij veranderen in $+1$.

Opdracht 3: Veronderstel, dat je een dergelijk patroon hebt voor $n = 2k > 2$. Veronderstel meteen ook maar, dat de bovenste rij uit $2k$ getallen $+1$ bestaat. Elk van de andere rijen bevat dan k getallen $+1$ en k getallen -1 (zie opdracht 1). Kies nu twee van die andere rijen uit en bereken de $2k$ produkten van boven elkaar staande getallen. Je ontmoet dan vier verschillende situaties:

1°: Stel, dat de situatie $\begin{smallmatrix} +1 \\ +1 \end{smallmatrix}$ p maal voorkomt. Daarmee heb je dan alvast p produkten verkregen, die gelijk zijn aan $+1$.

2°: Er ontstaan echter k produkten, die gelijk zijn aan $+1$. Daarom moet de situatie $\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}$ dus $(k-p)$ maal voorkomen.

3°: In totaal staan er in de bovenste van de twee rijen k getallen $+1$. Daarvan hebben we er onder 1° al p ontmoet. De situatie $\begin{smallmatrix} +1 \\ -1 \end{smallmatrix}$ komt dus $(k-p)$ maal voor.

4°: In totaal staan er in de bovenste van de twee rijen k getallen -1 . Daarvan hebben we er onder 2° al $(k-p)$ ontmoet. De situatie $\begin{smallmatrix} -1 \\ +1 \end{smallmatrix}$ komt dus p maal voor.

Tellen we nu de getallen $+1$ in de onderste rij, dan vinden we die onder 1° en 4°. Hun aantal bedraagt $2p = k$. Daar blijkt uit, dat k even is en dat $n = 2k$ een viervoud is.

Opdracht 4: De in het vorige nummer genoemde voorbeelden bevatten een aanwijzing voor het uitvoeren van deze opdracht. Verdelen we het patroon voor $n = 4$ in vier kwadranten, dan komt er:

$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
-1	$+1$	-1	$+1$
$+1$	$+1$	-1	-1
-1	$+1$	$+1$	-1

Je ziet, dat drie van die vier kwadranten gelijk zijn aan het voorbeeldpatroon voor $n = 2$. En je ziet ook dat het vierde kwadrant, rechtsonder, uit het voorbeeld voor $n = 2$ ontstaat door elk van de vier getallen door zijn tegengestelde te vervangen. Op deze zelfde manier kan je uit het voorbeeld voor $n = 4$ een patroon afleiden voor $n = 8$, daaruit weer een voor $n = 16$, enzovoorts. Het is gemakkelijk in te zien dat de eigenschappen a) tot en met d) door deze handelwijze niet gestoord worden.

Opdracht 5:

+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1
+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1
+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	+1
+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1
+1	-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1
+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1
+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1
+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1
+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1

Curiositeitshalve vermelden we nog, dat 116 de kleinste waarde van n is, waarvan men niet zeker weet of er daarvoor een patroon met de bedoelde eigenschappen bestaat.

Oplossingen van Denkertjes uit het vorige nummer.

- Het eerste deel is een cirkel, die concentrisch is met de gegeven cirkel en een drie maal zo kleine straal heeft als deze. De overige acht delen liggen daaromheen. Ze ontstaan door vier middellijnen te maken, die acht middelpuntshoeken van 45° vormen.
- Voor $37 + 41 + 47 + 50 + 57 = 232$ gulden zou ik van elk artikel vier exemplaren kunnen kopen. De vijf artikelen kosten dus samen $232:4 = 58$ gulden. Ik bezat dus minder dan 58 gulden, maar ook minstens 57 gulden. Omdat het aantal guldens geheel was, bezat ik 57 gulden.
- De situatie van fig. 5 kan ontstaan. Door een fout in de opgave was het wel erg gemakkelijk. De kleine schijven hadden genummerd moeten zijn, in fig. 4 I bij A en II bij B. Het is nu wel mogelijk I naar C en II naar D te brengen, maar niet omgekeerd. In het laatste geval moet de grote schijf tussen de twee kleine door en dat kan niet omdat de grootste afstand hiertussen $12\sqrt{2}-5$ en dit is minder dan de diameter van de grote schijf.
- Omdat n oneven is, zijn $n-1$ en $n+1$ even en zelfs is een van beide een viervoud. Daarom is n^2-1 deelbaar door 8. Verder is er onder het drietal op elkaar volgende getallen $n-1$, n , $n+1$ een drievoud; n is dat niet, zodat $n-1$ of $n+1$ een drievoud is. Daarom is n^2-1 een drievoud.
- We bewijzen dat een gebroken lijn, die zichzelf wel kruist, niet de kortste kan zijn. Beschouw figuur 24, waarin AC en BD twee lijnstukken van zulk een gebroken lijn zijn. Het niet getekende deel van die lijn moet A met B verbinden of B met C of C met D of D met A; zonder de algemeenheid te schaden mogen we aannemen, dat C met D verbonden is. Poets nu AC en BD uit en breng AD en BC aan (figuur 25). Daardoor is een nieuwe gebroken lijn ontstaan, die ook de n gegeven punten op de voorgeschreven manier verbindt. Maar die nieuwe lijn is korter dan de oude. Want AD is kleiner dan AS + DS en BC is kleiner dan BS + CS, zodat AD + BC kleiner is dan AC + BD.

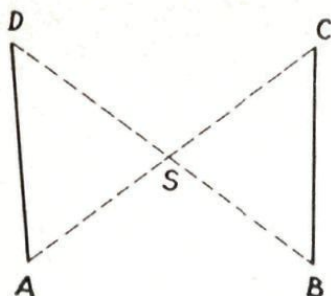


fig. 24

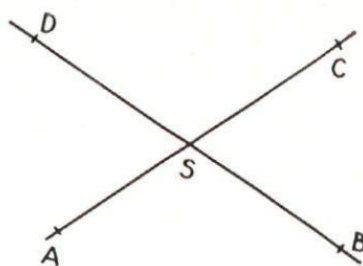


fig. 25

16. Uit $(x-1)^2 \geq 0$ volgt achtereenvolgens $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ en $x^2 + 1 \geq 2x$ en $x + \frac{1}{x} \geq 2$

Noem de som van de n getallen S en de som van hun omgekeerden T ; noem de getallen zelf $x_1; x_2; \dots; x_n$. Dan is $S + T = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \dots + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$. Elk van de n termen tussen haakjes is ≥ 2 , dus $S + T$ is minstens gelijk aan $2n$. Daaruit blijkt, dat als S kleiner is dan n , T groter moet zijn dan n .

17. Je kunt de beschreven oppervlakte zelfs zo klein maken als je wilt, door de volgende methode te gebruiken (zie figuur 26).

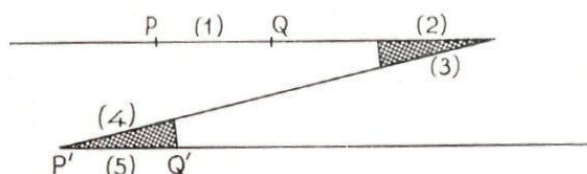
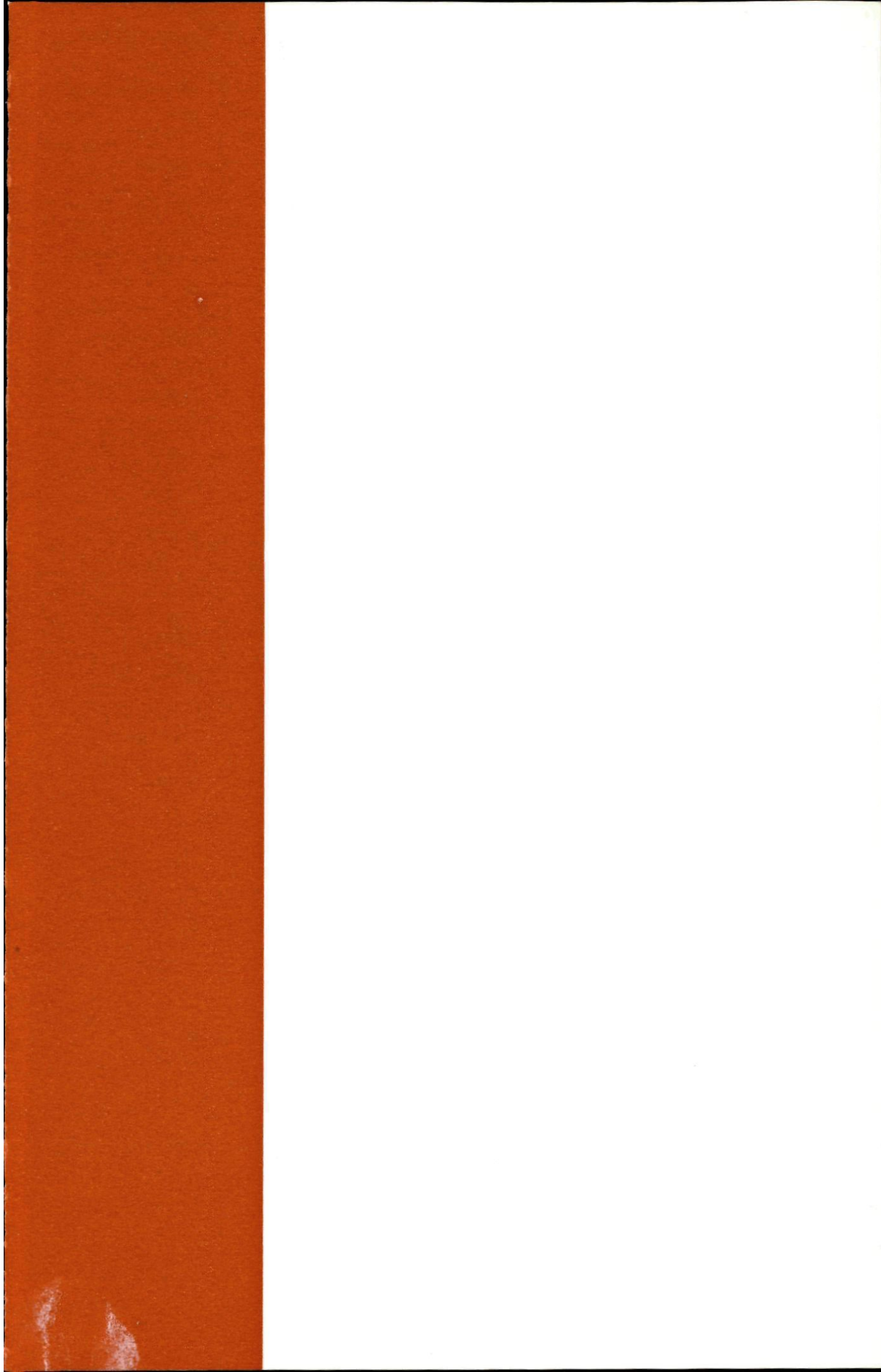


fig. 26

18. Vervang in $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)$ x door $\frac{a+b}{2}$ en y door $\frac{c+d}{2}$; pas op $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ en op $f\left(\frac{c+d}{2}\right)$ het gegeven nogmaals toe.
19. Zulk een vijfhoekige doorsnede kan niet regelmatig zijn, want hij bevat twee paren evenwijdige zijden.
20. Er komt in de rij geen ander zevenvoud dan a_1 voor. Immers a_2 is een zevenvoud $+ 1$. En omdat elk zevenvoud $+ 1$ in de rij gevolgd wordt door een ander zevenvoud $+ 1$, is elk ander getal van de rij een zevenvoud $+ 1$. Dit blijkt als volgt: de opvolger van $7k + 1$ is $(7k + 1)^2 - (7k + 1) + 1 = 49k^2 + 7k + 1 = 7(7k^2 + k) + 1$.

Treingrafiek

- Antwoorden:
1. 4 uur 50
 2. 7 uur 24
 3. heen of terug
 4. 7 uur 34
 5. 15.970 meter
 6. snellere trein
 7. 60 km/uur
 8. 6 uur 43 te Castricum
 9. neen



Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Markt 34, Oudenbosch.

Drs. A.B. OOSTEN, Turftorenstraat 11A, Groningen.

A.F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden. *Oplossingen inzenden uiterlijk 10 februari 1967.*

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,50 per jaargang. Voor anderen f 4,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J.B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.