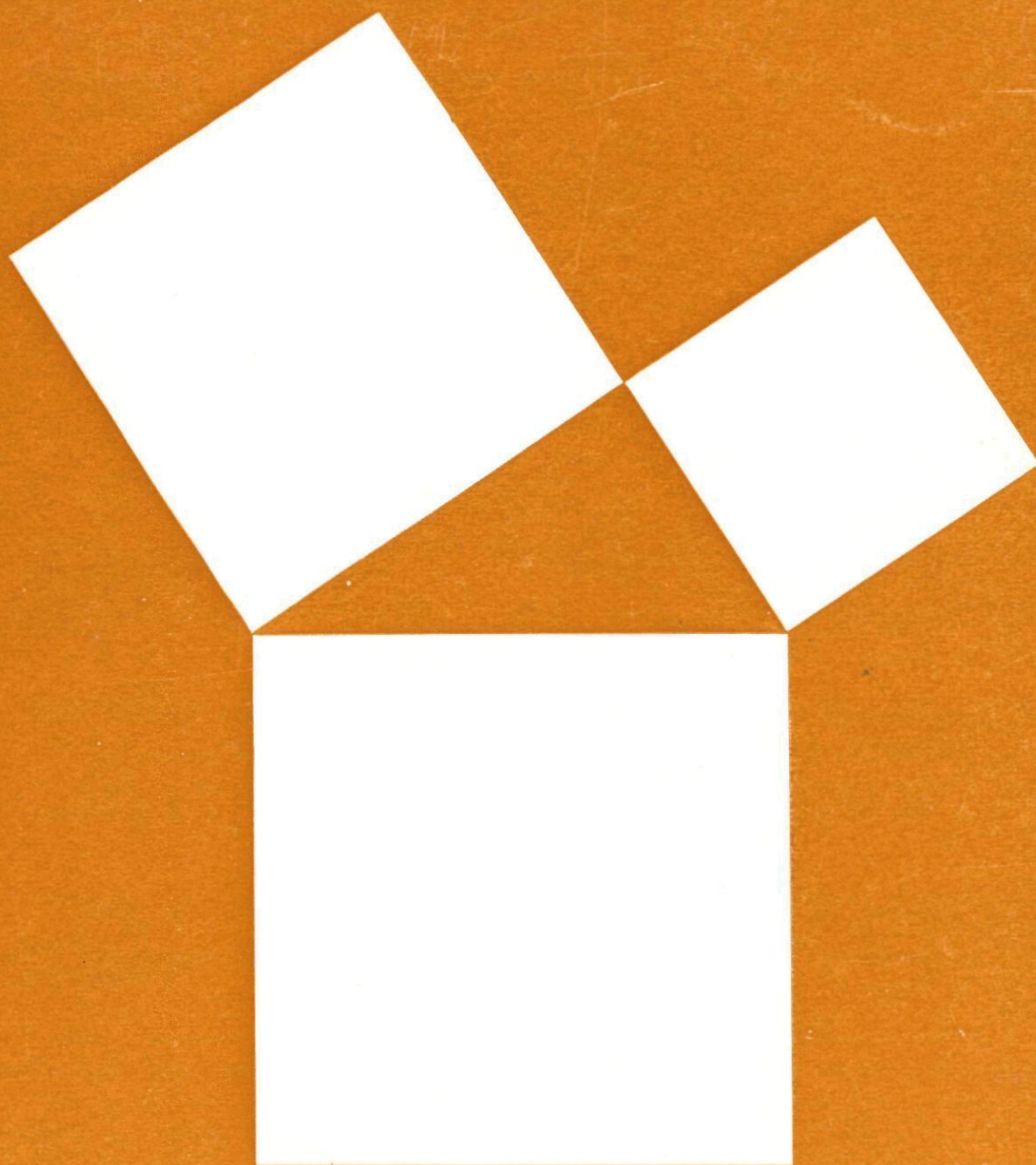


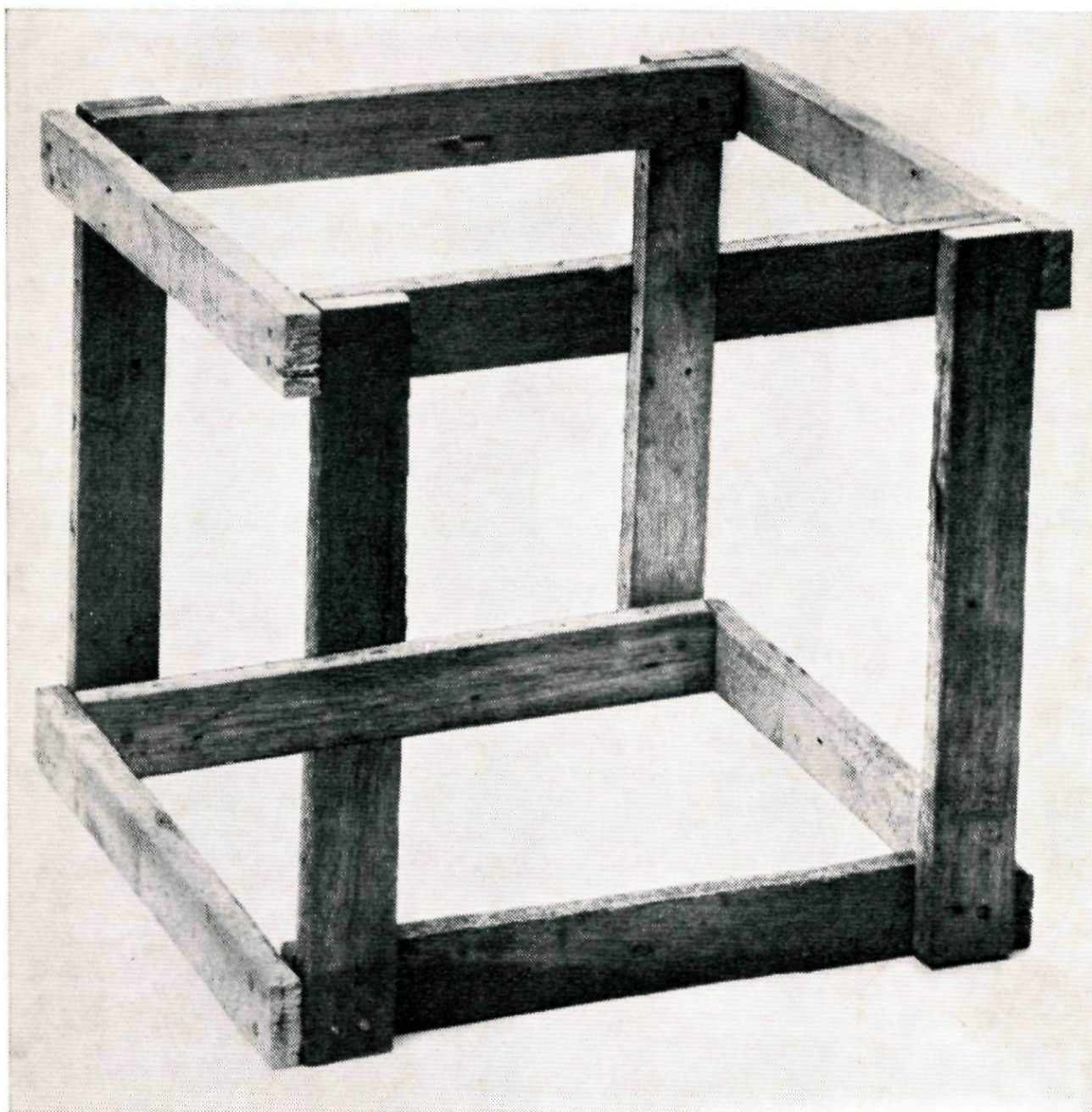
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

4

Zesde jaargang
1966/1967



In dit nummer

komen de liefhebbers van „onmogelijke figuren” aan hun trekken, zoals direct al blijkt uit bovenstaande Crazy Crate, oftewel: Gekke Kratje. Zeker, je wordt bij de neus genomen, maar hoe? Ook dat wordt uit de doeken gedaan.

° Onmogelijke figuren, een uitdaging.

In Pythagoras is wel eens eerder aandacht besteed aan „onmogelijke” figuren, de onmogelijke „driebalk” en de onmogelijke kubus (fig. 1 en 2), stonden ook in de tweede jaargang. Er is toen ook een poging gedaan om te omschrijven wat een onmogelijke figuur nu eigenlijk is. De omschrijving kwam in het kort hierop neer: We kunnen ruimtelijke figuren afbeelden op een plat vlak. Een onmogelijke figuur is een figuur in een plat vlak die de indruk wekt een afbeelding van een ruimtelijke figuur te zijn, maar dat niet is. Een timmerman zou dus nooit de driebalk of de kubus van fig. 1 en 2 kunnen maken.

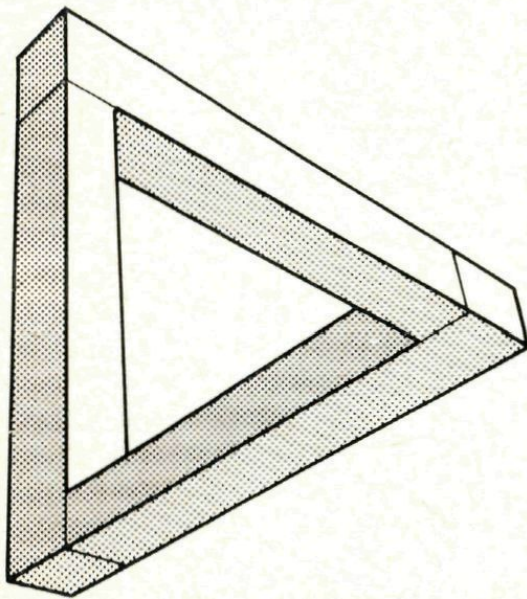


Fig. 1

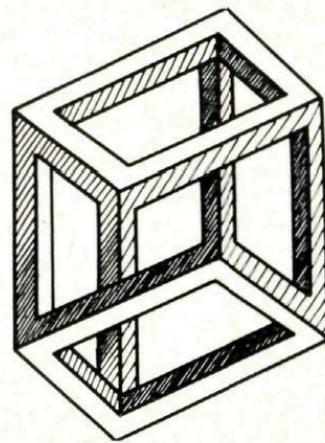


Fig. 2

Maar de afbeelding hiernaast is een foto! De maker ervan, Dr. Cochran in Chicago is geen timmerman (hij is oogarts), daarom heeft hij kennelijk wat moeite gehad met de juiste verbindingen van zijn bouwwerk, het resultaat is met recht een Crazy Crate, maar heeft in ieder geval tot gevolg dat bovenstaande omschrijving moet vervallen!

Het is een feit dat velen geboeid worden door onmogelijke figuren en het is evenzeer een feit dat er wiskundig weinig aan te beleven is. Misschien

moeten we het voorzichtiger uitdrukken: tot nu toe heeft niemand kans gezien er wiskunde aan te bedrijven. Wellicht vind je echter een aanknopingspunt in het volgende om het zelf eens te proberen.

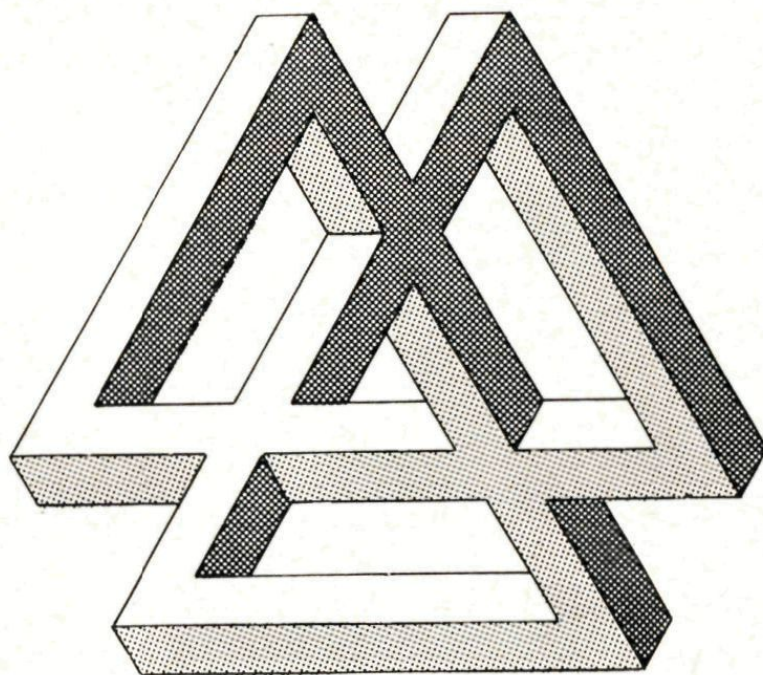


Fig. 3

In figuur 3 zijn drie driebalken aaneengeweven. Is het mogelijk deze figuur nog verder uit te breiden, door meer driebalken te gebruiken? Zou het mogelijk zijn een plat vlak te vullen met driebalken volgens het systeem van fig. 4?

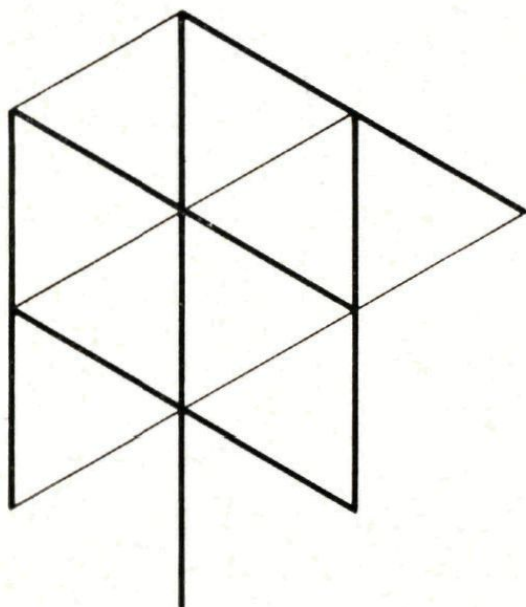
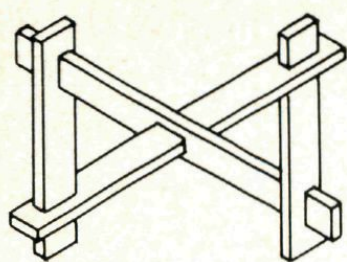


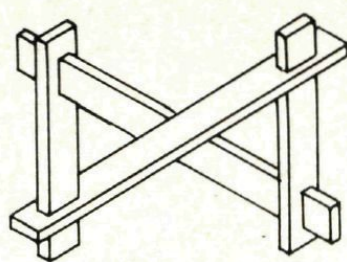
Fig. 4

Fig. 5a geeft een andere onmogelijke figuur, figuur 5b t/m k laten een min of meer gemakkelijke ruimtelijke interpretatie toe, door het anders te leggen of het onderbreken van verbindingen. Probeer eens systeem te brengen in deze veranderingen en maak daarna een volledig overzicht van de mogelijkheden.

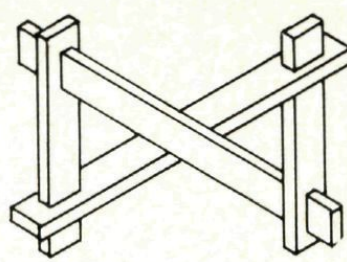
Bestaat er verband tussen de driebalken fig. 5a?
Is fig. 5a nog uit te breiden?



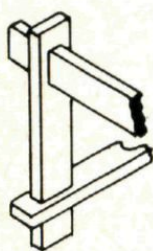
a



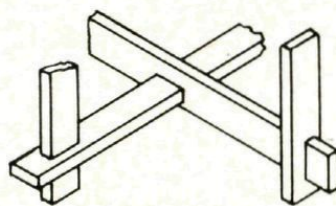
b



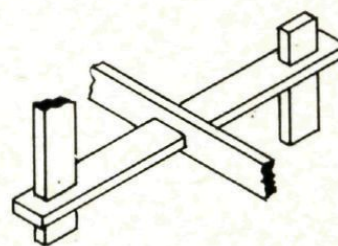
c



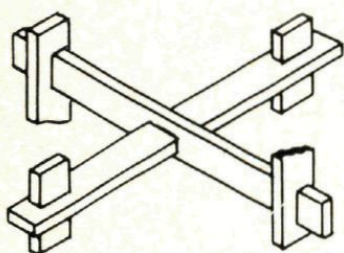
d



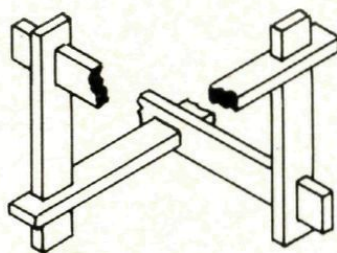
e



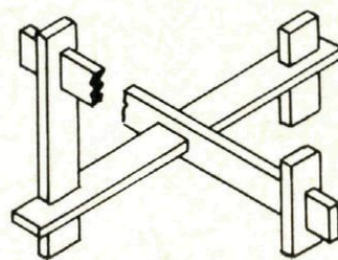
f



g



h



i

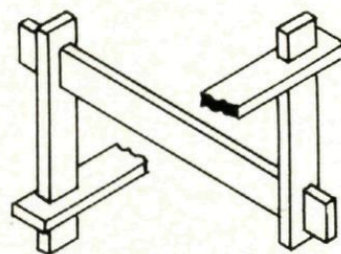
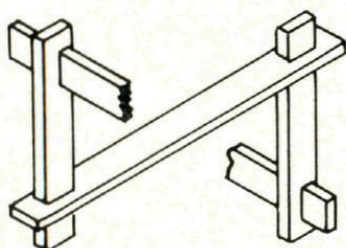


Fig. 5

Tot welk resultaat het zelf spelen met onmogelijke figuren kan leiden, zie je in fig. 6 tot en met 10, afkomstig van een 15 jarige lezer uit Bunnik.



Fig. 6

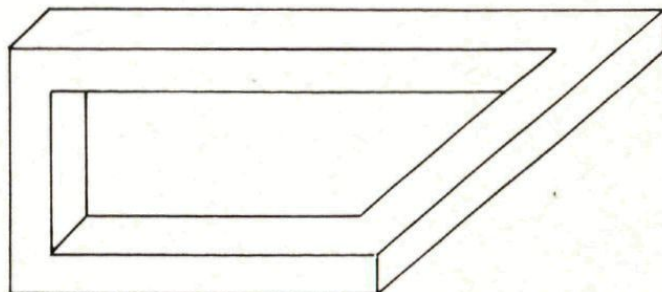
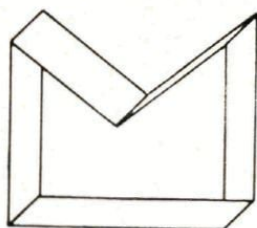


Fig. 7

Geïnspireerd door de figuur die in het eerste nummer van de vorige jaargang stond, maakte hij deze tekeningen. Hij ondertekende zijn brief met



Michel Bel

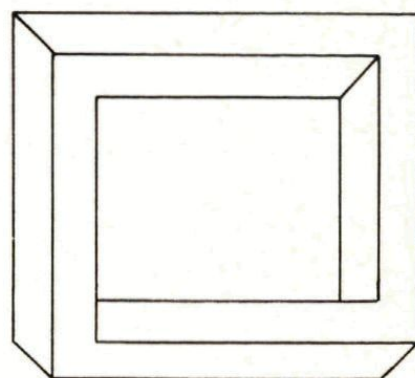


Fig. 8

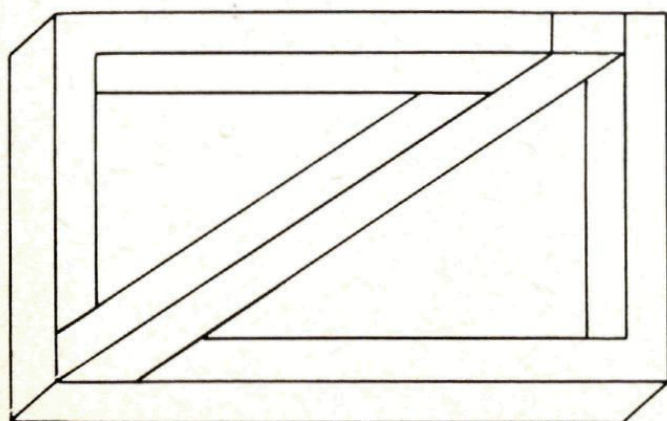


Fig. 9

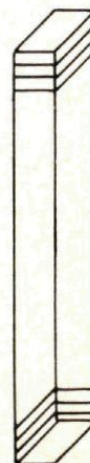


Fig. 10

Tenslotte nog iets over het Gekke Kratje.

Je zult je wel afvragen hoe de omslagfoto tot stand is gekomen. Er moet een bepaalde vorm van trucage zijn, maar hoe?

Fig. 11 laat zien hoe dat in elkaar zit. Het is helemaal gaan kratje!

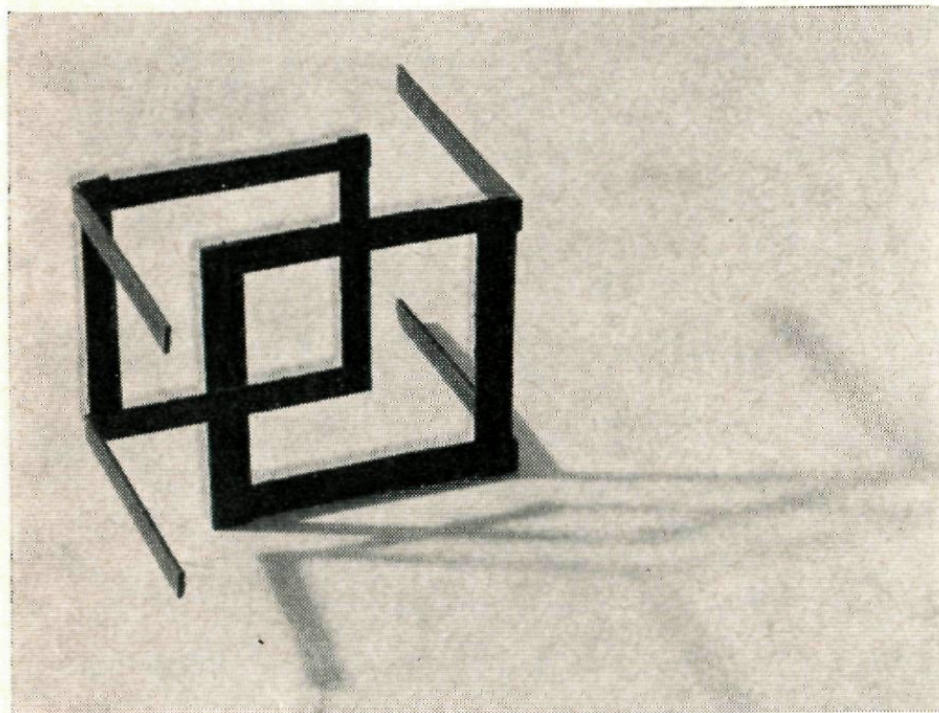
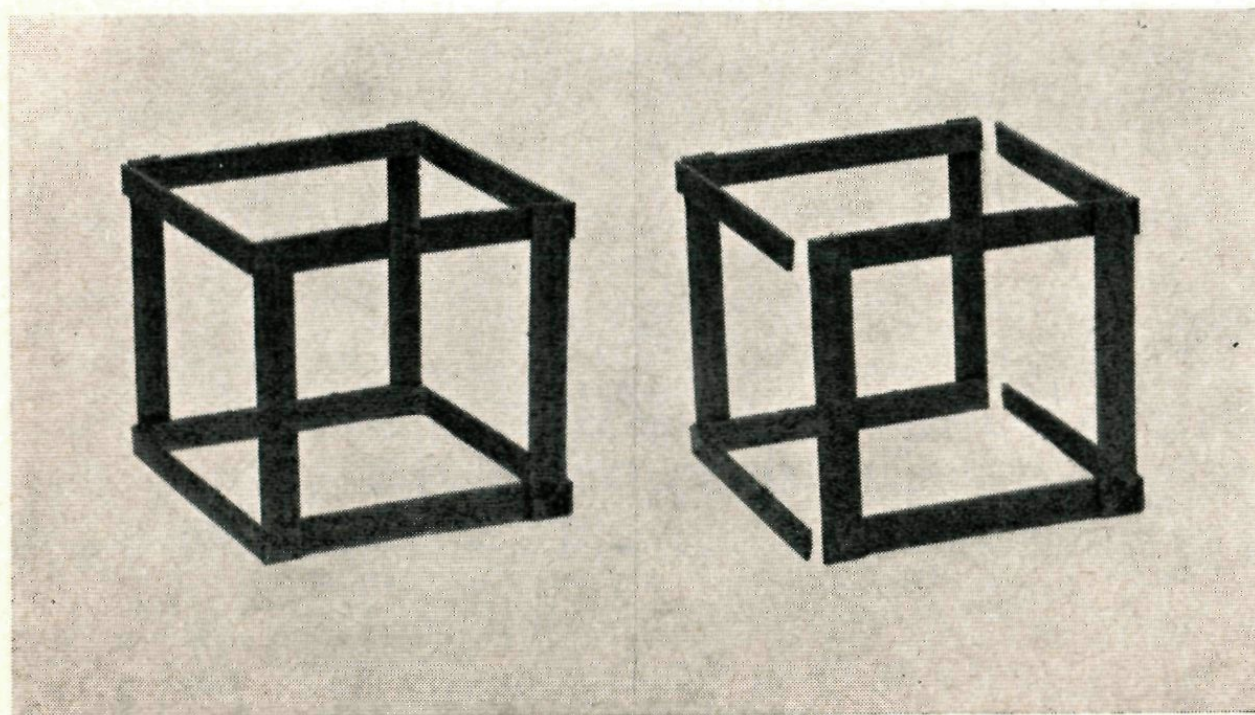


Fig. 11

Het zijn twee losse helften van een kubusgeraamte, waarvan voor en achterzijde aan elkaar vast gemaakt zijn. De horizontale ribben van het linker en rechterzijvlak steken vrij in de ruimte.

Gefotografeerd van een lager en meer naar links gelegen standpunt,

Fig. 12



ontstaat door het schijnbaar samenkomen van de losse ribben met de vierkanten de onmogelijke kubus.

Fig. 12 is een stereoscopisch paar. Wie over een stereoscoop beschikt, kan heel duidelijk zien hoe het in elkaar zit.

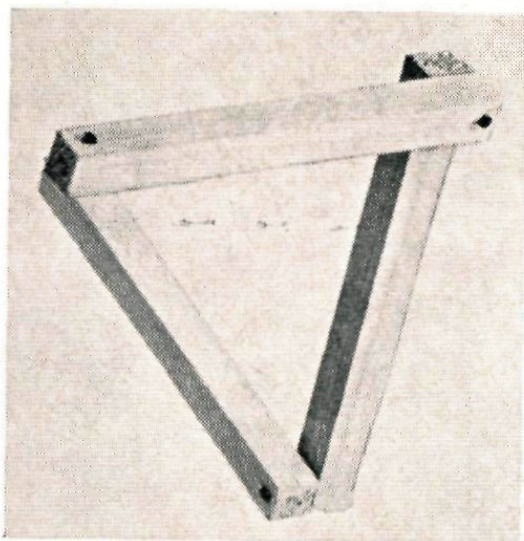


Fig. 13

Als je het goed door hebt kun je het zelf maken, en ook een echte onmogelijke driebalk, zoals in fig. 13, gemaakt en gefotografeerd door W. van der Horst uit Apeldoorn.

* Wij danken de redactie van Focus voor het beschikbaar stellen van de foto's.



II

Wie U eens, π , heeft verzonnen,
In aloude tijden, was nooit begonnen,
Inderdaad spoedig geëindigd,
Als hij had voorzien
Welk gezeur de cijfers biën.

°° Inleiding

Zo ongeveer sinds de uitvinding van de passer, en dat is al zeer lang geleden, spelen de oppervlakte en omtrek van de cirkel een rolletje in het wiskunde-spel.

Tegenwoordig zeggen we: Van een cirkel met straal r is de omtrek $2\pi r$ en de oppervlakte πr^2 , waarbij π een constante is, waarvoor we meestal 3,14 nemen, of $3\frac{1}{7}$, als dat beter uitkomt in de som.

De waarde $3\frac{1}{7}$ wordt wel de benadering van Archimedes genoemd. Hij vond deze waarde op de manier die ook nu nog in de meeste meetkundeboeken te vinden is, namelijk het benaderen van de cirkel met behulp van in- en omgeschreven regelmatige veelhoeken.

In fig. 1 zie je een cirkel met een ingeschreven en een omgeschreven regelmatige zeshoek. De oppervlakte en omtrek hiervan kunnen wor-

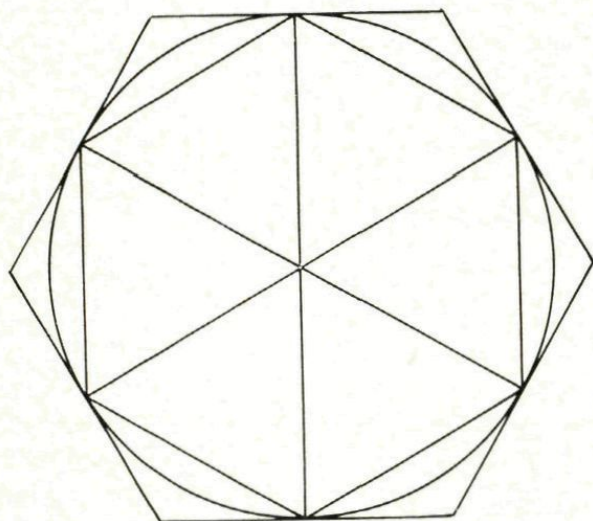


Fig. 14

den berekend. Door het aantal hoekpunten steeds te verdubbelen, krijgt men regelmatige 12-hoeken, 24-hoeken, enz., welke steeds dichter bij de cirkel komen te liggen.

De berekeningen worden wel steeds ingewikkelder, maar door taai volhouden vond de wiskundige en schermmeester Ludolph van Ceulen omstreeks 1600 op deze wijze toch 35 decimalen van π , welke op zijn grafsteen in de Pieterskerk te Leiden waren uitgebeiteld. Spoedig hierna echter leerde men π berekenen met behulp van reeksontwikkeling, waardoor het aantal bekende decimalen met sprongen toenam. De eenvoudigste reeks is $\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots)$ gevonden door Leibniz.

Reeksen kunnen ook door rekenmachines worden uitgerekend. In 1961 heeft een Amerikaanse rekenmachine 100.000 decimalen berekend, waarvoor het ding 8 uur en 1 minuut nodig had, compleet met controle.

Hoewel π een letter van het Griekse alfabet is, stamt het gebruik ervan voor de cirkel bepaald niet uit de Griekse oudheid, dit gebruik is namelijk omstreeks 1700 ingevoerd door de Engelsman William Jones. Als je geïnteresseerd bent in de eerste 24 cijfers dan kun je ze vinden uit het rijmpje aan het begin van dit verhaal. In elk woord moet je het aantal letters tellen.

°°° *De naaldproef van Buffon.*

Het getal π komt op een heel verrassende manier te voorschijn bij het volgende proefje, genoemd naar de Franse Graaf de Buffon. Op een stuk papier bevinden zich evenwijdige lijnen, op onderlinge afstand $2l$. Een naald met lengte l wordt een groot aantal malen op het papier geworpen en kan daarbij al dan niet op één van de evenwijdige lijnen terecht komen (fig. 15).

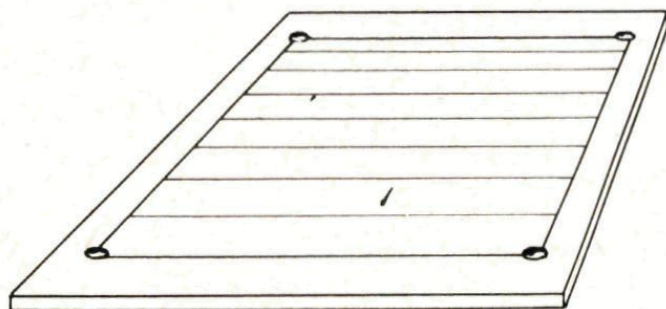


Fig. 15

Het totale aantal keren dat de naald op het papier valt, gedeeld door het aantal keren dat hij op een lijn valt, ligt in de buurt van π en nadert tot π als het aantal worpen tot oneindig nadert.

Een verklaring hiervan verloopt als volgt.

De plaats die de naald inneemt op het papier noemen we een „ligging”. Snijdt de naald één van de evenwijdige lijnen, dan spreken we van een „gunstige ligging”. De ligging kan worden gekarakteriseerd door de afstand y van het midden van de naald tot de dichtstbijzijnde lijn en de hoek x die hij maakt met de richting van de lijnen, gemeten

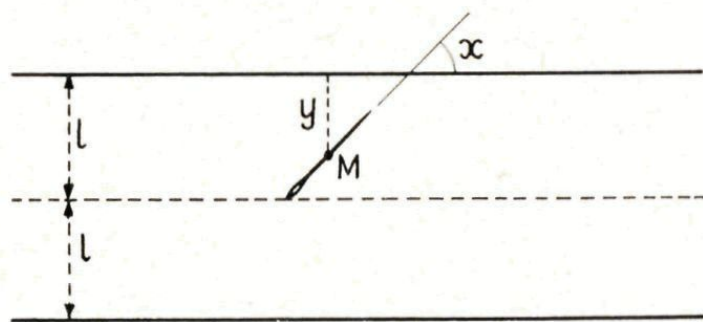


Fig. 16

in radialen. (fig. 16). Werpen we de naald op, dan meten we na aankomst op het papier x en y .

We vatten de gevonden waarden nu op als coördinaten van een punt in een vlak. We tekenen op millimeterpapier een assenstelsel en geven hierin het punt (x, y) aan met een $+$ als het een gunstige ligging van de naald was, anders een $-$.

PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

Evenals twee jaar geleden vraagt de redactie van Pythagoras het oordeel van de lezers over de inhoud. Hieronder staan een aantal artikelen die in deze jaargang zijn verschenen. We verzoeken je achter elk van de artikelen één of meerdere waarderingen te plaatsen, volgens de code:

A Gelezen	a interessant	α begrijpelijk
B Niet gelezen	b niet interessant	β te moeilijk

Zo betekent b.v. B β : Niet gelezen, te moeilijk

Vul dit eerst in Leeftijd

Schooltype Klas

Binair rekenen

Niet-euclidische meetkunde

Harmonische ligging

Het weer bij tegenvoeters

e

Draaien maar

Toch wel handig zo'n telraam

Bepaald-Construeerbaar

Trisectie met de tomahawk

Treingrafiek

Achtervolgingskrommen

π

Onmogelijke figuren

Bellen blazen

Is dit getal deelbaar door 17?

En wat is je oordeel over:

Denkertjes

Wimecosprijsvragen

Wees zuinig en win een prijs

Wensen voor de volgende jaargang:

Kan ongefrankeerd
worden verzonden



ANTWOORDKAART

Machtiging 13

GRONINGEN

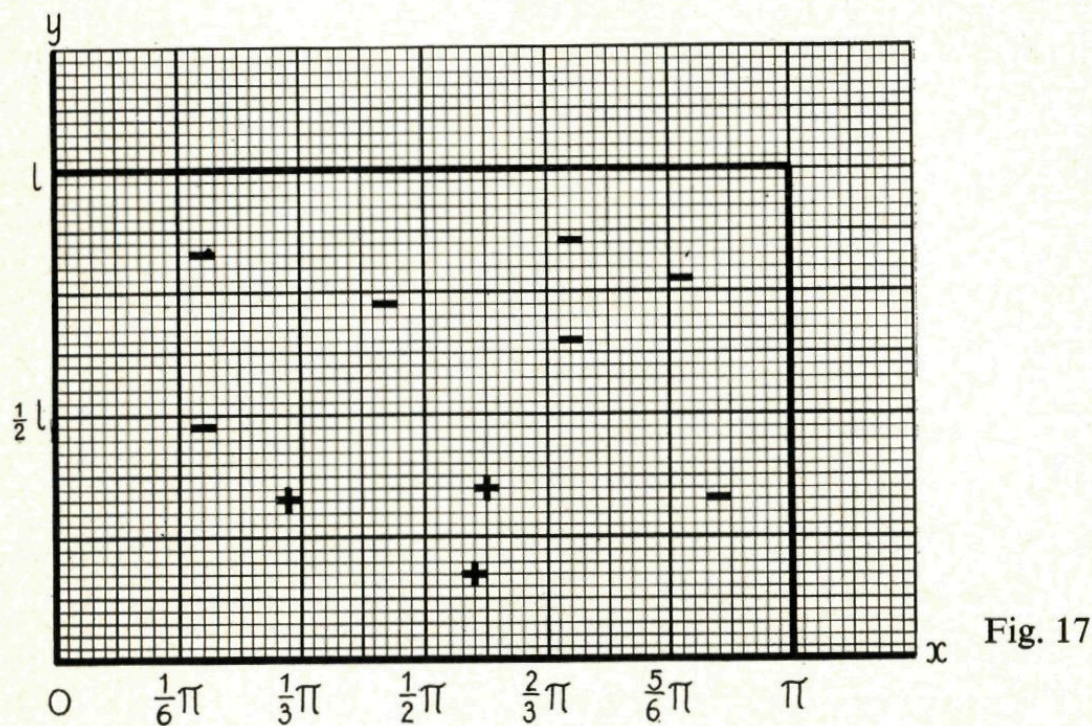
Na elke worp krijgen we zo een + of een — op het papier.

De grootste afstand van het midden van de naald tot een lijn is l , voor y geldt dus $0 \leq y \leq l$.

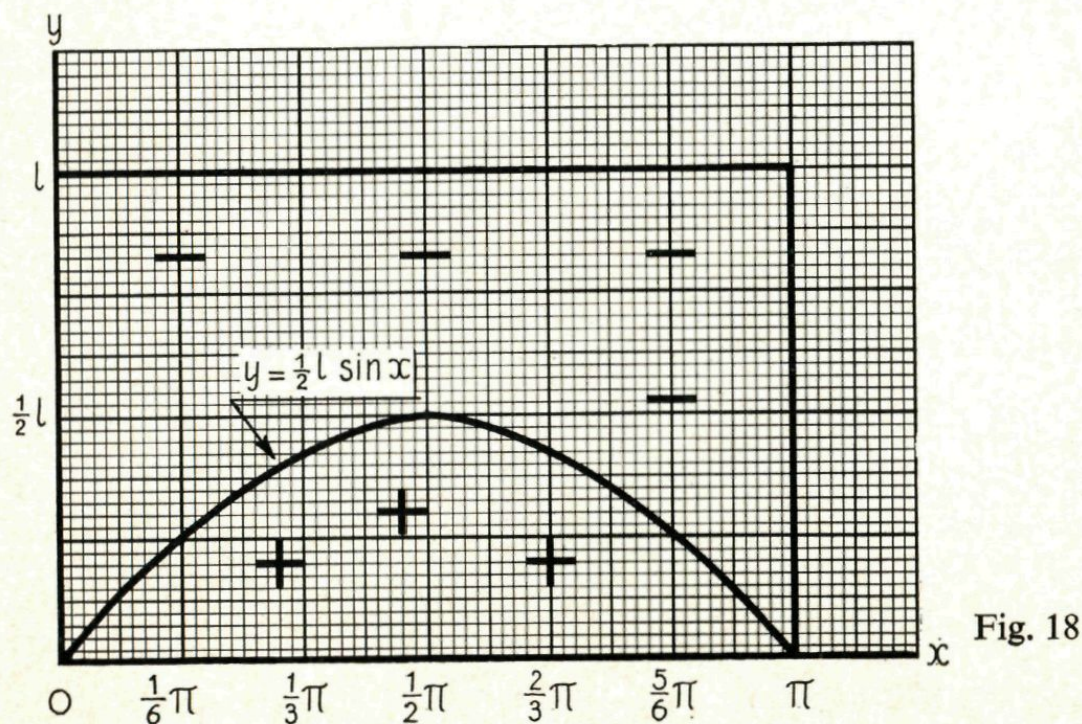
De hoek x van de naald ligt tussen 0° en 180° , dus $0 \leq x \leq \pi$.

Elke ligging van de naald wordt dus afgebeeld binnen een rechthoek.

Na 10 worpen ziet deze er bv. uit als fig. 17.



De pluspunten liggen niet zomaar willekeurig verspreid door de rechthoek, maar vormen een bepaald gebied hierin. Daar immers de naald de lengte l heeft, geldt voor alle gunstige liggingen dat $y \leq \frac{1}{2}l \sin x$.



Alle pluspunten komen dus te liggen in het gebied begrensd door $y = \frac{1}{2}l \sin x$ en de x -as (fig. 18).

Wanneer we er van uitgaan dat alle liggingen even waarschijnlijk zijn, mogen we aannemen dat bij een zeer groot aantal worpen de bijbehorende punten regelmatig over de rechthoek verspreid zullen worden. De verhouding van het totale aantal punten tot het aantal pluspunten zal dan in de buurt liggen van de verhouding van de oppervlakte van de rechthoek tot die van het gebied begrensd door de x -as en $y = \frac{1}{2}l \sin x$.

De oppervlakte van de rechthoek is $l\pi$, die van het genoemde deel:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2}l \sin x \, dx = -\frac{1}{2}l \cos x \Big|_0^{\pi} = l.$$

Bij een zeer groot aantal worpen zal de verhouding totaal/gunstig dus dicht bij π liggen. Om een indruk te geven vermelden we nog dat omstreeks 1850 een meneer Wolf een naald 5000 keer opgooide, waaruit hij afleidde $\pi = 3,1596$, wat ongeveer 0,6% afwijkt van de juiste waarde.

Correctie: Zoals door velen is opgemerkt stond er een fout in Denkertje 26. Er had moeten staan: Bewijs dat . . . die NIET groter is dan . . .



Oplossingen inzenden voor 15 maart 1967

31. In welk jaar is iemand geboren, die in 1967 de leeftijd bereikt die gelijk is aan de som van de cijfers van zijn geboortejaartal?
32. Elke vierhoek kan verdeeld worden in een vierhoekig stuk en vier driehoekige stukken, waarbij op elk van zijn zijden een hoekpunt van het vierhoekige stuk ligt. Bij welke vierhoeken kan die verdeling zo gemaakt worden, dat de vier driehoekige stukken het vierhoekige stuk volkomen en zonder overlappen bedekken nadat zij om de zijden van dat vierhoekige stuk naar binnen gevouwen zijn?
33. Wat is het grootste natuurlijke getal dat niet in de vorm $10n + 7m$ geschreven kan worden, waarin n en m natuurlijke getallen zijn? Vergeet niet te bewijzen dat je antwoord goed is.

°Bellen blazen

Vermoedelijk zijn de meeste lezers van dit tijdschrift de leeftijd te boven, dat ze in de vakantie als tijdverdrijf gaan bellen blazen. Maar misschien zijn ze al wel zo ver, dat ze niet alleen vol *bewondering* de prachtige bellen bekijken, die het buurjongetje blaast, maar zich ook *verwonderen* over de wis- en natuurkundige verschijnselen, die zich daarbij voordoen.

Een zeepbel, die voor onze ogen wegzweeft, heeft de vorm van een bol. Dat is het gevolg van een der eigenschappen van het zeepvlies, nl. dat het zijn oppervlakte zo klein mogelijk wil maken. Hangt de zeepbel nog aan de pijp, dan zien we hem langzaam aan kleiner worden. De spanningen trekken dan het zeepvlies samen en drijven de lucht via de pijp weer uit de bel. Van alle meetkundige lichamen heeft de bol de eigenschap, dat bij een gegeven inhoud de oppervlakte minimaal is. Je kunt in het begin door nogal flink te blazen de bel aan de pijp wel ovaal maken. Maar zodra je ophoudt met blazen trekt het zeepvlies zich samen tot een zo klein mogelijke oppervlakte rondom de erin geblazen lucht en geeft het aan deze lucht de bolvorm.

Het gebeurt ook wel, dat bij het bellen blazen zich twee bellen aan elkaar hechten. Ze zijn dan beide delen van bollen met daartussen een scheidingsvlak. Samen moeten ze nu weer zo'n vorm aannemen, dat bij de

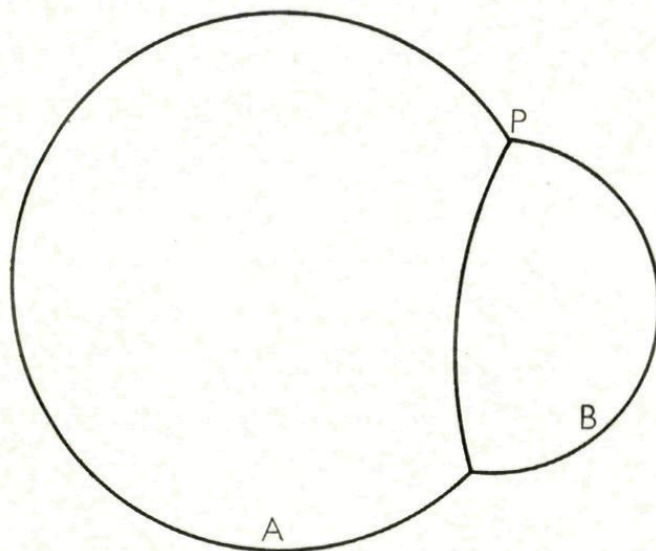


Fig. 19

gegeven inhoud de totale oppervlakte van buitenwanden en scheidingsvlak minimaal is. In elke zeepbel is een zekere overdruk vergeleken met de druk van de buitenlucht. Deze overdruk is evenredig met de kromming van de bel. Hoe groter de bel is, des te kleiner is zijn kromming, dus ook des te kleiner is de overdruk in de zeepbel. Zijn in de „tweelingbel” de stralen van de beide delen niet gelijk dan is

de overdruk in het kleinste deel het grootst en zal het scheidingsvlak dus in de grootste bel naar binnen worden gedrukt. Dit zal voortgaan tot er een evenwichtstoestand is bereikt. In dat geval drukken de zeepvliezen van de grote bel en het scheidingsvlak samen de lucht in de kleine bel even sterk naar rechts als het zeepvlies van de kleine bel die lucht naar links drukt.

De twee bellen en het scheidingsvlak hebben een cirkel gemeen. In de figuren 19 en 20 is P een punt van die cirkel. Aan het zeepvliesdeeltje in dat punt wordt door elk der drie zeepvliezen getrokken. Aangezien het

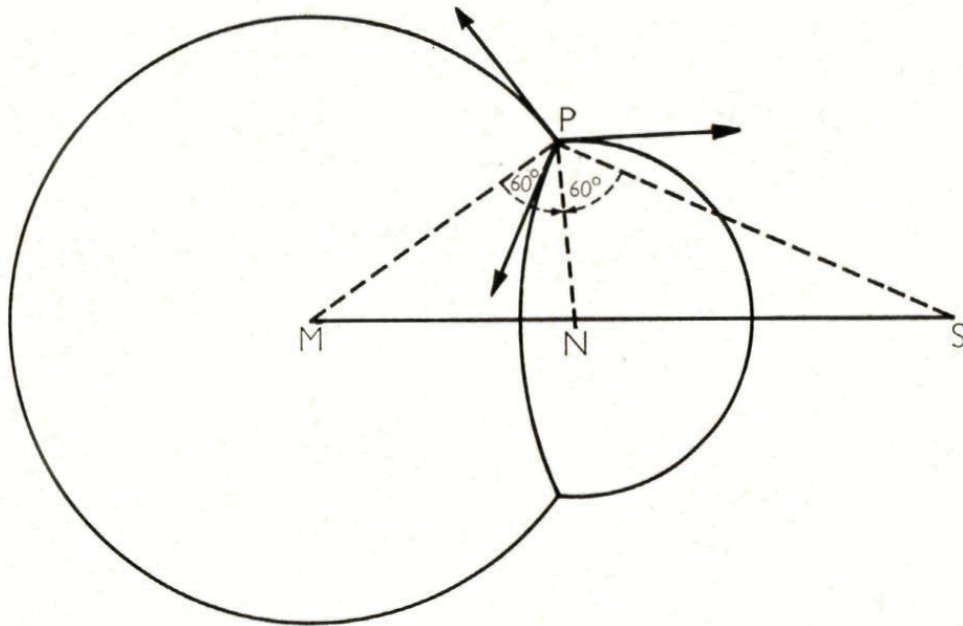


Fig. 20

punt in evenwicht is, moet de resultante van de drie krachten nul zijn. Veronderstellen we, dat de zeepvliezen bij P alle drie even dik zijn, dan zijn de drie krachten even groot en kunnen ze alleen maar evenwicht maken, als ze hoeken van 120° met elkaar maken.

De krachten vallen langs de raaklijnen in P aan de drie cirkels, die in het vlak liggen, dat door de middelpunten en door P gaat. De stralen van de drie cirkels maken dan hoeken van 60° met elkaar, zoals in fig. 20 te zien is.

Nu hoef je dit niet allemaal te geloven, omdat het in Pythagoras staat. Je kunt zelf heel gemakkelijk experimenteel de waarheid hiervan toetsen. Om te beginnen teken je een figuur, zoals fig. 20, maar dan zeker tweemaal zo groot. Begin met het punt P ergens te kiezen en daardoor de lijnen PM, PN en PS zo te trekken, dat ze hoeken van 60° met elkaar maken. De lijn MNS kun je willekeurig tekenen. Nu kun je de cirkelbogen trekken. Staat deze tekening eenmaal op papier, dan leg je die

onder een glasplaat. Nu ga je bellenblazen. Maak het oppervlak van het glas nat met zeepoplossing en blaas voorzichtig een halve bol, die op het glas staat. Maak een tweede, die er bij aansluit. In het algemeen zullen nu de bogen, waarmee de bellen op het glas staan, niet gelijk zijn aan die van je tekening. Maar met wat handigheid en geduld is daar wel wat aan te doen. Je gebruikt een limonaderietje om voorzichtig bij een der bellen wat lucht in te blazen of uit te zuigen, tot hij de gewenste grootte heeft. Dan neem je de ander onder handen. Wil je er zeker van zijn, dat je niet te hard blaast of zuigt, sluit dan eerst een der uiteinden van het rietje met wat lak en prik daar met een hete naald een fijn buisje door. Je kunt dan uiterst voorzichtig te werk gaan. In welk geval zal het tussenvlak een plat vlak zijn? Je kunt dat experimenteel onderzoeken of uit de constructie afleiden.

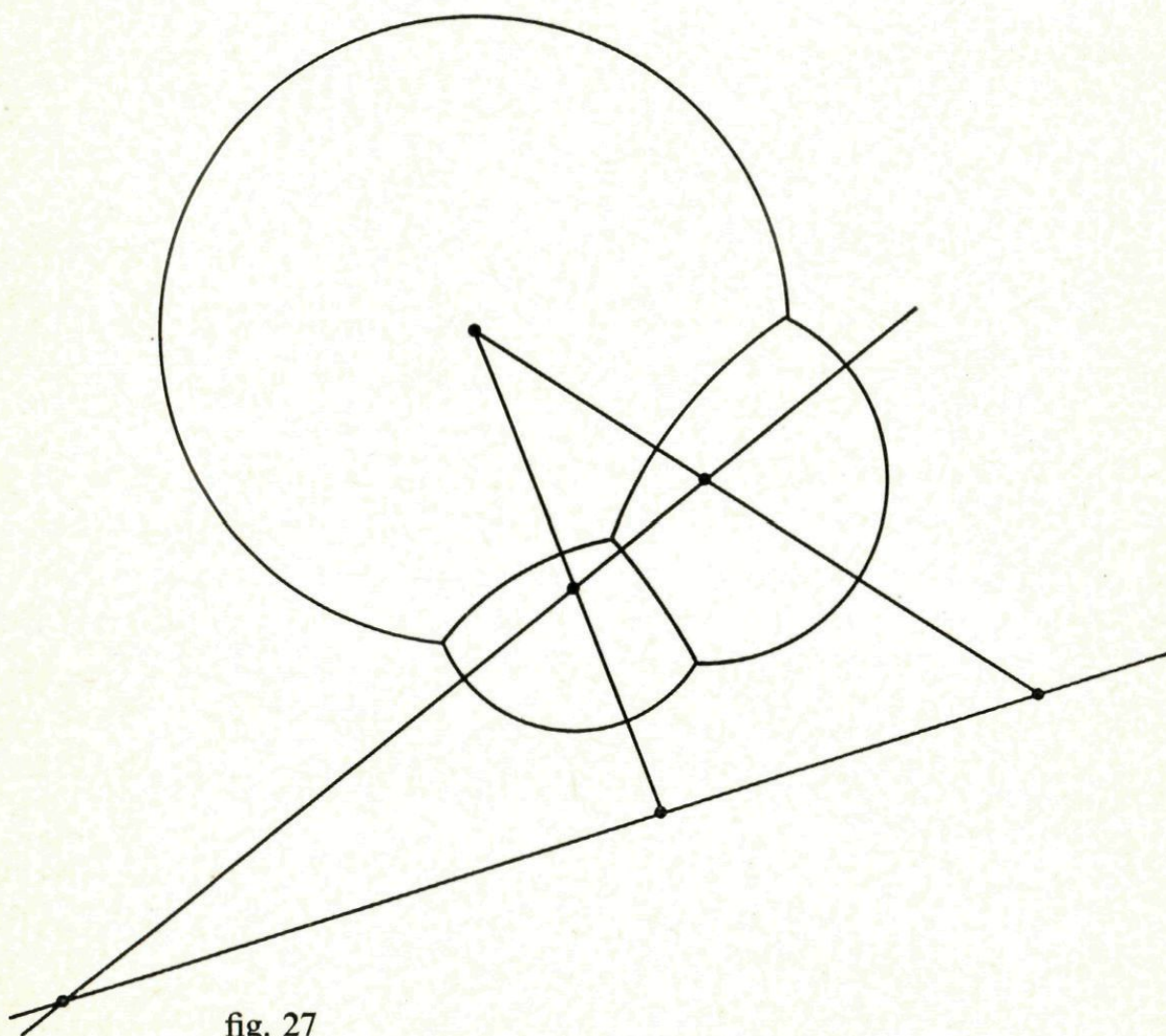


fig. 27

Als drie zeepbellen zich tegen elkaar aanvlijen, dan snijden ze elkaar volgens cirkelbogen, die hoeken van 120° met elkaar maken. De drie middelpunten van de bollen en de drie middelpunten van de schei-

dingsvlakken liggen alle zes in één vlak en zelfs is het zo, dat de drie middelpunten van de scheidingsvlakken op één rechte liggen. Brengen we door de drie bellen de doorsnede aan met het vlak, waarin al deze middelpunten liggen, dan zien we figuur 21. De zes cirkelbogen snijden elkaar zo in vier punten, dat de bogen bij elk dezer punten hoeken van 120° met elkaar maken. Verbinden we een der vier snijpunten met de middelpunten van de in dat snijpunt samenkomende bogen, dan vormen deze verbindingslijnen telkens twee hoeken van 60° .



°°De brandlijn van een holle spiegel

door J. Deknatel

In de natuurkunde wordt bewezen dat evenwijdige lichtstralen na terugkaatsing op een holle spiegel samenkomen in één punt: het brandpunt.

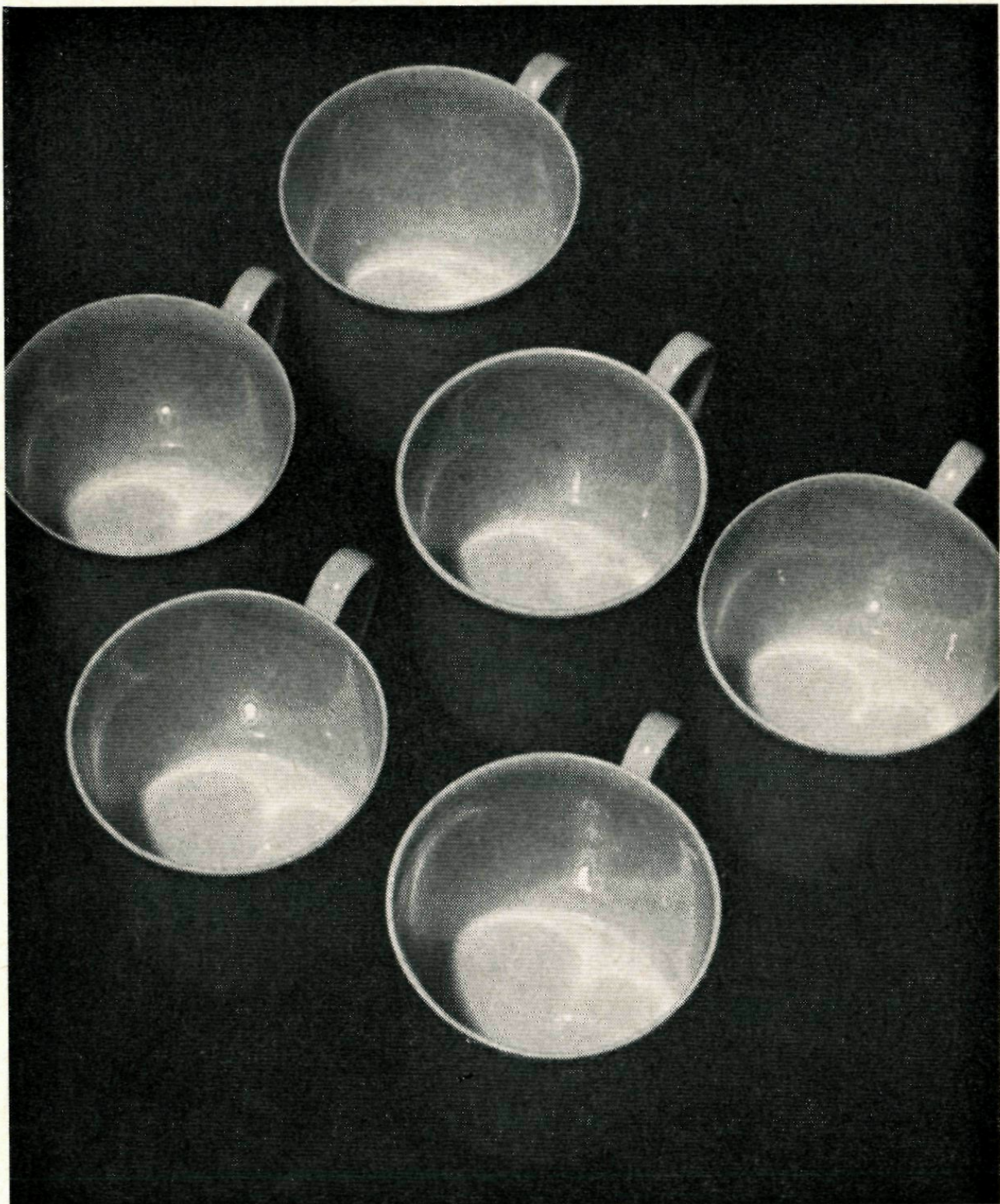


fig. 22

De caustica of brandlijn

Maar dit geldt alleen bij benadering voor een spiegel met een kleine „openingshoek”.

Hoe wordt het nu als de openingshoek groot is, bij voorbeeld 180° ?



Er ontstaat dan geen brandpunt, maar een brandlijn, die je zelf heel gemakkelijk kunt waarnemen door een gladde ring of armband op een stuk papier te leggen onder (ver verwijderde) lamp. (fig. 22) Je ziet de kromme ook in de theekopjes. De kromme staat bekend onder de naam caustica of brandlijn.

Beschouw in fig. 23 twee „naburige”, evenwijdig invallende lichtstralen. Als het boogje AB op de cirkelomtrek in graden gemeten α is,

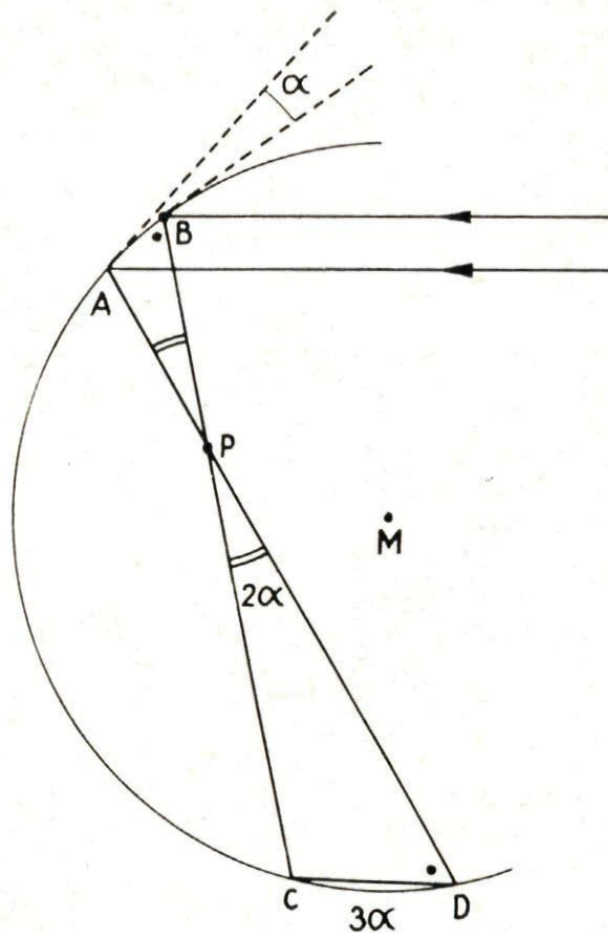


Fig. 23

dan is ook de hoek tussen de raaklijnen α . Klaarblijkelijk verschillen de hoeken van inval α , dus ook de hoeken van terugkaatsing, waardoor de beide teruggekaatste stralen een hoek 2α maken. De teruggekaatste stralen snijden elkaar in P. Volgens een stelling uit de meetkunde zijn nu boog AB en boog CD samen 4α , zodat boog $CD = 3\alpha$. De driehoeken PAB en PCD zijn gelijkvormig, daar ze behalve de overstaande hoeken bij P ook bv. de hoeken B en D gelijk hebben (omtrekshoeken die op dezelfde boog staan).

Bij kleine hoek α , dus kleine bogen, geldt bij benadering $AB:CD = \text{bg}AB:\text{bg}CD = 1:3$.

Dat wil zeggen dat ook $PB:PD = 1:3$, en bij benadering $PB:PC = 1:3$.

Iedere smalle evenwijdige bundel convergeert dus in een punt P dat op $\frac{1}{4}$ van de koorde ligt, gerekend vanaf het „punt” waar de spiegel getroffen wordt.

Wat is de caustica precies voor een kromme?

Het blijkt een „epicycloïde” te zijn, dat wil zeggen, een kromme die ontstaat bij een wenteling.

Neem een kartonnen schijf met straal R en laat langs deze schijf

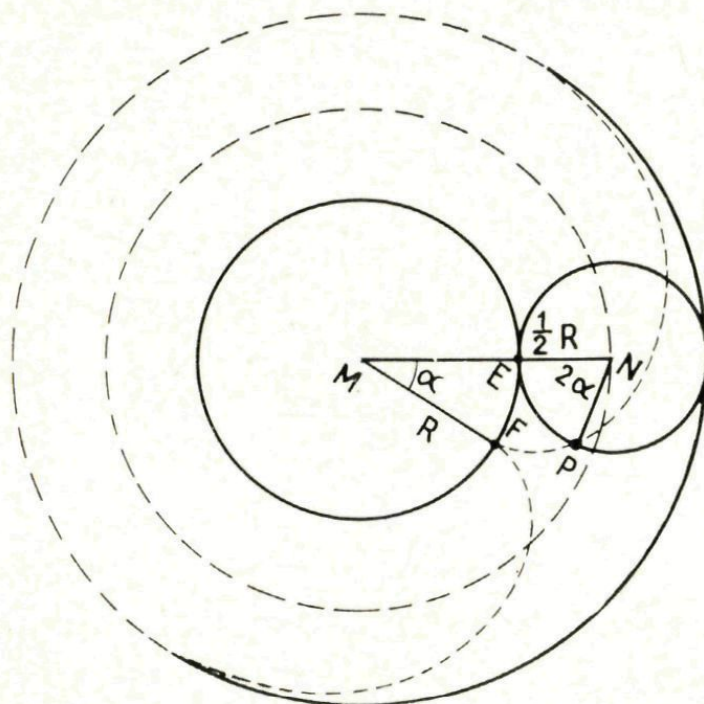


Fig. 24

een tweede rollen met straal $\frac{1}{2}R$. Een punt P aan de omtrek (fig. 24) beschrijft nu de brandlijn die bij een holle spiegel met straal $2R$ hoort. Om dit in te zien bekijken we fig. 25.

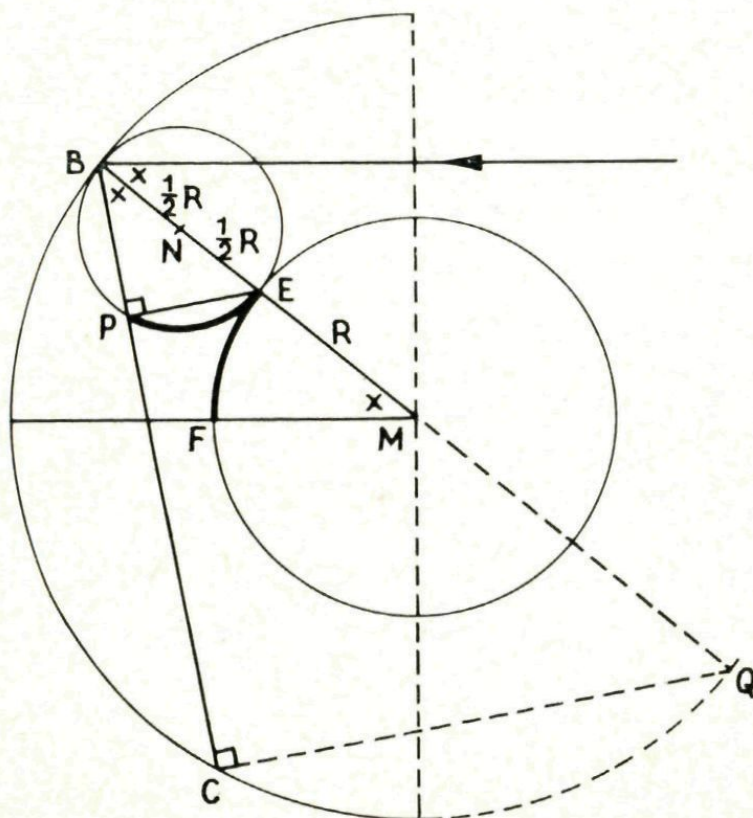


Fig. 25

De lichtstralen die de spiegel in de omgeving van B treffen, worden geconvergeerd naar P , waarbij $BP = \frac{1}{4}BC$. Dit betekent dat P de

projectie van E op BC is, want ook $BE = \frac{1}{4}BQ$ en hoek $BCQ = 90^\circ$. De cirkel met middellijn BE (middelpunt N) gaat dus ook door P. We moeten nu nog laten zien dat we P ook kunnen krijgen door de cirkel (N, $\frac{1}{2}R$) langs de cirkel (M, R) te laten rollen, zonder „slippen”. Laat het punt P dat de kromme beschrijft in F beginnen, dan is de bewering waar, als boog FE even lang is als boog PE. Als $\text{bg } FE = \angle FME = 40^\circ$ bijvoorbeeld, dan is ook $\angle PBE = \frac{1}{2}\text{bg } PE = 40^\circ$, dus $\text{bg } PE = 80^\circ$. Daar echter de straal van cirkel N de helft is van die van cirkel M zijn de bogen PE en FE inderdaad even lang.

Bij het laten rollen van een cirkelvormig voorwerp, b.v. een schijf of een wiel, beschrijft een punt op de omtrek steeds een fraaie kromme. Zo ontstaat de gewone cycloïde of ventielkromme bij het wentelen van een cirkel over een lijn. Het ventiel van je fietswiel beschrijft een cycloïde.

Laat je een rijksdaalder langs een andere rijksdaalder draaien, dan ontstaat de cardioïde of hartlijn, zie fig. 9 uit Pythagoras nr. 2 van deze jaargang.



34. Bewijs dat $2^n + 1$ en $3^n + 1$ voor geen enkele waarde van het natuurlijke getal n gelijk zijn aan de derde macht van een geheel getal.
35. Op het lijnstuk AB liggen de punten X en Y. Aan de ene kant van AB beschrijft men vierkanten met AX en XB als zijden, aan de andere kant doet men dat met AY en YB. De middelpunten van die vier vierkanten worden kruiselings verbonden. Welke eigenschap hebben de twee verbindingslijnstukken? Bewijs die eigenschap.
36. (Moeilijke opgave). Men denkt zich alle sommen (optellingen) opgeschreven die gelijk zijn aan het natuurlijke getal n en waarvan de termen zelf verschillende natuurlijke getallen zijn, die naar opklimmende grootte gerangschikt zijn. Wat is de kleinste waarde van n , waarvoor het aantal van die sommen groter is dan 200?
Voorbeeld: voor $n = 8$ zijn er 5 van die sommen, namelijk $1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4$.
37. Construeer een figuur, bestaande uit een vierhoek en vier cirkels, die elk door drie hoekpunten van die vierhoek gaan. Doe dat zo, dat de vierhoek geheel binnen drie van de vier cirkels ligt en gedeeltelijk buiten de vierde cirkel uitsteekt.

°Is: zeventien / deelbaar | op
 dit getal |
 ?

De zogenaamde „negenproef” is een handig middel om cijferfouten in vermenigvuldigingen en delingen op te sporen. Ook in optellingen en aftrekkingen; alleen is de tijd nodig voor het uitvoeren van de negenproef daar groter dan die nodig voor het optellen en aftrekken zelf.

Voor wie de negenproef niet kent volgt eerst een beschrijving van het „kunstje”.

$ \begin{array}{r} 7864 \\ \times 638 \\ \hline 62912 \\ 23592 \\ 47184 \\ \hline 5017232 \end{array} $	7 8 2	Hiernaast staat een vermenigvuldiging; de getallen 7, 8 en 2 in de verticale kolom rechts ervan behoren bij de negenproef. Het getal 7 is ontstaan door de cijfers van het getal 7864 op te tellen. Komen we daarbij boven de 9, dan trekken we 9 ervan af. Dus: $7 + 8 = 15 \rightarrow$ wordt 6. $6 + 6 = 12 \rightarrow$ wordt 3. $3 + 4 = 7$. De beschrijving is veel ingewikkelder dan de uitvoering. Probeer het zelf maar met enige getallen.
--	-------------------------	---

Op dezelfde wijze vinden we de getallen 8 en 2.

Nu vermenigvuldigen we $7 \times 8 = 56 \rightarrow$ wordt 11 $\rightarrow$ wordt 2. Omdat achter de uitkomst ook een 2 staat weten we bijna zeker dat we geen cijferfout hebben gemaakt. Het is nog mogelijk dat de uitkomst fout is, maar dan is die fout precies een negenvoud. (Hoeveel procent zekerheid geeft ons deze controle?)

De verklaring van de negenproef is eenvoudig: 7864 is een negenvoud $+ 7$ (waarom dat zo is zullen we dadelijk zien); 638 is een negenvoud $+ 8$.

Gaan we dit vermenigvuldigen dan krijgen we een negenvoud $+ 56$, ofwel een negenvoud $+ 2$. Want:

$$\begin{array}{r}
 9a + 7 \\
 \times 9b + 8 \\
 \hline
 9a \cdot 9b + 7 \cdot 9b \\
 8 \cdot 9a + 56 \\
 \hline
 9a \cdot 9b + (7a + 8b)9 + 56 \text{ ofwel: een negenvoud } + 56.
 \end{array}$$

Nu moet nog aangetoond worden dat we door het optellen van de cijfers van een getal inderdaad de rest bij deling door 9 vinden.

We schrijven daarvoor 7864 als $1000 \cdot 7 + 100 \cdot 8 + 10 \cdot 6 + 4$.

In het algemeen voor een getal $abcd: 1000a + 100b + 10c + d$.

We schrijven dit als: $999a + 99b + 9c + (a + b + c + d)$ en hieruit lezen we af dat het getal gelijk is aan een negenvoud (dat bij deling door 9 dus als rest 0 geeft) plus de som van zijn cijfers.

De negenproef berust op het feit dat we op zo'n eenvoudige manier kunnen nagaan of een getal een negenvoud is: tel de cijfers op; is de uitkomst een negenvoud dan is het getal eveneens een negenvoud. Bestaan er voor andere getallen dan 9 ook zulke eenvoudige kenmerken van deelbaarheid?

De volgende zullen je wel bekend zijn:

Een getal is deelbaar door 2 als het laatste cijfer deelbaar is door 2;

door 3 als de som van de cijfers deelbaar is door 3;

door 4 als het getal voorgesteld door de laatste twee cijfers deelbaar is door 4;

door 5 als het laatste cijfer een 0 of een 5 is;

door 6 als het deelbaar is door 2 en door 3;

door 8 als het getal gevormd door de laatste drie cijfers deelbaar is door 8.

De afleiding van deze regels is te eenvoudig om er verder iets van te zeggen. Je hebt opgemerkt dat 7 in het bovenstaande rijtje ontbreekt. En misschien ken je wel een kenmerk van deelbaarheid door 11 ... maar hoe zit het met andere getallen?

Het is duidelijk, dat we alleen maar behoeven te zoeken naar kenmerken van deelbaarheid door priemgetallen, want als de deler in factoren te ontbinden is, dan moet het getal door elk van deze factoren deelbaar zijn.

Nu zijn de kenmerken van deelbaarheid voor alle priemgetallen op dezelfde eenvoudige wijze af te leiden. Met het *toepassen* van deze regels is het anders gesteld: voor priemgetallen boven de 100 wordt dit al vrij ingewikkeld.

Laten we eens nagaan of 1468 deelbaar is door 11.

We schrijven 1468 als $10 \cdot 146 + 8$. In het algemeen schrijven we elk getal als: $10a + b$. In ons geval is dus $a = 146$ en $b = 8$. Nu moet $10a + b$ deelbaar zijn door 11, we schrijven ervoor: $10a + b = 11x$

$$a = \frac{11x - b}{10}$$

We kunnen de rechterkant deelbaar maken door 11 als we er nog $\frac{10b}{10}$ aftrekken.

We doen dit aan beide kanten en krijgen: $a - b = \frac{11x - 11b}{10}$

en daaruit lezen we af, dat het te onderzoeken getal deelbaar zal zijn door 11 als $a - b$ deelbaar is door 11. In ons voorbeeld: als $146 - 8 = 138$ deelbaar is door 11. We gaan nu op dezelfde manier verder: 138 zal deelbaar zijn door 11, als $13 - 8 = 5$ deelbaar is door 11. Het blijkt dat 1468 niet deelbaar is door 11, maar het bij deling door 11 als rest 5 geeft.

Van de volgende notatie van deze berekening kunnen we (ook voor de andere kenmerken van deelbaarheid) veel gemak hebben:

$$\begin{array}{r} 1468 \\ - \quad 8 \\ \hline 138 \\ - \quad 8 \\ \hline 5 \end{array}$$

Deelbaarheidskenmerken voor priemgetallen eindigend op het cijfer 1 worden op analoge wijze afgeleid. Hier volgt nog een voorbeeld voor deelbaarheid door 31.

We schrijven het getal weer als

$$\begin{aligned} 10a + b &= 31x \\ a &= \frac{31x - b}{10} \end{aligned}$$

trek aan beide kanten $3b$ af:

$$a - 3b = \frac{31x - 31b}{10}$$

Als we 1468 onderzoeken op deelbaarheid door 31, dan ziet onze berekening er als volgt uit:

$$\begin{array}{r} 1468 \\ 24 \\ - \quad \hline 122 \\ 6 \\ - \quad \hline 6 \end{array}$$

Bij priemgetallen eindigend op 3, 7 of 9 is het afleiden van een deelbaarheidskenmerk soms iets lastiger. We geven een voorbeeld van deelbaarheid door 17.

$$10a + b = 17x$$

$$a = \frac{17x - b}{10}$$

Het kost nu even zoeken om te vinden dat we links en rechts $5b$ moeten aftrekken. We krijgen dan:

$$a - 5b = \frac{17x - 51b}{10}$$

Op deze wijze kan men tot het volgende tabelletje komen:

Een getal is deelbaar door: als: deelbaar is door:

7	$a - 2b$	7
11	$a - b$	11
13	$a + 4b$	13
17	$a - 5b$	17
19	$a + 2b$	19
23	$a + 7b$	23
29	$a + 3b$	29



38. Gevraagd wordt een getal van zes cijfers, dat het „bouwschema” abcabc heeft evenals bijvoorbeeld 137137. De som van het gevraagde getal en 137137 moet het kwadraat van een geheel getal zijn.

39. De punten P, Q, R liggen opvolgend op de zijden BC, CA, AB van driehoek ABC. Bestu-

deer de volgende redenering, geef er een cijfer voor (minimaal 1, maximaal 10) en motiveer je cijfer:

Als PQ niet evenwijdig is met AB, dan kan ik R zo langs AB verplaatsen, dat zijn afstand tot PQ groter wordt. Dan neemt de oppervlakte van driehoek PQR toe. Als je de oppervlakte van driehoek PQR maximaal wilt maken, dan moet vergroting van die oppervlakte niet meer mogelijk zijn, zodat dan PQ evenwijdig moet zijn met AB. Voor de andere twee zijden van driehoek PQR geldt iets soortgelijks. Kies ik P, Q, R dus in de middens van de drie zijden van driehoek ABC, dan is de oppervlakte van driehoek PQR maximaal.

40. Als in drie van de vier kwartalen van een jaar een „vrijdag de dertiende” voorkomt, op welke dag valt dan 31 december van dat jaar?

Oplossing Wimecos prijsvraag I

Er zijn enkele heel aardige oplossingen van deze prijsvraag binnen gekomen, maar het aantal inzendingen was bijzonder laag.

Een inzender heeft zelfs een computer aan het werk gezet om rijke getallen te berekenen. Deze produceerde een indrukwekkende rij van indrukwekkende getallen, waarvan het grootste 7200 delers heeft en 1 686 582 097 200 bedraagt. Helaas ging deze inzender, met een angstig hart overigens, van de veronderstelling uit dat elk volgend rijk getal minstens dezelfde priemdelers heeft als zijn voorgangers. Deze veronderstelling werd als vermoeden ook door enkele anderen genoemd, maar hij is helaas onjuist; in een artikel van de Fransman Badiou wordt vermeld, dat het 64ste rijke getal door 19 deelbaar is, maar dat de nummers 65, 66 en 69 niet door 19 deelbaar zijn.

1. Het aantal delers van $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \dots$ bedraagt $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \dots$
2. Na 24 komen de rijke getallen 36, 48, 60, 120, $\dots$
3. Zou r wel door p deelbaar zijn, maar niet door het kleinere priemgetal q , dan ontstaat door in de ontbinding van r elke factor p door een factor q te vervangen een kleiner getal met evenveel delers als r ; dus kan zo'n r niet rijk zijn.
4. Als in de ontbinding van r voorkomt $\dots p^a \dots q^b \dots$, waarin p kleiner is dan q en a kleiner is dan b , dan ontstaat door verwisseling van de exponenten a en b een kleiner getal $\dots p^b \dots q^a \dots$ met evenveel delers als r , zodat r niet rijk kan zijn.

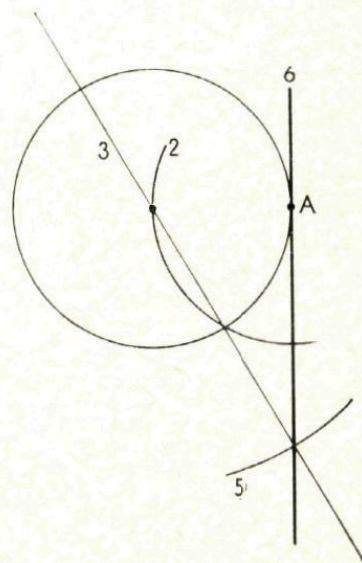
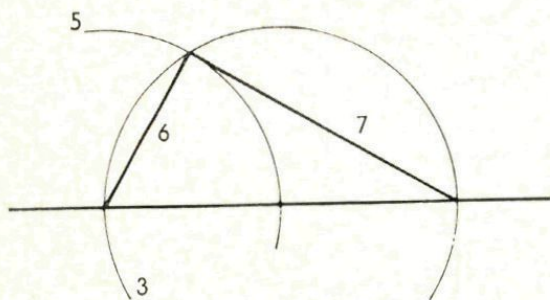
De eerste prijs ontvangt Lou van den Dries te Ens, wiens antwoord met 43 punten gehonoreerd werd. De tweede prijs is voor Cijp van de Bult, Nijmegen (41 punten) en de derde voor A. Kool, Amstelveen (35 punten). Zij hebben hun boekenbonnen al ontvangen.

De tweede Wimecos-prijsvraag leverde door het kleine aantal inzendingen slechts een prijswinnaar op: Gerard Koolstra in Baarn had alle antwoorden goed en ontving ook een boekenbon.

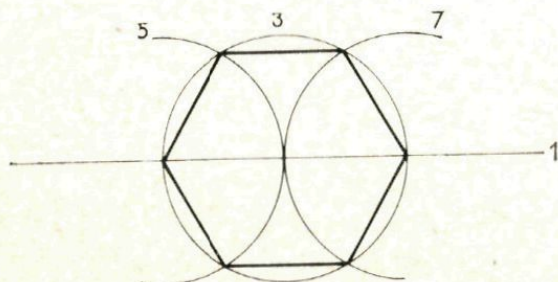
Wees zuinig en win een prijs

Oplossingen

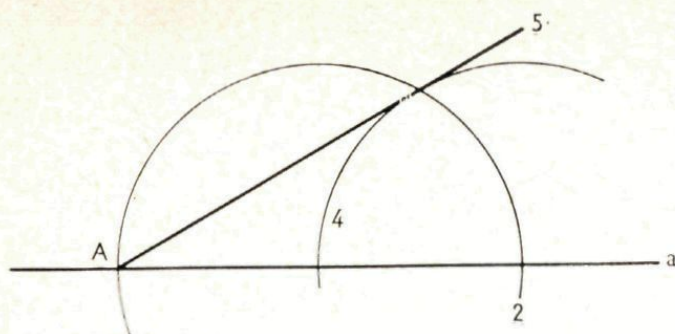
Opdracht V: laagste score 7 punten.



Opdracht VI: laagste score 13 punten.



Opdracht VII:
laagste score 6 punten.



Opdracht VIII:
laagste score 5 punten.

Bij opdracht IV zijn verschillende lezers ons te slim af geweest. Zij vonden een constructie met een score van 11 punten.

Oplossingen Denkertjes uit het vorige nummer

21. Enkele voorbeelden:
 $(1 + 2) \cdot 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 = 10$
 $1 + 2 \cdot 3 + 4 - 5 - 6 - 7 + 8 + 9 = 10$
 $(1 \cdot 2 \cdot 3 - 4) \cdot 5 - 6 + 7 + 8 - 9 = 10$
22. Alleen het getal 89 heeft de genoemde eigenschap.
23. Nummer de uiteinden aan de eerste kant 1,2,3,4,5,6. Nummer 1 kan met elk van de vijf andere uiteinden verbonden worden. Is deze keuze gemaakt, dan bestaan er voor het laagst genummerde losse uiteinde nog drie verbindingsmogelijkheden. Daarna is er geen vrije keuze meer. Aan die eerste kant zijn er dus $5 \cdot 3 = 15$ mogelijkheden. Dat geldt ook voor de andere kant. De opdracht kan dus op $15^2 = 225$ manieren uitgevoerd worden.
 Nadat de verbinding aan de eerste kant gemaakt is, zijn er aan de andere kant nog $4 \cdot 2 = 8$ verbindingsmanieren, die een ring doen ontstaan.
 Het tweede antwoord luidt dus $8 \cdot 15 = 120$.
24. De oppervlakte O is gelijk aan $\frac{1}{2}ad \sin \alpha + \frac{1}{2}bc \sin \gamma$ en is dus niet groter dan $\frac{1}{2}(ad + bc)$. Evenzo leiden we af, dat O niet groter is dan $\frac{1}{2}(ab + cd)$. Door optelling vinden we hieruit, dat $2O$ niet groter is dan $\frac{1}{2}(ab + cd + ad + bc) = \frac{1}{2}(a + c)(b + d)$.
 Alleen bij een rechthoek is de oppervlakte precies gelijk aan $\frac{1}{2}(a + c)(b + d)$.
24. Het verschil tussen het kwadraat van het k -de even getal en het kwadraat van het k -de oneven getal bedraagt $(2k)^2 - (2k - 1)^2 = 4k - 1$. Het gevraagde getal is dus de som van de eerste 100 termen van de rij 3,7,11,15, ..., $4k - 1$, ... of wel $50(3 + 399) = 20100$.
26. We voeren de volgende lengtegetallen in:
 $BK = \frac{1}{2}a(1 - x)$, $CK = \frac{1}{2}a(1 + x)$, $CL = \frac{1}{2}b(1 - y)$,
 $AL = \frac{1}{2}b(1 + y)$, $AM = \frac{1}{2}c(1 - z)$, $BM = \frac{1}{2}c(1 + z)$. Indien nu elk van de driehoeken AML , BMK , CLK een oppervlakte had, die groter was dan het vierde deel van de oppervlakte van driehoek ABC , dan zouden de produkten $(1 + y)(1 - z)$ en $(1 + z)(1 - x)$ en $(1 + x)(1 - y)$ alle groter zijn dan 1. Hieruit leiden we eerst af, dat x, y, z alle positief zijn of alle negatief zijn. Daarna leiden we er uit af, dat de getallen $y - z - yz$ en $z - x - xz$ en $x - y - xy$ alle positief zijn en dat hun som $yz - xz - xy$ dus ook positief is. De laatste twee zinnen zijn met elkaar in strijd.
27. De hoeken A, B, C zijn opvolgend $120^\circ, 132^\circ, 36^\circ$ groot.
28. De middelloodlijnen van AB en CD noemen we m en n . Hebben m en n een punt S gemeen (doordat ze snijdend zijn of doordat ze samen vallen), dan is er een cirkel om S door A en B en een cirkel om S door C en D . Deze cirkels zijn concentrisch en hebben volgens het gegeven minstens één punt gemeenschappelijk. Ze vallen dus samen: A, B, C, D liggen op één cirkel.
 Zijn m en n evenwijdig, dan vallen AB en CD samen of ze zijn evenwijdig. In het laatste geval kan men echter door A, B en door C, D twee cirkels brengen die geen enkel punt gemeen hebben (kies het middelpunt van de cirkel door A, B ver van AB en verder van CD ; kies het middelpunt van de cirkel door C, D ver van CD en verder van AB). Dit is in strijd met het gegeven en dus liggen A, B, C, D op één rechte.
29. Kies voor H_1 een heer, die met een maximaal aantal dames gedanst heeft. Kies voor D_2 een dame, waar H_1 niet mee gedanst heeft. Kies voor H_2 een heer, waar D_2 wel mee gedanst heeft. Omdat H_1 met even veel of meer dames gedanst heeft dan H_2 , kan men voor D_1 een dame kiezen, waar H_1 wel en H_2 niet mee gedanst heeft.
30. c, a, e, d, b .

Caustica:

Afgeleid van het Grieks voor branden. Omhullende van de lichtstralen die bij terugkaatsing aan een holle spiegel ontstaat.

Epicycloide:

Het Griekse epi betekent op. Cycloide is afgeleid van cyclus = cirkel. Wanneer een cirkel over een andere cirkel rolt, beschrijft elk punt op de omtrek een epicycloide.

Priemgetal:

Lat. primus = eerste. Getal dat alleen zichzelf en één als deler heeft.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Markt 34, Oudenbosch.

Drs. A.B. OOSTEN, Turftorenstraat 11A, Groningen.

A.F.VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden. *Oplossingen inzenden uiterlijk 15 maart 1967.*

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,50 per jaargang. Voor anderen f 4,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J.B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.