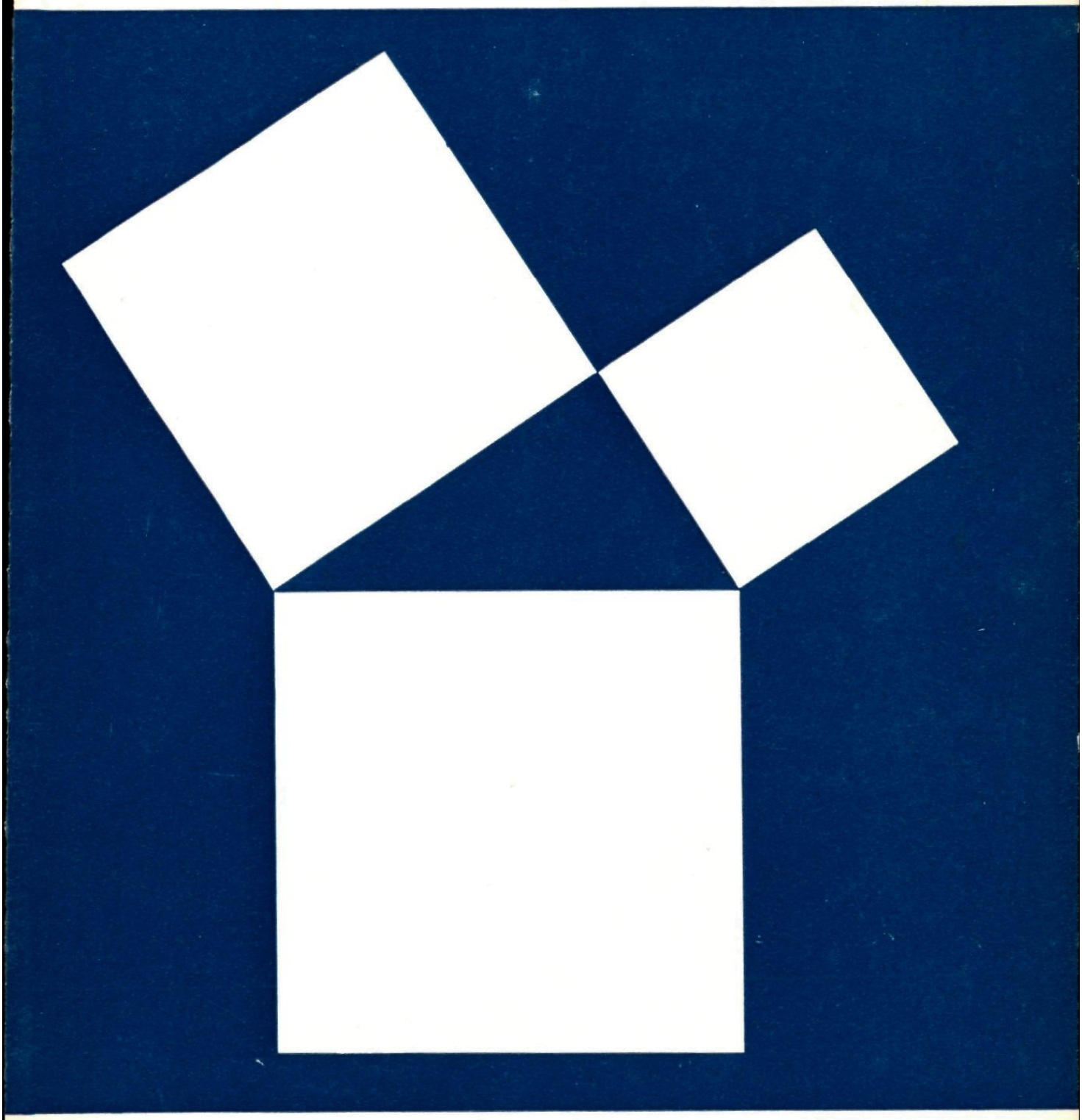
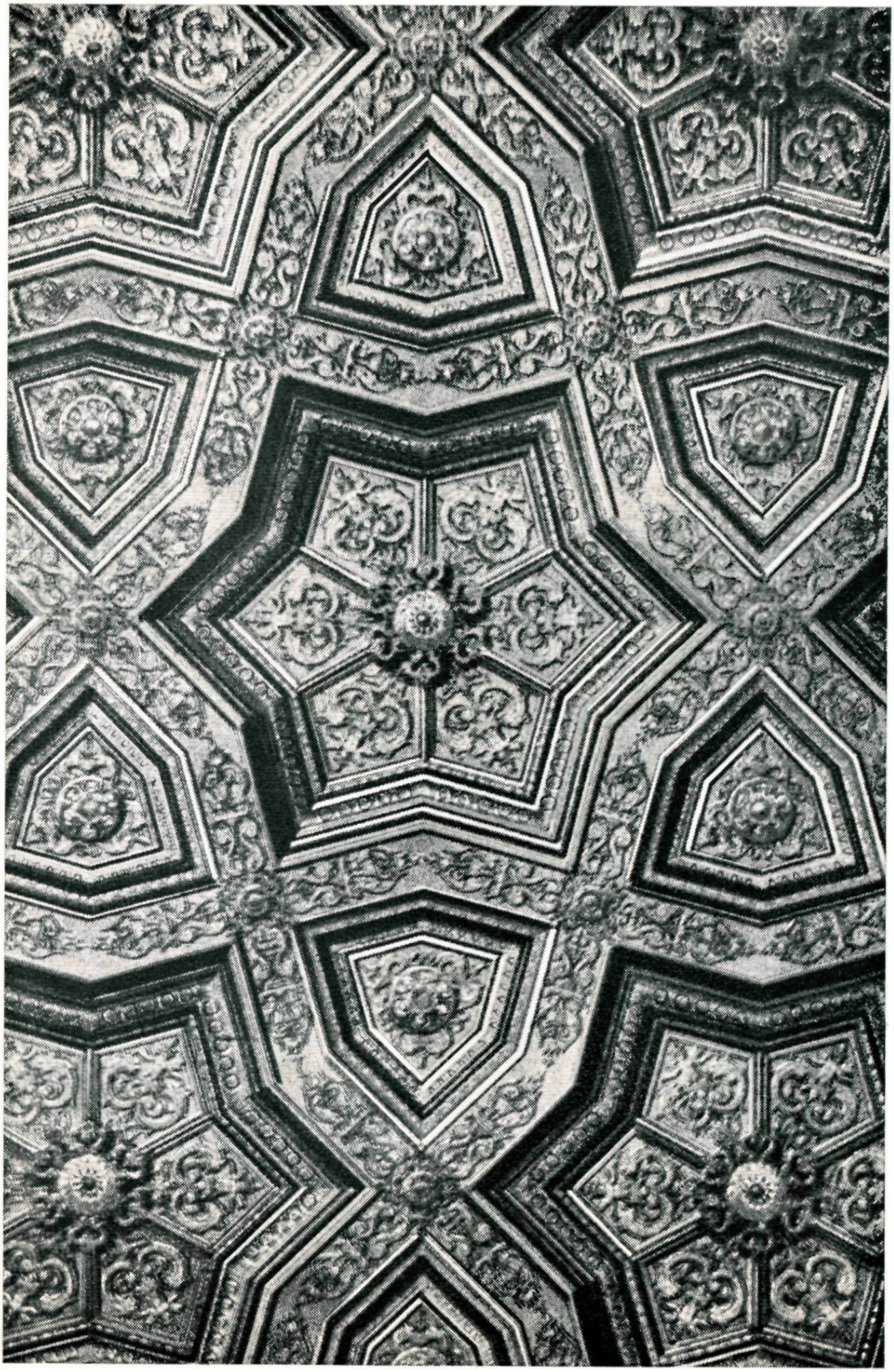
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

5

Zesde jaargang
1966/1967



pythagoras

jaargang 6 no 5

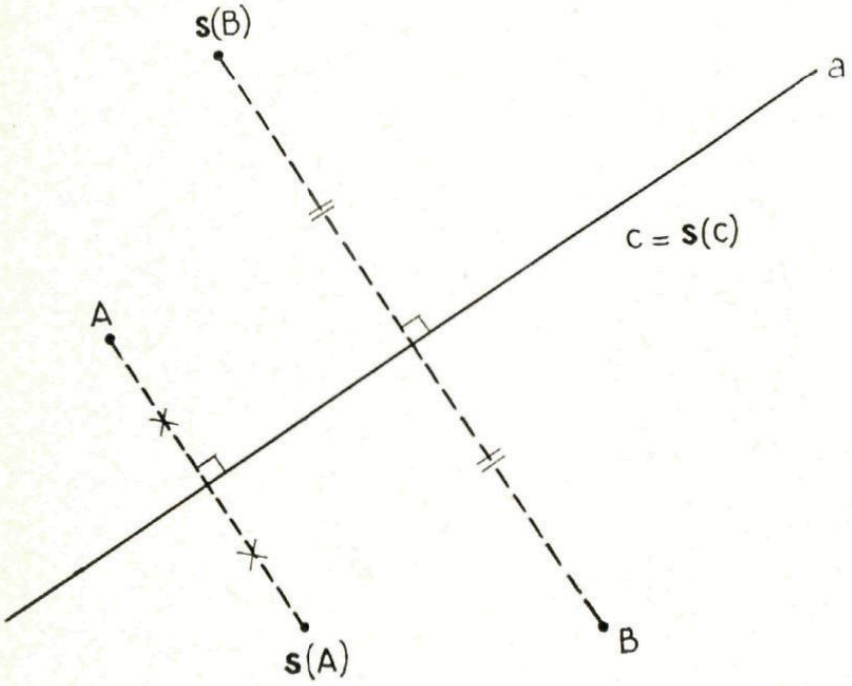
Isometrie

De afbeelding hiernaast is een vlakverdeling, waarin de motieven zich regelmatig herhalen. Het is een voorbeeld van Moorse versierkunst uit het Alhambra, bij Granada in Spanje. In dit soort versieringen is een wiskundige theorie toegepast, waaraan we in dit speciale nummer van Pythagoras aandacht besteden.
Dergelijke versieringen ontstaan namelijk door toepassing van eenvoudige meetkundige afbeeldingen: het spiegelen, draaien en verschuiven van figuren in het platte vlak, dat wil zeggen die afbeeldingen, waarbij de beeldfiguur congruent is met de oorspronkelijke figuur.
Deze afbeeldingen heten isometrieën.
Eerst zal worden nagegaan welke isometrieën er zoal zijn. Het zal je niet moeilijk vallen dit te begrijpen. Op dit eenvoudige fundament wordt daarna een flink hoog wiskundig bouwsel opgericht, waarmee je misschien wat meer moeite zult hebben.

1. *Het spiegelen*

Je hebt in je leven vaak genoeg voor de spiegel gestaan, om op de hoogte te zijn van de eigenschappen van het spiegelen. Zo zul je weten dat het spiegelbeeld van je rechterhand de linkerhand van je spiegelbeeld is, en dat je neus even ver voor de spiegel is, als het spiegelbeeld er achter. Verder staat de verbindingslijn van neus en spiegelneus loodrecht op de spiegel.
In het platte vlak schrompelt de spiegel ineen tot een lijn en je neus tot een punt.
Is in het platte vlak een rechte a (de spiegelas) gegeven, dan bezit elk punt X van dat vlak een spiegelbeeld Y ten opzichte van a: ligt X niet op a, dan is a middelloodlijn van het lijnstuk XY; ligt X wel op a, dan valt Y met X samen.
We duiden een spiegeling aan door de letter **s**. Dit stelt ons in staat om het spiegelbeeld van een punt een naam te geven waaraan we kunnen zien, dat hij spiegelbeeld van dat punt is: het spiegelbeeld van A

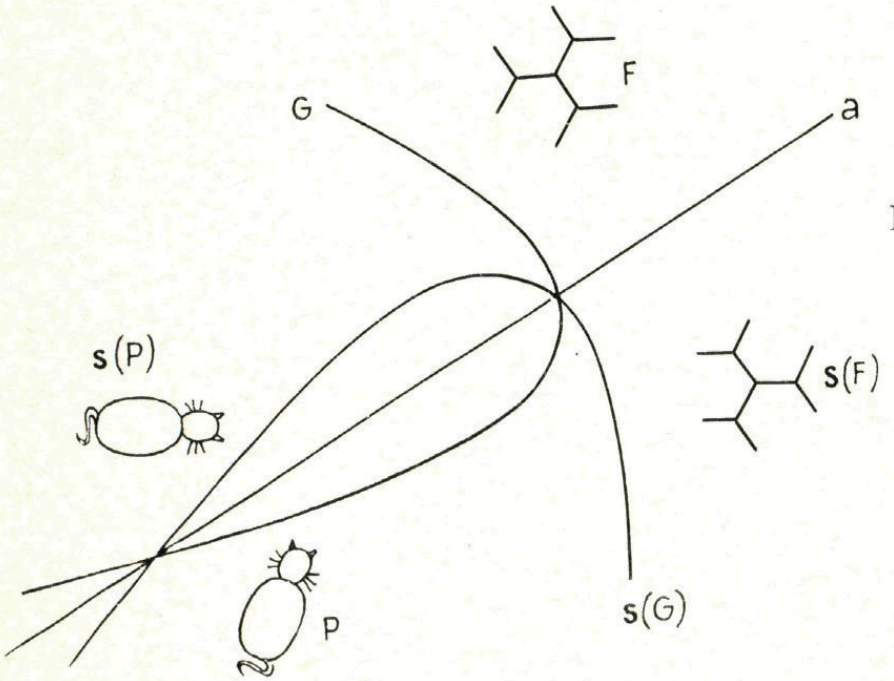
noemen we **s** (A), dat van B noemen we **s** (B) enzovoorts. In figuur 1 is dat toegelicht.
Nu we vastgesteld hebben wat we onder het spiegelbeeld van een punt zullen verstaan, kunnen we verder bouwen en definiëren wat we onder het spiegelbeeld **s** (F) van een figuur F zullen verstaan. Dit is overigens bijzonder eenvoudig, want natuurlijk bedoelen we met **s** (F) de verzameling van de spiegelbeelden van de punten van F. In figuur 2 zijn een paar figuren met hun spiegelbeelden vereeuwigd.



Figuur 1

We gaan verder met het intrappen van open deuren door te beweren, dat elke figuur congruent is met zijn spiegelbeeld. Dat betekent dat elke figuur zijn spiegelbeeld precies bedekken kan. Nu spreekt het vanzelf dat we een figuur, die we met zijn spiegelbeeld tot dekking willen brengen, in het algemeen op de een of andere manier zullen moeten bewegen.
Het is bijzonder nuttig hierbij te denken aan een beweging van het gehele vlak, die met één klap elke figuur met zijn spiegelbeeld tot dekking brengt. We stellen ons dat als volgt voor. Op het vlak, waarin zich de figuren F, G, H enzovoorts met hun spiegelbeelden **s** (F), **s** (G), **s** (H), . . . bevinden, leggen we een doorzichtig blad papier op een glasplaat. Op die glasplaat nemen we F, G, H, . . . over; we tekenen met andere woorden op de glasplaat nieuwe figuren $\overline{F}$, $\overline{G}$, $\overline{H}$, . . . die F, G, H, . . . precies bedekken. Daarna tillen we de glasplaat op en leggen hem ondersteboven weer neer en wel zo, dat $\overline{F}$, $\overline{G}$, $\overline{H}$, . . . nu niet meer F, G, H, . . . maar **s** (F), **s** (G), **s** (H), . . . gaan bedekken.

Bedenk echter vooral, dat deze glasplaatbeweging niets te maken heeft met het spiegelen zelf. Het spiegelen van een figuur is *niet* het oprapen van die figuur en ergens anders „ondersteboven" weer neerleggen. Wanneer jij jezelf spiegelt in de wateroppervlakte van een stille vijver, dan betekent dat immers ook niet, dat je op je rug op de bodem van die vijver gaat liggen.



Figuur 2

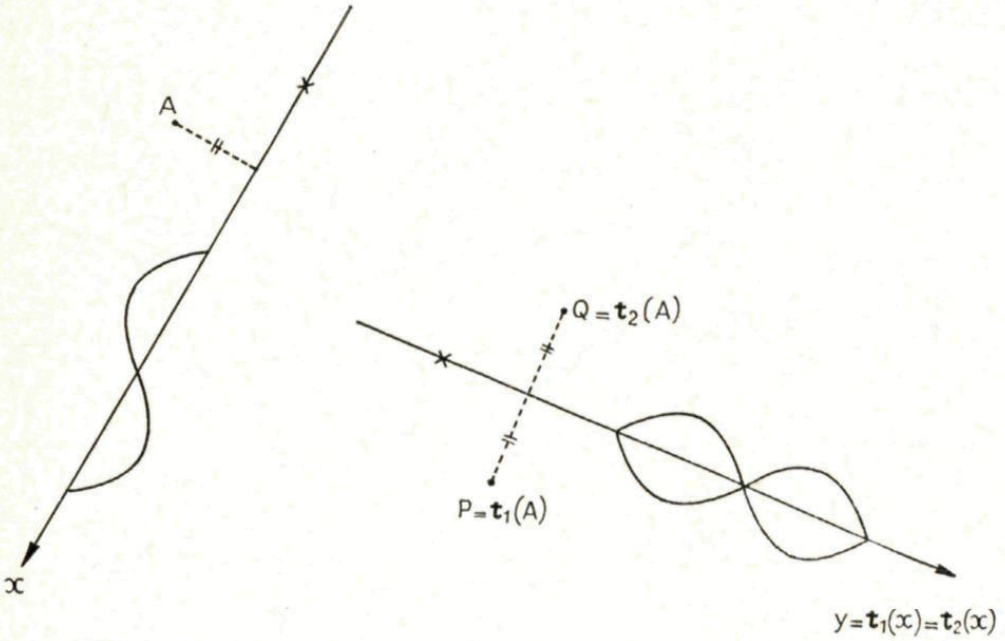
De onderstaande opgaven stellen je in de gelegenheid om met het begrip spiegelen wat te stoeien.

Opg. 1: Gegeven zijn een rechte t en de punten A en X, die aan weerszijden van t liggen. Van de spiegelas a is bekend, dat hij door A gaat en van **s** (X) is bekend dat hij op t ligt. Construeer a.
Opg. 2: De figuur F is een oneindig lange strook van het vlak, begrensd door twee evenwijdige rechten. Wat volgt er omtrent de ligging van de spiegelas a uit het gegeven, dat **s** (F) samenvalt met F?
Opg. 3: In het vlak is een lijnstuk AB gegeven en een rechte d, die AB snijdt, niet in het midden en die niet loodrecht op AB staat. Construeer de driehoek ABC, zo dat d de bissectrice van hoek C van die driehoek is.

2. *Isometrie*

We hebben in de vorige paragraaf het spiegelen tevoorschijn gehaald om dat als voorbeeld te kunnen gebruiken. Wanneer we de spiegeling „kaalplukken", dan zien we: **s** is een afbeelding, die aan elk punt in

het vlak een beeldpunt in dat vlak toewijst; deze afbeelding of toevoeging heeft als bijzondere eigenschap dat elke figuur in dat vlak congruent is met zijn beeldfiguur.
Het spiegelen is een voorbeeld van die afbeeldingen in de meetkunde, die we *isometrieën* noemen. De naam wijst op het feit dat figuur en beeldfiguur dezelfde afmetingen hebben.
Een isometrie voegt aan elk punt van het vlak een beeld toe en wel zo, dat
1° het beeld van elke halve rechte x een halve rechte **t** (x) is
2° het beelpunt **t** (A) van elk punt A net zo ver van **t** (x) en zijn eindpunt liggen, als A van x en zijn eindpunt ligt. (Zie fig. 3).



Figuur 3

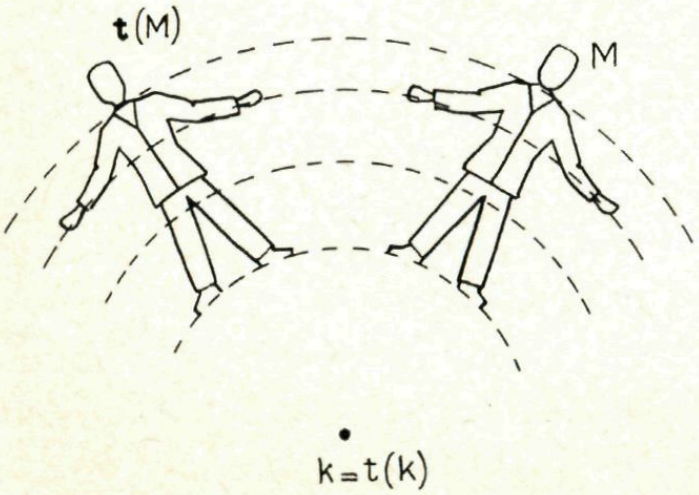
Het beeldpunt van A in fig. 3 kan het punt P of het punt Q zijn.
Klaarblijkelijk zijn er twee isometrieën, waarbij y het beeld is van x. Werken we weer met onze glasplaat, en tekenen we hierop x over, met alles er op en er aan, dan kunnen we de plaat zo verschuiven, dat we het geval t_1 (A) = P krijgen. Om het geval $\mathbf{t}_2$ (A) = Q te krijgen moeten we de glasplaat echter met de andere kant boven leggen.
We zullen een isometrie *direct* of *indirect* noemen al naar gelang het omkeren van de glasplaat wel of niet gebeuren moet. De spiegeling is dus een voorbeeld van een indirecte isometrie.

Opg. 4. In het vlak zijn gegeven twee congruente gelijkzijdige driehoeken, die we kortweg als X en Y aanduiden, en een punt A. Er zijn zes isometrieën, zo, dat **t** (X) = Y. Construeer **t** (A) voor elk van die zes.

Opg. 5: In het vlak is gegeven een lijnstuk p en de figuur F, die bestaat uit een regelmatige zeshoek met diens omgeschreven cirkel. De zeshoek wordt door drie stralen in drie ruiten verdeeld. De lengte van p is gelijk aan die van de zijden van de zeshoek. Hoeveel isometrieën **t** hebben de eigenschap, dat p een onderdeel is van **t** (F)? Hoeveel daarvan zijn direct en hoeveel indirect?
Opg. 6: Neem de twee halve rechten x en y uit figuur 3 over en onderzoek voor elk van de twee isometrieën **t**, zo, dat **t** (x) = y, of er punten K zijn waarvoor geldt **t** (K) = K.

3. *Directe isometrieën*

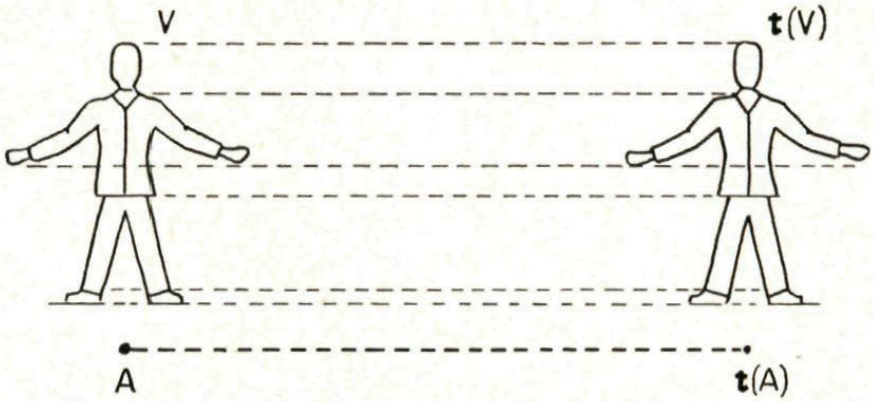
We zullen nog heel wat met isometrieën moeten exerceren, want over enkele bladzijden worden ze in deze meetkunde net zo belangrijk als de getallen in de algebra. Daarom beginnen we een verzameling isometrieën aan te leggen; we zullen daar pas mee ophouden, wanneer die verzameling compleet is.
Op de eerste bladzijde van ons isometrieën-album staat als titel: directe isometrieën met dekpunt. Onder een dekpunt van een isometrie **t** verstaan we een punt K, waarvoor geldt **t** (K) = K. (Bij een spiegeling zijn dus alle punten van de spiegelas dekpunten).
Met behulp van onze glasplaat is het erg gemakkelijk een overzicht te krijgen over de directe isometrieën met een dekpunt. Omdat het over een *directe* isometrie gaat, mag de glasplaat niet omgekeerd worden. Je kunt hem dus op het vlak laten liggen en omdat het dekpunt K met zijn beeldpunt $\overline{K}$ moet samenvallen, is de enige beweging die we met de glasplaat kunnen uitvoeren een draaiing om K. En daarmee hebben we dan tegelijk onze directe isometrieën met dekpunt K gevonden (zie figuur 4). We noemen ze: *rotaties* of *draaiingen*. Een rotatie



Figuur 4.

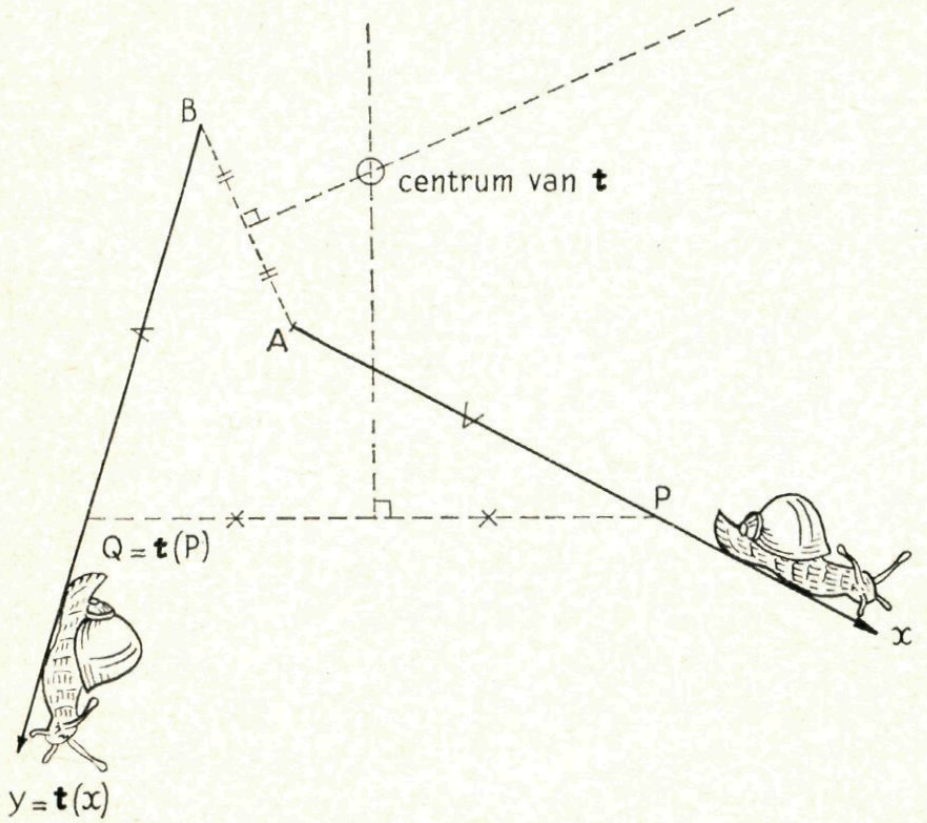
wordt volledig bepaald door drie dingen: ten eerste zijn dekpunt, dat we ook wel centrum van de rotatie zullen noemen; ten tweede zijn draaihoek α; ten derde zijn richting (met de wijzers mee of tegen de wijzers in). Hierbij kunnen nog een paar „verfijningen" aangebracht worden. Het heeft bijvoorbeeld geen enkele zin om een draaihoek van meer dan 360° op te geven. Weliswaar is het draaien van de glasplaat over 390° iets anders dan het draaien over 30° (ook op de kermis geldt: meer draaien, dan meer betalen), maar die glasplaatbeweging is voor ons slechts bijzaak. Wij willen weten hoe we bij elk gegeven punt zijn beeldpunt kunnen bepalen en daarvoor is $\alpha = 30°$ even duidelijk als $\alpha = 390°$ en deze geeft bovendien ook nog dezelfde resultaten. De tweede verfijning is, dat ook het opgeven van de draaizin overbodig gemaakt kan worden. Een rotatie van 30° met de klok mee kan immers ook beschreven worden als een rotatie van 330° tegen de klok in. We spreken af, dat we voortaan, tenzij het uitdrukkelijk anders vermeld is, zodra er een draaihoek gegeven is een draaiing over zoveel graden *tegen de klok in* bedoelen.
We besteden nog een enkel woord aan het speciale geval $\alpha = 360°$ of, wat op hetzelfde neerkomt, $\alpha = 0°$. Bij deze isometrie geldt **t** (X) = X voor elk punt X van het vlak. We noemen hem de *identieke* isometrie en duiden hem gewoonlijk aan met de letter **i**.

Figuur 5.



Het is gemakkelijk in te zien dat er geen directe isometrieën met meer dan één dekpunt zijn. Er zijn wel directe isometrieën zonder dekpunt. Bekende voorbeelden daarvan zijn de *translaties* of *verschuivingen* (zie figuur 5). Een translatie wordt volledig bepaald door één punt A en zijn beeldpunt **t** (A) te geven. Want de definitie van het begrip translatie luidt zo, dat voor elk willekeurig punt X van het vlak het lijnstuk met X als beginpunt en **t** (X) als eindpunt dezelfde lengte en dezelfde richting heeft als het lijnstuk met A als beginpunt en **t** (A) als eindpunt.

Het is de hoogste tijd geworden voor de klap op de vuurpijl. Hier komt hij: *er zijn geen andere directe isometrieën dan de rotaties en de translaties.*



Figuur 6.

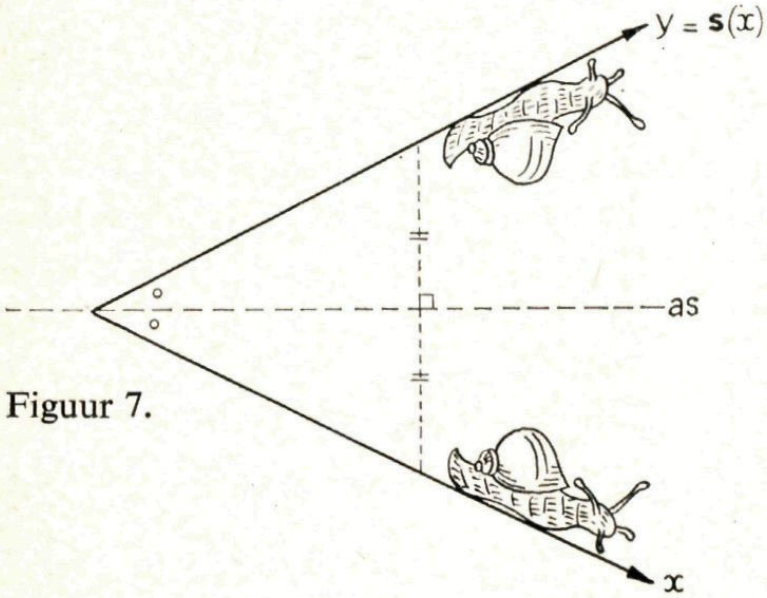
Om dit in te zien, bedenken we eerst dat een directe isometrie bepaald wordt door het geven van een halve rechte x en het beeld daarvan y = **t** (x). Hebben x en y hetzelfde eindpunt, dan is de door hen bepaalde isometrie natuurlijk een rotatie. Hebben x en y verschillende eindpunten, maar gelijke richting, dan is er een translatie die aan x het beeld y toewijst.
We behoeven dus alleen nog maar die gevallen te bestuderen, waarin x en y verschillende eindpunten en verschillende richtingen hebben (zie figuur 6).
Ook in dit geval is er echter sprake van rotaties, zoals duidelijk blijkt uit fig. 6. Het centrum van zo'n rotatie is gemakkelijk te vinden.
Er blijken dus maar twee vormen van directe isometrieën te bestaan, namelijk de verschuivingen en de draaiingen.
Mocht je met opgave 6 moeilijkheden gehad hebben, dan hopen we die nu voor een deel opgelost te hebben.

Opg. 7: Een willekeurige translatie **t** (die dus niet de identieke isometrie **i** is) heeft geen dekpunten, maar wel dekrechten. Welke rechten zijn dat? (Een dekrechte van **t** is een rechte x, waarvoor geldt **t** (x) = x.)

Opg. 8: Een willekeurige rotatie **r** heeft wel een dekpunt, maar geen dekrechten, behalve als de draaihoek een speciale waarde heeft. Welke waarde is dat en welke zijn dan die dekrechten?
Opg. 9: De rotatie **r** heeft C als draaipunt en 60° als draaihoek. Vorm uit de van C verschillende punten van het vlak drie rode en drie groene gebieden, zodat elk rood punt een groen beeldpunt heeft en elk groen punt een rood beeldpunt.
Opg. 10: Er is een translatie **t** gegeven. Verdeel het vlak in rode en groene stroken (zie opgave 2), zodat het beeld van elke groene strook een rode strook is en omgekeerd. Kun je de richting van die stroken willekeurig kiezen? Wat valt er over de maximale breedte van die stroken te vertellen?
Opg. 11: Teken twee congruente gelijkzijdige driehoeken. Noem de hoekpunten van de ene A, B, C en van de andere P, Q, R en doe dat zo, dat de middelloodlijnen van AP, BQ, CR door één punt gaan.

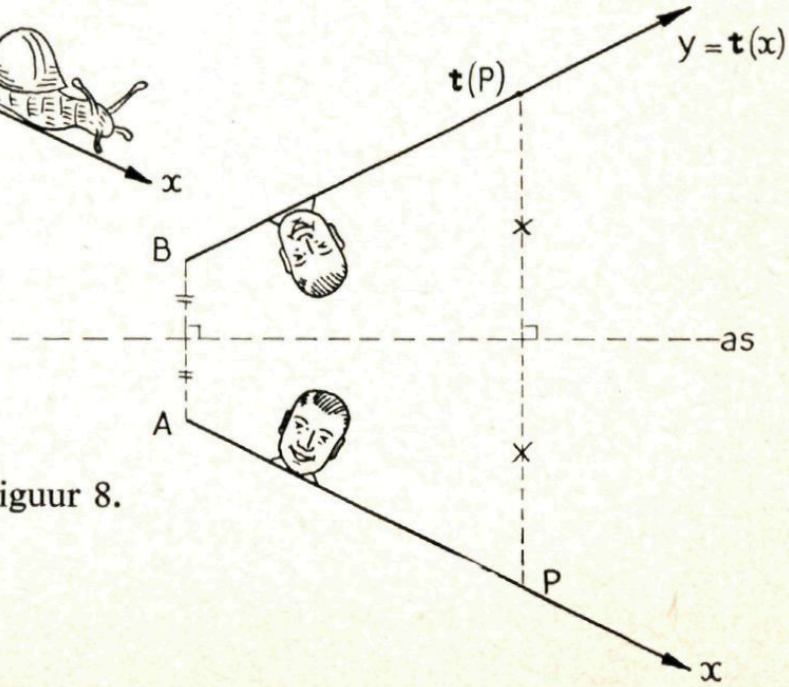
4. *Indirecte isometrieën*

Aan het eind van deze paragraaf moet onze verzameling isometrieën compleet zijn. De spiegeling is al in paragraaf 1 besproken, alle andere indirecte isometrieën komen nu aan de beurt.
We gaan maar weer uit van twee halve rechten x en y, omdat elke indirecte isometrie bepaald kan worden door het geven van een halve rechte en zijn beeld. Hebben x en y hetzelfde eindpunt, dan is er een spiegeling **s** zodat **s** (x) = y. (zie figuur 7).



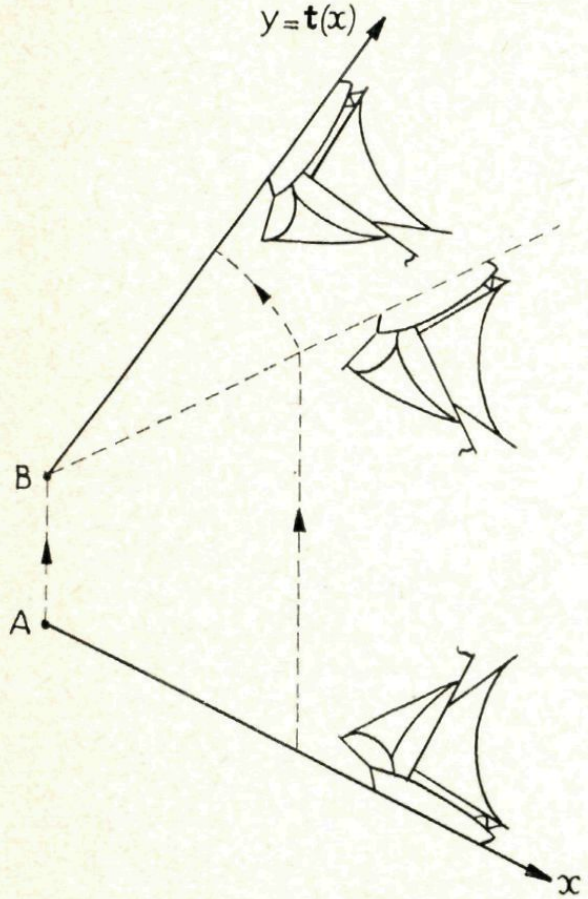
Figuur 7.

Hebben x en y verschillende eindpunten, dan kan de isometrie **t** waarvoor geldt **t** (x) = y ook nogwel een spiegeling zijn, zoals in figuur 8 getoond wordt.



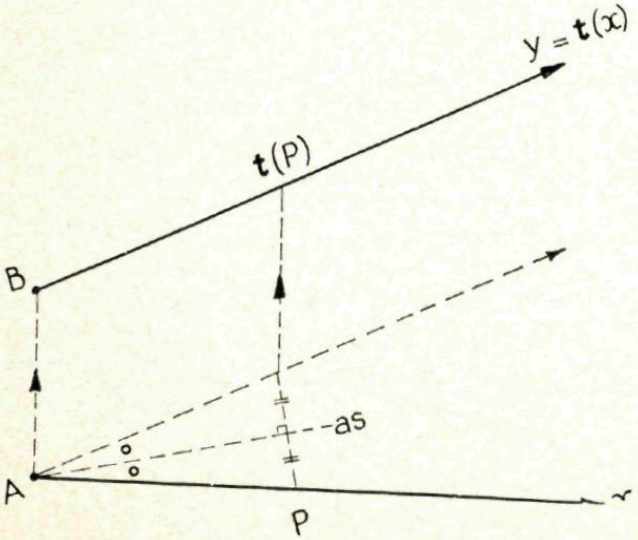
Figuur 8.

In het algemeen is dat echter niet het geval. Wel kunnen we zo'n isometrie dan „ontbinden" in een spiegeling, gevolgd door een rotatie (figuur 9).



Figuur 9.

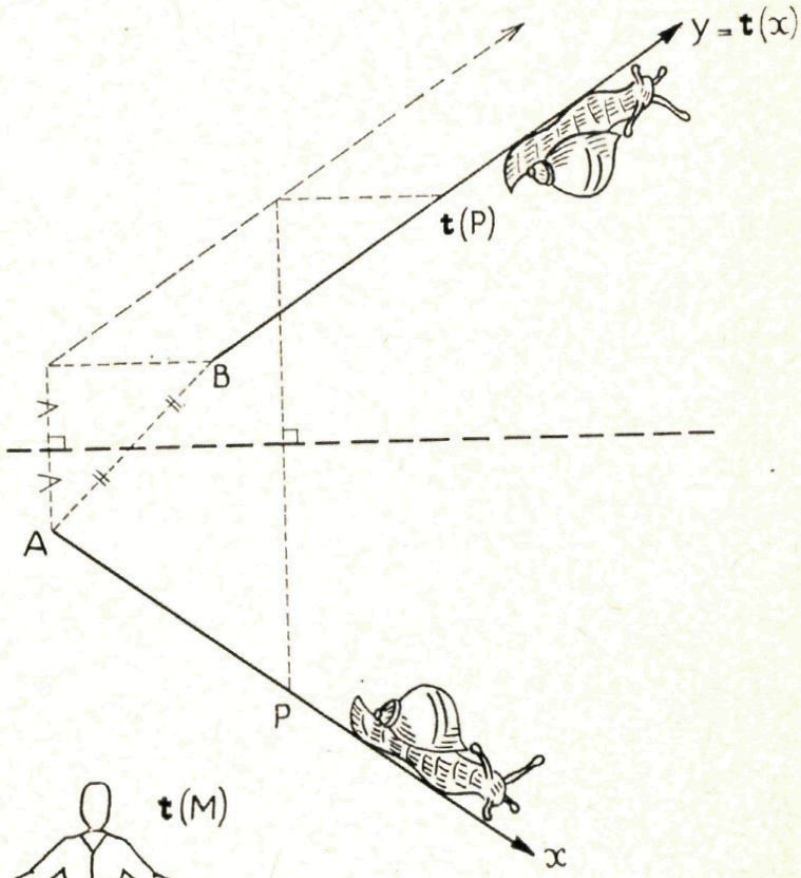
Een andere „ontbinding" wordt in figuur 10 aan je voorgesteld: eerst een spiegeling, dan een translatie. Je denkt ondertussen natuurlijk wel aan de beweging van de glasplaat. Deze wordt eerst omgekeerd en zo neergelegd dat A weer A bedekt en $\overline{x}$ de richting van y krijgt; dit is de spiegelingsetappe van zijn beweging. Daarna komt de trans-



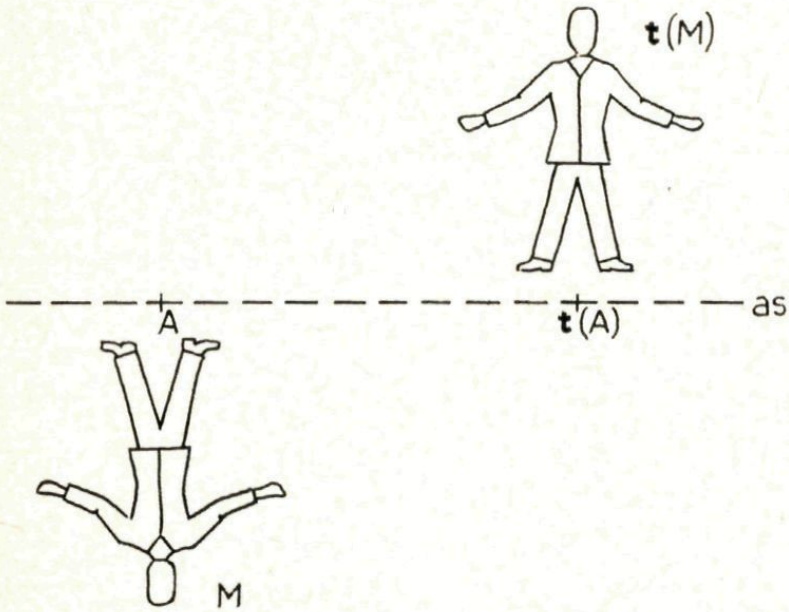
Figuur 10.

latie-etappe, die $\overline{A}$ naar B voert en daarmee tevens $\overline{x}$ boven y brengt.

Iets soortgelijks vind je tenslotte in figuur 11. De spiegeling geeft ook nu weer $\bar{x}$ de richting van y. Maar omdat de spiegelas door het midden van AB werd getrokken, verloopt de daarop volgende translatie evenwijdig met die spiegelas.
Hiermee is het maximum aan doorzichtigheid van onze indirecte iso-



Figuur 11.



Figuur 12.

metrieën bereikt: je kunt ze ontbinden in een spiegeling, gevolgd door een translatie in de richting van de spiegelas. Als je zo'n indirecte isometrie wilt beschrijven, dan kan je dat dus het beste doen door die speciale spiegelas meteen maar te geven en daarop een punt en zijn beeldpunt te markeren (zie figuur 12).

We noemen daarom elke indirecte isometrie, die geen spiegeling is, een *schuifspiegeling*. En als we over de ontbinding van een indirecte isometrie in een spiegeling, gevolgd door een translatie, spreken, dan bedoelen we altijd die speciale ontbinding waarbij de translatie evenwijdig met de spiegelas verloopt (ook al weten we nu dat er ook nog andere ontbindingen mogelijk zijn).

Opg. 12: Laat zien, dat een schuifspiegeling geen enkel dekpunt bezit, maar wel precies één dekrechte.
Opg. 13: Welke dekpunten en dekrechten bezit een spiegeling?
Opg. 14: F en G zijn twee congruente, rechthoekige, gelijkbenige driehoeken. Er is een rotatie **r** zodat **r** (F) = G en ook een schuifspiegeling **s**, zodat **s** (F) = G. Construeer het centrum van **r** en de spiegelas van **s**. Construeer ook centrum en spiegelas van de twee isometrieën waarbij F het beeld van G is.
Opg. 15: **s** is een schuifspiegeling en x is een rechte, die de eigenschap heeft evenwijdig te zijn met **s** (x). Wat volgt hieruit omtrent de ligging van x?
Opg. 16: Gegeven is een rechte a en een cirkel c, die a snijdt. Bepaal een schuifspiegeling **s** met a tot spiegelas, zodat c raakt aan **s** (c).

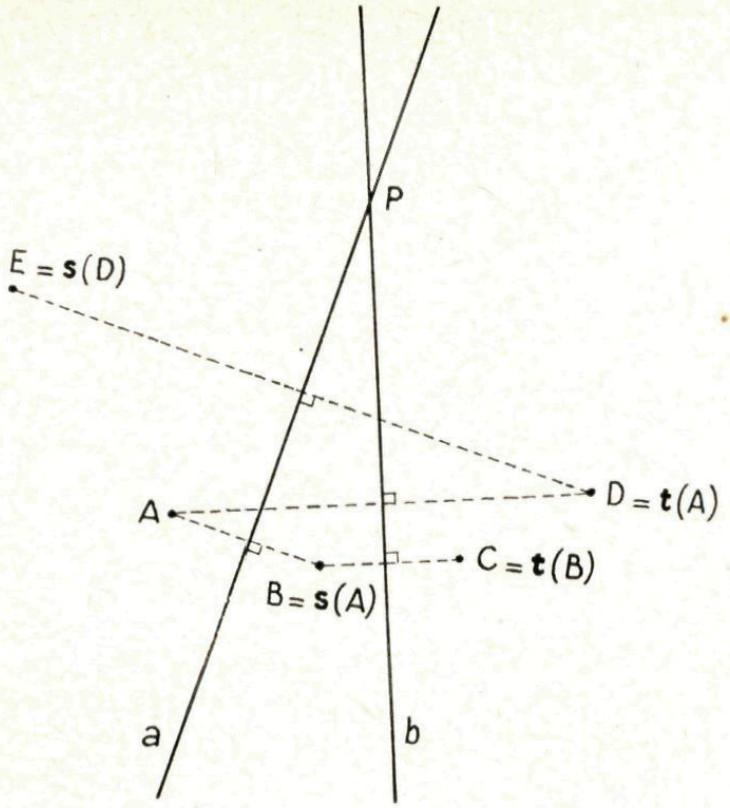
Hiermee is nu onze collectie isometrieën volledig geworden. Hij bestaat uit
DIRECTE ISOMETRIEËN: de IDENTIEKE ISOMETRIE, alle ROTATIES en alle TRANSLATIES.
INDIRECTE ISOMETRIEËN: alle SPIEGELINGEN en alle SCHUIFSPIEGELINGEN.

Voor we verder gaan, willen we nog even memoreren wat ons tot deze collectie gebracht heeft. We namen als uitgangspunt de ons allen bekende spiegeling. We hebben onze aandacht gericht op een paar van diens eigenschappen en stelden ons toen de vraag of er nog andere wiskundige objecten zijn, die diezelfde eigenschappen bezitten. Die vraag is nu volledig beantwoord en dus kunnen we ons open stellen voor andere zaken.

5. *Produkten van isometrieën*

Het ligt eigenlijk wel een beetje voor de hand, wat we nu met onze isometrieën zullen gaan doen. We hebben namelijk in de twee voorafgaande paragrafen enkele malen een isometrie ontbonden en dat heeft ons geen windeieren gelegd. Laten wij nu diezelfde situatie eens van de andere kant bekijken en wat wetmatigheden proberen te ontdekken die optreden bij het vormen van produkten van isometrieën.

We moeten dan echter wel beginnen met precies onder woorden te



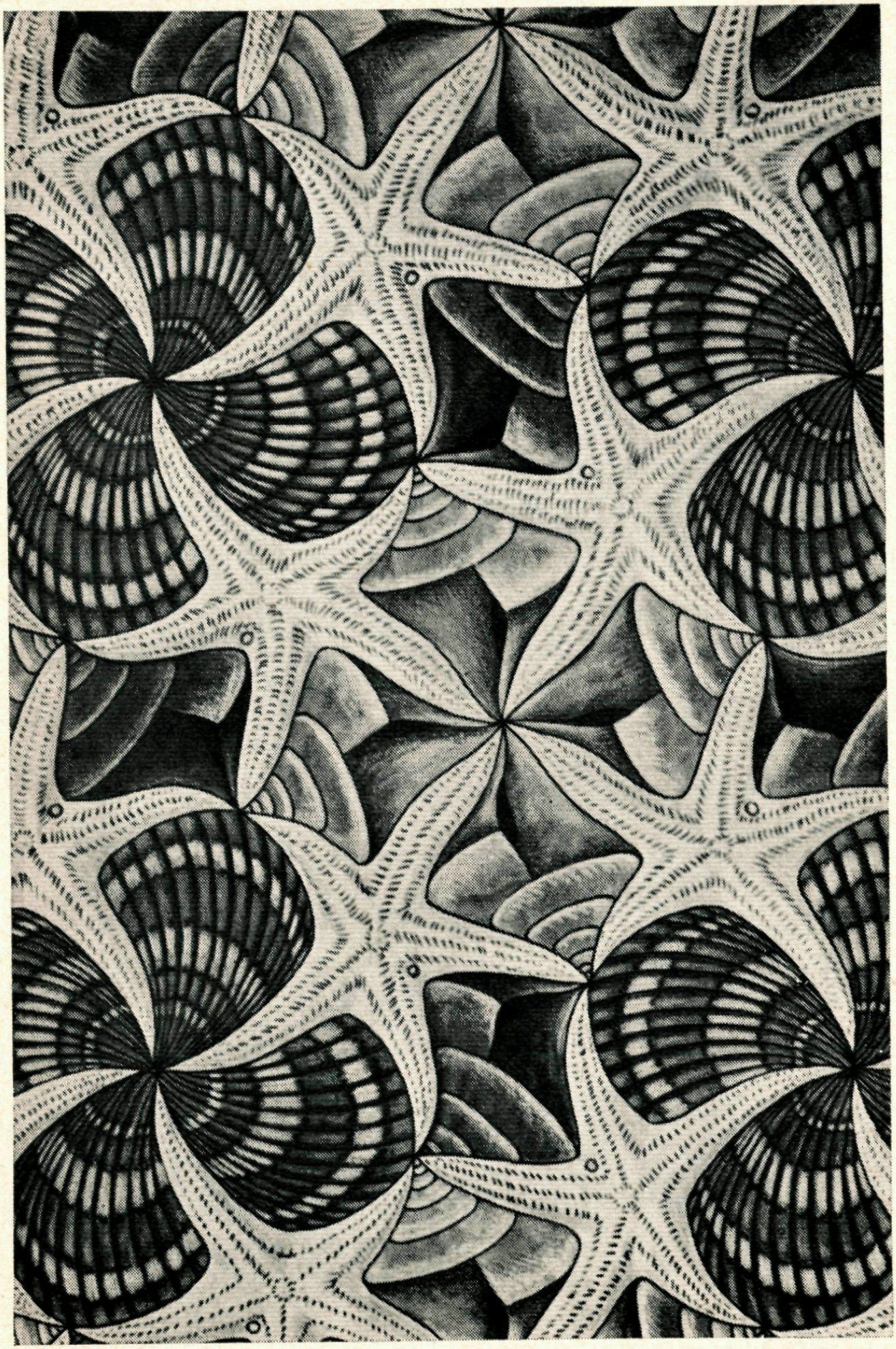
Figuur 13.

brengen, wat we onder het produkt van twee isometrieën zullen verstaan. Het gevaar, dat we isometrieën gaan verwarren met bewegingen (en dus op de bodem van de vijver willen gaan liggen), blijft immers nog altijd bestaan. En dat zou ons hier allerlei begripsverwarringen gaan opleveren. Een isometrie is geen beweging, maar een toevoeging, die aan elk punt van het vlak een beeldpunt toewijst. Als we twee isometrieën **s** en **t** bezitten, waarvan we het produkt willen gaan definiëren, dan is dus van elk punt X van het vlak al bekend welke beelden **s** (X) en **t** (X) het heeft.

Kijk om te beginnen maar eens naar figuur 13. We verstaan onder **s** de spiegeling, die a tot as heeft, en onder **t** de spiegeling, die b tot as heeft. De spiegeling **s** wijst aan het punt A het beeldpunt **B** = **s** (A) toe en **t** wijst aan B het beeldpunt C = **t** (B) toe. Heb je geen bezwaren tegen een paar haakjes meer of minder, dan zou je dus kunnen schrijven C = **t** (**s**(A)). En heb je wel bezwaren tegen haakjes, dan moet je maar zeggen: C is het **t**-beeld van het **s**-beeld van A.

Bij de foto

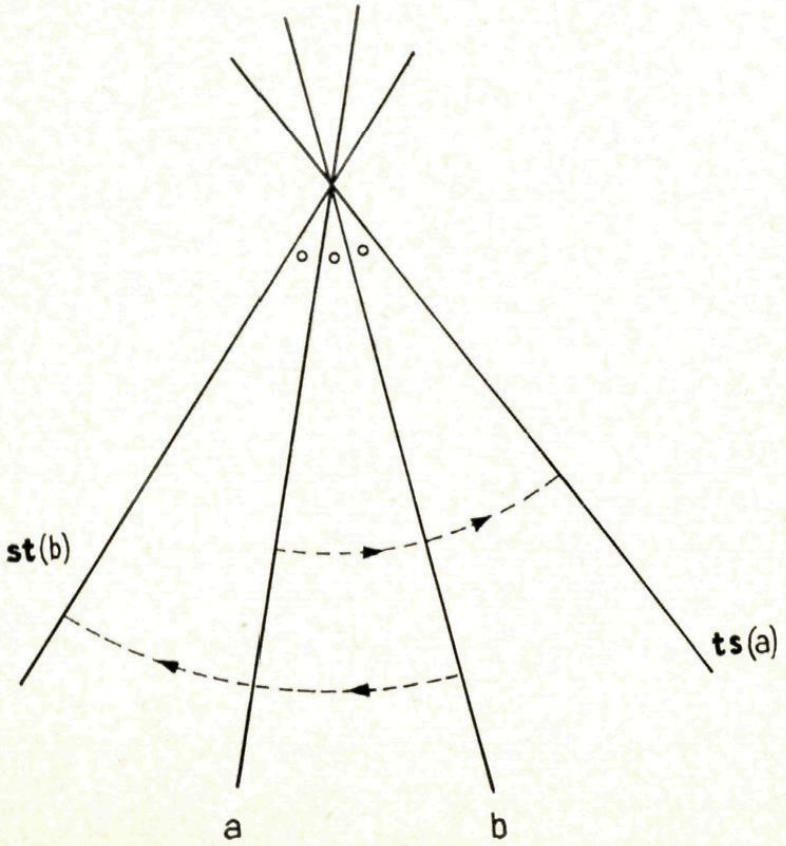
Deze vlakvulling, opgebouwd uit zeesterren, schelpen en slakkenhuisjes, is gemaakt door de Nederlandse kunstenaar M. C. Escher. De asymmetrische bouw van de onderdelen veroorzaakt dat er geen spiegelsymmetrie is, wel is er een viertallige draaias, maar het centrum hiervan ligt niet bij het raakpunt van vier platte schelpen, zoals je misschien eerst dacht.



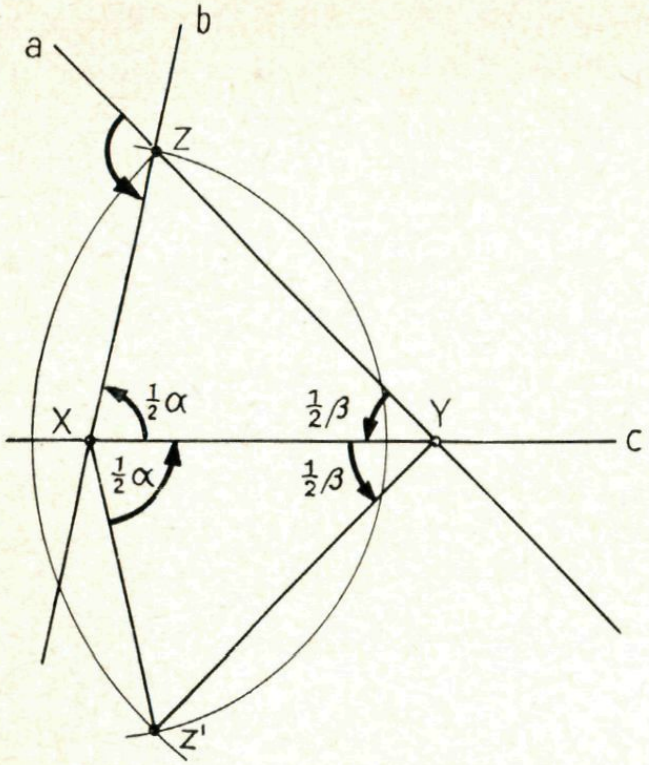
Hetzelfde spelletje is in figuur 13 nog een keer gespeeld. Je ziet, dat D = **t** (A) en E = **s** (D). Dus E is het **s**-beeld van het **t**-beeld van A of E = **s** (**t** (A)).
Na deze uitweidingen kunnen we nu gaan definiëren, wat we zullen verstaan onder de produkten van twee willekeurig gegeven isometrieën **s** en **t**. Er zijn twee van die produkten en het zijn allebei toevoegingen, die aan elk punt van het vlak een beeldpunt toewijzen. Een van hen noemen we **st** en die wijst aan elke X als beeldpunt toe het **s**-beeld van het **t**-beeld van X, dus **s** (**t** (X)). De andere wordt als **ts** aangeduid en die wijst aan elke X als beeldpunt toe het **t**-beeld van het **s**-beeld van X, dus **t** (**s** (X)). Uit fig. 13 blijkt duidelijk dat in het algemeen **st** niet hetzelfde is als **ts**.
En nu kunnen we dan op zoek gaan naar wetmatigheden. De eerste is moeilijk te missen: zowel **st** als **ts** zijn weer isometrieën.
We lichten dat toe voor **st**. Het **st**-beeld van een willekeurige figuur F is volgens de hierboven gegeven definitie niets anders dan het **s**-beeld van het **t**-beeld van F. Omdat **s** een isometrie is, is het **s**-beeld van elke figuur congruent met die figuur zelf. In het bijzonder is het **s**-beeld van het **t**-beeld van F congruent met het **t**-beeld van F. En omdat **t** een isometrie is, is het **t**-beeld van F op zijn beurt weer congruent met F zelf. We kunnen deze redenering samentrekken tot: het **st**-beeld van een willekeurige figuur F is congruent met F. Dat stempelt **st** tot een isometrie.
Ziezo, dat weten we dan. Het vormen van produkten gaat dus niet leiden tot nieuwe en nog onbekende zaken. Het is om het zo maar eens uit te drukken een interne aangelegenheid binnen onze isometrieën-verzameling. We brengen met onze produktenvorming echter wel een structuur binnen die isometrieën-verzameling aan en die zullen we in het vervolg bestuderen.
De tweede wetmatigheid wordt ons door onze glasplaat geleverd. Of we die wel of niet moeten omkeren bij het tot dekking brengen van figuren met hun beelden, dat bepaalt of we met een directe of met een indirecte isometrie te maken hebben.
Zijn **s** en **t** allebei directe isometrieën, dan zijn **st** en **ts** ook allebei directe isometrieën. We tonen dat aan voor **st**: we behoeven de glasplaat niet om te keren voor het tot dekking brengen van een figuur met zijn **t**-beeld (omdat **t** direct is) en ook niet om dat **t**-beeld tot dekking te brengen met het **s**-beeld van dat **t**-beeld (omdat **s** direct is). Samengetrokken: we kunnen elke figuur tot dekking brengen met zijn **st**-

beeld zonder de glasplaat om te keren. Dus is **st** een directe isometrie. Maar ook als **s** en **t** allebei indirecte isometrieën zijn, zijn **st** en **ts** direct. Want als we op weg zijn van een figuur naar zijn uiteindelijke beeld, dan keren we de glasplaat twee keren om en dat heeft hetzelfde resultaat als helemaal niet omkeren.
Als een van de twee isometrieën **s** en **t** direct is en de andere indirect, dan zijn de twee produkten **st** en **ts** allebei indirect. Een keer wel omkeren en een keer niet omkeren staat immers gelijk met wel omkeren.
De opmerking aan het begin van paragraaf 3 begint nu toch wel een beetje reliëf te krijgen. Want onweerstaanbaar dringt zich nu de overeenkomst tussen isometrieën en getallen op. Bij het vermenigvuldigen van getallen is die bewerking ook een interne aangelegenheid binnen de getallenverzameling. En nu blijken de directe en de indirecte isometrieën zich bij hun produktvorming net eender te gedragen als de positieve en negatieve getallen bij de hunne. We kunnen onze verbazing daarover tonen door luid het bekende lied „min maal min is plus" te zingen.
Een concrete toepassing van de gevonden wetmatigheid vinden we allereerst in figuur 13. De spiegelingen **s** en **t** zijn allebei indirecte isometrieën, dus de produkten **st** en **ts** zijn directe isometrieën. Het snijpunt P van de spiegelassen a en b is kennelijk van allebei een dekpunt. Daar trekken we de conclusie uit, dat **st** en **ts** rotaties zijn met P als draaipunt. In figuur 14 wordt je getoond wat het **st**-beeld van b en wat het **ts**-beeld van a is: **st** (b) = **s** (**t** (b)) = **s** (b) en **ts** (a) = **t** (**s** (a)) = **t** (a). Je kunt daar zien, dat **st** en **ts** zijn te beschrijven als rotaties, die allebei een draaihoek hebben die dubbel zo groot is als de hoek tussen a en b, echter met verschillende draairichting.
Voor we nog andere concrete toepassingen gaan bespreken zullen we nog wat aandacht besteden aan die merkwaardige verschillen tussen de produktvorming van isometrieën en van getallen. We hebben duidelijk geconstateerd, dat bij isometrieën de volgorde van de factoren een belangrijke rol speelt en dat is bij getallen niet het geval. Voor elk tweetal getallen s en t geldt st = ts, maar bij isometrieën **s** en **t** is soms **st** $\neq$ **ts**. De vermenigvuldiging van getallen is een *commutatieve* bewerking, maar productvorming van isometrieën is niet-commutatief.
Hoe zou het gesteld zijn met die andere pijler van onze algebraïsche vaardigheid, de *associativiteit*? De vermenigvuldiging van getallen is een associatieve bewerking en dat wil zeggen dat voor elk drietal ge-

tallen s, t, u geldt (st) u = s (tu). Is ook de vermenigvuldiging van isometrieën associatief of krijgen we hier weer een onverwacht verschilpunt met de getallen te zien?
In eerste instantie kunnen we zeggen, dat het **(st)u**-beeld van een punt A is het **st**-beeld van het **u**-beeld van A. Dit kan verder herleid worden tot het **s**-beeld van het **t**-beeld van het **u**-beeld van A. En het **s (tu)**-beeld van A is het **s**-beeld van het **tu**-beeld van A en dat is ook weer gelijk aan het **s**-beeld van het **t**-beeld van het **u**-beeld van A.
De productvorming van isometrieën is dus een associatieve bewerking. We mogen daarom de haakjes in **(st)u** weglaten en schrijven **stu**.
We zullen nu de producten van isometrieën eens gaan inventariseren. In fig. 13 en 14 hebben we gezien dat het product van twee spiegelingen met snijdende spiegelassen, een rotatie is.
Het product van twee spiegelingen met evenwijdige spiegelassen is een translatie. Hetzelfde geldt voor het product van twee schuifspiegelingen. Het is niet moeilijk dit te bewijzen.
Het product van twee rotaties is een rotatie of een translatie.
Als het rotaties met hetzelfde centrum zijn, is het product weer een rotatie, zoals gemakkelijk in te zien is.
Het product van een rotatie **x** met centrum X en draaihoek α en een rotatie **y** met centrum Y en draaihoek β is een rotatie over een



Figuur 14.



Figuur 15.

hoek $\alpha + \beta$, behalve als $\alpha + \beta = 360°$, dan is het een translatie. Om dit in te zien herinneren we er aan dat het product van twee directe isometrieën, weer een directe isometrie is. Als $\alpha + \beta \neq 360°$, dan is er een punt Z, dat bij de rotatie **y** overgaat in Z', terwijl Z' bij de draaiing **x** weer overgaat in Z. De constructie van Z is in fig. 15 te zien. Z is dus dekpunt van **xy**, zodat **xy** een rotatie is.
Als $\alpha + \beta = 360°$, dan bestaat het punt Z niet, zodat **xy** een translatie is.
Tenslotte vermelden we nog dat het product van twee translaties weer een translatie is.

6. *Groepen*

We hebben in de loop van ons betoog weer een punt bereikt, waar de bomen ons niet beletten het bos te zien. Evenals in paragraaf 2 willen we ook nu weer onze aandacht eens van de details afkeren en in plaats daarvan richten op de algemene karaktertrekken van wat we tot stand gebracht hebben.
We hebben een verzameling van wiskundige objecten gemaakt. Die objecten of elementen zijn isometrieën, maar daar willen we nu geen aandacht aan schenken. Zij zijn immers de bomen en de verzameling van bomen is het bos.
In die verzameling hebben we een bewerking aan het werk gezet. We

hebben die bewerking het vormen van produkten genoemd, maar dat was alleen maar om er gemakkelijk over te kunnen spreken. Wel is essentieel, dat die bewerking een interne aangelegenheid van onze verzameling was; hij leverde ons nooit objecten op, die zich niet al in onze verzameling bevonden.
Die bewerking bleek associatief te zijn, maar niet commutatief.
Ten aanzien van de bewerking nam één van de objecten een merkwaardig neutrale positie in, namelijk de identieke isometrie. Lieten we die aan de bewerking deelnemen, dan had dat geen enkel resultaat: **is** = **si** = **s** voor elke **s** in onze collectie isometrieën.
Tenslotte liet elk element van onze verzameling zich dank zij die bewerking neutraliseren. Bij elke **s** was een zogenaamd invers element **t** te vinden, zodat **st** = **ts** = **i**. Wij hebben hier niet zo scherp op gelet, omdat het in de loop van onze overwegingen zo vanzelfsprekend was. Maar wij stellen nu gemakkelijk vast: het inverse element van een rotatie met A als centrum en α als draaihoek is een rotatie met hetzelfde centrum en 360°-α als draaihoek, het inverse element van een translatie is een translatie over dezelfde afstand in tegengestelde richting, het inverse element van een spiegeling is die spiegeling zelf, het inverse element van een schuifspiegeling is een schuifspiegeling met dezelfde as en tegengestelde translatie-component.
De combinatie van een verzameling en een daarin gedefinieerde interne bewerking heet een *groep*, indien 1° die bewerking associatief is, 2° de verzameling een neutraal element bevat ten aanzien van die bewerking en 3° elk element van de verzameling een invers element heeft.
In paragraaf 5 hebben we gesteld, dat de bewerking van het vormen van produkten een structuur zou geven aan de verzameling van isometrieën. Nu hebben we die structuur dus een naam gegeven: de groepsstructuur.
En, nu je toch aan het terugbladeren bent: aan het eind van paragraaf 4 staat een opmerking die je wellicht de verwachting zou kunnen geven dat we nu niet zullen rusten voor we alle groepen, die er zijn, opgespoord hebben. Die verwachting zal niet vervuld worden, we kunnen er doodgewoon niet aan beginnen alle groepen op te sporen. Daarvoor is het begrip groep te algemeen (je mag ook zeggen: te abstract). Wel willen we een enkel voorbeeld geven, na de opmerking gemaakt te hebben dat de groepentheorie een zeer uitgebreid onderwerp van de moderne wiskunde is met vele en vaak zeer onverwachte toepassingen (tot in de kernfysica toe).

Het eerste voorbeeld betreft de verzameling van de positieve getallen met de „gewone" vermenigvuldiging als bewerking. Deze bewerking is inderdaad een interne bewerking, want het produkt van twee positieve getallen is altijd weer een positief getal. Die bewerking is, we wisten dat al, associatief. Het neutrale element in de verzameling ten aanzien van deze bewerking is het getal 1: $1.a = a.1 = a$ voor elke a. Elk getal heeft ten aanzien van de vermenigvuldiging een invers element: aan $a.b = b.a = 1$ wordt voldaan door $b = \frac{1}{a}$.

Het tweede voorbeeld betreft de verzameling van alle getallen met de interne bewerking optellen. Deze bewerking is associatief: $(a + b) + c = a + (b + c)$ voor elk drietal a, b, c. Het neutrale element is ten aanzien van deze bewerking het getal 0, want $0 + a = a + 0 = a$ voor elke a. En elk getal a bezit als invers element ten aanzien van deze bewerking zijn tegengestelde -a, want $a + (-a) = (-a) + a = 0$ voor elke a.
Met deze voorbeelden uit de algebra willen we volstaan, omdat ze ons afleiden van het hoofdthema: de groepen van isometrieën.
De verzameling van *alle* isometrieën met de bewerking van het vormen van produkten is een groep. Er zijn echter ook groepen isometrieën, die niet de hele collectie omvatten. We noemen dit ondergroepen. Laat bijvoorbeeld F een willekeurige gegeven figuur in het vlak zijn. We beschouwen nu alle isometrieën **x**, die voldoen aan **x** (F) = F; dit zijn dus de isometrieën, waarvan F een dekfiguur is. Deze isometrieën vormen een groep, die we een ondergroep kunnen noemen van de door *alle* isometrieën gevormde groep (de interne bewerking bij de ondergroep is dezelfde als bij de „grote" groep).
Om deze stelling te bewijzen, moeten we eerst aantonen dat de produktvorming ook in deze kleinere collectie isometrieën een interne bewerking is. Welnu, als **a** en **b** allebei F tot dekfiguur hebben, dan hebben **ab** en **ba** ook F tot dekfiguur, want **ab** (F) = **a** (**b** (F)) = **a** (F) = = F en voor **ba** geldt iets soortgelijks.
Over de associativiteit van de bewerking behoeven we ons geen zorgen te maken, want deze is in de „grote" groep al gewaarborgd.
Verder bevat onze deelcollectie zeker de identieke isometrie **i** omdat **i** (F) = F stellig waar is.
Tenslotte hebben we met elke isometrie van onze verzameling ook de inverse isometrie te pakken. Als immers **a** een isometrie is, die F tot

dekfiguur heeft, en **b** de inverse van **a** is, dan kunnen we de gegevens **a** (F) = F en **ba** = **i** combineren tot **b** (F) = **b** (**a** (F)) = **ba** (F) = **i** (F) = F. Daar is dan uit te zien, dat F ook van **b** een dekfiguur is.
We noemen de zo geconstrueerde groep isometrieën de *symmetriegroep van F*, omdat hij alle symmetrie-eigenschappen van F tot uitdrukking brengt. In bijzondere gevallen kan hij uit slechts één enkel element bestaan: de identieke isometrie. De figuur F heet dan asymmetrisch en zijn symmetriegroep is dan meteen het kleinste groepje, dat er bestaat.

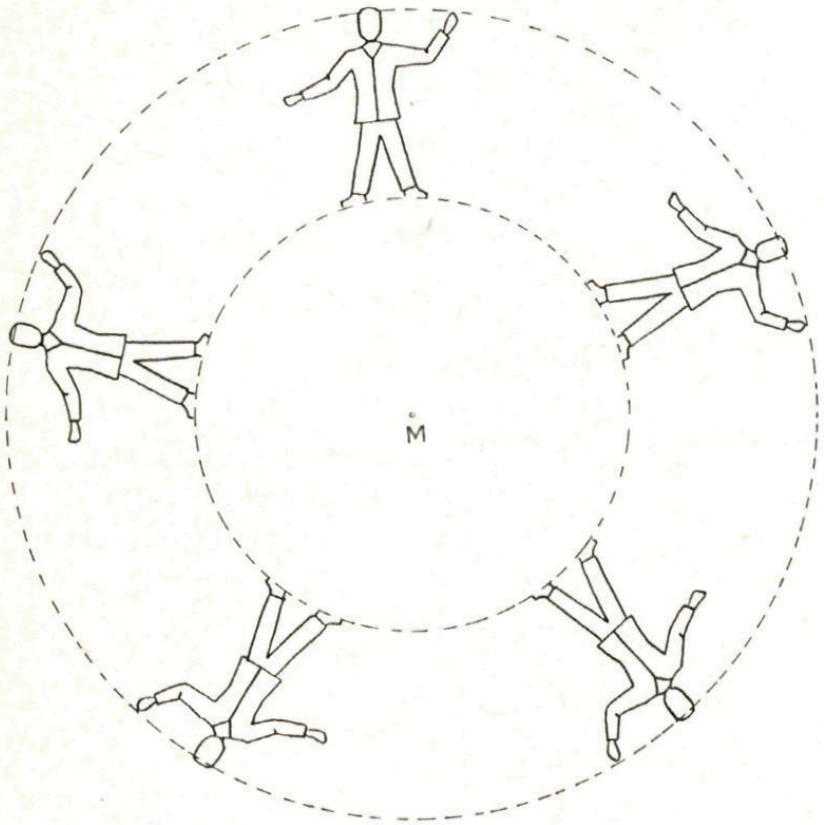
Bij de foto:
Een vlakvulling van Escher met identieke hagedissen . De eindpunten der „linkerarmen" zijn zestallige rotatiepunten. Evenals de plaat op blz. 109 *is deze vlakvulling in werkelijkheid gekleurd, en daardoor nog aanmerkelijk mooier. Ze komen voor in het boek „Symmetry aspects of M. C. Escher's periodic drawings" van Professor Caroline H. MacGillavry.*

---

7. *Isometriegroepen zonder translaties*

De zeer abstracte verhandelingen van de vorige paragraaf zullen je niet gemakkelijk gevallen zijn. In deze nieuwe pargraaf tref je echter een aantal toepassingen aan van de daar gehanteerde begrippen, die tot gemakkelijk voorstelbare situaties leiden. De translatievrije isometriegroepen zijn namelijk zeer overzichtelijk. Dat komt in de eerste plaats doordat zo'n groep meteen ook geen enkele schuifspiegeling kan bevatten. De aanwezigheid van een schuifspiegeling **s** in een groep leidt namelijk onmiddellijk tot de aanwezigheid van **ss** in diezelfde groep en dat is immers een translatie!
Bovendien echter vormen de rotaties in een dergelijke translatievrije groep een overzichtelijk geheel: ze hebben allemaal hetzelfde centrum.
We bewijzen namelijk dat een groep **G**, die twee rotaties **r** en **s** met verschillende centra bevat, automatisch ook een translatie bevat. Dit is duidelijk voor het geval dat de draaihoeken α en β samen 360° zijn, want dan is meteen **rs** al een translatie. We veronderstellen dus, dat $\alpha + \beta \neq 360°$ is. In onze groep **G** komen nu ook **x** = **rs** en **y** = **sr** voor. Dit zijn allebei rotaties met $\alpha + \beta$ als draaihoek en ook weer met verschillende centra. Bovendien bevat **G** met **y** ook zijn inverse **z** en dat is een rotatie over $360° - (\alpha + \beta)$ om hetzelfde centrum als **y**. Tenslotte volgt uit de aanwezigheid in **G** van **x** en **z**, dat ook **xz** tot **G** behoort. Deze **xz** is de boosdoener in het verhaal, want als produkt van twee rotaties met verschillende centra en met draaihoeken, die samen 360° zijn, is hij een translatie.

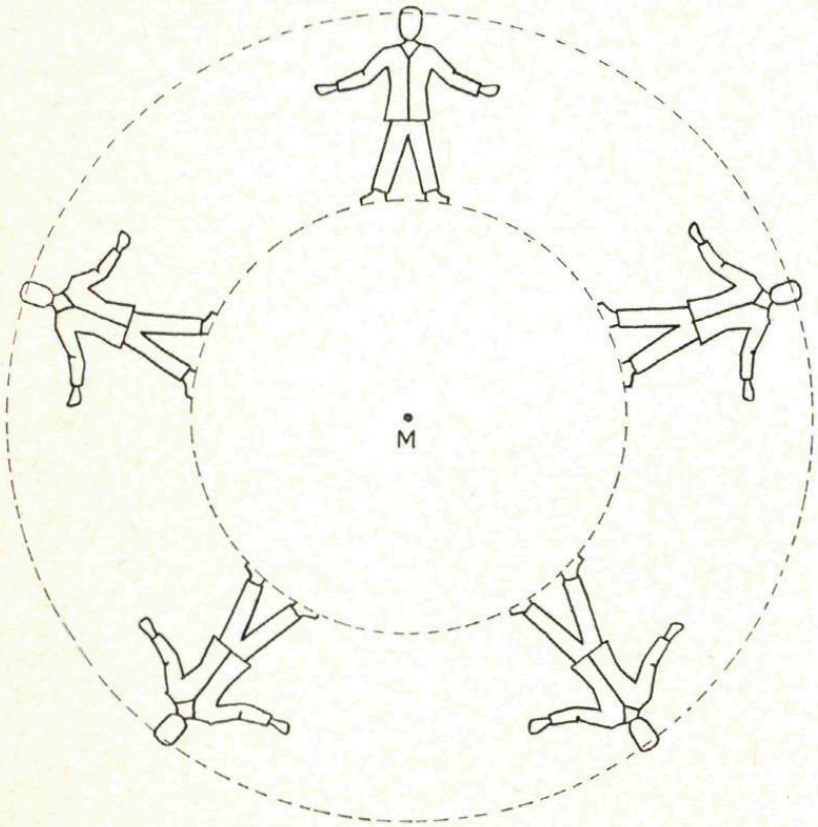
De spiegelingen in een translatievrije isometriegroep dragen tenslotte ook nog hun steentje bij tot de overzichtelijkheid: hun spiegelassen gaan allemaal door het gemeenschappelijke centrum van alle rotaties in die groep. Was dat niet het geval, dan zou zo'n spiegeling met een rotatie uit de groep immers een schuifspiegeling tot produkt hebben en we zagen al eerder, dat die in een translatievrije groep niet voor kan komen.



Figuur 16.

Het voorgaande kunnen we als volgt samenvatten: elke translatievrije isometriegroep is ondergroep van de symmetrie-groep van een cirkel. Een cirkel, die als middelpunt bezit het gemeenschappelijke centrum van alle rotaties in de groep en het punt waar alle spiegelassen doorheen gaan, heeft zichzelf namelijk tot beeld bij elke in de groep voorkomende isometrie.
Nu kunnen we er niet aan denken *alle* ondergroepen van de symmetrie- groep van een cirkel op te sporen. We moeten onszelf noodgedwongen een fikse beperking opleggen. We bepalen ons tot die groepen, die slechts eindig veel elementen bezitten. En in eerste instantie willen we daar dan nog niet eens spiegelingen bij hebben, alleen maar rotaties. (en natuurlijk **i**).
Stel je nu eens voor, dat we een dergelijke eindige groep rotaties bezitten en dat we de rotatie met de kleinste positieve draaihoek van die groep **a** noemen (waarbij we die draaihoeken tussen 0° en 360° laten liggen). Onze groep bevat dan ook de rotaties **aa**, **aaa**, . . .; we zullen die rotaties aanduiden als $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{a}^3$, . . . En nu kunnen we bewijzen, dat er in onze groep geen andere rotaties aanwezig zijn dan deze.
Noem namelijk het centrum van al die rotaties van de groep M en kies in het vlak verder nog een van M verschillend punt P. Construeer daarna de rij punten **a** (P), $\mathbf{a}^2$ (P), $\mathbf{a}^3$ (P), . . . Deze liggen allemaal op de cirkel door P, die M tot middelpunt heeft. Terwijl we die rij punten maken, zijn we als het ware bezig tegen de klok in langs die cirkel voort te stappen met passen van een bepaalde constante grootte.

Nu kunnen er daarbij twee dingen gebeuren: of we komen na een aantal passen weer in het beginpunt P terug of we stappen over P heen en komen neer in een punt, dat tussen P en **a** (P) in ligt.
Dat laatste echter blijkt bij nader inzien onmogelijk te zijn, omdat de rotatie die ons in dat punt tussen P en **a** (P) zou doen terechtkomen een kleinere draaihoek zou hebben dan **a** en **a** was immers de rotatie met de kleinste draaihoek.
Er rest ons dus alleen die andere mogelijkheid. En die houdt in, dat de draaihoek van **a** een geheel aantal malen op 360° begrepen is. Noemen we dat aantal malen n, dan is die draaihoek dus $\frac{360°}{n}$. We hebben dan in onze groep de rotaties **a**, $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{a}^3$, . . ., $\mathbf{a}^{n-1}$ en $\mathbf{a}^n = \mathbf{i}$.
Zou onze groep nog een andere rotatie **x** bevatten, die niet tot deze rij behoort, dan zou **x** (P) bijvoorbeeld tussen $\mathbf{a}^3$ (P) en $\mathbf{a}^4$ (P) moeten liggen, wat weer inhoudt dat de groep een rotatie moest bevatten met een kleinere draaihoek dan **a** zelf heeft, namelijk het produkt van **x** met de inverse rotatie van $\mathbf{a}^3$, en dat kan immers niet.
Zo hebben we dan meteen ons een beeld gevormd van een dergelijke translatievrije en spiegelingsvrije rotatiegroep met eindig veel elementen. We zouden zo'n groep de draaigroep van een regelmatige n-hoek kunnen noemen. Figuur 16 tracht de bouw van zo een groep nog wat te verduidelijken. Je bijzondere aandacht wordt gevraagd voor de handstanden van de poppetjes; met behulp daarvan is bereikt dat de figuur wel zijn eigen beeld is bij de rotaties over een veelvoud van 72°, maar dat er geen enkele spiegeling is die de figuur met zichzelf tot dekking brengt.



Figuur 17.

We hebben al eerder vastgesteld, dat de translatievrije isometriegroepen geen schuifspiegelingen kunnen bevatten. Maar spiegelingen kunnen in een dergelijke groep wel voorkomen; ze hebben dan spiegelassen door het gemeenschappelijke centrum M van alle rotaties van de groep.

Laat nu **s** zulk een spiegeling zijn en laat de groep de rotaties $\mathbf{a}, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \ldots, \mathbf{a}^n = \mathbf{i}$ bevatten. Dan moeten in de groep ook de isometrieën $\mathbf{as}, \mathbf{a}^2\mathbf{s}, \ldots, \mathbf{a}^{n-1}\mathbf{s}$ voorkomen. Dit zijn zelf ook allemaal spiegelingen. Hun spiegelassen zijn niet moeilijk te bepalen, als de spiegelas van **s** bekend is. Ze vormen een stelsel van n rechten door M, waarvan elke twee opvolgende een hoek van $\frac{180°}{n}$ insluiten. Dit zijn tevens alle spiegelingen die de groep bevat.

In het bijzonder betekent dit, dat de spiegelingen $\mathbf{sa}, \mathbf{sa}^2, \ldots$ onder de spiegelingen $\mathbf{as}, \mathbf{a}^2\mathbf{s}, \ldots$ moeten voorkomen.
Figuur 17 toont de bouw van een groep met rotaties en spiegelingen voor het geval $n = 5$. De handstanden van de poppetjes zijn nu anders dan in figuur 16. De „stralen" van de figuur zijn de vijf spiegelassen. De afgebeelde groep is natuurlijk niets anders dan de symmetriegroep van een regelmatige vijfhoek.
Hiermee hebben we dan alle eindige translatievrije groepen gevonden. Elk van hen is of de draaigroep of de symmetriegroep van een regelmatige n-hoek.

8. *Besluit*

In het bestek van dit tijdschrift kunnen we geen behandeling van de isometriegroepen, die translaties bevatten, geven. Enerzijds is dit wel jammer, omdat hier nu juist de stof boeiend begint te worden door zijn verband met de kunstzinnige uitingen van allerlei volkeren in allerlei tijdperken. Anderzijds hopen we nu voldoende materiaal bij elkaar gebracht te hebben om de lezer, die meer wil weten, in staat te stellen zelf op onderzoek uit te gaan. Zulk een onderzoek zou in de komende vakantietijd bijvoorbeeld kunnen leiden tot een bezoek aan het Alhambra, bij Granada in Spanje. Daar treft men aan de wanden een rijkdom aan ornamenten aan, die opgebouwd zijn uit streng-meetkundige vormen. Zij stammen uit de Moorse periode. Zij hebben dat meetkundige karakter omdat de godsdienst van de Mooren toepassing van afbeeldingen van mensen en dieren in de kunst verbood. Met elk van die ornamenten zou men, door een eindeloze herhaling, een geheel vlak kunnen vullen. Het is een boeiende en ietwat adembenemende bezigheid van een zo gevormde vlakvulling de symmetriegroep te zoeken. En niet alleen de fraaie verbinding van de kunstzinnige vormgeving met de meetkundige regelmaat wekt onze bewondering. Deze wordt minstens zo sterk opgeroepen, wanneer we ervaren dat wiskundigen uit later tijden aantoonden, dat de Mooren in het Alhambra *alle* mogelijke isometriegroepen vastlegden, die symmetriegroepen zijn van een vlakvulling met ornamenten.

Associatief Lat. *ad* = aan *socius* = deelgenoot. Een bewerking o is associatief als a o (b o c) = (a o b) o c.

Commutatief Lat. *Commutare* = verwisselen. Een bewerking o is commutatief als a o b = b o a.

Isometrie Grieks *iso* = gelijk *metrein* = meten.

Rotatie Lat. *rotare* = omdraaien, *rota* = wiel.

Symmetrie Grieks *sym* = samen.

Translatie Lat. verplaatsing. De Nederlandse term is verschuiving.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Markt 34, Oudenbosch.
Drs. A.B. OOSTEN, Turftorenstraat 11A, Groningen.
A.F.VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.
Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden.
Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.
Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, *f* 2,50 per jaargang. Voor anderen *f* 4,—.
Abonnementen kan men opgeven bij J.B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.