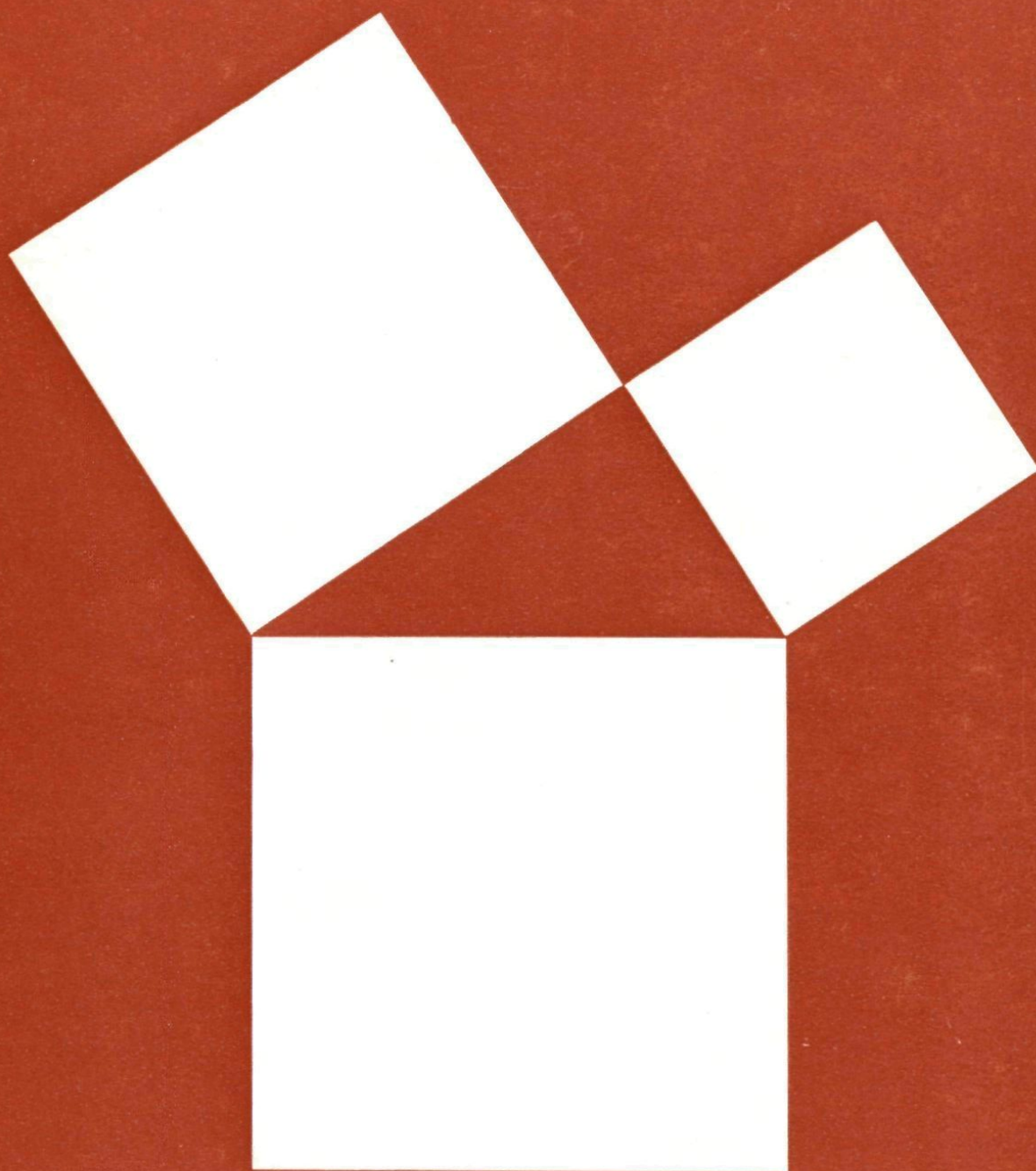


PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

6

Zesde jaargang
1966/1967



Sine sole sileo

„Zonder zon zwijg ik” of vrij vertaald: als de zon niet schijnt kan ik niet vertellen hoe laat het is. Deze grappige spreuk staat op verscheidene oude zonnewijzers. Op de volkssterrenwacht te Oudenbosch is ook een horizontale zonnewijzer die deze spreuk draagt, maar daar is de zaak nog grappiger: op twee torens aan weerszijden van de volkssterrenwacht staan enorme torenuurwerken, en de bezoekers kijken (als de zon schijnt) niet op de zonnewijzer hoe laat het is. Ze controleren alleen gauw „of de zonnewijzer het doet”, dwz. of deze dezelfde tijd aangeeft als de torenuurwerken. We vertrouwen meer op onze kunstmatige uurwerken dan op de stand van de zon, die eigenlijk de basis is van al onze tijdsaanduidingen.

Hiernaast zie je een zgn. equatoriale zonnewijzer. Hoewel die niet het gemakkelijkst te vervaardigen is (ofschoon het nog wel mee valt) is hij toch het eenvoudigste uitgangspunt om de andere typen zonnewijzers te begrijpen. De pijl (de zgn. stijl van de zonnewijzer) wijst naar de hemelpool en loopt dus evenwijdig aan de aardas. Omdat de afstand aarde-zon zo ontzaglijk veel groter is dan de afstand zonnewijzer-middelpunt aarde, kunnen we de stijl samenvallend met de aardas denken. De zon draait in precies 24 uur om de aardas (dit is de definitie van 24 uur!). De schaduw van de stijl zal dus ook in 24 uur eenmaal over de equatorband (de witte band met de uurnummers erop) lopen: als we de band in 24 gelijke stukken verdelen kunnen we de uurnummers aanbrengen en zelfs onderverdelingen in minuten maken. Met minimaal twee (voor de stevigheid liefst 3) gelijke hoepels en een stijl kun je nu zelf zo'n equatoriale zonnewijzer maken. Bij de opstelling moet de stijl naar de hemelpool gericht staan, en dat is iets waartegen nogal eens gezondigd wordt door amateur-fabrikanten van een tuinzonnewijzer. De stijl maakt een hoek met het horizontale vlak die gelijk is aan de geografische breedte van de standplaats (in Nederland dus ca 52°) en verder moet de stijl zuiver in het noord-zuidvlak staan. Eenvoudiger van constructie zijn de verticale en horizontale zonne-

wijzers. De foto op blz. 123 laat er zo een zien aan de muur van de Ned. hervormde kerk in Enschede. We hebben hier te maken met een stijl die weer in de richting van de hemelpool wijst en met een horizontaal of vertikaal geplaatste plaat waarop de uren en onderverdelingen daarvan zijn aangegeven.

Maak van drie stukken karton de vlakkenwaaier uit figuur 1. Steek er een breinaald door zodat $\angle A = 52^\circ$, V is het verticale vlak, H het horizontale en E het equatoriale. De breinaald moet ook loodrecht op E staan.

We hebben nu het schema van de equatoriale, de verticale en de horizontale zonnewijzer bij elkaar en kunnen ook gemakkelijk de uurlijnen in het horizontale en verticale vlak tekenen.

In E tekenen we $PK \perp l$, de snijlijnen der drie vlakken. Daarna tekenen we de uurlijnen die hoeken van 15° met elkaar maken. Deze uurlijnen snijden l in K, L, M, N etc. Nu kunnen we vanuit A en B lijnen trekken naar K, L, etc.

Deze wijze van doen is wel inzichtelijk, maar toch primitief.

We zouden de punten K, L, M, etc. ook gevonden hebben als de afstanden PK en KB bekend waren. PK kiezen we zelf en daarmee construeren we (of berekenen we goniometrisch) BK. De constructie verloopt dan zoals aangegeven in figuur 3: Teken PK en KB in elkaars

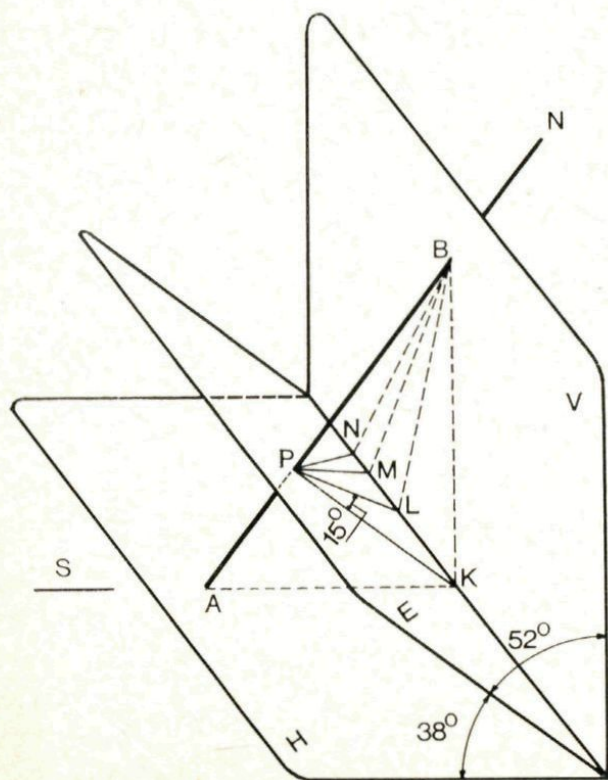


Fig. 1

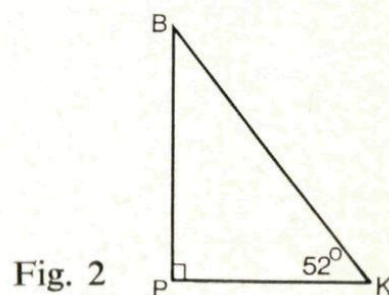


Fig. 2

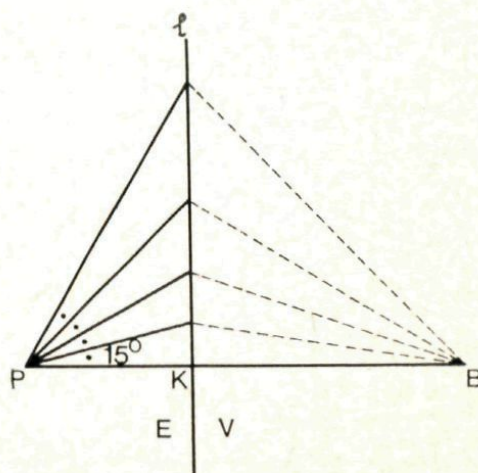
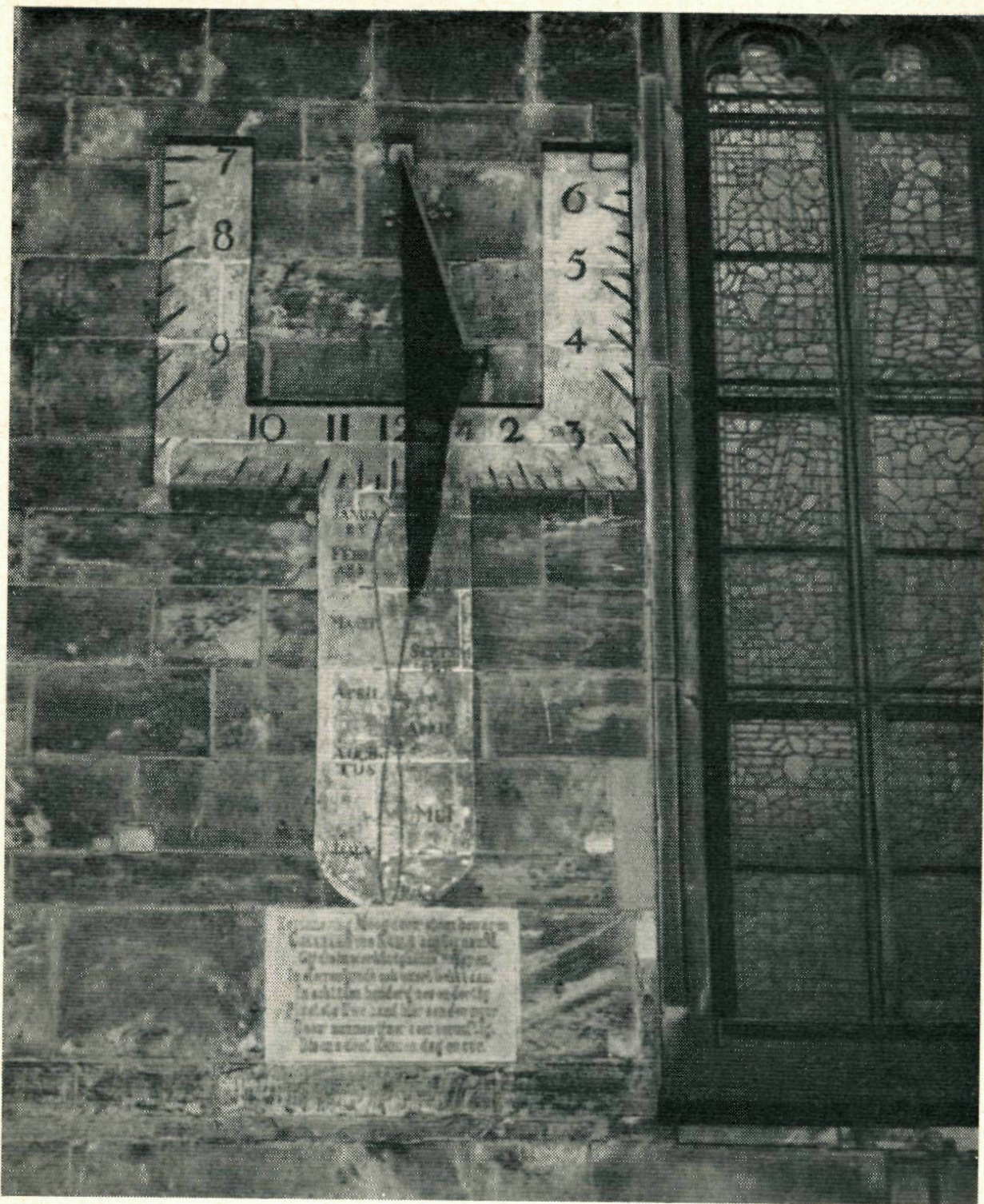


Fig. 3



verlengde. In K de loodlijn l op PB. Construeer rond P hoeken van $15^\circ \dots$ etc.

Het wordt als probleem natuurlijk interessanter als het verticale vlak niet precies oost-west gericht is (wat bij kerken nogal eens voorkomt).

Ook dan gaat de constructie volgens het hierboven beschreven principe. Het algemene geval: een willekeurig geörienteerd vlak als drager van de uurlijnen, is op dezelfde eenvoudige manier te tekenen. Puzzel daar zelf maar eens aan.

Geeft zo'n zonnewijzer nu de „juiste tijd”?

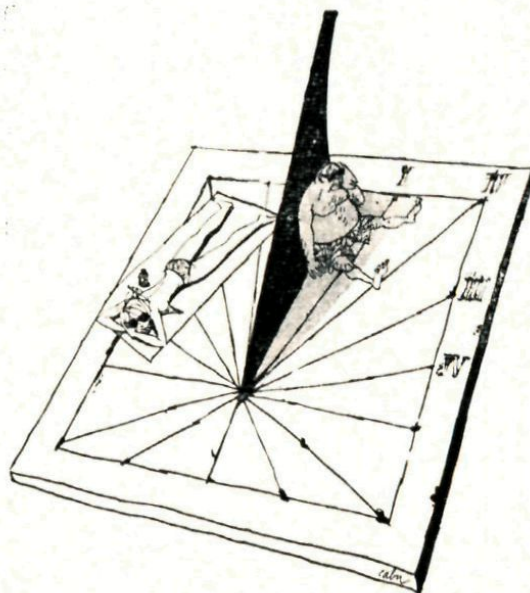
Wat is de juiste tijd?

Als je daarmee bedoelt de tijd die je polshorloge of de klok op het station aangeeft, dan geeft de zonnewijzer niet de juiste tijd. Dit komt omdat wij in een groot deel van Europa de zgn. middeneuropese tijd aanhouden: de tijd die eigenlijk alleen maar geldt voor plaatsen liggend op 15° oosterlengte.

Verder loopt de zon iets voor, soms iets achter, omdat de aarde niet in een cirkel baan maar in een ellipsvormige om de zon loopt en bovendien loopt de aarde sneller als ze dichterbij de zon komt.

Het is niet moeilijk om uit de tijdaanwijzing van de zonnewijzer (waarvan je altijd vol kunt houden, dat dat de échte tijd is) de burgerlijke tijd (van onze klokken) te berekenen. Het recept is als volgt:

Trek van de zonnewijzertijd zoveel maal 4 minuten af als je graden westelijk van 15° oosterlengte woont. Daarna zouden we nog de correctie voor het voor- of achterlopen van de zon moeten toepassen. Hiervoor is een grafiekje nodig (zie de lus op de foto!) of een tabelletje. Deze correcties zijn echter veel geringer dan die we hierboven voor onze geografische lengte hebben toegepast.



Even afrekenen

Dit is dan alweer het laatste nummer, zodat het tijd wordt even af te rekenen.

De lootprijs voor de Denkertjes in nummer 3 is voor Arnold Verschuren, Waalwijk. Voor de Denkertjes in nummer 4 gaat hij naar Frans van Diemen, Nieuwkoop.

De ladderwedstrijd heeft als top-tien opgeleverd:

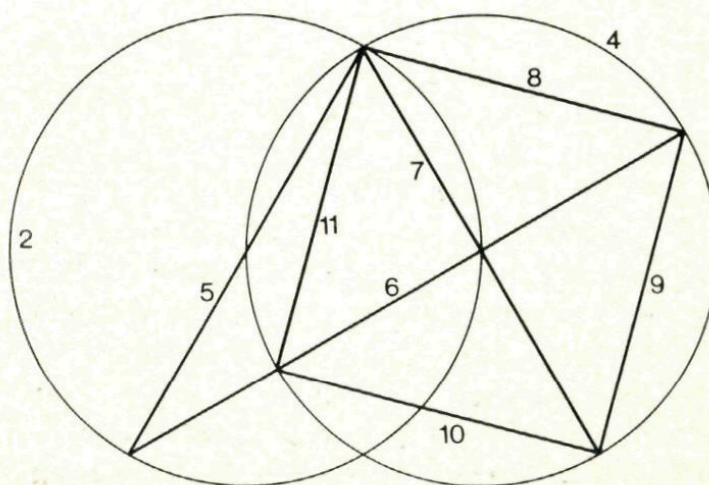
Frans van Diemen, Nieuwkoop, 358 punten, Ger Austen, Heerlen, 356 punten, Domien Beersma, Haren, 351 punten, Guus Jan Westra, Eindhoven, 335 punten, Harry Otten, Breda, 325 punten, Gerard Koolstra, Baarn, 309 punten, Gerrit Kuiper, Eefde, 306 punten, Henri Jansen, Zutphen, 301 punten, Peter Abeln, Enschede, 300 punten.

Dan de wedstrijd „Wees zuinig en win een prijs”.

Blijkens de inzendingen heeft men hier veel genoeg aan beleefd. Hoewel de prijzen alleen door leerlingen gewonnen konden worden, die vlakke meetkunde als vak op school hebben, hebben ook vele leerlingen uit hogere klassen oplossingen ingestuurd. Gewoon omdat ze het leuk vonden. Dat men inderdaad zuinig te werk ging moge blijken uit het feit dat er drie opgaven waren waarvoor een zuiniger oplossing gevonden is dan de onze. We laten deze oplossingen nog even volgen.

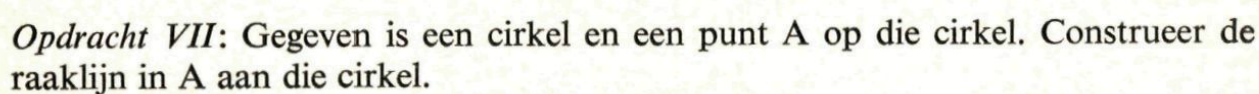
Opdracht IV: Construeer een vierkant.

Laagste score 11 punten.



Opdracht VI: Construeer een regelmatige zeshoek.

Laagste score 11 punten, afkomstig van Martin Zwollo, Amstelveen.



Laagste score 5 punten, afkomstig van Hein Koops, Rotterdam.



Two eerste prijzen: Kees Bakker, Alkmaar, Arjin Vette, Oosterbeek.

Two tweede prijzen: Lou van den Dries, Ens, Clemens Dirks, Leiden.

Tien derde prijzen: Marieke Dorrepaal, Eindhoven, A. E. H. Hoekstra, Naarden, Mt. v. d. Hoven, Hilversum, Bart Koppenberg, Rotterdam, S. Kranenborg, Bussum, Bram Kruit, Purmerend, Janine Lindner, Den Haag, Hans Maier, Amsterdam, Han de Neeling, Eefde, Occo Rolf, Schoorl.

Tien vierde prijzen: Jaap Bakker, Geleen, Ludi Boelen, Amsterdam, Grada Fokkens, Gouda, Heiko Heikens, Groningen, Cor Hendriks, Wateringen, Aat Nouwen, Heiloo, Jan Sirks, Huizen, Ad Somers, Tilburg, Robert Steffelaar, Haarlem, Jaap Wielinga, Kollumerpomp.



De oplossingen van deze Denkertjes kunnen niet worden ingezonden. Men vindt ze elders in dit nummer. Deze drie opgaven zijn ontleend aan de proefopgaven van de Wiskunde Olympiade Nederland 1967.

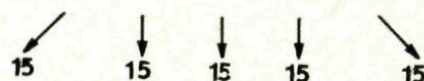
1. Binnen een cirkel met een straal van 15 wil men zeven gelijke kleine cirkels tekenen, die elkaar niet snijden. Hoe groot kan de straal van die kleine cirkels ten hoogste zijn?
2. Hoeveel vergelijkingen van de vorm $x^2 + px + q = 0$, waarin p en q natuurlijke getallen zijn, die ten hoogste gelijk zijn aan 20, hebben twee verschillende wortels?
3. Ontwikkelt men $(x^2 - 2x + 2)^{11}$, dan ontstaat er een veelterm met 23 termen. Bereken de som van de coëfficiënten van die veelterm.

°Magische vierkanten

Een magisch vierkant of tovervierkant bestaat uit een aantal getallen, die in de vorm van een vierkant zijn gerangschikt, zodanig dat de som van de getallen in iedere horizontale, verticale en diagonale rij een bepaald constant getal is.

4	9	2	→ 15
3	5	7	→ 15
8	1	6	→ 15

Fig. 5



In vervlogen eeuwen werd een dergelijk vierkant, gegraveerd op een zilveren plaat, geacht tegen allerlei plagen te beschermen. Het is niet duidelijk waaraan ze deze eer te danken hadden, maar waarschijnlijk zal het er wel mee te maken hebben dat een magisch vierkant iets volmaakts en onaantastbaars over zich heeft.

Een uitvinder is niet bekend, maar leefde in elk geval voor het begin van onze jaartelling. Hun intree in Europa deden de magische vierkanten waarschijnlijk in het begin van de vijftiende eeuw.

Op een beroemde gravure van Albrecht Dürer, de „Melancholie”, komt het volgende vierkant voor.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

De getallen 15 en 14 zijn zo geplaatst dat ze het jaartal aanduiden, waarin de gravure gemaakt werd. Het getal 34 kan op talloze manieren als som van vier getallen tevoorschijn worden gebracht.

Vanzelfsprekend kan men magische vierkanten maken met willekeurige getallen. De meeste aandacht is echter steeds uitgegaan naar die vierkanten van $n \times n$ getallen, waarin de getallen 1 tot en met n^2 voorkomen.

Het vierkant van fig. 5 voldoet hieraan. Het bevat de eerste 9 natuurlijke getallen. De totale som

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

zodat de constante som van elke rij 15 moet zijn. 45 moet immers worden verdeeld over 3 rijen.

Eigenlijk is er maar één vierkant van de derde orde, zoals in fig. 5. Er zijn namelijk maar 8 mogelijkheden om met drie van de getallen 1 t/m 9 de som 15 te vormen:

1,5,9 1,6,8 2,4,9 2,5,8 2,6,7 3,4,8 3,5,7 en 4,5,6

Hierbij komt 5 viermaal voor, 2,4,6 en 8 driemaal, 1,3,7 en 9 tweemaal. Dit betekent dat 5 in het midden moet, 2,4,6 en 8 op de hoeken en de andere ertussen.

Dit kan op acht verschillende manieren, maar alle vierkanten ontstaan uit dat van fig. 5 door draaiing of spiegeling ten opzichte van het midden, zodat ze niet wezenlijk anders zijn.

Bij vierkanten van de vierde orde wordt het direct veel ingewikkelder: er zijn 880 wezenlijk verschillende, dus afgezien van draaiingen en spiegelingen. De Fransman Frénicle de Bessy heeft ze alle 880 gemaakt. Ze zijn na zijn dood gepubliceerd, in 1693. Bij vijfde orde vierkanten loopt het in de miljoenen. Het juiste aantal is niet bekend, omdat er geen methode bekend is waarmee ze allemaal geconstrueerd zouden kunnen worden.

Er zijn wel talloze constructiemethoden bekend waarmee een aantal vierkanten gevonden kan worden. Eigenlijk zijn dit meer voorschriften: Als je het zo doet, dan klopt het. Waarom het dan klopt is wel uit te vinden, maar ten koste van zeer veel moeite. Voor de constructie wordt onderscheid gemaakt tussen vierkanten van oneven orde, van enkelvoudige even orde (6,10,14 . . .) en van dubbel-even orde (4,8,12 . . .).

De meeste methoden zijn voor de oneven orden bekend. Eén ervan, meegebracht door de gezant van Lodewijk XIV uit Siam, in 1693, wordt gebruikt in het artikel „Blokschema's voor Computerprogramma's.” (blz. 131).

Een enkelvoudig even vierkant is te verdelen in vier oneven vierkanten. B.v. voor een 6×6 vierkant:

In A kan het vierkant van fig. 5 geplaatst worden. In B, C en D wordt hetzelfde vierkant geplaatst, maar met verhoging van de getallen met achtereenvolgens 9, 18 en 27. Zo ontstaat fig. 7.

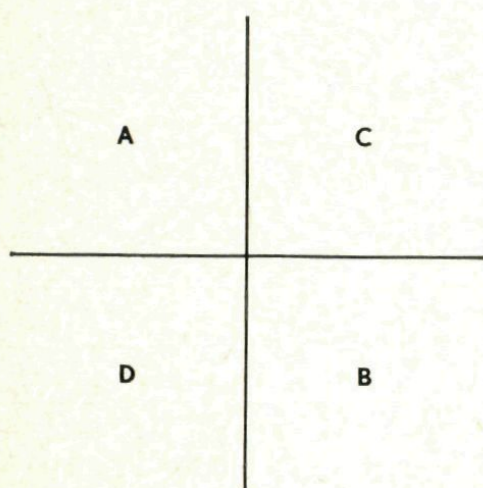


Fig. 6

4	9	2	22	27	20
3	5	7	21	23	25
8	1	6	26	19	24
31	36	29	13	18	11
30	32	34	12	14	16
35	28	33	17	10	15

Fig. 7

Nu moeten nog de getallen 4, 5 en 8 geruild worden met 31, 32 en 35 en het vierkant is klaar:

Een dergelijke procedure kan ook worden toegepast voor de tiende orde, enz.

31	9	2	22	27	20
3	32	7	21	23	25
35	1	6	26	19	24
4	36	29	13	18	11
30	5	34	12	14	16
8	28	33	17	10	15

Fig. 8

Een vierde orde vierkant kan als volgt gevonden worden:
Schrijf de getallen 1 tot en met 16 op in hun gewone volgorde:
Ruil nu de getallen die op de diagonalen staan symmetrisch ten opzichte van het midden en het vierkant is klaar.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Voor de achtste orde bestaan soortgelijke ruilprocedures. Hierbij moet niet alleen langs de hoofddiagonalen worden gezuild, maar ook langs de diagonalen van de vier vierde orde vierkanten, waarin het vierkant kan worden verdeeld.



De oplossingen van deze Denkertjes kunnen niet worden ingezonden. Men vindt ze elders in dit nummer.

Deze vier opgaven zijn ontleend aan de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade Nederland 1967. Tussen haken is vermeld hoeveel punten voor een goede oplossing werden gegeven.

- Op hoeveel nullen eindigt het produkt $1.2.3.4. \dots 99.100$ van de eerste 100 natuurlijke getallen? (1 punt)
- Schrijf een ongelijkheid op, die tot uitdrukking brengt, dat x niet het kleinste getal en ook niet het grootste getal is van het drietal x, y en z . (1 punt)
- n is een natuurlijk getal en $\frac{711}{13 + 11n}$ is een natuurlijk getal. Bereken n . (1punt)
- Op het ene been van de rechte hoek A kiest men B en C zodat $AB = BC = 15$. Op het andere been kiest men E en F zodat $AE = EF = 12$. Het snijpunt van CE en BF heet D . Bereken de oppervlakte van driehoek BCD . (2 punten)

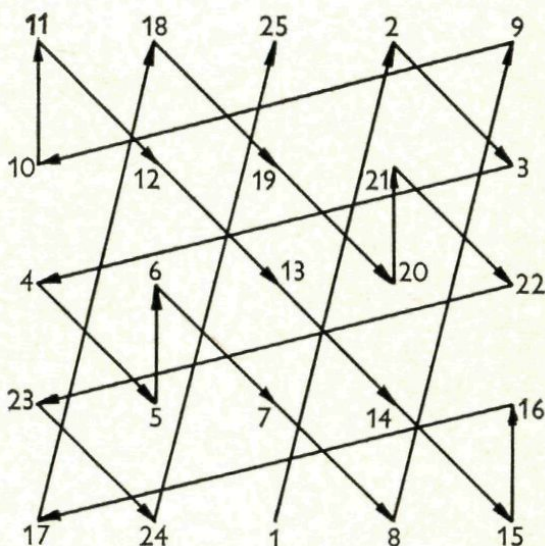
°Blokschema's voor computerprogramma's

door F. Felkers

			11	18	25	2	9
			10	12	19	21	3
4	9	2	4	6	13	20	22
3	5	7	23	5	7	14	16
8	1	6	17	24	1	8	15

Hierboven zie je twee magische vierkanten van oneven orde. De bouw van deze magische vierkanten vertoont een regelmaat, die goed tot uiting komt als we de opeenvolgende getallen door pijlen met elkaar verbinden:

Fig. 9



De algemene „bewegingsrichting” is van links boven naar rechts beneden. Slechts als men buiten het vierkant terecht dreigt te komen, en ook wanneer men stuit op een plaats, die reeds eerder gevuld is, treden er afwijkingen op, die overigens op zichzelf weer een regelmatigheid vertonen.

De bedoeling van dit artikel is niet, een beschouwing over de bouw van magische vierkanten te geven. Ik wil hier een ander probleem aan de orde stellen: Hoe zou men een computer opdracht kunnen geven tot het berekenen van een magisch vierkant met gegeven zijde n ? Voor het instrueren van een computer is steeds een zg. *programma* nodig, d.w.z. een lijst van zeer gedetailleerde handelingen, die de computer moet verrichten om het gevraagde voor ons te berekenen.

Dit programma moet geschreven worden in een „taal” die door de computer wordt „verstaan”.

Doch vóór de programmeur deze taal gaat bezigen, zal hij een systeem moeten ontwerpen voor de oplossing van het probleem. Zijn ontwerp legt hij vast in een zg. *blokschema*. Dat is een overzichtelijk geheel van de handelingen die de computer moet verrichten en van de volgorde waarin dat moet gebeuren. Als we een magisch vierkant met zijde n voorstellen door het volgende symbolen:

t_1	t_2	t_3	etc.	.	.	t_n
t_{n+1}	t_{n+2}	t_{n+3}	.	.	.	t_{2n}
t_{2n+1}	t_{2n+2}	t_{2n+3}	.	.	.	t_{3n}
.	.	.	.	.	.	.
etc.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
t_{n^2-n+1}	.	.	.	.	.	t_{n^2}

voor $n = 5$ bijvoorbeeld:

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}
t_{16}	t_{17}	t_{18}	t_{19}	t_{20}
t_{21}	t_{22}	t_{23}	t_{34}	t_{25}

dan is het programma voor de computer als volgt in het schema van blz. 133 te brengen (voor n mag elk positief oneven getal worden ingevuld):

Toelichting voor het geval $n=5$:

Het symbool $:=$ betekent: „wordt gelijk gemaakt aan”

GETAL: = 1 betekent dus dat de grootheid die GETAL heet, de waarde 1 krijgt.

n is de orde van het vierkant, dus 3,5,7,

Voor $n = 5$ betekent

$$x := \frac{2n^2 - n + 1}{2} \text{ dat } x \text{ gelijk gemaakt wordt aan } 23.$$

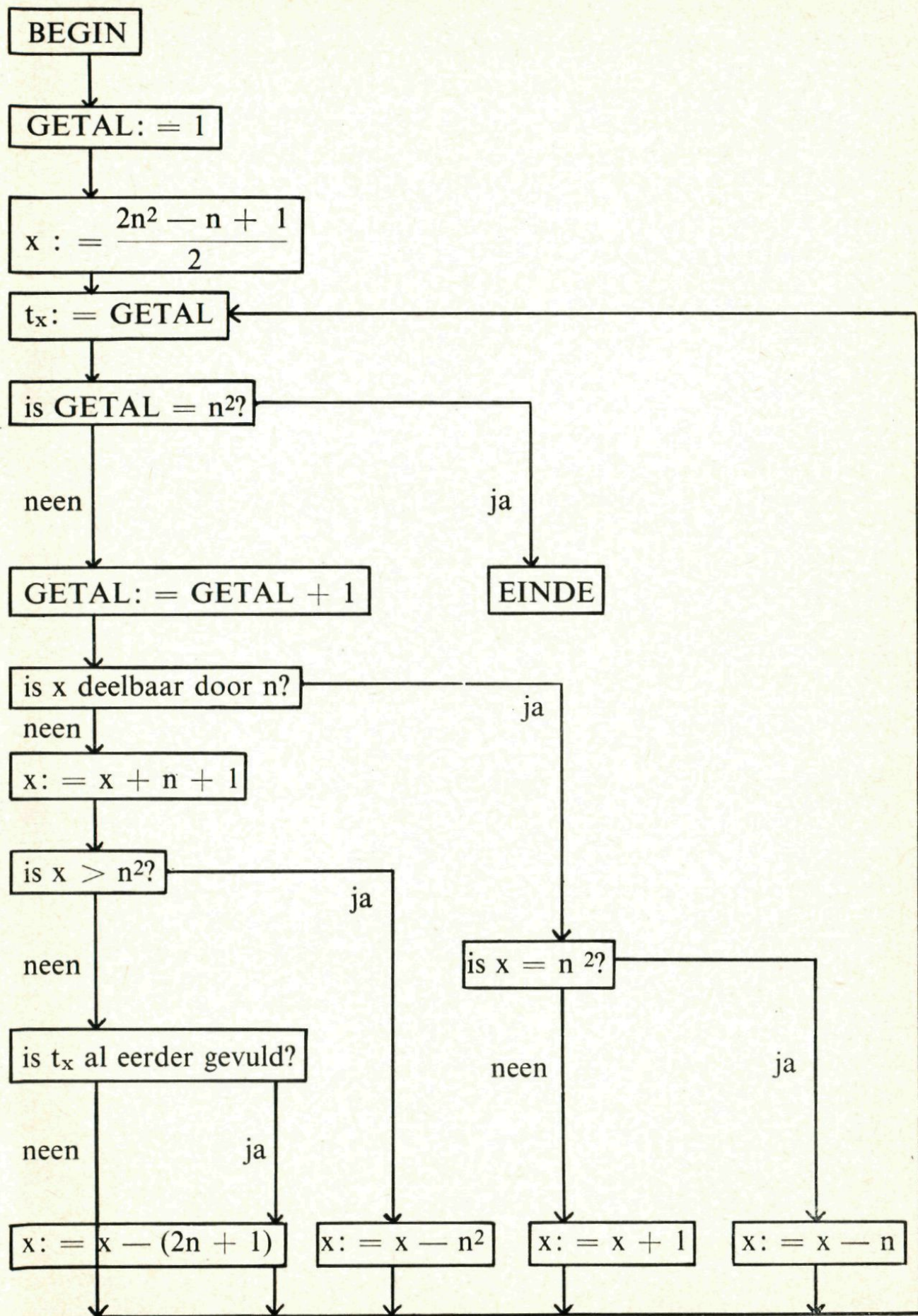
De daarop volgende instructie zegt dat het getal 1 in vak 23 geplaatst moet worden.

Hierna wordt het GETAL met 1 vermeerderd, dus 2. Is 23 deelbaar door 5? Neen!

$$x := 23 + 5 + 1 = 29.$$

Is 29 groter dan 25? Ja!

$$\text{Dan } x := 29 - 25 = 4.$$



Nu moet je weer beginnen bij $t_x := \text{GETAL}$, dat wil zeggen dat het getal 2 in vak 4 wordt geplaatst.

Daarna wordt het GETAL weer met 1 verhoogd, dus 3 en wordt de nieuwe x berekend, dat is de plaats waar 3 moet staan. Het programma loopt zo door tot $\text{GETAL} = 25$? Als deze vraag met ja beantwoord moet worden is het vierkant klaar en stopt het programma. Probeer het ook eens voor $n = 7$ of $n = 9$.

Met de computer zijn zo de vierkanten berekend tot en met 29. Dit is het resultaat voor $n = 11$

MAGISCH VIERKANT MET ZIJDE 11 SOM = 671

56	69	82	95	108	121	2	15	28	41	54
55	57	70	83	96	109	111	3	16	29	42
43	45	58	71	84	97	110	112	4	17	30
31	44	46	59	72	85	98	100	113	5	18
19	32	34	47	60	73	86	99	101	114	6
7	20	33	35	48	61	74	87	89	102	115
116	8	21	23	36	49	62	75	88	90	103
104	117	9	22	24	37	50	63	76	78	91
92	105	118	10	12	25	38	51	64	77	79
80	93	106	119	11	13	26	39	52	65	67
68	81	94	107	120	1	14	27	40	53	66

°° De meetkunde van de voetbal

Heb je ooit zo'n moderne wedstrijdvoetbal goed bekeken? Ze zijn bijzonder interessant ook uit wiskundig oogpunt. Mocht je ze niet kennen, dan moet je de onderstaande beschrijving maar goed lezen en de foto op blz. 136 bestuderen:

Op zo'n bal komt een netwerk van bogen voor, die de oppervlakte van de bal verdelen in een aantal gebieden. Sommige van die gebieden worden door vijf bogen begrensd en zijn dus vijfhoekig van vorm; de rest van de gebieden is zeshoekig. Bij elk knooppunt van het netwerk komen drie gebieden samen; twee daarvan zijn zeshoekig en het derde is vijfhoekig. De vijfhoekige gebieden zijn meestal zwart van kleur en de zeshoekige zijn wit. Zo is het duidelijk te zien, dat elk vijfhoekig gebied omgeven wordt door een krans van vijf zeshoekige gebieden. Ziezo, nu is bijna alles verteld. Alleen over de aantallen bogen, knooppunten en gebieden is nog geen woord gevallen. Maar daarin zit nu

ook juist datgene verborgen, dat uit wiskundig oogpunt interessant is aan zo'n voetbal. We houden onze wijsheid daarom nog even verborgen.

Je kunt op een bal allerlei netwerken tekenen; dat voetbalnetwerk is slechts een voorbeeld. Hieronder zie je een netwerk afgebeeld, waar ook zeshoekige gebieden en een enkel vijfhoekig gebied op te onderscheiden zijn. Maar daarmee houdt de gelijkenis met het voetbalnetwerk dan ook op. Het is ons niet bekend volgens welk systeem de Amerikanen dit satelliet-netwerk gebouwd hebben en ze willen er ons ook niets over vertellen.

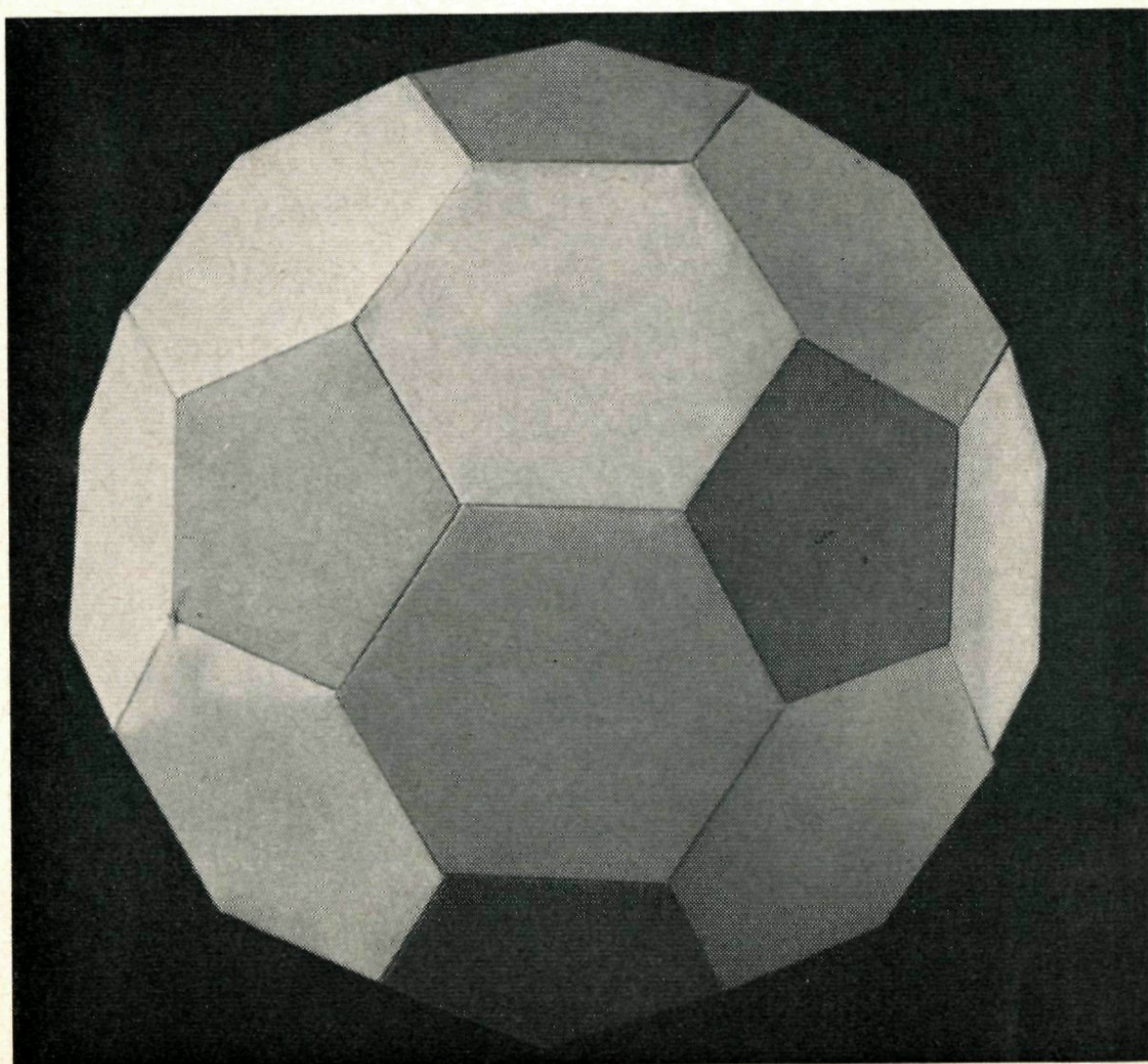
Toch weten we zeker dat het satelliet-netwerk de volgende eigenschap



heeft: noemen we het aantal gebieden G , het aantal bogen B en het aantal knooppunten K , dan is $G + K - B$ gelijk aan 2. Deze eigenschap hebben namelijk alle netwerken op een bol, of het nu satelliet-netwerken of voetbal-netwerken of nog andere netwerken zijn.

Het bewijs van deze eigenschap is zeer eenvoudig. Denk je maar in, dat je een willekeurig netwerk boog voor boog op een bol tekent, waarbij je dan elke nieuwe boog trekt vanuit een knooppunt dat al eerder op de bol stond. Bij het trekken van een nieuwe boog kunnen er dan twee dingen gebeuren:

- a) er komt door het tekenen van die boog geen nieuw gebied bij. In dit geval moet het eindpunt van die boog een knooppunt van het netwerk worden, dat nog niet eerder op de bol stond.
- b) er komt door het tekenen van die boog wel een nieuw gebied bij. In dit geval moet die boog getrokken worden naar een knooppunt, dat al op de bol aanwezig was.



Je ziet dus, dat als het aantal B met 1 toeneemt, dat ook $G + K$ met 1 toeneemt. Daarom blijft $G + K - B$ gedurende het tekenen een vaste waarde houden.

Na het trekken van de allereerste boog was $G = 1$ en $K = 2$ en $B = 1$, dus $G + K - B = 2$. Ook na het voltooien van het netwerk is $G + K - B$ daarom gelijk aan 2.

We keren nu weer terug naar onze voetbal. Laat die x vijfhoekige gebieden en y zeshoekige gebieden bezitten. Die x vijfhoekige gebieden hebben samen $5x$ hoekpunten en dat zijn juist alle knooppunten van het netwerk. Dus $K = 5x$. En die y zeshoekige gebieden hebben samen $6y$ hoekpunten; bij elk knooppunt bevinden zich twee van die hoekpunten, dus geldt ook $K = 3y$. Hieruit blijkt dat $y = \frac{5}{3}x$.

Alle vijfhoeken en zeshoeken hebben samen $5x + 6y = 5x + 10x = 15x$ zijden. Langs elke boog van het netwerk vallen twee van die zijden samen. Dus $B = \frac{15}{2}x$.

Tenslotte is $G = x + y = x + \frac{5}{3}x = \frac{8}{3}x$.

De algemeen geldende betrekking $G + K - B = 2$ wordt in het geval van dit voetbalnetwerk dus $\frac{8}{3}x + 5x - \frac{15}{2}x = 2$. En hier volgt onomstotelijk uit, dat $x = 12$.

Een voetbal-netwerk dat is opgebouwd volgens het systeem van de foto op blz. 136, bestaat dus onveranderlijk uit 32 gebieden, waarvan er 12 vijfhoekig en 20 zeshoekig zijn. Er komen 90 bogen op voor en die hebben 60 knooppunten. Een heel grote bal, die volgens hetzelfde systeem opgebouwd is, kan je dus alleen maar maken uit *grote* gebieden, niet uit *meer* gebieden. Verrassend, nietwaar?

Misschien is dit verhaal aanleiding om eens wat te gaan experimenteren met netwerken. Bestaat er een netwerk, waarin bij elk knooppunt een vierhoekig gebied en een zeshoekig gebied en een achthoekig gebied samenkomen? Zie je kans een netwerk te fabriceren dat louter uit driehoekige gebieden bestaat, waarvan er telkens per hoekpunt even veel samenkomen? Geef je fantasie maar eens de vrije teugel, dan zal je ervaren dat er aan dit soort geknutsel veel genoeg te beleven valt.

°°Sommen tellen

We willen geen slapende wiskundedocenten wakker maken, maar het lijkt ons geen leuk strafwerkje als je alle sommen met gehele, positieve termen moet opschrijven, die gelijk zijn aan 28. Dat zijn er namelijk honderdvierendertig miljoen tweehonderdzeventien duizend en zevenhonderdzevenentwintig of wel 134.217.727.

Om dit haast ongeloofwaardige feit te bewijzen, zullen we die sommen een beetje anders gaan opschrijven dan gewoonlijk. In plaats van bijvoorbeeld $5 + 3 + 6 + 1 + 4 + 9$ schrijven we:

x x x x x/x x x/x x x x x x/x x x x x/x x x x x x x x

Elke som, die gelijk is aan 28, stellen we dus voor door een rij van 28 kruisjes waarin hier en daar een schuine streep staat ter onderbreking. Die schuine strepen laten de kruisjes in groepen bij elkaar behoren en die groepen duiden dan de termen van de som aan.

Het maken van *alle* sommen die gelijk zijn aan 28 betekent dus het zetten van schuine strepen op alle mogelijke manieren in een rij van 28 kruisjes.

Nu zijn er 27 plaatsen waar zo'n streep kan staan en voor elk van die 27 plaatsen zijn twee mogelijkheden voor realisatie vatbaar: wel een streep of niet een streep. Dat geeft in totaal 2^{27} „streepjespatronen”. Daarvan is er een voor ons doel onbruikbaar: kies je in elk open plaatsje voor de niet-een-streep-mogelijkheid, dan komt er helemaal geen som te staan.

Het gevraagde aantal bedraagt dus $2^{27}-1$ of wel 134.217.727. Nou zul je misschien opgemerkt hebben, dat er zo allerlei sommen ontstaan die alleen in de volgorde van de termen verschillen. Je krijgt bijvoorbeeld $1 + 1 + 1 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ en $5 + 5 + 1 + 1 + 5 + 5 + 1 + 5$ en $5 + 1 + 5 + 1 + 1 + 5 + 5 + 5$. Het ligt dus voor de hand te vragen hoeveel verschillende sommen er komen, wanneer je de termen van klein naar groot rangschikt. Natuurlijk wordt het aantal dan aanzienlijk minder dan 134.217.727. Maar er blijven er toch altijd nog 3717 over en als je er drie per minuut opschrijft (je moet toch ook tijd hebben om te denken en te zuchten), dan is dat ruim twintig uren werk.

We zullen niet onthullen, hoe dat aantal van 3717 berekend wordt. De methode van die berekening verschilt namelijk niet wezenlijk van de methode die in wat nu volgt gebruikt wordt; het karwei is echter wel een stuk bewerkelijker dan wat we gaan tonen.

Een tweede beperking van het aantal krijgen we, als we alleen maar sommen met verschillende termen toelaten (die dan weer evenals zoëven van klein naar groot gerangschikt moeten worden).

Het is eenvoudig genoeg te zien, hoeveel sommen met twee termen er nu ontstaan: $1 + 27 = 2 + 26 = 3 + 25 = \dots = 11 + 17 = 12 + 16 = 13 + 15$ zijn 13 sommen. Bij de sommen met drie termen beginnen we echter al een beetje in moeilijkheden te komen.

Om ons wat gemakkelijker uit te kunnen drukken, zullen we nu eerst een in dit geval goed bruikbare notatie afspreken: Onder $S_k(n)$ verstaan we het aantal sommen met k termen, die gelijk zijn aan n . We hebben dus juist vastgesteld, dat $S_2(28) = 13$ en dat $S_3(28)$ niet zo gemakkelijk te bepalen is.

Als de kleinste term van zo'n som met drie termen, die gelijk is aan 28, groter is dan 1 en we verminderen elk van de drie termen met 1, dan ontstaat er een som met drie termen, die gelijk is aan 25. Behandelen we alle sommen die met 2 of meer beginnen op dezelfde manier, dan krijgen we alle sommen van drie termen, die gelijk zijn aan 25 en we krijgen ze allemaal juist een enkele keer. Hun aantal is daarom $S_3(25)$. Is de kleinste term van een drieterm, die gelijk is aan 28, echter precies 1 en trekken we van elk van de drie termen het getal 1 af, dan krijgen we een tweeterm die gelijk is aan 25. Evenals hierboven zien we in, dat het aantal van dergelijke drietermen dus $S_2(25)$ is.

Samenvattend kunnen we dus stellen: $S_3(28) = S_3(25) + S_2(25)$. En daarmee is ons probleem gereduceerd tot het berekenen van $S_3(25)$, want $S_2(25)$ biedt ons geen moeilijkheden. Maar op deze manier kunnen we doorgaan: $S_3(25) = S_3(22) + S_2(22)$ en $S_3(22) = S_3(19) + S_2(19)$ enzovoorts. Tenslotte komen we dan terecht bij $S_3(7)$, die gelijk is aan $S_2(4)$ en niet gelijk is aan $S_3(4) + S_2(4)$ omdat er geen drieterm bestaat die gelijk is aan 4; de kleinste drieterm is immers $1 + 2 + 3 = 6$. In de tabel op blz. 140 is de kolom met $S_2(n)$ dus gemakkelijk te berekenen. Van de kolom met $S_3(n)$ erboven berekenen we alleen het begingetal $S_3(6) = 1$ en daarna leiden we alle andere getallen van die kolom af uit de formule $S_3(n) = S_3(n - 3) + S_2(n - 3)$, waarin we $S_3(n - 3)$ gelijk aan 0 stellen als $n - 3$ minder dan 6 is.

Daarna wordt de kolom waar $S_4(n)$ boven staat berekend met behulp van de formule $S_4(n) = S_4(n - 4) + S_3(n - 4)$, die op analoge manier wordt afgeleid. En zo vinden we tenslotte, dat het aantal sommen, die gelijk aan 28 zijn, bedraagt $13 + 52 + 84 + 57 + 14 + 1 = 221$.

n	$S_2(n)$	$S_3(n)$	$S_4(n)$	$S_5(n)$	$S_6(n)$	$S_7(n)$
3	1					
4	1					
5	2					
6	2	1				
7	3	1				
8	3	2				
9	4	3				
10	4	4	1			
11	5	5	1			
12	5	7	2			
13	6	8	3			
14	6	10	5			
15	7	12	6	1		
16	7	14	9	1		
17	8	16	11	2		
18	8	19	15	3		
19	9	21	18	5		
20	9	24	23	7		
21	10	27	27	10	1	
22	10	30	34	13	1	
23	11	33	39	18	2	
24	11	37	47	23	3	
25	12	40	54	30	5	
26	12	44	64	37	7	
27	13	48	72	47	11	
28	13	52	84	57	14	1



De oplossingen van deze Denkertjes kunnen niet ingezonden worden. Men vindt ze elders in dit nummer. Deze drie opgaven zijn ontleend aan de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade Nederland 1967. Tussen haken is vermeld hoeveel punten voor een goede oplossing werden gegeven.

8. Bepaal vier natuurlijke getallen zo, dat de paren die uit dit viertal gevormd kunnen worden de getallen 8, 10, 12, 17, 19, 21 tot som hebben. (2 punten)
9. In een plat vlak liggen 93 punten waarvan geen enkel drietal op een rechte ligt. Je krijgt de opdracht verbindingslijnstukken van die punten te tekenen en dat zo te doen, dat elk punt met precies 23 andere verbonden wordt. Kan die opdracht uitgevoerd worden? (3 punten)
10. Uit de rij van de gehele getallen worden getallen geschrapt in overeenstemming met het volgende voorschrift: 6 en 14 worden geschrapt; als x een willekeurig geschrapt getal is, dan is van elk van de paren $x + 1$, $x - 1$ en $x + 2$, $x - 2$ precies één getal geschrapt. Bepaal het kleinste geschrapte getal, dat groter is dan 99. (3 punten)

°° Kun je er (voor)bij?

In het najaar van 1966 gaven het Verbond voor Veilig Verkeer en de Koninklijke Nederlandsche Toeristenbond ANWB samen een alleraardigst boekje uit onder de titel VERKEERSCODE. Het bevat „regels en tekens voor alle weggebruikers” en hiermee is geen woord te veel gezegd.

Wij troffen in VERKEERSCODE een tabel aan, waaruit af te lezen valt welke afstand voor een inhaalmanoeuvre nodig is. Hieronder drukken we die tabel (met toestemming van de uitgevers) nog eens af:

150	90	100	113	130	150	180	225	300	450	900
140	93	105	121	140	168	210	280	420	840	
130	97	112	130	156	195	260	390	780		
120	103	120	144	180	240	360	720			
110	110	132	163	220	330	660				
100	120	150	200	300	600					
90	135	180	270	540						
80	160	240	480							
70	210	420								
60	360									
	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140

Links van de streep zie je de snelheid van de inhaler en onder de andere streep de snelheid van de ingehaalde, allebei in km/uur uitgedrukt. In de tabel zelf vind je dan op de jullie bekende manier het aantal meters, dat met de inhaalmanoeuvre gemoeid is.

OP WELKE MANIER, VOLGENS WELKE FORMULE IS DEZE TABEL BEREKEND. WAAROM IS HIJ ZO BEREKEND, WELKE GEDACHTENGANG SCHUILT ER ACHTER DIE TABEL. Deze vraag leggen we hierbij aan de lezers voor.

Oplossingen worden voor 15 augustus 1967 ingewacht bij A. van Tooren, Nachtegaalplein 10, Den Haag. Onder de goede oplossers zullen we een boekenbon verloten.

Oplossingen van Denkertjes uit nummer 4

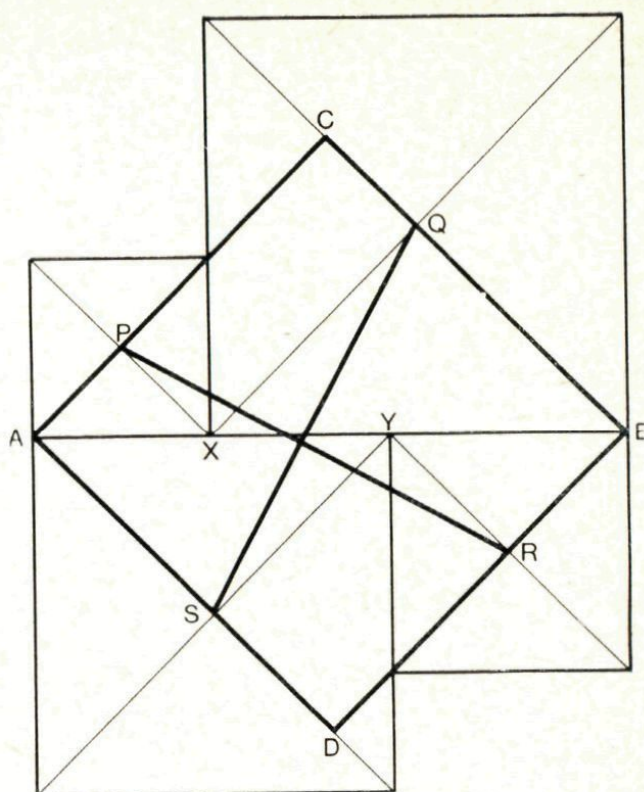


Fig. 9

31. Geboortejaar 1951.
32. De gevraagde vierhoeken zijn die, waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan. Men kiest de vier hoekpunten van de binnenste vierhoek dan in de middens van de zijden van de buitenste.
Bij sommige trapezia is het ook mogelijk; het vierhoekige deel is dan een rechthoek, waarvan de middenparallel van het trapezium een diagonaal is.
33. 70 is het grootste zodanige getal (weliswaar is $70 = 10.7 + 7.0$, maar 0 is geen natuurlijk getal). Verder is $71 = 10.5 + 7.3$, $72 = 10.3 + 7.6$, $73 = 10.1 + 7.9$, $74 = 10.6 + 7.2$, $75 = 10.4 + 7.5$, $736 = 10.2 + 7.8$, $77 = 10.7 + 7.1$. Elk groter geheel getal verschilt een zevenvoud met een van de getallen 71, ..., 77 en kan daarom ook in de gewenste vorm geschreven worden.
34. $2^n + 1$ is oneven en kan daarom niet gelijk zijn aan de derde macht van een even getal. Uit $2^n + 1 = (2k + 1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1$ volgt $2^n = 2k(4k^2 + 6k + 3)$. Dit is ongerijmd, want $4k^2 + 6k + 3$ is een oneven getal en kan daarom niet deelbaar zijn op 2^n . Dus kan 2^n ook niet gelijk zijn aan de derde macht van een oneven getal. $3^n + 1$ is even en kan dus alleen maar de derde macht van een even getal zijn. Daarvoor is nodig (niet voldoende), dat $3^n + 1$ een achtvoud is. Helaas is $3^n + 1$ afwisselend een achtvoud plus vier en een achtvoud plus twee. Daarom kan $3^n + 1$ dus zelfs niet de derde macht van een even getal zijn.
35. De verbindingslijnstukken zijn gelijk en staan loodrecht op elkaar. Voor het bewijs volstaan we met de aandacht te vestigen op de trapezia ADRP en CASQ in figuur 9. Ze zijn congruent.
36. Het gevraagde getal is 28. Zie het artikel SOMMEN TELLEN in deze aflevering.
37. Zulk een figuur is niet mogelijk. De vierhoek kan geen koordenvierhoek zijn, want dan moesten de vier cirkels samenvallen. Bij een niet-koordenvierhoek is de som van het ene paar overstaande hoeken groter dan 180° en die van het andere paar kleiner dan 180° . Laat van vierhoek ABCD de hoeken A en C samen groter dan 180° zijn, dan ligt de vierhoek binnen de cirkels ABD en CBD, maar steekt buiten de cirkels ABC en ACD uit.
38. Evenals $137137 = 1001.137$ is $abcabc = 1001.abc$. Hun som $1001(137 + abc)$ kan alleen dan een kwadraat zijn als $137 + abc = 1001$, dus als $abc = 864$. Het gevraagde getal is dus 864864.
39. De redenering is fout. De gemaakte fout is het stilzwijgend veronderstellen, dat er een driehoek PQR met maximale oppervlakte bestaat, wiens hoekpunten niet uit-einden van de zijden van driehoek ABC zijn. Het maximum treedt op als $P = B$, $Q = C$, $R = A$ of als $P = C$, $Q = A$, $R = B$.
Je antwoord wordt gehonoreerd met 11 punten min het door jou gegeven cijfer.

40. We stellen de dagen van de week door getallen voor. Als in een niet-schrikkeljaar 13 januari op een x valt, dan zijn de volgende data nummer 13 de dagen $x+3$, $x+3$, $x+6$, $x+1$, $x+4$, $x+6$, $x+2$, $x+5$, x , $x+3$, $x+5$. Hierbij kunnen drie vrijdagen zijn, als $x+3 = \text{vrijdag}$. Die drie vrijdagen zijn dan echter niet over drie kwartalen verspreid. Bij een schrikkeljaar wordt dit x , $x+3$, $x+4$, x , $x+2$, $x+5$, x , $x+3$, $x+6$, $x+1$, $x+4$, $x+6$. Als hier drie vrijdagen bij zijn, dan moet $x = \text{vrijdag}$. Inderdaad zijn de drie vrijdagen dan over drie kwartalen verspreid. En 31 december wordt een $x+3 = \text{maandag}$.

Oplossingen van de Denkertjes in dit nummer

- (Zie fig. 10). De zeven cirkels mogen elkaar niet snijden. Ze zijn zo groot mogelijk als ze elkaar raken. Hun straal is dan 5.
- (Zie fig. 11). De getallen p en q moeten aan de volgende voorwaarden voldoen:
 - Ze zijn natuurlijke getallen
 - $p < 20$
 - $q \leq 20$
 - $p^2 - 4q < 0$.

Er kunnen paren (p, q) gevormd worden, die aan deze voorwaarden voldoen. In de opgave wordt gevraagd hoeveel van deze paren er zijn. Elk der paren kan worden voorgesteld door een roosterpunt in een rechthoekig coördinatenrooster, waarbij de horizontale as de p -as en de verticale as de q -as is. De paren, die voldoen aan de voorwaarden 1, 2 en 3 leveren roosterpunten, die liggen *binnen* een vierkant, dat begrensd wordt door de beide coördinaat-assen en de rechten $p = 21$ en $q = 21$. De paren, die voldoen aan voorwaarde 4, leveren roosterpunten, die lager liggen

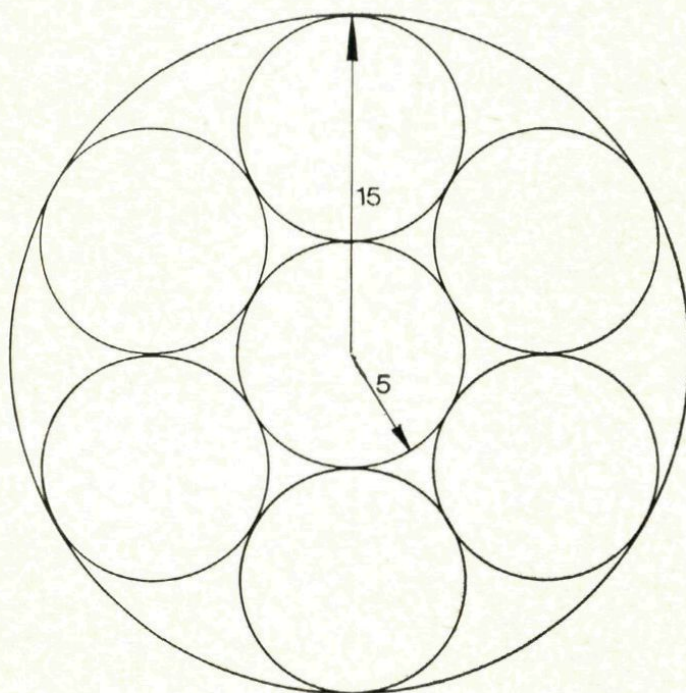


Fig. 10

dan de punten van de parabool met de vergelijking $q = \frac{1}{4}p^2$. In het rooster kan men nu gemakkelijk het aantal paren, dat mogelijk is (286) tellen.

- Ontwikkelt men $(x^2 - 2x + 2)^{11}$, dan krijgt het antwoord de vorm $x^{22} + ax^{21} + bx^{20} + cx^{19} + \dots + 2^{11}$. Dat antwoord is dan voor *elke* waarde van x gelijk aan $(x^2 - 2x + 2)^{11}$. De gevraagde som van de coëfficiënten $(1 + a + b + \dots + 2^{11})$ wordt gevonden door $x = 1$ te stellen. Deze som is dus gelijk aan $(1 - 2 + 2)^{11} = 1$.
- Het aantal nullen in het gegeven produkt is gelijk aan het aantal factoren 10 in dat produkt en dat is weer gelijk aan het aantal factoren 5. Deze komen voor in de factoren 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ..., 100. Het blijkt nu gemakkelijk, dat het aantal factoren 5 gelijk is aan 24.

5. Als x het „middelste” is van het drietal getallen x, y en z , dan is van de tweetermen $(x - y)$ en $(x - z)$ er één negatief en één positief. Hun produkt is dan negatief. De gevraagde ongelijkheid is dus $(x - y)(x - z) < 0$.
6. Als de gegeven breuk gelijk moet zijn aan een natuurlijk getal, dan moet de noemer gelijk zijn aan een der delers van de teller. Dat zijn 3, 9, 79, 237 en 711. Het blijkt dat voor $n = 6$ de noemer gelijk is aan 79.

Fig. 11

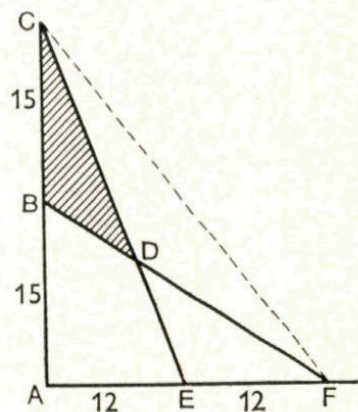
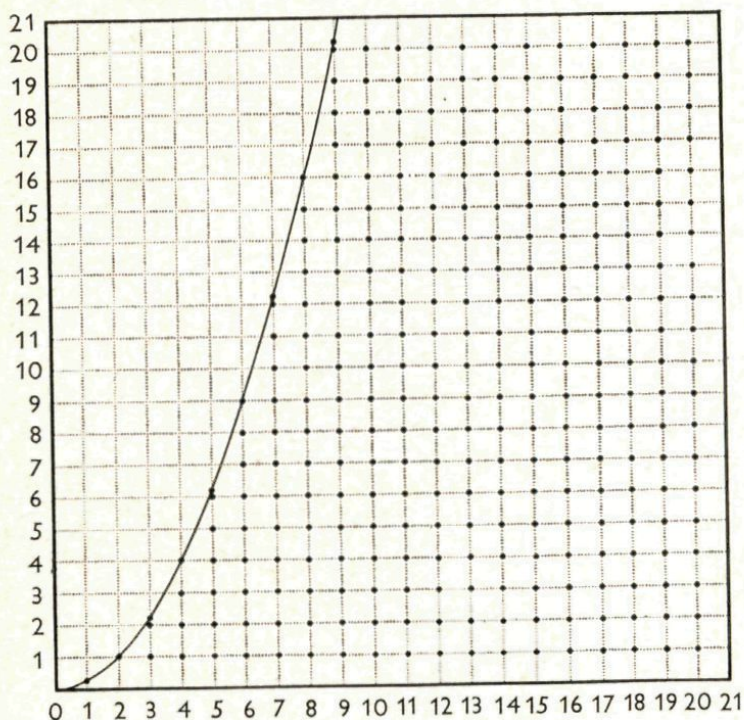


Fig. 12

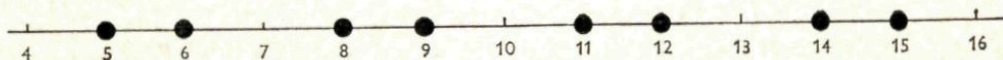
7. (Zie fig. 12). In $\triangle AFC$ zijn CE en FB zwaartelijnen. De drie zwaartelijnen van een driehoek verdelen diens oppervlakte in zes gelijke delen. Dus is de oppervlakte van $\triangle BDC$ het zesde deel van $360 = 60$.
8. Noem de gevraagde getallen a, b, c en d . De zes sommen zijn dan

$a + b$	$b + c$
$a + c$	$b + d$
$a + d$	$c + d$

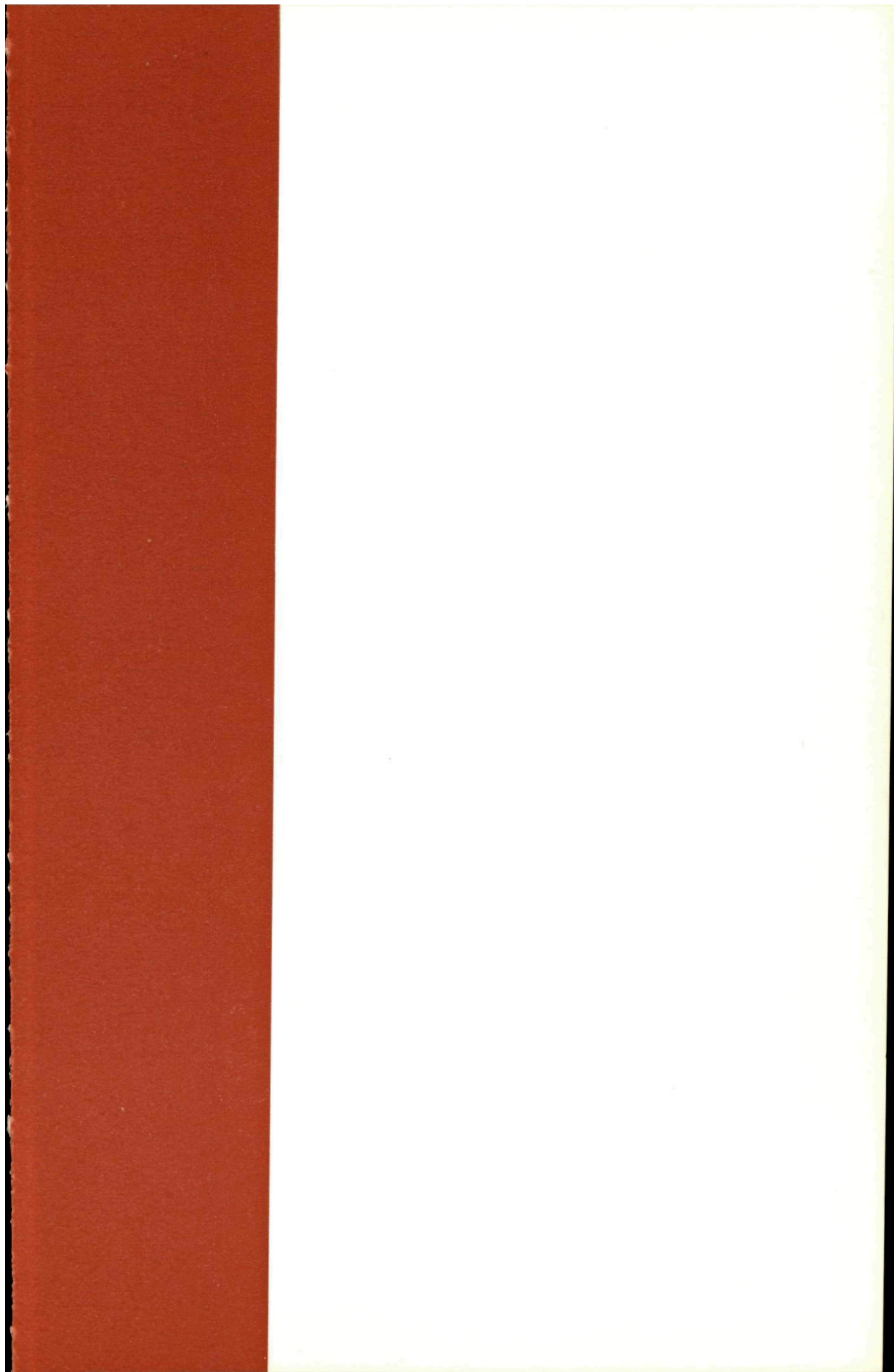
Is $a + b = 8$, dan zijn a en b beide oneven of beide even. Hun verschil is dan eveneens even. Het verschil van de tweetermen $a + c$ en $b + c$ en ook dat van de tweetermen $a + d$ en $b + d$ moet dan even zijn. Daaruit volgt, dat $a + c$ en $b + c$ beide oneven of beide even zijn. Hetzelfde kan gezegd worden van $a + d$ en $b + d$. We kunnen nu bijvoorbeeld voor drie van de zes tweetermen de volgende waarden kiezen:

$a + b = 8$	
$a + c = 10$	Hieruit volgt $a = 3, b = 5, c = 7$
$b + c = 12$	

Nu moet d nog zo gekozen worden, dat de drie overige sommen de waarden 17, 19 en 21 krijgen. Dat kan als $d = 14$ is.
9. Wordt elk der 93 punten verbonden met 23 der punten, dan vertrekken er uit elk punt dus 23 lijnstukken. Het totale aantal lijnstukken is dan $\frac{1}{2} \cdot 93 \cdot 23$. Dat is echter niet mogelijk, omdat dit aantal niet geheel is.
10. Omdat 6 geschrapt is moeten we kiezen tussen 5 schrappen of 7. Kiezen we 7, dan mag 8 niet geschrapt worden, maar omdat 5 dan niet geschrapt is, moet 9 wel. 10 moet dan ook geschrapt worden, 11 weer niet. 12 en 13 wel, 14 niet. Maar 14 zou juist wel geschrapt worden. De keuze 7 was dus fout. Het moest 5 zijn. We zien dan verder, dat op de volgende manier geschrapt moet worden:



De niet geschrapte getallen zijn $4 + 3n$, als n een natuurlijk getal is. 100 blijkt een der niet-geschrapte getallen te zijn. Het kleinste geschrapte getal, dat op 99 volgt, is daarom 101.



Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Markt 34, Oudenbosch.

Drs. A. B. OOSTEN, Turftorenstraat 11A, Groningen.

A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Aan het eerste of tweede adres kan men bijdragen voor Pythagoras zenden, zoals artikelen of problemen.

Aan het derde adres kunnen de oplossingen der puzzels en problemen gezonden worden.

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,50 per jaargang. Voor anderen f 4,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J. B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J. B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.