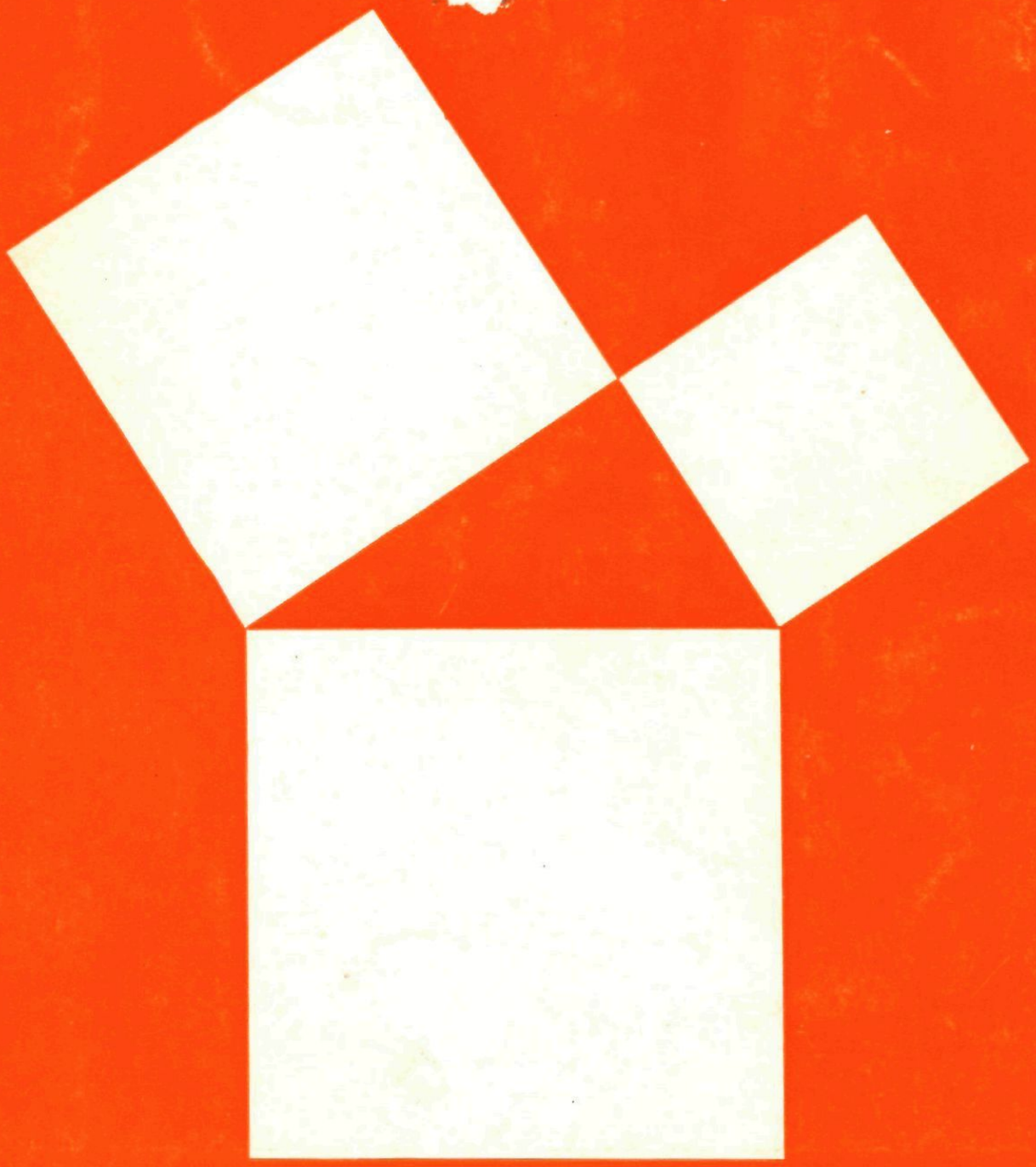
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

1

Zevende jaargang
1967/1968

Melencolia § 1 Albrecht Dürer 1471-1528

pythagoras

jaargang 7 no 1

°Melencolia § 1

Tot de meest beroemde werkstukken van de kunstenaar Albrecht Dürer behoort de gravure Melencolia§1. Reeds bij de eerste blik word je getroffen door de voorstelling, waarover een waas van geheimzinnigheid hangt. Wat is toch de betekenis van al de attributen die op de gravure voorkomen? Wat heeft de kunstenaar hiermee willen uitdrukken?

Albrecht Dürer werd geboren op 21 mei 1471 in Neurenberg. Behalve als kunstenaar kreeg hij ook bekendheid als wiskundige. Zo schreef hij een boek „Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt". Constructies met passer en liniaal zouden we tegenwoordig zeggen. In het laatste nummer van de vijfde jaargang van Pythagoras is de benaderingsconstructie van de regelmatige vijfhoek van Dürer beschreven.
In de Melencolia komen beide facetten van de maker tot uiting. Allerlei wiskundige zaken zijn er in verwerkt.
De gevleugelde vrouwenfiguur, het hoofd steunend op de linkerhand, is de verpersoonlijking van de melancholie, een mengsel van droefheid en berusting.
Boven haar hoofd bevindt zich een zogenaamd magisch vierkant, waarvan de getallen horizontaal, vertikaal en diagonaal als som 34 hebben. (Zie ook het laatste nummer van de vorige jaargang.) De getallen 15 en 14 zijn zo gerangschikt dat ze het jaartal vormen waarin de gravure werd gemaakt.
Boven het vierkant hangt een doodsklok en er naast een zandloper. Hiernaast is een balans te zien. Onder de balans zit een cherubijntje (een soort tweederangs-engel) op een molensteen, waarover een doodskleed is gedrapeerd. Het cherubijntje schrijft op een lei. Het grote blok naast de molensteen is een kubus, waarvan twee punten zijn afgesneden. Voor de kubus ligt een ram. De lucht op de achtergrond is versierd met een komeet, een regenboog en een griffioen, die de titel

voor [illegible] gravure draagt. (Een griffioen is een fabeldier, een soort leeuw met [illegible] gels.) De toevoeging § 1 zou er op kunnen wijzen dat Dürer van p[illegible] was meerdere gravures over dit onderwerp te maken.
In haa[illegible] rechterhand, rustend op een gesloten boek, houdt vrouwe Melancholie een passer.
Over de betekenis van de gravure bestaan alleen maar gissingen. In 1932 verscheen echter een interessant boek van de heer K.H. de Haas te Rotterdam, waarin de gravure met nog een andere van Dürer is geanalyseerd. In 1952 verscheen er een supplement bij het boek, met nieuwe onderzoekresultaten en een verklaring van de voorstelling.
In 1471, het geboortejaar van Dürer, vestigde zich in zijn geboortestad de toenmaals beroemde wiskundige Johann Müller, beter bekend als Regiomontanus (Latijn voor Koningsberger; hij was in 1436 in Königsberg geboren). Regiomontanus was de eerste die een boek schreef dat uitsluitend aan de trigonometrie was gewijd. Hij werd door de Paus naar Rome ontboden, teneinde zich bezig te houden met de hervorming van de kalender. Hij stierf kort na zijn aankomst in Rome in 1476.
Volgens de heer De Haas nu is de Melencolia gemaakt ter nagedachtenis aan Regiomontanus. Aanwijzingen hiervoor zijn de molensteen met het doodskleed (Müller = molenaar), de doodsklok en de verschillende onderdelen van de voorstelling die betrekking hebben op de wiskunde en de sterrenkunde.
Op blz. 11 zullen we ons bezighouden met de meetkundige achtergrond van de gravure.

Dit nummer . . . .

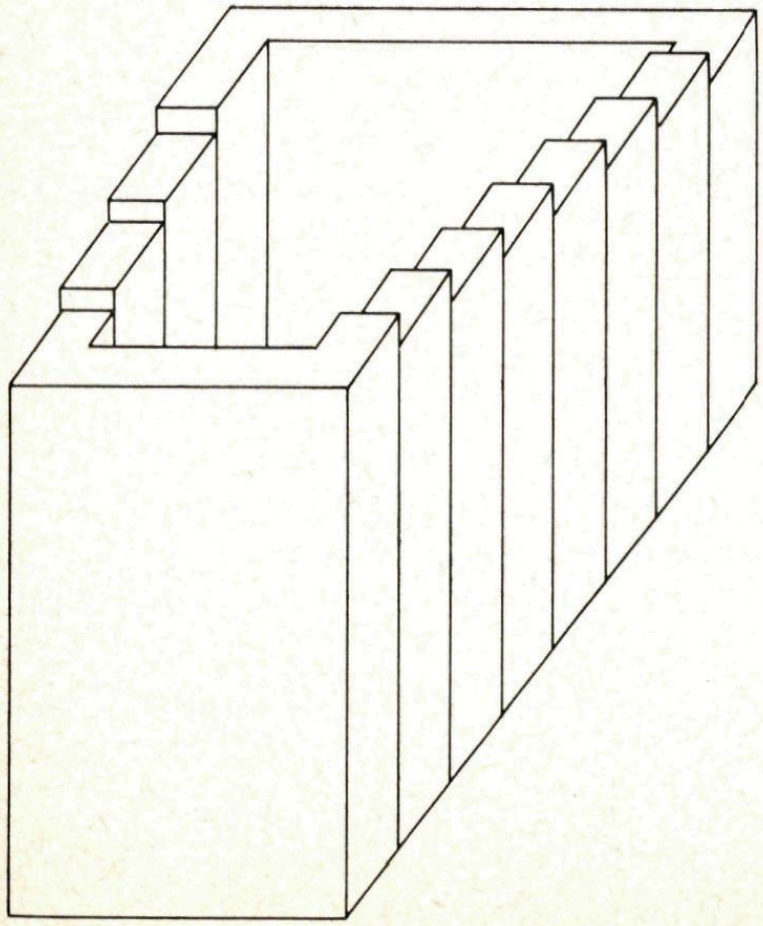
is dan al weer het eerste van de zevende jaargang. De lezers die Pythagoras al van het vorige jaar kennen, zullen zich herinneren dat op de enquêtekaart in één van de nummers o.a. werd gevraagd naar wensen voor de volgende jaargang. Welnu, de meest geuite wens was: ZO DOORGAAN! Dit is natuurlijk een aansporing voor de redactie om ook in de komende jaargang haar beste beentje voor te zetten.
We zullen beginnen met de nieuwe lezers in te wijden in de geheimen der Pythagoreërs. Het eerste geheim is: Je hoeft niet elk artikel interessant te vinden.

Buitenstaanders mogen misschien denken dat het lezen van Pythagoras zo ongeveer gelijk staat met het eigenhandig doorwerken van een wiskundeleerboek, maar insiders weten dat dit niet waar is. Je zoekt gewoon uit wat je de moeite waard lijkt en ons streven is er op gericht dat je in ieder nummer wel wat van je gading zult vinden.
Verdere geheimen:
Alle artikelen zijn voorzien van een tekentje, dat de graad van moeilijkheid beoogt aan te geven, nl. °, °°, of °°°. Hoe meer nulletjes, hoe moeilijker het artikel is. Dit zijn echter niet geheel betrouwbare tekens, zodat je er nooit van te voren op af moet gaan.
Je kunt ook zelf artikelen schrijven. In dit nummer is b.v. Voetballen en wiskunde een „ingezonden stuk".
In elk nummer vind je 10 Denkertjes. De oplossingen hiervan kun je sturen naar *Drs. A. B. Oosten, Turftorenstraat 11a, Groningen.* De datum waarop de oplossingen binnen moeten zijn vind je achterin op de binnenzijde van het omslag. Onder de goede inzenders wordt een boekenbon verloot. Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar. Ook al is je oplossing niet 100% dan heeft hij toch nog waarde. Voor elke oplossing krijg je namelijk een cijfer. *Wie uit de eerste vier nummers minstens 300 punten behaalt, krijgt eveneens een boekenbon.*

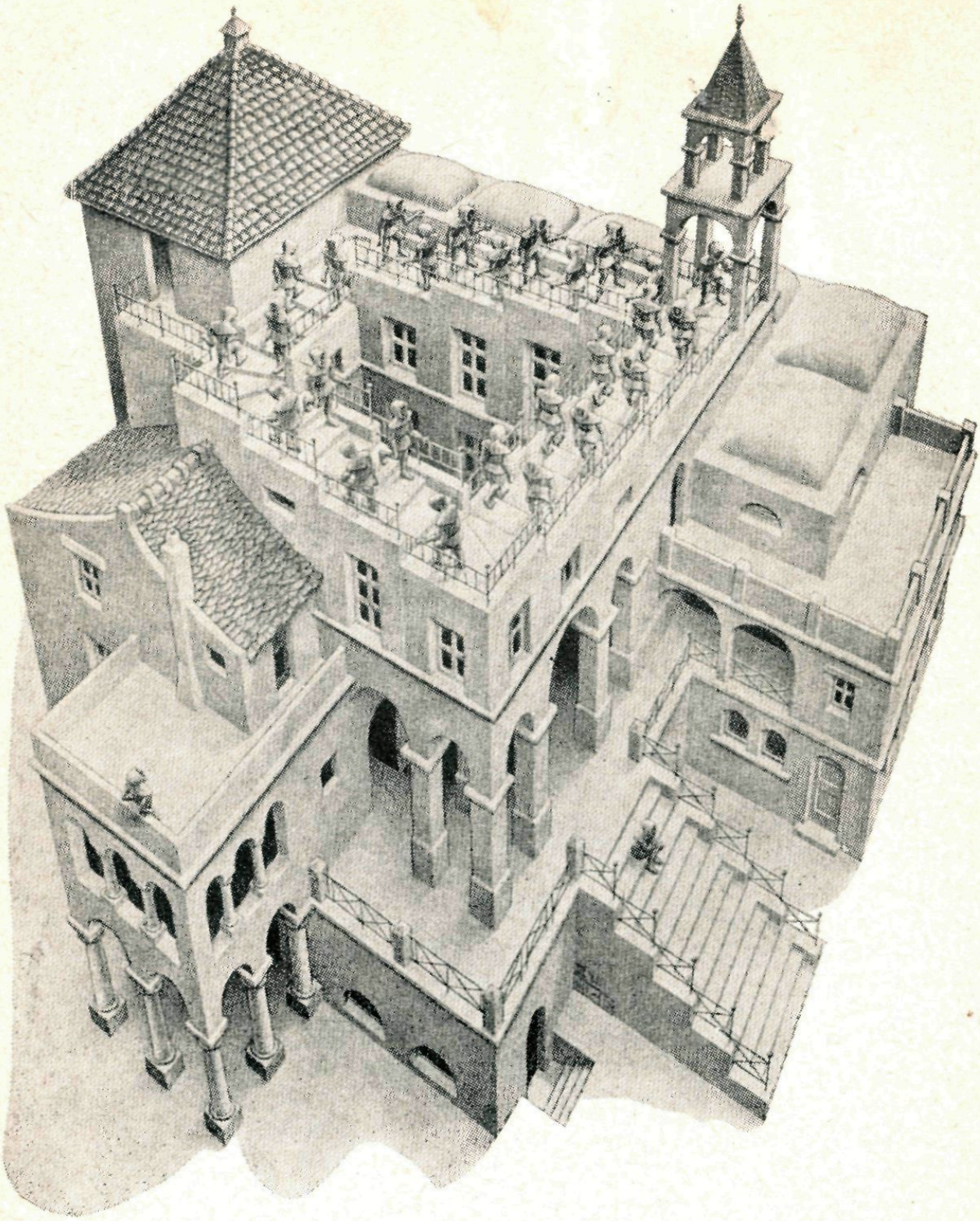
Nog even terug naar de enquête.
De prijs voor het meest gelezen, meest interessante artikel ging met vlag en wimpel naar de Onmogelijke Figuren. Toch heeft de aansporing om zelf eens wat te gaan experimenteren ons weinig opgeleverd. Alleen onze „O.F.-tekenaar in vaste dienst", Michel Bel, heeft weer een groot aantal bedenksels gestuurd. Enige zeer fraaie vind je in dit nummer. Verder plaatsen we daarbij maar weer eens een tekening van M.C. Escher, waarnaar ook nog steeds veel gevraagd wordt.
De redactie krijgt per jaar een groot aantal brieven van de lezers. Deze worden zoveel mogelijk beantwoord. Een enkele keer echter kunnen we geen antwoord geven, dat is dan omdat de redactie domweg geen antwoord weet. Tenslotte kan een gek meer vragen dan tien wijzen kunnen antwoorden en wanneer je je eigen wiskundige theorieën op ons los laat dan moeten wij het wel eens laten afweten. Dit neemt niet weg dat we het briefcontact met de lezers zeer waarderen. Vooral wanneer je op- of aanmerkingen hebt, of wensen voor de toekomst, dan moet je ons dit zeker laten weten.

°Inwendig goochelen

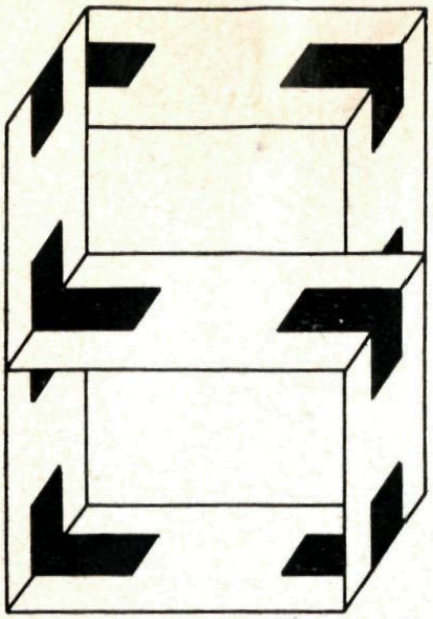
Wat dit betekent? Het is een verklarende benaming van de activiteit die iemand ontplooit bij het kijken naar „onmogelijke figuren". Uit de enquête die we vorig jaar onder de lezers van Pythagoras gehouden hebben, bleek dat de artikelen: *onmogelijke figuren* het hoogst genoteerd stonden. Goed, we gaan er mee door, en vragen dan om actieve belangstelling. Die is er bij sommigen al, zo stuurde Michel Bel weer een aantal O-F's. Hij heeft in het verzinnen ervan al een opmerkelijke virtuositeit bereikt. Wie verzint er eens iets met meer complexe rechtlijnige figuren of met kromlijnige?
De hierbij afgedrukte O-F van Escher is natuurlijk weer ijselijk knap: hoe kunnen toch al die manschappen van deze fantasieburcht alsmaar naar beneden of alsmaar naar boven lopen zonder boven of beneden te komen?
Is het niet zo dat je bij het bekijken hiervan met de voorstelling aan het goochelen bent. Je houdt jezelf voor de gek en de truc is niet te doorzien ook al zou de opbouw van de tekening helemaal verklaard zijn.

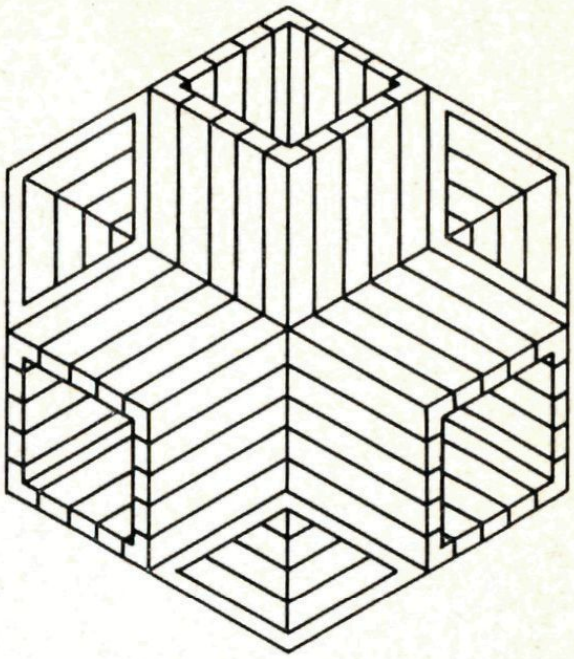


oneindige trap



Ogenschijnlijk onderscheidt deze fantasieburcht zich in niets van andere burchten. Maar wie op de wacht-lopende soldaten let ziet het merkwaardige verschil: De buitenste zullen altijd klimmen, de binnenste blijven dalen . . .





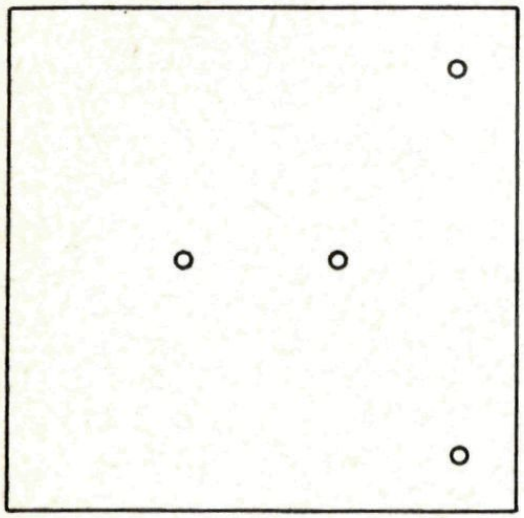


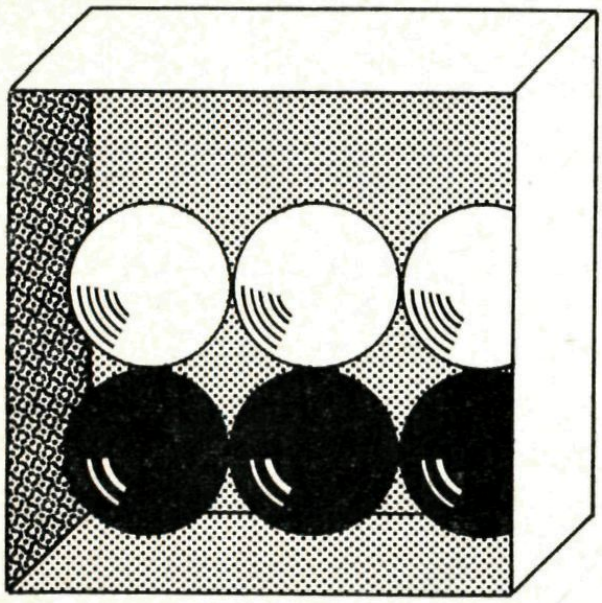
fig. 1.
Inzendingen vóór 10 nov. aan Drs. A. B. Oosten, Turftorenstraat 11a, Groningen.

Denkertjes

1. Figuur 1 toont een vierkante taart met vier vruchtjes erop. Zie je kans die taart in vier gelijke stukken te verdelen, die elk een vruchtje bevatten? (Je mag vier rechte sneden aanbrengen.)
2. Bewijs, dat $x^6 - 20x^3 + x^2 - 2x + 101 = 0$ een valse vergelijking is.
3. Natuurlijk kan in een driehoek een hoogtelijnstuk langer zijn dan de zijde, waarop die hoogtelijn is neergelaten. Maar is het ook mogelijk, dat twee hoogtelijnstukken van eenzelfde driehoek deze eigenschap hebben?
4. Bewijs dat de getallen $10\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$, $7\sqrt{2} + 16\sqrt{3}$ en $9\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ termen van dezelfde rekenkundige rij kunnen zijn.

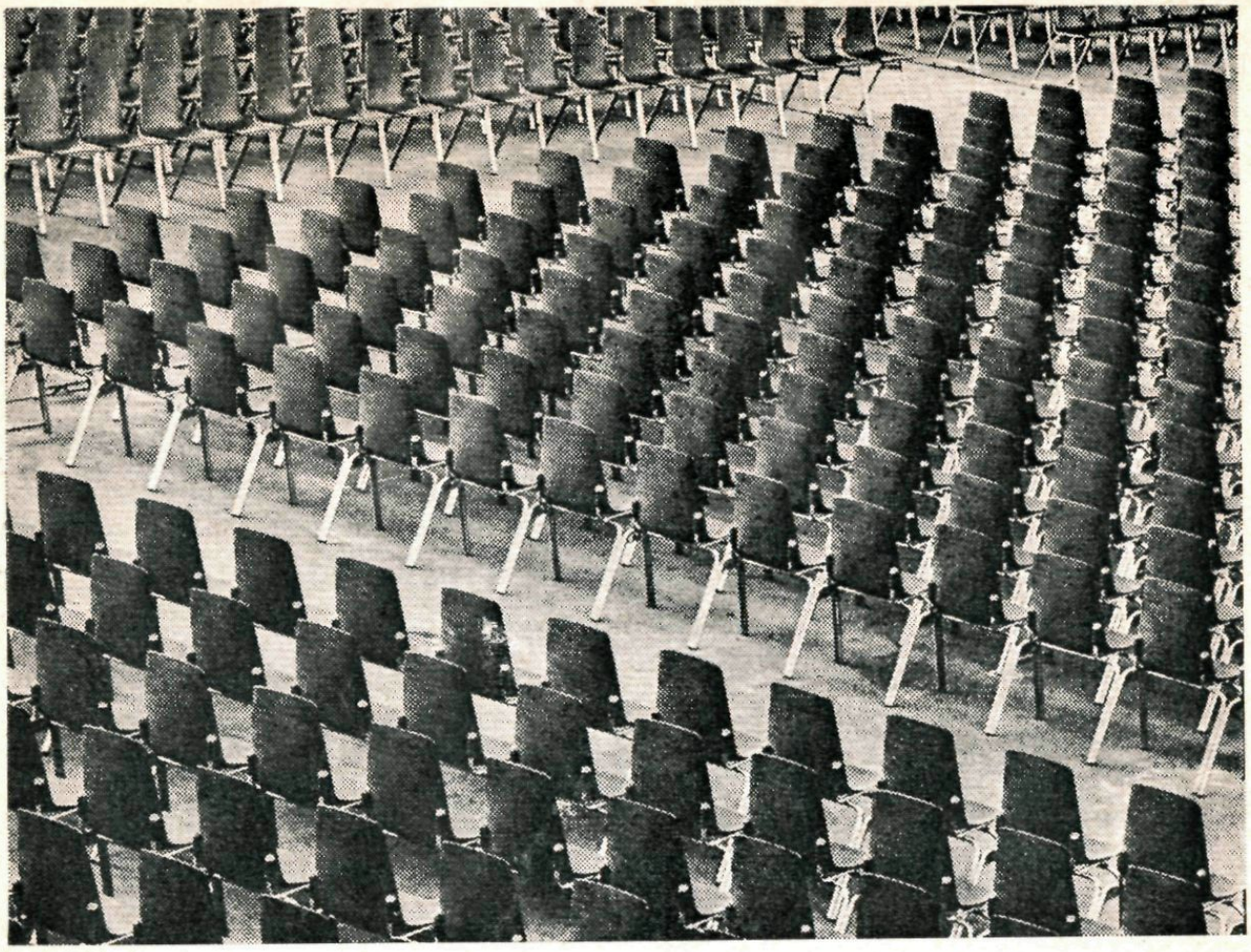
°Orde, wanorde en toeval

Je hebt een kwart reageerbuisje vol wit krijtpoeder en in een ander reageerbuisje zit evenveel rood krijtpoeder. Gooi het rode poeder bovenop het witte. We hebben nu in het ene reageerbuisje: boven rood, onder wit. We gaan schudden . . . een dag lang.
Natuurlijk . . . na korte tijd is het poeder rose en het blijft rose. Ook na 10 jaar schudden? Nogal wiedes, denk je: „het gaat immers steeds beter mengen."
En toch is het mogelijk dat op een gegeven ogenblik alle rode poeder onder in het buisje komt en alle witte boven. Als we wiskundig weten te omschrijven hoe we schudden en als het aantal poederdeeltjes bekend is, kunnen we zelfs uitrekenen na hoeveel tijd we mogen verwachten dat dit één keer gebeurd is. Dat wil niet zeggen dat het binnen die tijd ook gebeurd is. Je moet dit zo opvatten: Stel dat we berekend hebben dat de kans op de toestand van ontmenging één maal op de 10^5 keer schudden optreedt, dan is het zeer onwaarschijnlijk dat die toestand na 10^8 maal schudden niet 10^3 maal is voorgekomen.



toeval?

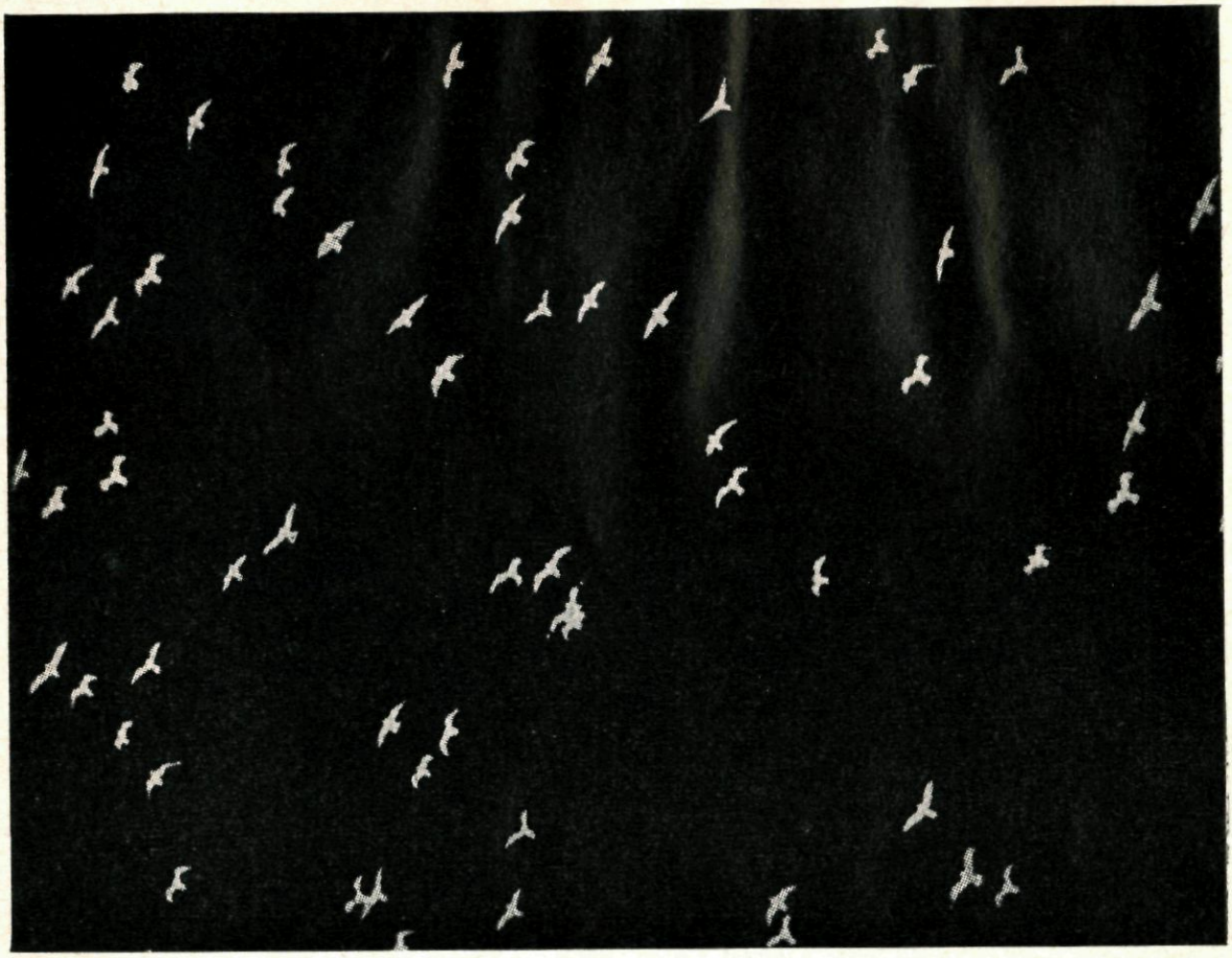
Dat klinkt allemaal ongeloofwaardig; eigenlijk gezegd: je gevoel wil er niet aan. Maar stel je dan eens een houten bakje met opstaande randen voor. Het is vierkant en er passen precies 9 gelijke knikkers in. Nu doen we er maar 6 in: 3 witte en 3 rode. De witte boven, de rode onder. We schudden 10 seconden en houden dan het bakje schuin. Er zullen misschien 2 rode boven en 1 rode onder liggen. Vind je het nu zo vreemd dat na een groot aantal malen schudden zeker eens de drie rode knikkers boven liggen en de witte onder?



orde?

Het is helemaal niet moeilijk zelf uit te rekenen na hoeveel maal schudden je dit éénmaal kunt verwachten. Je behoeft daarvoor alleen maar het aantal mogelijke verdelingen van witte en rode knikkers te tellen. Al deze mogelijkheden zijn even waarschijnlijk.

Wie die *stoelen* zo ziet staan denkt niet aan toeval. Er zijn mensen die ze na een beatavond weer netjes volgens een bepaald patroon hebben neergezet. Deze „ordelijke" toestand is namelijk zeer onwaarschijnlijk. Toch zou ze na schier eindeloos willekeurig verplaatsen van de stoelen kunnen voorkomen, evenals de ontmenging van het rose poeder.
Als wij ergens „orde" zien voelen we intuïtief dat dit een „onwaarschijnlijke" toestand is en vragen we naar een oorzaak. Ons goed recht, als we dan maar niet bevooroordeeld zijn bij het aanwijzen van die oorzaak.



wanorde?

De vlucht vogels hierboven, of liever de formatie van die vlucht, vraagt niet om een verklaring. Maar als we vogels in een V-formatie zien overvliegen, dan vragen we ons af hoe dit tot stand komt.
Een eiwitmolecuul, de bouwsteen van levende cellen, bestaat uit een zeer bepaalde aaneenschakeling van aminozuren. Deze aaneenschakeling is „zeer onwaarschijnlijk".
Maar zijn er in de natuur dan geen ordenende krachten aan te wijzen, die zeer onwaarschijnlijke toestanden kunnen opbouwen? Als we natrium met chloor laten reageren, komen er NaCl-kristallen tevoorschijn waarin natrium- en chlooratomen volgens een „zeer onwaarschijnlijk" patroon gerangschikt zijn. Moeten we nu aannemen dat er iemand geweest is die ze netjes één voor één naast elkaar gelegd heeft?
Zijn sneeuwkristallen geen onwaarschijnlijk fraaie bouwsels? En toch heeft niemand ze in elkaar geprutst.

°°Help eens een handje

Dit artikel heeft een merkwaardige titel, maar het is dan ook een merkwaardig artikel. We leggen jullie namelijk hier een probleem voor en vragen jullie hulp bij de oplossing daarvan. Misschien slagen jullie er wel in die oplossing te vinden; je brieven worden met spanning tegemoet gezien. We hopen echter heimelijk op méér dan een oplossing; we zouden graag willen komen tot een meer algemeen probleem en dan ook daar weer de oplossing van willen hebben. In welke richting die generalisatie moet gaan, dat weten we nog niet. Dat hangt namelijk weer van de stimulansen af, die wij uit jullie brieven ontvangen. Schrijf dus vrijuit en stuur vooral ook suggesties in welke richting we het vervolg op dit artikel zouden moeten of kunnen zoeken.
En ziehier dan het probleem in kwestie.
Drie jongelui hebben een plannetje, waarvoor ze zich in zo kort mogelijke tijd moeten begeven naar een 9 km verder gelegen plaats. Het plan is spontaan opgekomen en ze staan dus tegelijkertijd met z'n drieën gereed om te vertrekken. Helaas beschikken ze echter samen slechts over twee vervoermiddelen, een brommer en een fiets. De kwaliteit van die apparaten is niet zo best. Op die brommer kan je niet harder rijden dan 30 km/uur en op de fiets kan je met de beste wil van de wereld geen hogere snelheid maken dan 15 km/uur. En ze kunnen natuurlijk wel twee personen laden op brommer of fiets, maar dan zakt dat ding onmiddellijk in elkaar. Er zal dus gelopen moeten worden en helaas is dat onvermijdelijk, want er is geen verkeer langs de te volgen weg, dat een lift zou kunnen geven. Bij het lopen heeft elk van hen een topsnelheid van 7,5 km/uur.
Voor het afleggen van de hele weg te voet, per fiets of al brommende zijn respectievelijk 72 minuten, 36 minuten en 18 minuten nodig. Het gemiddelde van die drie tijden bedraagt 42 minuten. Het lijkt waarschijnlijk, dat bij het meest economische gebruik van de ter beschikking staande middelen na 42 minuten het drietal wel op de plaats van bestemming zal kunnen zijn. Maar meer dan een waarschijnlijkheid zien wij daar op het ogenblik niet in. Kunnen jullie ons vermoeden ontzenuwen of bevestigen? Help eens een handje.

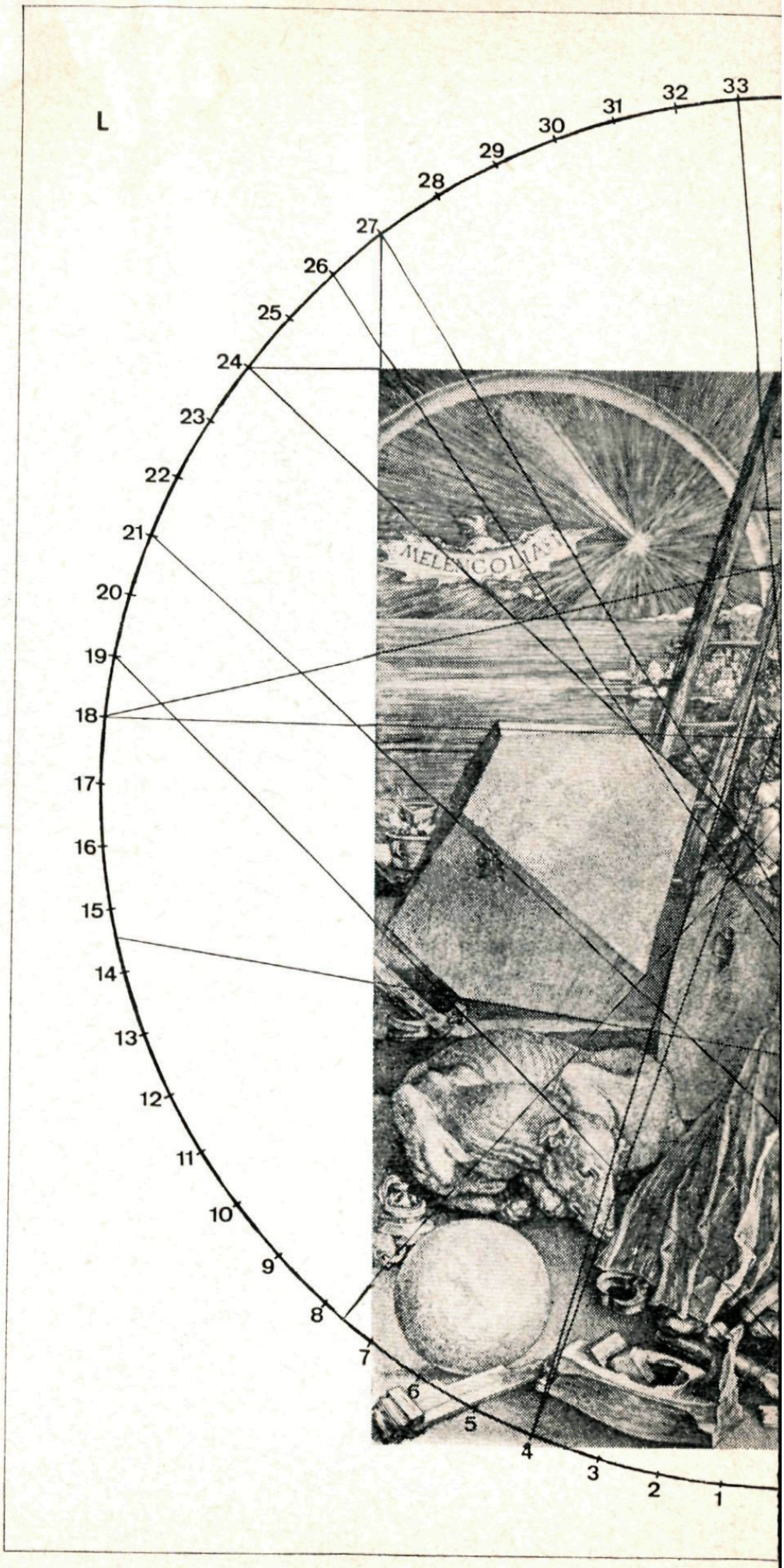
Inzendingen vóór 10 november aan A. F. van Tooren, Nachtegaalplein 10, 's-Gravenhage.

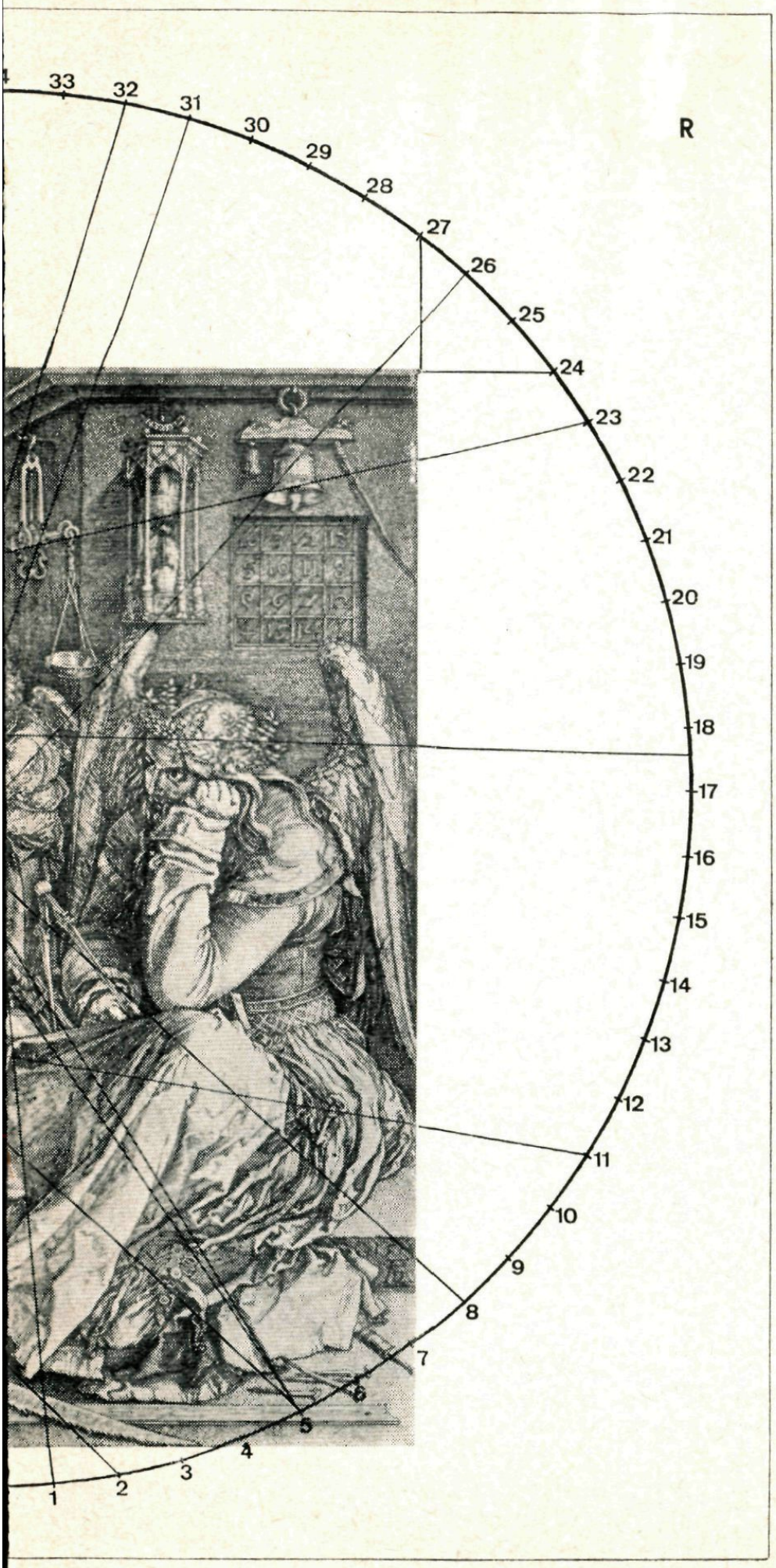
5. Op elk veld van een dambord met 81 velden ligt een papiertje. Door een windvlaag wapperen al die papiertjes weg. Is het mogelijk ze zo weer terug te leggen, dat elk papiertje komt op een veld dat grenst aan het veld waarop het oorspronkelijk lag?
6. Een getal van $k+1$ cijfers bestaat bijna uitsluitend uit cijfers 3; alleen het eenhedencijfer is een 4 (voor $k=6$ luidt dat getal dus 3333334). Beschrijf zo nauwkeurig mogelijk, hoe het kwadraat van dat getal er uit ziet.
7. Construeer een ruit, die in vier congruente scherphoekige gelijkbenige driehoeken is te verdelen. Maak de zijden van die ruit 8 cm lang. Bereken zijn oppervlakte.

°De Melencolia ontleed

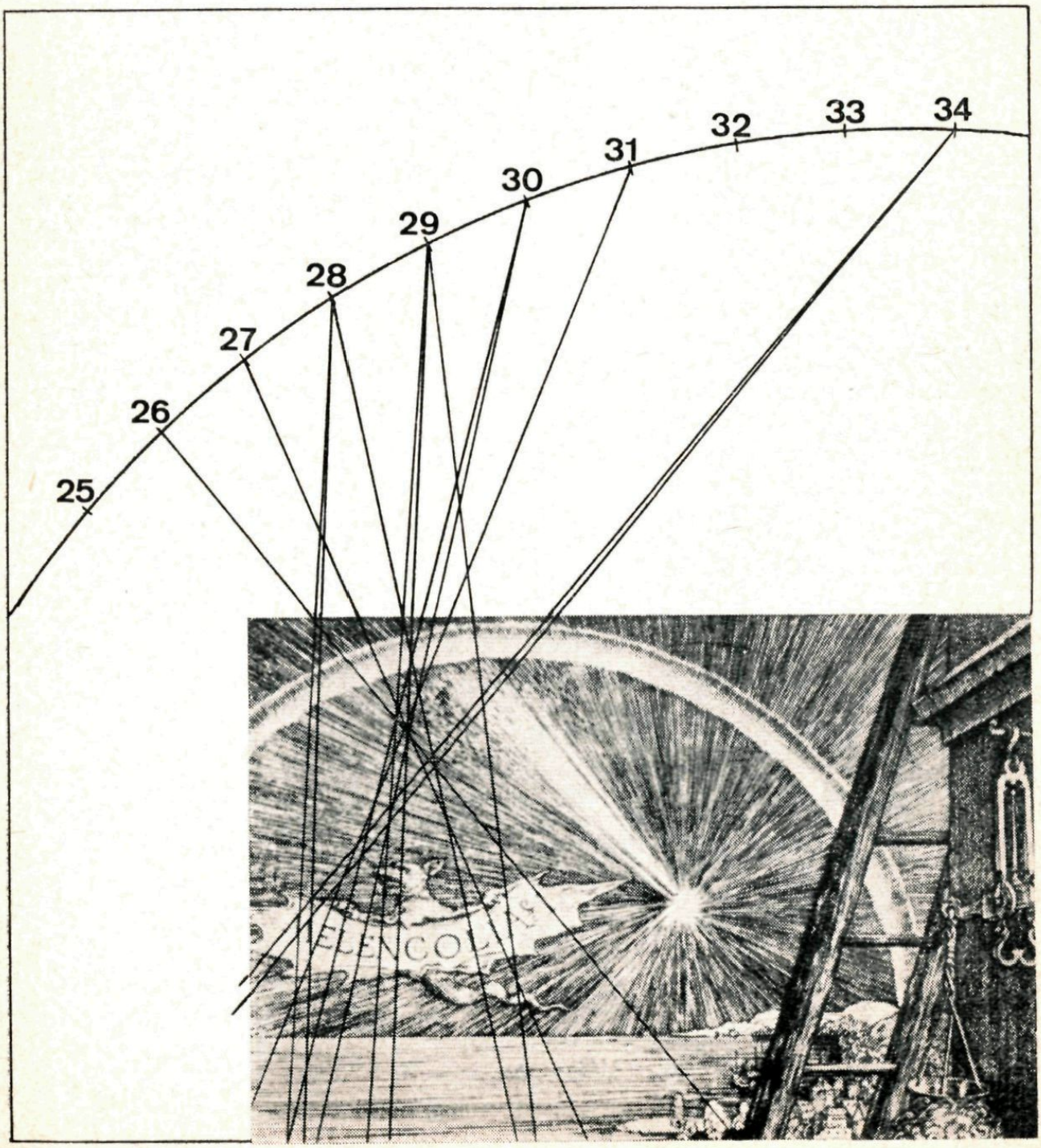
We geven hier een samenvatting van de verklaring van de meetkundige bouw zoals die door de heer De Haas in zijn boek is uiteengezet. De vraag of het meetkundig stramien vooraf door Dürer is ontworpen, dan wel of juist achteraf een meetkundige opbouw blijkt, is niet te beantwoorden. Hoewel misschien niet iedereen het eens zal zijn met de conclusie van de heer De Haas, leek ons zijn mening toch belangwekkend genoeg om te worden opgenomen.

Basis van de compositie is een cirkel die wordt verdeeld in 68 gelijke bogen. (Met de constructie van regelmatige veelhoeken, exact of benaderd, was Dürer vertrouwd.)
Het middelpunt van de cirkel ligt op de linkerarm van het cherubijntje. Als de arm doorschijnend was zou de schrijfstift vlak bij het middelpunt wijzen. Zoals in de fig. op blz. 12 is te zien hebben vele lijnen op de gravure de richting van koorden die de deelpunten van de cirkel verbinden, b.v. zes van de ribben van de afgeknotte kubus, de benen van de passer, de voorzijden van het boek, de arm van de balans. Het fraaist echter wordt dit gedemonstreerd op blz. 14 waar een vergroting is gemaakt van een deel van de figuur. Van de 15 opstaande en schuin opgaande lijnen van de schijnbaar onregelmatig neergeschreven letters van de titel Melencolia§1, snijden er twaalf door verlenging de cirkel in een deelpunt.
Tenslotte zou de aanwezigheid van het magisch verkant een aanwijzing kunnen vormen voor de regelmatige 68-hoek. De constante som hiervan was immers 34. De slotsom van de heer De Haas luidt:


L
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33


R
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33

„De gangbare deskundige mening dat vrije schilderkunst niet van doen heeft met meetkundige vlakdeling, is weerlegd door het samengaan van Dürer's in deze studie blootgelegde meetkundige bouw van de Melencolia, met de uitbundige lof door diezelfde mening, argeloos, deze gravure toegezwaaid. De averechtse mening, meetkundige vlakdeling betreffend, zal dus gekeerd moeten worden. Dürer toont ons aan dat ook de vrije schilderkunst in de ban ligt van Goethe's woord: das Gesetz nur kan uns Freiheit geben".



°Is dat een kwadraat?

De getallen 49 en 196 herkennen we direct als kwadraten. Zodra een getal boven de 1000 ligt wordt het herkennen van kwadraten al moeilijker en van grotere getallen kunnen we het in het algemeen helemaal niet zien. Er zijn echter twee gemakkelijke methoden om te kunnen constateren, dat een getal *geen* kwadraat is. De eerste van de twee stelt ons in staat dadelijk te zeggen, dat 475623872 geen kwadraat is. Deze methode laat ons in de steek bij het getal 89254869. Maar daar geeft de tweede methode het antwoord: Geen kwadraat! Beide methoden laten ons in de steek bij de getallen 147456 en 174456. Verdere controle (bijvoorbeeld door schatten en proberen) leert ons, dat 147456 $= 384^2$, maar dat 174456 geen kwadraat is. De beide methoden geven dus geen waterdicht systeem, maar zijn toch welkom, omdat ze ons heel wat rekenen en proberen besparen.

1e methode:

We kijken naar het laatste cijfer van het getal. Alleen als dat een 0, 1, 4, 5, 6 of 9 is *kan* het getal een kwadraat zijn. Kijk maar: $0^2 = \mathbf{0}$, $1^2 = \mathbf{1}$, $2^2 = \mathbf{4}$, $3^2 = \mathbf{9}$, $4^2 = \mathbf{16}$ en $5^2 = \mathbf{25}$.

Omdat a^2 en $(10 - a)^2$ op het zelfde cijfer eindigen, hoeven we niet verder te gaan. Immers $(10 - a)^2 = 100 - 20a + a^2$, dat is een tienvoud $+ a^2$, zodat het op het zelfde cijfer eindigt als a^2. Ook zal elk 10-voud $+ a$ een kwadraat opleveren, dat op het zelfde cijfer eindigt als a^2, omdat $(10p + a)^2 = 100p^2 + 20pa + a^2$.
We zien dus zo, dat 475623872 geen kwadraat kan zijn, omdat het op 2 eindigt.

2e methode:

Hiervoor moeten we even kijken naar de bekende eigenschap: Elk natuurlijk getal is gelijk aan een negenvoud plus de som van zijn cijfers. De z.g. negenproef is besproken in het vierde nummer van de vorige jaargang.
Bijvoorbeeld:
10, 100, 1000, 10000, enz. zijn allemaal negenvouden + 1. Dus 30, 300, 3000, 30000, enz. zijn allemaal negenvouden + 3.
Je zult nu gemakkelijk begrijpen, dat 43951, dat gelijk is aan 40000 + 3000 + 900 + 50 + 1 gelijk is aan een negenvoud plus 4 + 3 + 9 + 5

+ 1, dus een negenvoud + 22. Maar 22 is weer een negenvoud + 4. Dus is ook 43951 een negenvoud + 4. We zullen deze 4 het *proefgetal* van 43951 noemen. We kijken nu naar de proefgetallen van een aantal kwadraten. Onder elk der genoemde kwadraten is zijn proefgetal geschreven:

1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	4	0	7	7	0	4	1	0
100	121	144	169	196	225	256	289	324
1	4	0	7	7	0	4	1	0
361	400	441	484	529	576	625	676	729
1	4	0	7	7	0	4	1	0

Je ziet, dat de proefgetallen 1, 4, 0 en 7 steeds terugkeren. Dat dit zo moet gebeuren kun je inzien als je bedenkt, dat $(9a + b)^2 = 81a^2 + 18ab + b^2 =$ een negenvoud $+ b^2$. Alle getallen $(9a + b)^2$ hebben dus het zelfde proefgetal als b^2. De proefgetallen van de kwadraten 1 tot en met 81 keren dus steeds terug.

Nu kunnen we de in het begin genoemde getallen nog eens bekijken: 89254869 → proefgetal 6, dus geen kwadraat. Het proefgetal is zonder veel rekenen te vinden, als je bedenkt, dat bij het berekenen van de som der cijfers wel weggelaten kunnen worden:
a. de beide negens, die in het getal voorkomen,
b. de cijfers 5 en 4, die samen 9 zijn,
c. de cijfers 8, 2 en 8, die samen 18 zijn.
De 6 blijft dan automatisch over.

Verder hadden we nog genoemd:
147456 en 174456. Ze eindigen beide op 6 en maken dus *een kans* een kwadraat te zijn. Van beide is het proefgetal 0. Beide *kunnen* om deze reden een kwadraat zijn. Hier laten de twee methoden ons dus in het ongewisse. Maar ze helpen ons bij het zoeken naar kwadraten toch al veel getallen uitzeven. Bovendien zijn ze zo snel toe te passen, dat het de moeite waard is ze eerst te proberen, vóór er verder gerekend wordt.

Vraag: Kunnen deze methoden toegepast worden bij het opsporen van derde machten? Schrijf van een aantal derdemachten maar eens de eindcijfers en de proefgetallen op.

°°Voetballen en wiskunde

door J.J.A.van Mastrigt

Hoewel het moderne voetbal wel „berekenend" is, zullen velen zich afvragen wat voetballen met wiskunde te maken heeft. Dat de wiskunde en wel de kansrekening toch bij voetbal een rol van betekenis speelt, zullen we in het volgende proberen aan te tonen.

We beschouwen het Europacuptournooi, waarin Ajax dit jaar triomfen heeft geoogst. Er doen 32 clubs mee. Door loting worden paren gevormd. Twee clubs maken dan door twee wedstrijden, eventueel nog met een beslissingswedstrijd, uit wie er verder mag bekeren. Het zal iedereen duidelijk zijn dat de twee sterkste clubs niet in de finale behoeven te komen.

Om het eenvoudig te houden nemen we voor het vervolg van dit verhaal aan dat we de 32 clubs kunnen ordenen, d.w.z. dat we ze zodanig kunnen rangschikken en van nummers 1, 2, 3, . . ., 32 kunnen voorzien dat 1 wint van 2, 2 van 3, enz. Dat komt er op neer dat iedere club wint van een club met een hoger rangnummer. We interesseren ons nu voor de vraag: Wie komen er in de finale. Het is duidelijk dat nummer 1 er in ieder geval in komt, 2 behoeft er niet in te komen, kan zelfs in de eerste ronde al zijn uitgeschakeld, als ze zo ongelukkig waren tegen 1 te loten.

Nu beweer ik dat zelfs nummer 17 in de finale kan komen, en bovendien dat de kans dat 2 de finale bereikt groter is dan dat hij die niet bereikt.

We nemen even aan dat in de eerste ronde tegen elkaar spelen de nummers 30–31, 1–6, 26–11, 25–17, 18–2, 32–16, 24–8, 29–12, 23–5, 22–13, 27–14, 21–9, 15–28, 20–4, 7–19, 3–10.

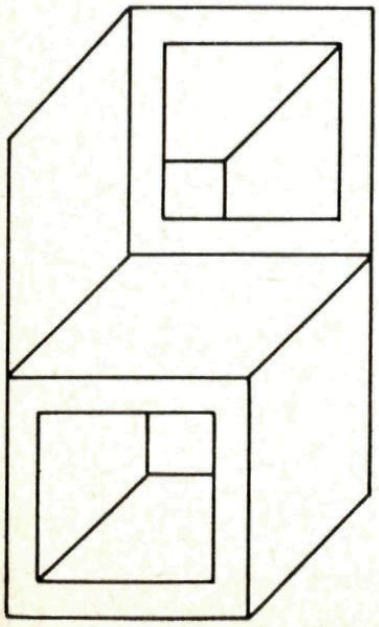
Alle laagste nummers komen nu in de tweede ronde, dus
30, 1, 11, 17, 2, 16, 8, 12, 5, 13, 14, 9, 15, 4, 7, 3.

In werkelijkheid wordt nu tussen deze nummers opnieuw geloot. Wij zullen echter in de tweede ronde tegen elkaar laten spelen:
30–1, 11–17, 2–16, ..., 7–3.

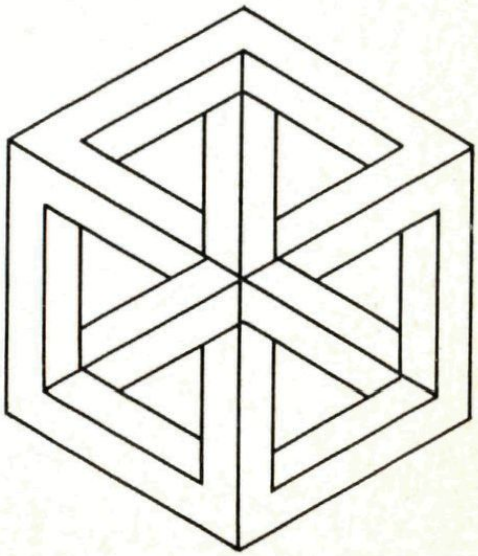
Je kunt gemakkelijk nagaan dat de finale nu wordt 1–3. Je kunt uit dit voorbeeld afleiden dat de finalisten bestaan uit de laagste nummers van de eerste en de laatste zestien.
De kans dat 2 in de finale komt: Stop nummer 1 in een groep, de kans dat 2 dan in de andere zit is 16/31, immers van de overgebleven 31 clubs komen er 15 in dezelfde groep als 1 en 16 in de andere. De kans dat 2 de finale haalt is dus 16/31, inderdaad iets meer dan 50%.
Nu 17. De kans dat 17 de finale haalt is even groot als de kans dat de nummers 1 t/m 16 een groep vormen. De getallen 1, 2, 3 kan ik op 3! = 1.2.3 = 6 (spreek uit 3 faculteit) manieren rangschikken: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Evenzo kan ik 1 t/m 16 op 16! = 1.2.3. . . . . 16 manieren rangschikken.
Plaats de getallen 1 t/m 32 in hun natuurlijke volgorde. De eerste 16 vormen groep I, de tweede 16 groep II. Wanneer we de getallen van groep I onderling van plaats verwisselen, is dit niet van invloed op finale. In totaal kunnen we ze op 16! manieren rangschikken. Eveneens die van groep II. Tenslotte kunnen we groep I en II van plaats verwisselen, zodat er 16!16!.2 mogelijkheden zijn waarbij de finale 1–17 is. Deze mogelijke rangschikkingen vertegenwoordigen evenzovele lotingen. Het totale aantal mogelijke lotingen is echter 32!, zodat de kans op de finale 1–17 is

$$\frac{2.16!.16!}{32!} = \tfrac{1}{3} \cdot 10^{-8}$$

of wel één op de driehonderd millioen.



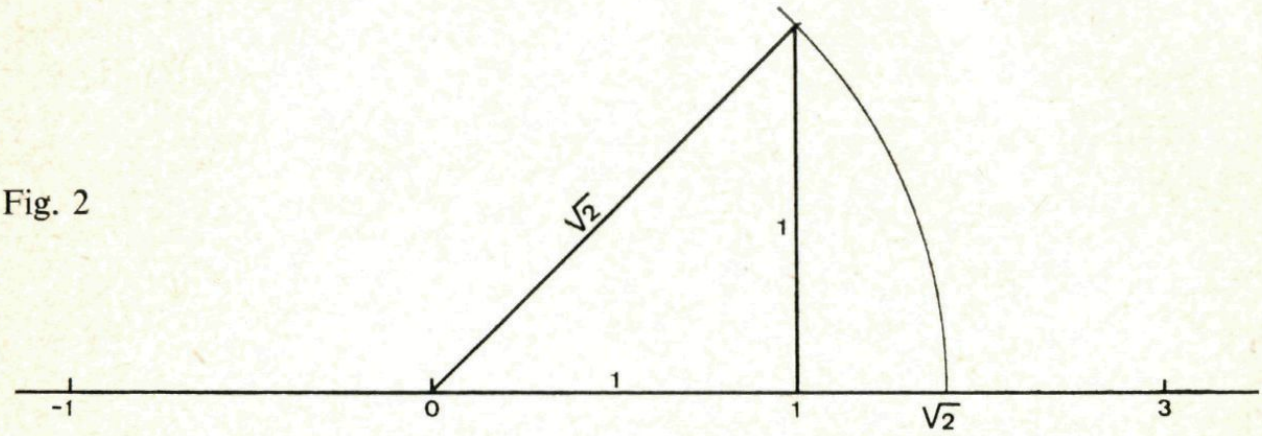
superkubus



°°Kettingbreuken

Tussen de gehele getallen en de breuken bevinden zich op de getallenlijn de irrationale getallen, zoals $\sqrt{2}$.
Het is niet moeilijk de plaats van het getal $\sqrt{2}$ op de getallenlijn te construeren. Zie fig. 2.

Fig. 2



Er zijn verschillende methoden om door berekenen de grootte van $\sqrt{2}$ te benaderen. Een van deze methoden maakt gebruik van kettingbreuken. Dat gaat zo:

Het is duidelijk, dat $\quad 1 < \sqrt{2} < 2$

Stel daarom $\quad \sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{x}$

Dan is $\quad x = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 \qquad [1]$

Hieruit blijkt, dat $\quad 2 < x < 3.$

Stel daarom $\quad x = 2 + \dfrac{1}{y}$

Dan is $\quad y = \dfrac{1}{x - 2} = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} = x. \qquad$ Zie [1].

We kunnen nu de kettingbreuk opbouwen, want nu blijkt dat

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}}} = \text{enz.}$$

Tot in het oneindige kunnen we doorgaan met het vervangen van x door $2 + \dfrac{1}{x}$. Voor $\sqrt{2}$ vinden we zo een niet eindigende ketting-

breukontwikkeling:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

Hoe verder we doorgaan, hoe nauwkeuriger de benadering wordt. Hier zijn een aantal benaderingen:

1 (te klein)

$1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} = 1{,}5$ (te groot)

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = 1{,}4 \qquad \text{(te klein)}$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1\frac{5}{12} \approx 1{,}416 \text{ (te groot)}$$

Het zal je niet moeilijk vallen verdere benaderende breuken te berekenen. Ze zijn afwisselend te klein en te groot en geven al snel een vrij nauwkeurige benadering.

Niet altijd gaat het vinden van een kettingbreuk zo snel als bij de benadering van $\sqrt{2}$. Als voorbeeld nemen we nog $\sqrt{23}$.

$4 < \sqrt{23} < 5$ Stel dus $\sqrt{23} = 4 + \frac{1}{x}$. $\quad x = \frac{\sqrt{23} + 4}{7}$

$1 < x < 2$ Stel dus $x = 1 + \frac{1}{y}$. $\quad y = \frac{1}{x - 1} = \frac{\sqrt{23} + 3}{2}$

$3 < y < 4$ Stel dus $y = 3 + \frac{1}{z}$. $\quad z = \frac{1}{y - 3} = \frac{\sqrt{23} + 3}{7}$

$1 < z < 2$ Stel dus $z = 1 + \frac{1}{t}$. $\quad t = \frac{1}{z - 1} = \sqrt{23} + 4$

$8 < t < 9$ Stel dus $t = 8 + \frac{1}{u}$. $\quad u = \frac{1}{t - 8} = \frac{1}{\sqrt{23} - 4}$

$u = x$

Dus vinden we voor de benadering van $\sqrt{23}$ de kettingbreuk

$$\sqrt{23} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}$$

We vinden hiermee de volgende benaderingen:

$$4\frac{35}{44} < \sqrt{23} < 4\frac{39}{49}$$

of met decimalen

$$4{,}7954 < \sqrt{23} < 4{,}7959$$

Ook voor het bekende getal π is een kettingbreukontwikkeling. Deze heeft niet zoals de beide vorige een periode. Men kan nl. bewijzen, dat een periodieke kettingbreuk wortel is van een vierkantsvergelijking met gehele coëfficienten. Dus voor elke periodieke kettingbreuk kan geschreven worden een getal van de vorm $D \pm \sqrt{E}$ waarin D en E rationale getallen zijn, E positief en geen zuiver kwadraat. π is niet zo'n getal. Dus is de kettingbreukontwikkeling van π niet periodiek.

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}$$

benaderende waarden voor π, die we hiermee vinden zijn o.a.:

$$3, \quad \frac{22}{7}, \quad \frac{133}{106}, \quad \frac{355}{133}, \quad \frac{103993}{33102}, \text{ enz.}$$

Denkertjes

8. Welke natuurlijke getallen zijn te schrijven als het verschil van twee kwadraten (van natuurlijke getallen)?
9. Bepaal elk paar natuurlijke getallen x, y dat voldoet aan de vergelijking $x^2 + 4xy + 3y^2 = 97$.
10. Er is een halve cirkel met een straal r gegeven. Van een vierhoek is bekend, dat geen van zijn hoekpunten buiten die halve cirkel ligt. Wat is de grootste waarde, die de oppervlakte van die vierhoek kan hebben? Beredeneer je antwoord zorgvuldig.

°°Toppen, dalen en zadels

De oppervlakte van een bergachtig eiland kan er bijzonder grillig uitzien. In dit artikel vereenvoudigen we echter de situatie een beetje: we denken ons een eiland, waarvan de oppervlakte slechts vier soorten punten bevat.

De punten van de eerste soort zijn de *toppen*. Van welke kant je zo'n top ook nadert, je zult altijd moeten klimmen. In figuur 3 is die vermoeiende toestand schematisch in beeld gebracht. Beschouw die figuur maar als een „bovenaanzicht" van zulk een top. De pijlen duiden, evenals in de volgende figuren, de klimrichtingen aan. Vanzelfsprekend komen er op ons eiland ook *dalen* voor, en dat zijn dan de punten van de tweede soort. Bij zulk een dal kost niet het naderen, maar juist het verlaten de nodige inspanning. Een bovenaanzicht van een dal vind je in figuur 4.

De punten van de derde soort spelen in dit verhaal een zeer bescheiden rol. Het zijn de punten, die op glooiende hellingen liggen. Figuur 5 toont je een bovenaanzicht van zo'n punt. Je weet natuurlijk dat je op een helling een weg kunt volgen, die stijgt noch daalt. De richting, die die weg in het beschouwde punt heeft, wordt door de stippellijn aangegeven.

De punten van de laatste soort heten *zadels*. Ze worden door figuur 5 aan je voorgesteld, waarin de beide stippellijnen wel zullen opvallen. Die betekenen weer hetzelfde als in figuur 6: richtingen, waarin je het zadel zonder stijgen of dalen kunt naderen. Een beter beeld van een zadel geeft misschien nog de tekening op blz. 24. Daaruit zul je kunnen begrijpen, dat een op grote hoogte in het gebergte liggend zadel een „pas" genoemd wordt. Bedenk echter wel dat er ook op lagere niveaux zadels voorkomen, bijvoorbeeld in een duinlandschap.

We nodigen je nu van harte uit om eerst maar eens te gaan zitten piekeren of er op de jou bekende eilanden nog punten voorkomen, die niet tot een van de vier genoemde soorten behoren. Eerlijk gezegd twijfelen we er niet aan, dat je zulke andere punten wel zult vinden. Maar we hebben dan ook in het begin van dit verhaal gesteld, dat we de werkelijkheid wat zouden vereenvoudigen.

Op elk vereenvoudigd eiland geldt nu de volgende stelling: tussen het aantal toppen t, het aantal dalen d en het aantal zadels z bestaat de betrekking $t + d - z = 1$. Stel je bijvoorbeeld eens zo'n eiland voor, dat slechts bestaat uit één stompe, uit de zee oprijzende berg. Op dat

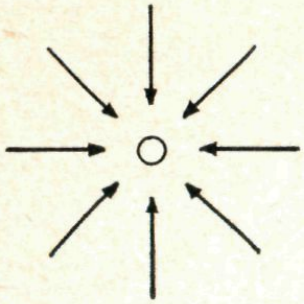


Fig. 3

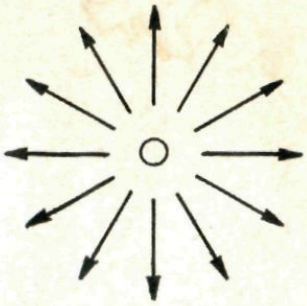


Fig. 4

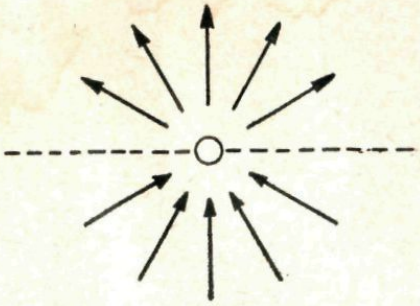


Fig. 5

eiland is dan $t = 1$ en $d = z = 0$, zodat inderdaad $t + d - z = 1$ klopt. Of neem een eiland, dat bestaat uit twee bergen, waartussen zich een zadel bevindt. Nu $t = 2$, $d = 0$ en $z = 1$, zodat alweer $t + d - z = 1$ klopt.

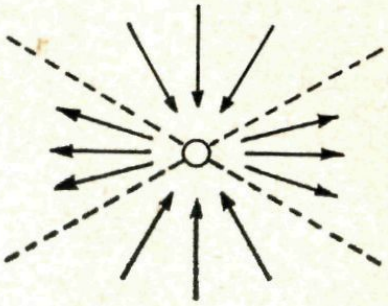


Fig. 6

Voor het bewijs van deze stelling moet je je proberen in te denken, dat het eiland bestaat uit poreus materiaal, waar het water dus in door kan dringen, zodat het niveau van het buitenwater overal volkomen gelijk is aan dat van het grondwater. Bovendien moet je je indenken dat het eiland heel langzaam en geleidelijk in de zee wegzakt; natuurlijk mag je je ook voorstellen dat de zeespiegel geleidelijk aan stijgt, want dat komt op het zelfde neer. En let nu maar eens goed op, wat er dan allemaal gaat gebeuren:

Op zeker ogenblik zal het peil van het grondwater het niveau bereiken van het diepste op het eiland aanwezige dal. Zakt het eiland dan nog iets verder weg, dan begint er zich een binnenmeer te vormen op de plaats, waar eens dat dal was. In het algemeen geldt dat wanneer een dal het waterniveau passeert, dan neemt het aantal wateroppervlakken met één toe.

Iets soortgelijks gebeurt er, wanneer een top van het eiland onder het water wegzakt. Eerst was die top aan alle kanten door water omringd; hij vormde als het ware een klein eilandje op zich zelf. Daarna sluit het water zich over die top heen. En het resultaat is, dat er dan één stukje vaste grond minder is dan voorheen. Dus als een top het waterniveau passeert, dan neemt het aantal landoppervlakken met één af.

Iets ingewikkelder is de situatie, wanneer een zadel onder het water verdwijnt. Vlak voordat dit gebeurt, bevindt zich aan de beide „lage" zijden van het zadel nog water en daartussen in, op het zadel zelf, ligt dan nog een smalle strook land. Nu is het mogelijk dat die beide water-

oppervlakken aan weerszijden van het zadel deel uitmaken van één groot wateroppervlak (en dat kan dan een binnenmeer zijn of ook wel het buitenwater; denk maar eens aan het voorbeeld van het eiland met twee toppen en een zadel). In dat geval zal er door het samenvloeien van het water over het zadel heen geen nieuw wateroppervlak bijkomen, wel neemt het aantal landoppervlakken met één toe. Het aantal zadels, waarbij dit gebeurt, noemen we z_1. De enige andere mogelijkheid is, dat vlak voor het wegzinken van het zadel er zich inderdaad twee verschillende wateroppervlakken aan weerszijden van het zadel bevinden. Door het samenvloeien daarvan neemt het aantal wateroppervlakken met één af, terwijl het aantal landoppervlakken niet verandert. Het aantal zadels, waarbij deze tweede situatie optreedt, noemen we z_2. Al boekhoudende komen we nu tot de volgende conclusie. Het aantal landoppervlakken neemt met t af en met z_1 toe gedurende de gehele rampspoedige gebeurtenis. Voor we begonnen hadden we één eiland en tenslotte hadden we er geen meer over. Dus $t - z_1 = 1$ of $t = 1 + z_1$. Het aantal wateroppervlakken neemt met d toe en met z_2 af. Maar in totaal verandert het niet, omdat er één zee was bij het begin en één zee aan het eind van het verhaal. Dus $d = z_2$. Voegen we deze beide resultaten samen, dan komt er $t + d = (1 + z_1) + z_2 = 1 + z$. En dat was juist de te bewijzen stelling.

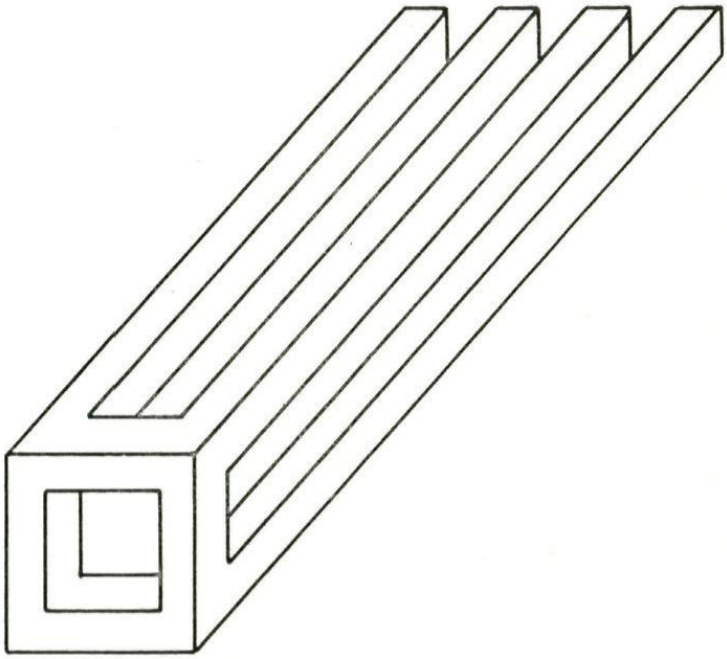
We beseffen wel, dat er in het bovenstaande hoge eisen gesteld worden aan je voorstellingsvermogen. Mocht je moeilijkheden ondervinden daarbij, dan kunnen we je slechts een advies geven: zoek de zon en de zee of de zandbak op en ga kliederen.

Coëfficiënt Uit het latijn. *Co = samen, tegelijk. Efficere = bewerken.*

Faculteit Uit het Latijn, *facultas = vermogen om iets te doen.* In de wiskunde is een faculteit een product van factoren die telkens met 1 toenemen:
$n! = 1.2.3.4. \ldots\ldots n$

Generaliseren Uit het Frans, *uitbreiden, algemeen maken.*

Gravure afdruk van een houten of metalen plaat, waarin met een *graveerstift* letters of figuren zijn gekrast.



Oplossingen van alle puzzels en problemen inzenden voor 10 november. Voor adressen zie achterzijde.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Wilhelminapark 22, Breda.
Drs. A. B. OOSTEN, Turftorenstraat 11A, Groningen.
A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Artikelen en problemen kunnen naar één van de redacteuren worden gestuurd.
Oplossingen van *Denkertjes* kunnen naar het tweede adres worden gezonden, oplossingen van andere problemen naar het derde adres.
Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.
Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, *f* 2,50 per jaargang. Voor anderen *f* 4,—.
Abonnementen kan men opgeven bij J. B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J. B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.