

PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

3

*Zevende jaargang
1967/1968*



Kartograaf aan het werk.

°Het tekenen der aarde

Onze aarde is een bol. De bladen van onze atlassen zijn platte vlakken. Hoe is het mogelijk de bolle aarde op die platte vlakken af te beelden? Was de aarde een cilinder of kegel dan was dit geen probleem. Cilinders en kegels laten zich op een plat vlak „afrollen”. Maar dat kan bij een bol niet. Daarom vertoont elke afbeelding van de aarde afwijkingen.

Er is een veelheid van methoden om kaarten te maken, het is zelfs een speciaal vak, kartografie genaamd. Wie een goede atlas doorbladert ziet bij de meeste kaarten de manier van afbeelden vermeld. Toch zijn alle *afbeeldingsmethoden*, meestal *projectiemethoden* genoemd te herleiden tot maar drie grondvormen:

- a. *projectie op een raakvlak aan de aarde*;
- b. *cilinderprojectie*; hierbij wordt de aarde eerst afgebeeld op een omhullende cilinder waarna deze wordt afgerold,
- c. *kegelprojectie*; hierbij wordt de aarde eerst afgebeeld op een omhullende kegel.

Welke methode wordt gekozen hangt af van het doel van de kaart. Soms moeten oppervlakten in de juiste verhouding worden weergegeven soms afstanden.

Stereografische projectie is een voorbeeld van projectie op een raakvlak, Mercatorprojectie is een vorm van cilinderprojectie.

Stereografische projectie

De kortste verbinding van twee punten op aarde is de verbinding langs de grote cirkel door die twee punten, dat is de cirkel die zijn middelpunt heeft in het middelpunt van de aarde. De evenaar en de meridianen zijn grote cirkels, de parallelcirkels niet. Door elk tweetal punten (die niet elkaars *tegenpunten* of *antipoden* zijn) gaat precies één grote cirkel.



De vliegtuigen van Amsterdam naar Tokio gaan zoveel mogelijk langs de grote cirkel tussen deze twee plaatsen en deze loopt ongeveer over de noordpool.

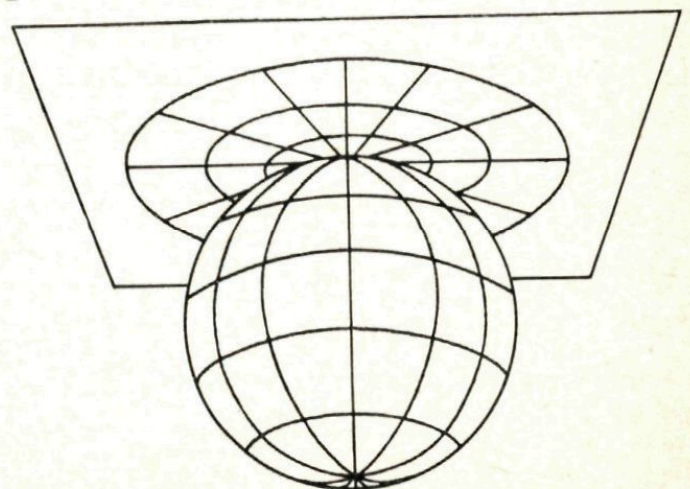


Fig. 1

Op de kaart van de noordpoolstreken is deze luchtlijn als een rechte lijn afgebeeld. De kaart is gemaakt met de methode der stereografische

projectie. Door de noordpool is een raakvlak aan de aarde aangebracht. Vanuit de zuidpool worden nu lijnen getrokken, die eerst de bol en daarna het vlak in een bepaald punt snijden.

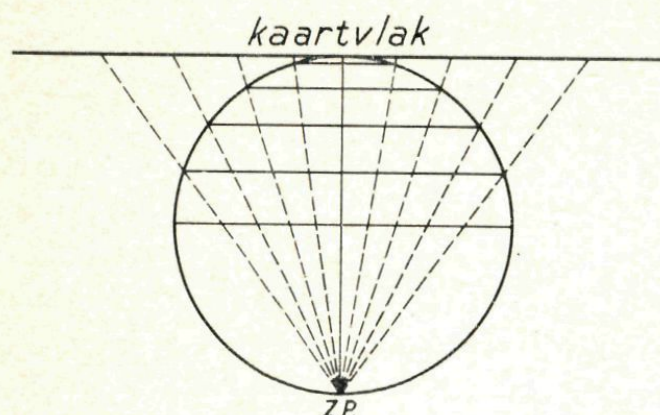


Fig. 2

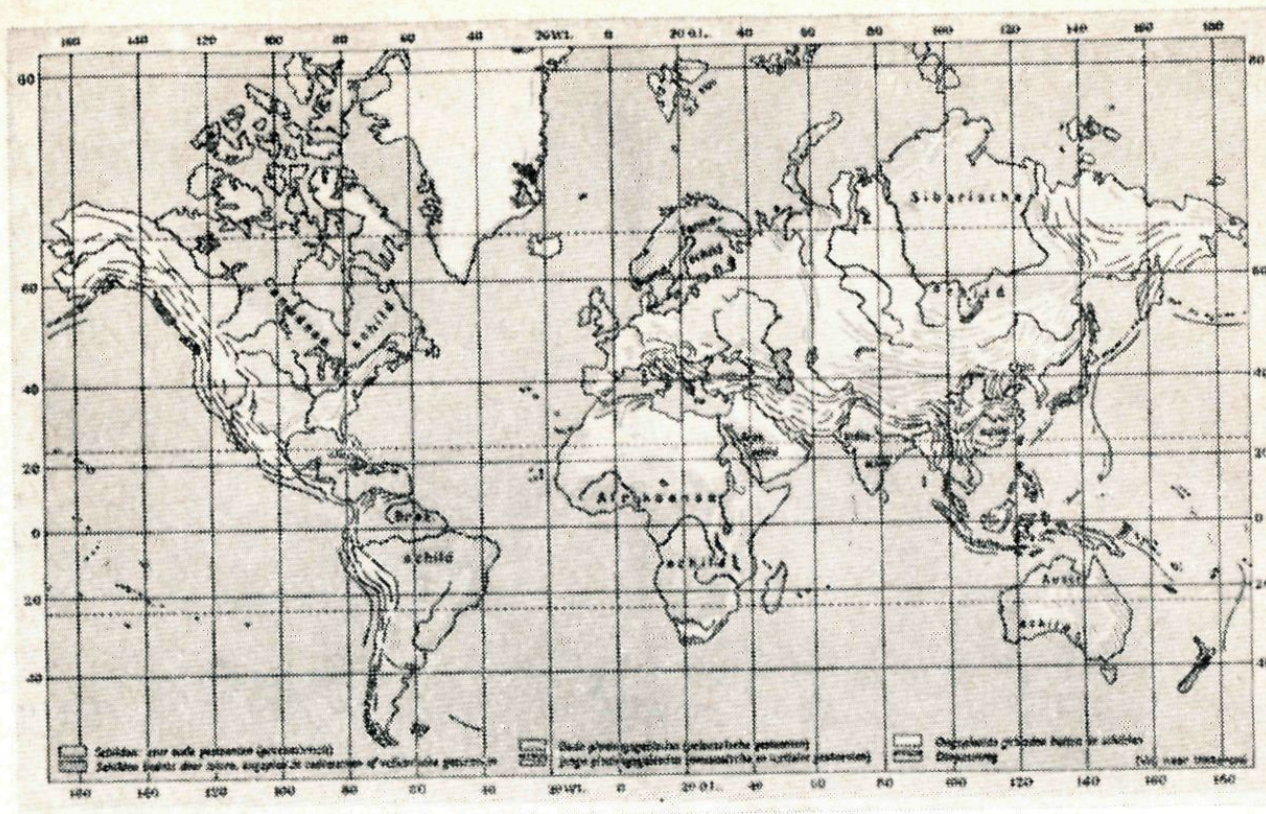
Het punt in het vlak is de afbeelding van het punt op de bol. Op deze wijze worden de breedtecirkels afgebeeld als een stelsel cirkels met de noordpool als middelpunt. De meridianen worden stralen van deze cirkels. Ook deze afbeelding is hoektrouw en geeft niet veel vertekening, mits men binnen een niet te grote omgeving van de pool blijft. De kaart is dan ook niet verder getekend dan tot de noordpoolcirkel ($66\frac{1}{2}^{\circ}$ NB.).

Mercatorprojectie

Zeevaarders hebben graag een kaart waarop ze de koers gemakkelijk kunnen uitzetten. De kaart moet dan „hoektrouw” zijn, dat wil zeggen de hoek die de koers maakt met de meridianen moet juist worden weergegeven. Dit is het geval met de Mercator-projectie, een vorm van cilinderprojectie. De kaarten van Mercator zijn door hem geconstrueerd volgens een vrij ingewikkeld procédé. In principe komt zijn wijze van afbeelden hierop neer:

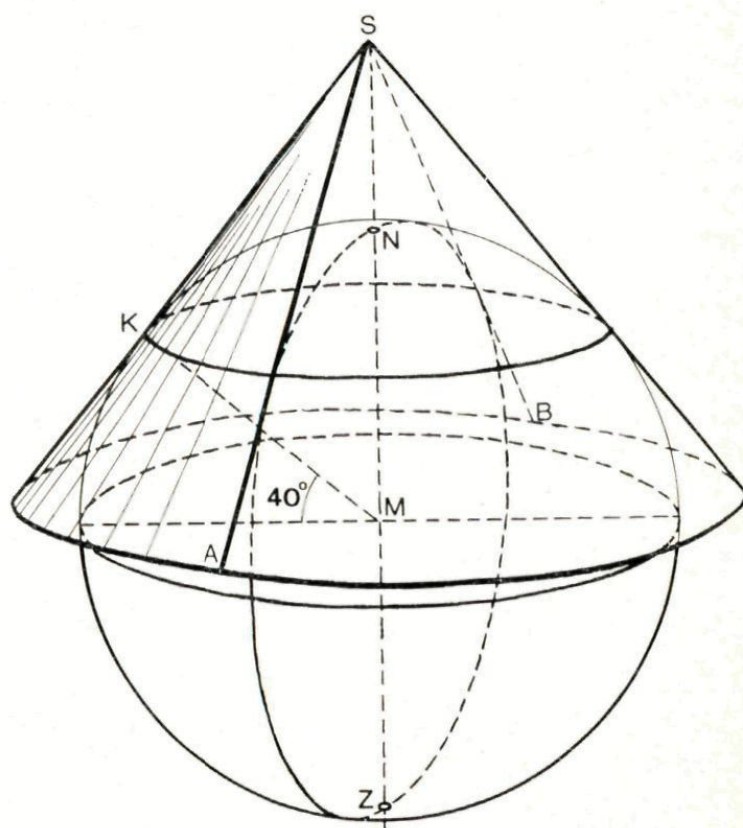
De evenaar en de parallelcirkels worden afgebeeld als een stelsel evenwijdige lijnen. De meridianen staan hier loodrecht op.

Doordat de parallelcirkels dezelfde lengte krijgen als de evenaar worden ze uitgerekt. Deze uitrekking wordt nu in zekere zin weer goed gemaakt door hun onderlinge afstanden ook uit te rekken en wel (en dat is de vondst van Mercator) evenredig met de uitrekking van de



parallelcirkels zelf. De afbeelding van Mercator wordt daarom wel genoemd de „kaart met de wassende breedten”.

kegelprojectie



Bij de kegelprojectie denkt men zich een kegel die de aarde omhult, zoals in fig. 3. Soms neemt men ook wel een kegel die de aarde snijdt.

De kegel in de figuur raakt de aarde langs de parallelcirkel op 40° NB. Zijn top S ligt dan op het verlengde van de aardas.

De vlakken van de meridiaancirkels snijden de kegel volgens rechte lijnen, zoals SA en SB. Deze beschrijvende lijnen van de kegel kunnen dienen als beeldfiguren van de meridianen. Wordt de kegel langs SB opgeknijpt en dan in het platte vlak van de kaart uitgespreid, dan worden de meridianen afgebeeld langs de stralen van de cirkelsector met S als middelpunt. Hoe de punten van de meridianen op deze beschrijvenden worden afgebeeld hangt weer af van het doel van de

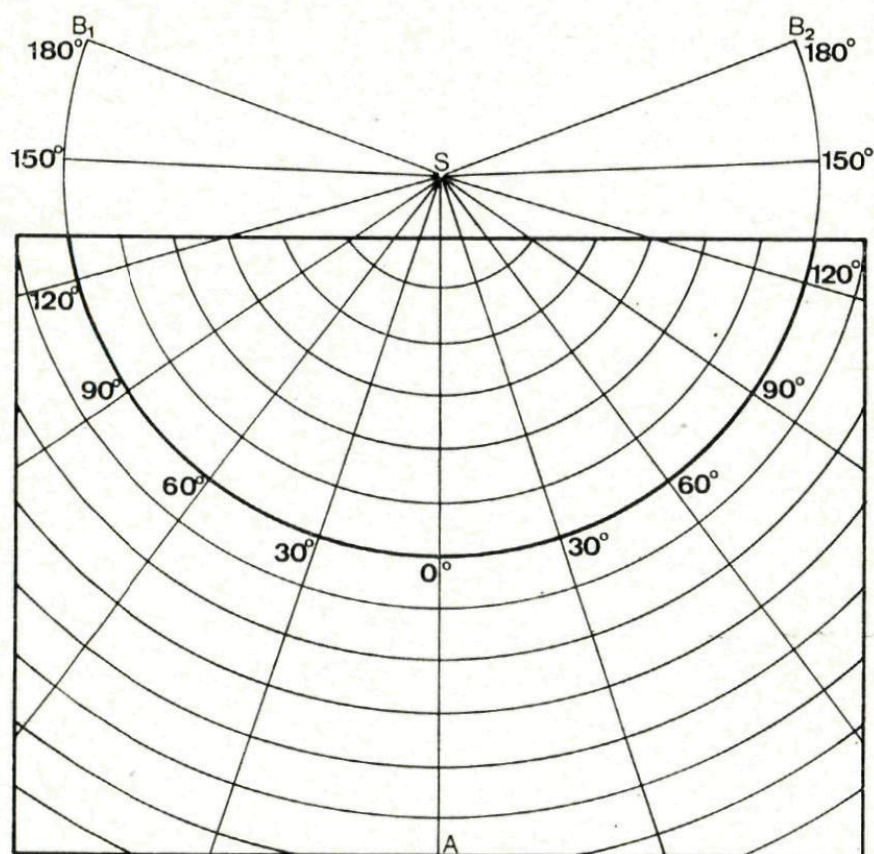


Fig. 4

kaart. Worden de parallelcirkels op gelijke afstanden van elkaar afgebeeld, dan worden de afstanden in meridiaanrichting juist weergegeven. (fig. 4). Bij een hoektrouwe (conforme) kegelprojectie nemen de afstanden der parallelcirkels van het midden van de kaart naar de rand toe, zoals de kaart op blz. 54.

We kunnen nog opmerken dat de kegelprojectie overgaat in cilinderprojectie als de top oneindig ver weg ligt en in projectie op een raakvlak als de top met de noordpool samenvalt.



In dit nummer . . .

nemen we onder meer de kartografie onder de loep. Weliswaar is het maken van kaarten niet iets dat tot de wiskunde gerekend moet worden, een wiskundige achtergrond is toch duidelijk herkenbaar. In een leerboek over de kartografie kom je dan ook zeker wiskunde tegen. Figuren van Lissajous heb je misschien wel eens gezien in een natuurkundeles, zo niet dan komt dat nog wel eens. Je kunt er in elk geval iets over lezen op blz. 60 en volgende.

Denkertjes en prijsvragen

De lootprijs voor de Denkertjes uit het eerste nummer is gegaan naar H.K.Söhngen, van het Gymnasium Haganum in Den Haag. Het gedrang aan de top van de ladder is zo groot dat we niet alle namen kunnen vermelden. Veel lezers hebben dit jaar blijkbaar besloten hun abonnementsprijs terug te verdienen door 300 punten te verzamelen met de Denkertjes van de eerste vier nummers. Misschien is het goed ook nog even te wijzen op de vette prijzen voor de prijsvragen op blz. 40 en volgende van het voorgaande nummer. De inzendtermijn is tot 1 april 1968.

Torusreeks

De belangstelling voor de wiskunde neemt de laatste jaren toe, ook onder de jeugd. Het is dan ook verheugend dat de Nederlandse Onderwijscommissie van het Wiskundig Genootschap het initiatief heeft genomen tot het uitgeven van een serie boekjes die leesbaar zijn voor de belangstellende scholier.

De serie draagt de naam Torusreeks. Het eerste deeltje is verschenen en behandelt de verzamelingen.



Verzamelingen nemen in de moderne wiskunde een zo fundamentele plaats in, dat het nauwelijks toeval kan zijn dat dit het onderwerp van het eerste deel is geworden. Het is weinig overdreven te zeggen dat verzamelingen het begin van alle wiskunde zijn. Het boekje is geschreven door Dr. P. G. J. Vredenduin, telt 80 bladzijden en heeft ongeveer hetzelfde formaat als PYTHAGORAS. Het is dus bepaald geen afschrikwekkende pil, uitwendig. Ook inwendig is het beslist niet afschrikwekkend. Het is bijna het tegengestelde van de pocketboekjes die in vertaling tot ons komen en waarin vaak een grote hoeveelheid onderwerpen staan, die nauwelijks worden uitgelegd. In dit boekje wordt een beperkt onderwerp goed uitgelegd.

Van de lezers

Een aantal lezers heeft onmogelijke figuren gestuurd. Eerlijk gezegd waren ze niet alle even origineel en ook niet alle werkelijk onmogelijk, zoals bv. ook deze figuur van Huug Uilenbroek uit Haarlem niet echt onmogelijk is, wanneer men maar toestaat dat de ring wordt verbogen.

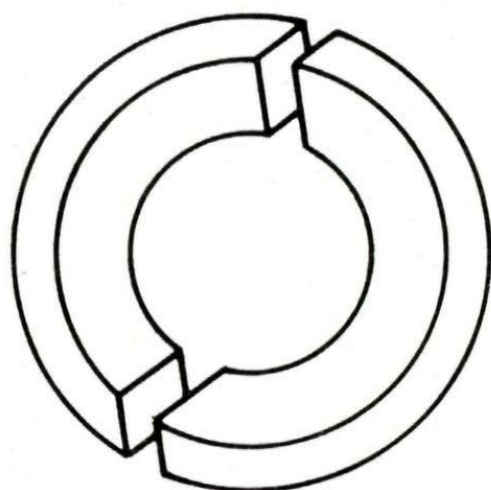


Fig. 5

Ook de getallen en kwadraten zijn onderwerp van een aantal inzendingen. We komen hier in het volgende nummer op terug met een artikel, maar willen nu A. Hoekstra uit Naarden even aan het woord laten:

„In de eerste Pythagoras van dit jaar staan in het artikel „Is dat een kwadraat?” twee methoden om vast te stellen dat een getal een kwadraat is.”

Bij de eerste methode wordt gekeken naar het laatste cijfer van het getal. Dit kan bij een kwadraat alleen zijn een 0, 1, 4, 9, 6 of 5.

We kunnen deze methode nog wat uitbreiden door ook op het voorlaatste cijfer te letten.

„Voor een kwadraat geldt namelijk het volgende:

1° Als het laatste cijfer een 6 is, is het voorlaatste cijfer oneven

2° Als het laatste cijfer geen 6 is, is het voorlaatste cijfer even.”

Voor de kwadraten tot 100 is dit gemakkelijk te controleren en voor de grotere kwadraten is het met behulp hiervan gemakkelijk te bewijzen.

Verder kan een kwadraat dat eindigt op een 5 als laatste drie cijfers alleen hebben 025, 225 of 625 en kan een kwadraat alleen eindigen op een even aantal nullen. Met behulp van het voorgaande is dan direct te zien dat 31725, 94186, 81559, 961000 geen kwadraten zijn.



°° Rectificatie van een cirkel

Kan men met passer en liniaal een lijnstuk construeren dat even lang is als de omtrek van een gegeven cirkel? Dit probleem heet het vraagstuk van de *rectificatie* van een cirkel. Sinds ongeveer het midden van de 19e eeuw weet men, dat het rectificeren van een cirkel met passer en liniaal niet mogelijk is. Wel zijn er een aantal benaderingsconstructies bekend, waarvan sommige een grote nauwkeurigheid bereiken. In dit artikel bespreken we een benaderingsconstructie bedacht door Chr. Huygens. (1629–1695).

De constructie van Huygens is betrekkelijk eenvoudig uit te voeren. Zie fig. 6.

Hij construeert er de lengte van een kwart cirkel mee, dus als de straal van de cirkel de lengte 1 heeft, construeert hij een lijnstuk, dat $\frac{1}{2}\pi$ lang is. Hij doet dat als volgt:

Verdeel de cirkel door een middellijn XY in twee halve cirkels. Construeer op de bovenste helft het midden P . Construeer op de onderste helft de punten Q en R , die deze onderste helft in drie gelijke delen

verdelen. Trek PQ en PR . Deze snijden de middellijn XY in A en B . Nu is $PC = PA + AB$ een goede benadering voor $\frac{1}{2}\pi$. Of anders gezegd: De lengte van PC is bij benadering even groot als de lengte van de kwart cirkel PX .

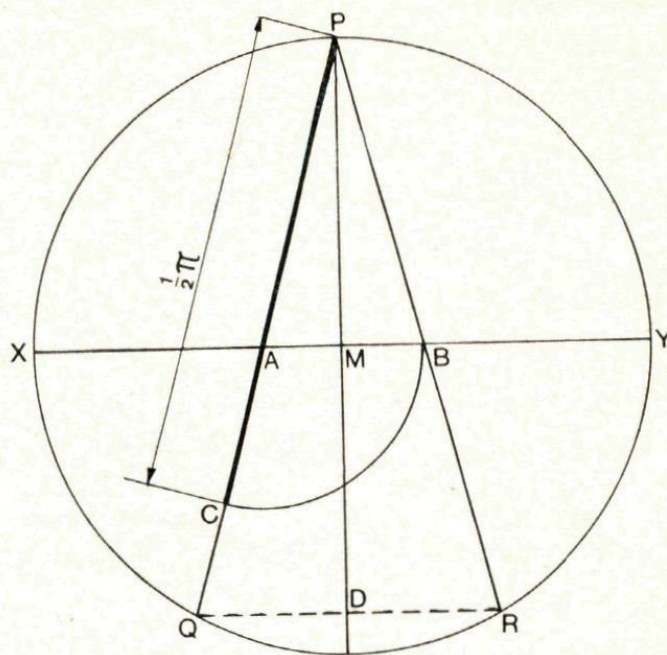


Fig. 6

Berekening ter controle:

De straal van de cirkel heeft de lengte 1, dus ook $QR = 1$ en $MD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Nu is

$$PQ^2 = PD^2 + QD^2 = (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3})^2 + (\frac{1}{2})^2 = 2 + \sqrt{3}$$

$$PQ = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

$$PA : PQ = PM : PD \rightarrow PA : \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 1 : (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) \rightarrow$$

$$PA = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

$$AB : QR = PM : PD \rightarrow AB : 1 = 1 : (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) \rightarrow$$

$$AB = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = 2(2 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$\text{Dus is } PC = PA + AB = \sqrt{6} - \sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{3}$$

$$PC \approx 2,4495 - 1,4142 + 4 - 3,4641$$

$$PC \approx 1,5712$$

Dit is bij benadering gelijk aan $\frac{1}{2}\pi$. Voor π hebben we nl. de benadering 3,14159, dus voor $\frac{1}{2}\pi$ vinden we 1,5708. De afwijking is dus ongeveer 0,0004.

°Hoe lang zal de wereld bestaan?

„In de grote tempel van Benares, onder de koepel die het centrum van de wereld aangeeft, staat een grote bronzen plaat, waarin drie diamanten naalden zijn bevestigd, elk ter lengte van een onderarm en zo dik als het lichaam van een bij.

Op één van deze naalden plaatste God bij de Schepping vierenzestig schijven van zuiver goud. De grootste rustte op de bronzen plaat, de volgende werden naar boven toe steeds kleiner.

Dit is de toren van Brahma.

Dag en nacht, zonder onderbreking, verplaatsen de priesters de schijven van de ene naald naar de andere, overeenkomstig de vaste en onveranderlijke wetten van Brahma, volgens welke de dienstdoende priesters niet meer dan één schijf tegelijk mogen bewegen en geen schijf geplaatst mag worden op een naald die al een kleinere schijf bevat. Als de vierenzestig schijven van de naald waarop God ze bij de Schepping plaatste, overgebracht zullen zijn naar één van de andere, dan zullen de torens en de tempel en de priesters tegelijk tot stof vervallen en met een donderslag zal de wereld vergaan.”

Hoe lang moeten de priesters werken, als ze zonder ooit een fout te maken elke seconde één schijf overbrengen?

Teneinde een inzicht te krijgen in het aantal benodigde zetten, nemen men eerst 1, daarna 2, 3, 4 schijven, waaruit een formule voor een willekeurig aantal schijven kan worden gevonden.

De oplossing staat op blz. 72



21. De lengten van de zijden van vierhoek ABCD zijn $AB = 171$, $BC = 167$, $CD = 146$, $DA = 139$. Welke lengten kan de diagonaal BD hebben?

22. Een schip is tweemaal zo oud als de kapitein was, toen het schip zo oud was als de kapitein nu

is. De leeftijden van schip en kapitein zijn samen 56 jaren. Hoe oud is elk? (ingezonden door Frans-Jan van Kessel)

23. Wat is de maximale oppervlakte van een driehoek, waarvan één (en niet meer dan één) zijde langer is dan 10 cm? Beredeneer je antwoord zorgvuldig en volledig.

°°Figuren van Lissajous

door Ir. H. M. Mulder

De slinger van de klok maakt een slingerbeweging. Als je op een wip op- en neer gaat, maak je een trillingsbeweging.

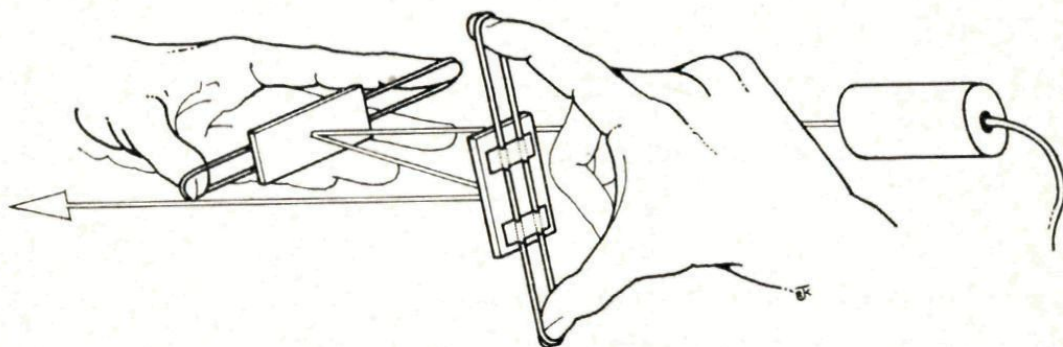
Trillingen nemen in onze wereld een belangrijke plaats in. Televisie, telefonie, radio maken gebruik van elektrische trillingen.

Soms is een voorwerp onderworpen aan twee trillingen tegelijk. Er kunnen dan interessante figuren ontstaan, speciaal wanneer een voorwerp in twee richtingen trilt, die loodrecht op elkaar staan.

Dergelijke figuren staan bekend als lissajousfiguren.

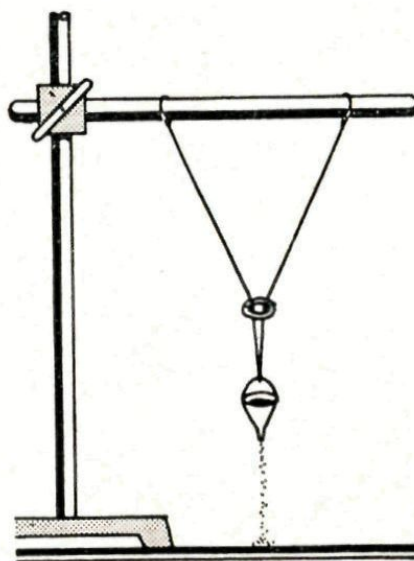
Je kunt ze zelf realiseren met twee spiegeltjes, die met behulp van elastiekjes verend zijn opgehangen. Fig. 7. Een lichtstraal valt van het

Fig. 7



ene spiegeltje op het andere en daarna op de muur. De spiegeltjes worden met hun trillingsassen loodrecht op elkaar opgesteld. Als je beide spiegeltjes in beweging zet schrijft de lichtstraal op de muur de figuren.

Fig. 8

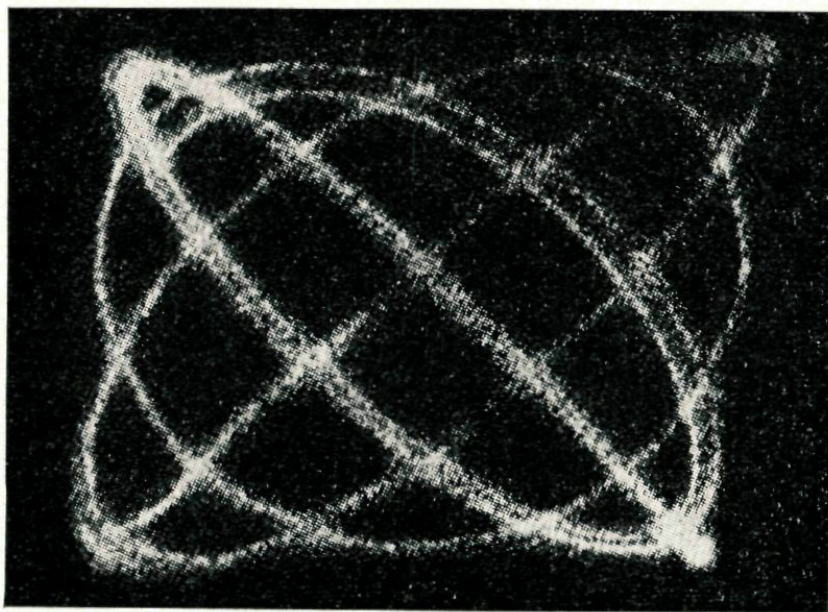


Je kunt de figuren ook laten zien met een zandstrooier. Fig. 8. Neem een busje waarin je aan de onderzijde met een spijker een gaatje tikt.

Hang dit aan twee touwen op zoals in de tekening is aangegeven, geef de bus een duw in schuine richting en de figuren worden met zand geschreven.

Bij een trilling zijn belangrijke grootheden de *amplitude* en de *frequentie*. De amplitude is de grootste uitwijking die het trillende ding krijgt ten opzichte van de ruststand. De frequentie is het aantal trillingen dat per seconde wordt uitgevoerd.

We willen ons nu enkel bezig houden met de figuren die ontstaan als een voorwerp twee trillingen tegelijk uitvoert, in loodrecht op elkaar staande richtingen. Daarbij wordt geen theoretische verhandeling gegeven over het ontstaan van de figuren, maar alleen een aantal merkwaardigheden van die figuren opgemerkt. De regelmaat en varia-



ties in de vorm strelen ons artistiek gevoel, de natuur is hier waarlijk aan het schoonschrijven.

Als de amplituden van de beide trillingen gelijk zijn wordt de „lijst” om de figuur een vierkant. De aard van de figuur wordt in hoge mate bepaald door de verhouding van de frequenties van de trillingen. Bij de eenvoudigste frequentieverhoudingen behoren figuren als getekend in fig. 9.

Aan zo'n figuur is de frekwentieverhouding direkt af te lezen. Neem de „achtvormige" figuur; als je deze eenmaal doorloopt, ga je tweemaal omhoog en omlaag, terwijl je daarbij eenmaal naar rechts en naar links gaat. Dat is dus de figuur van de „1-2" verhouding.

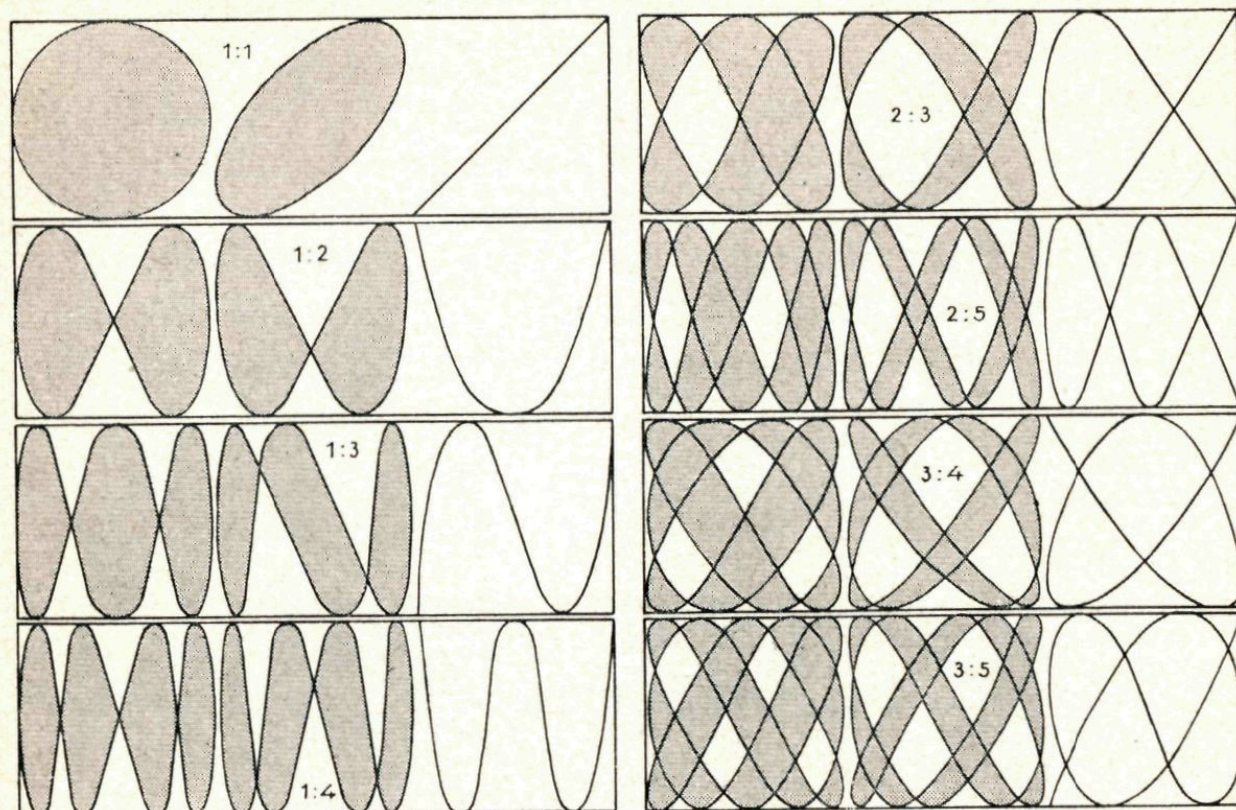


Fig. 9

Bij een bepaalde verhouding zijn telkens nog variëteiten mogelijk, afhankelijk van het faseverschil bij de start (zo behoort de derde figuur van een serie telkens bij een combinatie van twee trillingen, die beide gestart zijn bij de grootste uitwijking).

Zo zijn van elke soort 3 variaties getekend.

Bij de eerste en derde figuur is de oppervlakte „binnen" de figuur maximaal resp. minimaal (nul). De tussenfiguur geeft telkens een overgang bij de betreffende soort aan. De bedoelde oppervlakte (gerasterd) krimpt daarbij in.

De figuur met minimale oppervlakte (minimum-figuur) ontstaat als beide trillingen starten met grootste uitwijking. Een dergelijke startwijze zal wel normaal zijn bij de experimenten met spiegels en lichtstraal of met de zandstrooier.

Deze minimum-figuren hebben steeds twee omkeerpunten (eindpunt van de figuur, waarbij het trillende ding even stilstaat).

Als de niet-te-vereenvoudigen verhouding der trillingstijden (trillings-tijd is de tijdsduur van een trilling) bij de componenten $m:n$ is, en zo-

doende de trillingstijden mT en nT , zodat de trillingstijd voor de figuur mnT wordt, dan treden deze omkeerpunten op met een tijdsverschil $\frac{1}{2}mnT$. Tevens wordt hierbij in de tweede helft van de trilling een identieke baan terug doorlopen.

Er zijn daarbij nog twee mogelijkheden: genoemde omkeerpunten kunnen samenvallen met de eindpunten van een diagonaal (zoals bij 1:1, en 1:3 en 3:5) of met de eindpunten van één zijde.

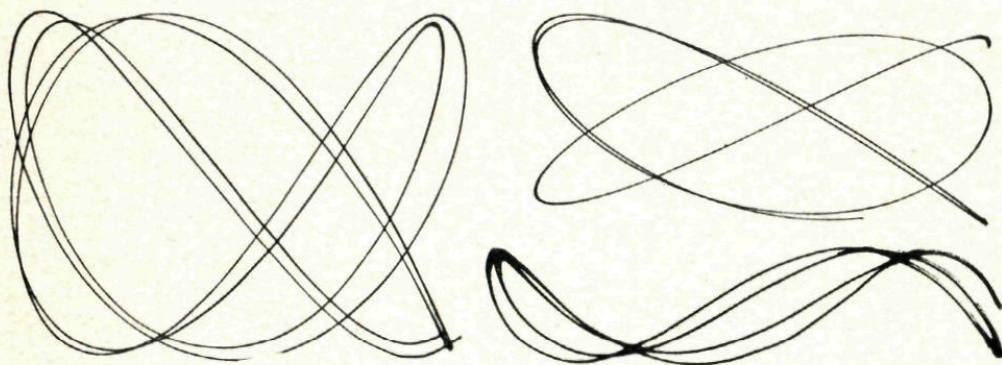
De eerste soort zullen we diametraal, de tweede soort eenzijdig noemen.

De omkeerpunten blijken diametraal te liggen als de som of het verschil van m en n even is; eenzijdig als deze uitkomst oneven is.

Dit kenmerk schijnt zeer geëigend om alle soorten in twee grote categorieën onder te brengen.

De eenzijdige soort heeft één symmetrieas; de diametrale soort heeft „rotatiesymmetrie” (de ene helft van de figuur kan de andere helft bedekken door draaiing over 180 rond het middelpunt).

Alle maximum-figuren (figuren met maximale oppervlakte) hebben



Deze foto's zijn gemaakt met behulp van een slingerende lamp door Gerard van Esch, leerling van het Bredase Lyceum

rotatiesymmetrie en twee symmetrieassen; bovendien gaat bij de eenzijdige soort de maximumfiguur door het middelpunt.

De getallen m en n geven tevens de aantallen raakpunten van de figuur met de „lijst” aan.

De meeste figuren hebben knooppunten (dit zijn punten, waar de figuur twee raaklijnen heeft of mechanisch gezien, waar tweemaal wordt gepasseerd).

Misschien kun jezelf nagaan, dat de aantallen knooppunten zijn: $m(n-1) + n(m-1)$ ofwel $2mn - (m+n)$ stuks. Deze formule is door proberen gevonden. Een afleiding ervan is wellicht mogelijk.

Bij de minimum-figuren zien we raakpunten twee aan twee samen-
vallen, terwijl knooppunten verdwijnen of zich verenigen uit groepen
van vier tot één.

Tenslotte nog een praktische vraag.

Als we lissajousfiguren zichtbaar maken, zien we een bepaalde soort,
die we menen te herkennen, vaak de diverse variaties doorlopen (bij-
voorbeeld van cirkel via ellips naar lijnstuk en terug).

Waardoor ontstaat deze wisseling? Hoe groot is de tijdsduur van een
dergelijke cyclus?

Stel: we willen de ellipsvorm demonstreren. In werkelijkheid kunnen
we de exacte verhouding 1 : 1 niet verwezenlijken. Als we dit proberen,
stellen we bijvoorbeeld 15 : 16 in. Het resultaat is getekend.

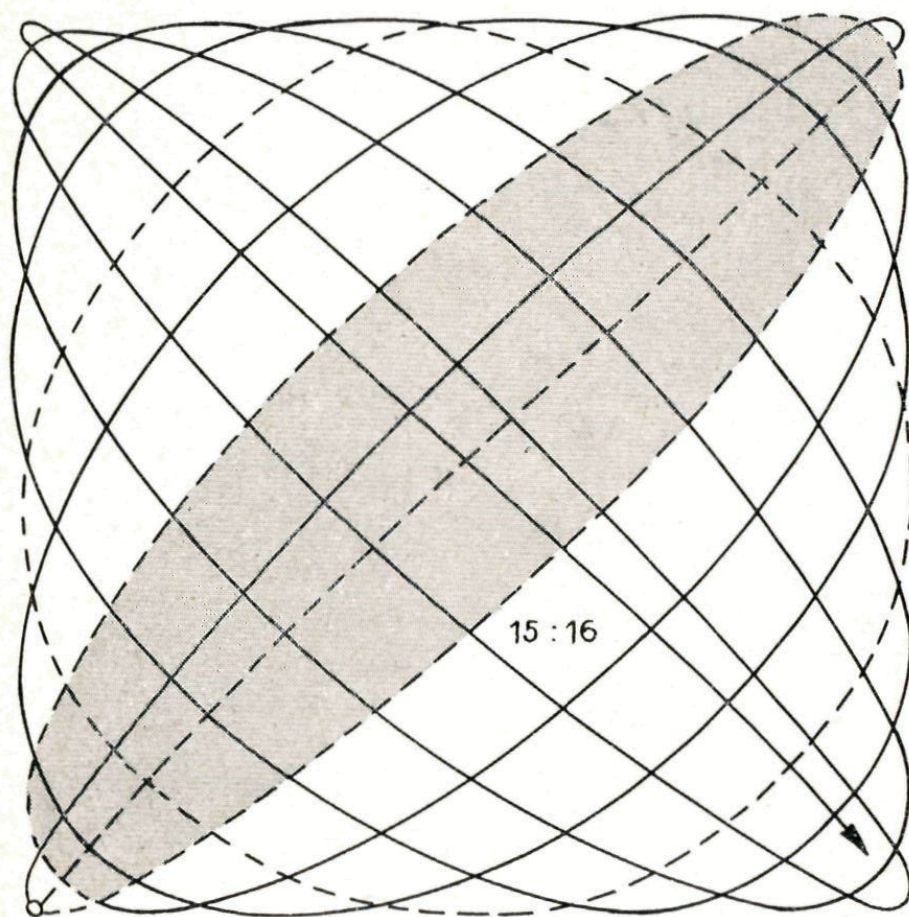
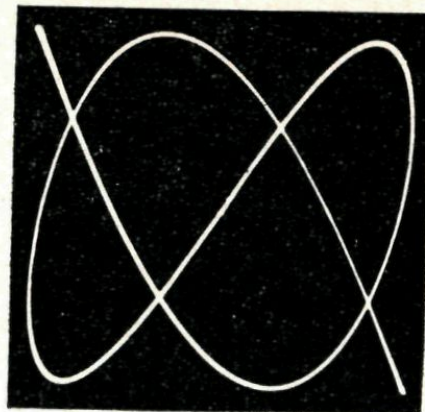
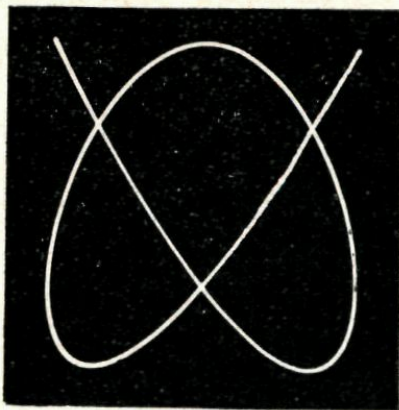


Fig. 10

De figuur begint links onder. Eén helft ervan is slechts aangegeven;
de lijn met de pijl geeft de start voor de tweede helft.

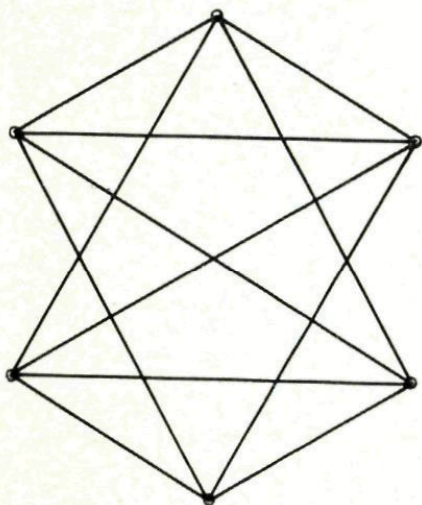
Merk op, hoe de figuur vrijwel (!) volgens de diagonaal begint, over-
gaat via een ellipsachtige figuur in een quasi-cirkel, en deze weer evenzo
in een op een rechte gelijkende lijn, om weer terug te gaan via een



cirkel naar de aanvankelijke diagonaal (genoemde tussenvormen zijn gestippeld). Bij verhouding $15T : 16T$ is de duur van de cyclus $240T$. Bij een betere benadering van de verhouding $1 : 1$ wordt de wisseling trager. Het is interessant te zien, hoe de aanlooplijn enigszins in S-vorm om de diagonaal slingert als aanloop voor de ellipsen.

Het feit dus, dat we eenvoudige verhoudingen slechts kunnen benaderen veroorzaakt de wisseling in de figuur, die zo boeiend is.

Het lijkt een stukje evolutietheorie, waarbij de soorten na elkaar en uit elkaar ontstaan.



Denkertjes

24. Bepaal de kleinste en de grootste waarde van het natuurlijke getal n , dat de eigenschap heeft dat er tussen $0,5 n$ en $0,6 n$ liggen 100 natuurlijke getallen.
25. Het slaan van een torenklok om vijf uur duurt vijf seconden. Hoe lang duurt het slaan om negen uur? (naar ALPHA, I, 4)
26. De zes zijvlakken van een kubus noemen we G (grondvlak), B (bovenvlak), V (voorvlak), L (linker zijvlak), R (rechter zijvlak) en A (achtervlak). Zet in de bovenstaande figuur bij elk van de zes stippen een van de letters G, B, V, L, R, A (verschillende letters bij verschillende stippen) en doe dat zo dat stippen, die de namen van snijdende zijvlakken van de kubus dragen, in die figuur met elkaar verbonden zijn. Op hoeveel manieren kan die opdracht uitgevoerd worden?
27. Bewijs dat $2n^3 + 9n^2 + 13n$ voor elke waarde van het natuurlijke getal n het zesvoud van een natuurlijk getal is.
(ingezonden door J. J. van Lochem)

Zie je iets bijzonders aan het paar gebroken getallen $\frac{41}{29}$ en $\frac{99}{70}$? Nee, natuurlijk. Ze zijn allebei onvereenvoudigbaar, de tellers 41 en 99 hebben geen gemeenschappelijke priemfactor, de noemers 29 en 70 hebben dat ook niet. Maar dat is alles nog niets bijzonders. Toch is er iets met dit paar gebroken getallen aan de hand. Bereken hun ver-

schil maar eens: $\frac{99}{70} - \frac{41}{29} = \frac{2871}{2030} - \frac{2870}{2030} = \frac{1}{2030}$. Kijk, dat was wel

iets bijzonders. In het algemeen gaat dat zo: $\frac{q}{n} - \frac{p}{m} = \frac{mq}{mn} - \frac{np}{mn} =$

$\frac{mq - np}{mn}$. En hier werd die teller $mq - np$ „heel toevallig” gelijk aan

1. Zulke paren gebroken getallen zul je in dit artikel nog meer ontmoeten. Voor alle zekerheid geven we nog even een volledige omschrijving ervan:

In dit artikel noemen we het paar gebroken getallen $\frac{p}{m}$ en $\frac{q}{n}$ „bijzonder”, wanneer de tellers en noemers geen gemeenschappelijke priemfactor hebben en wanneer bovendien het verschil van die breuken gelijk is aan $\frac{1}{mn}$.

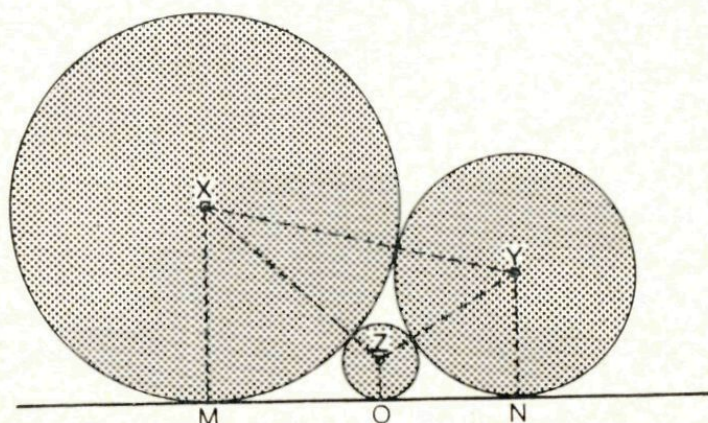


Fig. 11

Zie je iets bijzonders aan figuur 11? Nee, natuurlijk. Je kunt je wel voorstellen, dat de punten M en N gegeven zijn en dat ook de straal van de cirkel X gegeven is. Het is dan niet moeilijk om cirkel X zo te constru-

eren, dat hij aan de rechte MN raakt. Het zal wel een akelig probleem zijn om dan ook nog cirkel Y te construeren, die raakt aan cirkel X en bovendien ook nog in N raakt aan de rechte MN. En nog akeliger wordt het vast en zeker om dan ook nog de derde cirkel te maken, die raakt aan de beide andere en aan de rechte MN. Maar iets bijzonders is dat allemaal niet, want akelige meetkundesommen zijn er zo veel!

Het bijzondere van die meetkundige figuur zullen we in het volgende nog wel onthullen. Voorlopig verklappen we alleen maar, dat hij iets te maken heeft met die paren bijzondere gebroken getallen. Dat zul je wel niet verwacht hebben!

De rechte MN is een stukje van een getallenrechte. De punten M en N waren gegeven, zeiden we al. Welnu: M is het punt van de getallenrechte, dat het gebroken getal $\frac{p}{m}$ voorstelt en N stelt het getal $\frac{q}{n}$ voor.

Die twee gebroken getallen vormen een bijzonder paar, zodat hun verschil gelijk is aan $\frac{1}{mn}$. Hier betekent dat, dat de lengte van het lijnstuk MN gelijk is aan $\frac{1}{mn}$.

Ook de straal van cirkel X was gegeven. Deze is namelijk gelijk aan $\frac{1}{2m^2}$.

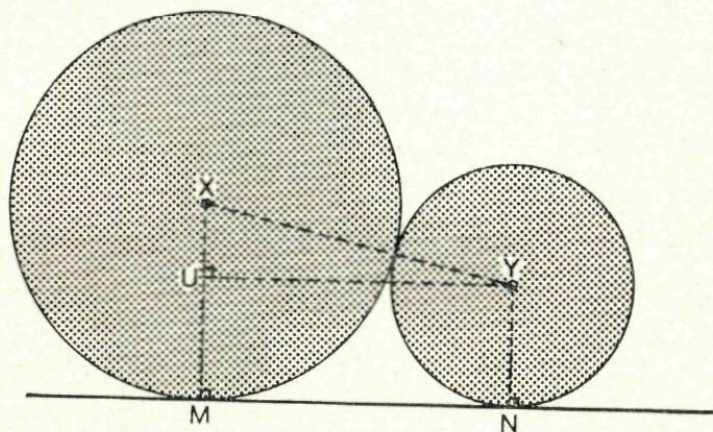


Fig. 12

We gaan nu niet proberen om cirkel Y te construeren, maar we gaan zijn straal in plaats daarvan berekenen. De daarvoor benodigde hulplijnen zie je in figuur 12 het beste.

We noemen de straal YN voorlopig y .

In de rechthoekige driehoek XYU is $XY = \frac{1}{2m^2} + y$ en $UY = MN = \frac{1}{mn}$ en $XU = XM - UM = XM - YN = \frac{1}{2m^2} - y$. Volgens de

stelling van Pythagoras is dus

$$\left(\frac{1}{2m^2} + y\right)^2 = \frac{1}{m^2n^2} + \left(\frac{1}{2m^2} - y\right)^2$$

en hieruit volgt gemakkelijk dat y gelijk is aan $\frac{1}{2n^2}$.

Ziedaar de eerste bijzonderheid van de meetkundige figuur: De stralen van de cirkels X en Y hangen op precies dezelfde manier samen met de door M en N voorgestelde getallen.

We kunnen dit resultaat ook op een wat andere manier onder woorden brengen: hebben we de beschikking over een bijzonder paar gebroken

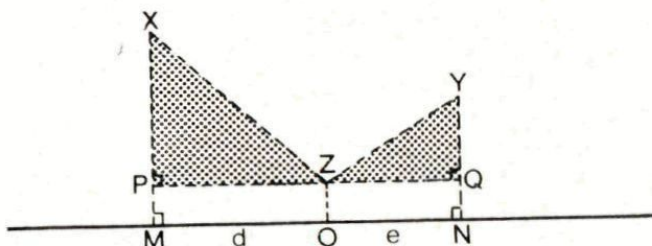
getallen $\frac{p}{m}$ en $\frac{q}{n}$ en construeren we dan twee cirkels, die aan de getallen-

rechte raken in de punten die die twee getallen voorstellen en respectie-

velijk $\frac{1}{2m^2}$ en $\frac{1}{2n^2}$ tot straal hebben, dan raken die twee cirkels elkaar

indien ze aan dezelfde kant van de getallenrechte liggen.

Fig. 13



Nu moet echter de derde cirkel nog aan de beurt komen. In figuur 13 zie je de lijnen, die een rol spelen bij de berekening van zijn straal z en bij de berekening van de plaats van het punt O.

Passen we in de grijze driehoeken weer de stelling van Pythagoras toe, dan vinden we

$$\left(\frac{1}{2m^2} + z\right)^2 = d^2 + \left(\frac{1}{2m^2} - z\right)^2 \text{ en}$$

$$\left(\frac{1}{2n^2} + z\right)^2 = e^2 + \left(\frac{1}{2n^2} - z\right)^2$$

$$\text{en hieruit volgt } d^2 = \frac{2z}{m^2} \text{ en } e^2 = \frac{2z}{n^2}$$

Eerst leiden we daaruit de verhouding van d en e af: $\frac{d}{e} = \frac{n}{m}$.

Omdat we al weten, dat $d + e$ gelijk is aan $\frac{1}{mn}$ besluiten we

$$\text{tot } d = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{1}{mn} = \frac{1}{m(m+n)} \text{ en tot } e = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{1}{mn} = \frac{1}{n(m+n)}.$$

En daarna vinden we dan

$$z = \frac{m^2 d^2}{2} = \frac{1}{2(m+n)^2}$$

Op de getallenrechte stelt het punt O het getal $\frac{p}{m} + d$ voor. Dit getal

is gelijk aan $\frac{p}{m} + \frac{1}{m(m+n)} = \frac{pm + pn + 1}{m(m+n)}$ en met behulp van het in de eerste alinea al gevonden betrekkingje $mq - np = 1$ kunnen we daarvan nog maken $\frac{pm + pn + mq - np}{m(m+n)} = \frac{m(p+q)}{m(m+n)} = \frac{p+q}{m+n}.$

Dit is een heel bijzonder resultaat. We kunnen dit getal namelijk maken

uit de twee gegeven getallen $\frac{p}{m}$ en $\frac{q}{n}$ van het bijzondere paar door de tellers en de noemers afzonderlijk bij elkaar op te tellen. En de straal van het kleine cirkeltje blijkt alweer op dezelfde manier uit het getal $\frac{p+q}{m+n}$ verkregen te kunnen worden als die we al eerder zagen bij de andere twee stralen: hij is het omgekeerde van het dubbele van het kwadraat van de noemer.

Kiezen we als bijzonder paar het in de aanhef van dit artikel al eerder genoemde paar $\frac{41}{29}$ en $\frac{99}{70}$, dan zijn onze resultaten dus als volgt:

In het punt $\frac{41}{29}$ laten we een cirkel aan de getallenrechte raken met een straal van $\frac{1}{2 \cdot 29 \cdot 29}$ en in het punt $\frac{99}{70}$ laten we er een raken aan de getallenrechte met een straal van $\frac{1}{2 \cdot 70 \cdot 70}$; de kleine cirkel raakt dan aan de getallenrechte in het punt $\frac{140}{99}$ en heeft een straal van $\frac{1}{2 \cdot 99 \cdot 99}.$

De merkwaardigheden zijn echter nog niet op. Zowel het paar $\frac{p}{m}$, $\frac{p+q}{m+n}$ als het paar $\frac{p+q}{m+n}$, $\frac{q}{n}$ is namelijk weer een bijzonder paar.

We zullen dat niet volledig bewijzen. We wijzen alleen maar op het verschil $\frac{p+q}{m+n} - \frac{p}{m} = \frac{pm + qm - pm - pn}{m(m+n)} = \frac{qm - pn}{m(m+n)} =$

$\frac{1}{m(m+n)}$, waaruit die bijzonderheid al voor een deel blijkt.

De betekenis van deze laatste bijzonderheid is, dat het door ons gevolgde procedé eindeloos herhaald kan worden. In het getallenvoorbeeld kunnen we tussen de cirkels, die aan de getallenrechte raken in $\frac{41}{29}$ en in $\frac{140}{99}$ dus al weer een kleiner cirkeltje peuteren, dat aan beide

raakt en aan de getallenrechte raakt. Zijn raakpunt ligt dan bij $\frac{181}{128}$

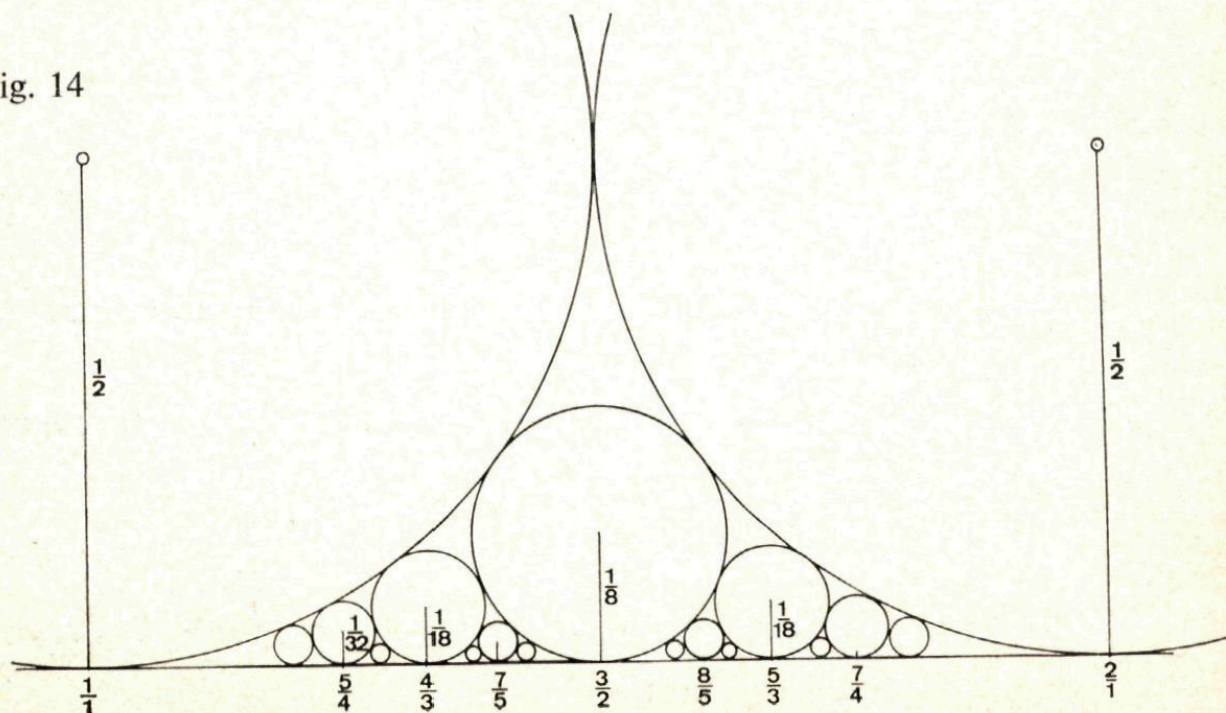
en zijn straal is $\frac{1}{2 \cdot 128 \cdot 128}$.

De enige moeilijkheid is dan alleen nog een geschikt begin te vinden. Maar dat is eigenlijk helemaal geen moeilijkheid, want elk tweetal op elkaar volgende gehele getallen is al meteen een bijzonder paar.

Zo kun je tussen $\frac{1}{1}$ en $\frac{2}{1}$ voegen $\frac{3}{2}$, daarna de rij uitbreiden tot $\frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}$.

$\frac{5}{3}, \frac{2}{1}$ en zo verder en zo verder. Bekijk met deze wetenschap gewapend fi uur 14 nog maar eens, die een goede indruk geeft van wat we met onze onderzoeken op onze hals haalden.

Fig. 14





28. Van vierhoek ABCD is gegeven $AB = 16$, $CD = 12$ en $MN = 10$; hierin zijn M en N opvolgend de middens van AB en CD. Wat is de maximale oppervlakte, die vierhoek ABCD kan hebben? Bewijs de juistheid van je antwoord.

29. Is het mogelijk een paard op een overigens leeg schaakbord een toer van een miljoen sprongen te laten maken, die begint in de linker bovenhoek en eindigt in de rechter bovenhoek? (Laat je maar even voorlichten over de paardesprong op een schaakbord).

Zo ja, hoe moet dat dan gebeuren. Zo nee, waarom kan dat niet?

30. In een tabel van afstanden (in het Handboek 1965 van de A.N.W.B.) vond ik de volgende drie afstanden:

Utrecht-Amsterdam 38 km

Utrecht-Leeuwarden 186 km

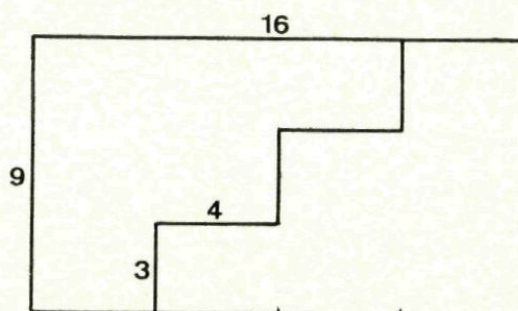
Amsterdam-Leeuwarden 135 km.

In het bijschrift staat, dat die afstanden gemeten zijn op een autokaart.

Wat is er voor vreemds aan die drie getallen? Kun je daar een verklaring voor geven?

Oplossingen Denkertjes uit het vorige nummer

11.



12. Uit $(p + q)^2 + (p - q)^2 = 2(p^2 + q^2)$ blijkt, dat aan de eisen voldaan wordt door $a = 1731 + 2348 = 4079$ en $b = 2348 - 1731 = 617$.

13. Uit $10p + 4v + s = 298$ en $7p + 3v + s = 223$ leiden we af $p + v + s = 3(7p + 3v + s) - 2(10p + 4v + s) = 3 \cdot 223 - 2 \cdot 298 = 73$. Het antwoord is dus 73.

14. Het kwadraat van n^2 is kleiner dan $n^4 + n^2 + 1$ en het kwadraat van $n^2 + 1$ is groter dan $n^4 + n^2 + 1$.

15. Op elke zijde van de zeshoek kunnen ten hoogste twee van die punten liggen (het deel van de achthoek dat tussen die twee punten en buiten de zeshoek ligt, bevat dan een of meer hoekpunten van de achthoek). Het aantal gemeenschappelijke punten kan dus niet groter dan 12 zijn. Het is gemakkelijk na te gaan, dat dit aantal inderdaad „haalbaar” is.

16. $a^3b - ab^3 = ab(a - b)(a + b)$. Als noch a , noch b , noch $a - b$ een drievoud is, dan is $a + b$ een drievoud.
17. Nee. Teken twee gelijkzijdige driehoeken, die gelijkstandig zijn en hetzelfde middelpunt hebben. Noem de kleinste F_1 en de grootste F_2 . De grootste afstand van een punt van F_2 tot de figuur F_1 is dan de afstand tussen twee evenwijdige zijden. De grootste afstand van een punt van F_2 tot de figuur F_1 is dan de afstand van twee overeenkomstige hoekpunten.
18. In het eerste geval hebben we 1000 getallen, die ten minste gelijk zijn aan $\frac{1}{2000}$. In het tweede geval behandelen we de omgekeerden van de natuurlijke getallen 501 tot en met 1000 en de omgekeerden van 1001 tot en met 2000 als twee aparte groepen op diezelfde manier.
19. x kan elk getal tussen -4 en 12 zijn (had je ook de negatieve waarden van x vergeten?).
20. $V = (a - b + c - d + e)^2 + 4ad + 4e(b - a)$.



Hoe lang zal de wereld bestaan?

Oplossing.

Het is duidelijk dat voor 1 schijf 1 zet nodig is. Voor 2 schijven zijn 3 zetten nodig.

Bij 3 schijven zijn voor de bovenste twee 3 zetten nodig, daarna 1 zet voor de onderste, daarna nog eens 3 zetten voor de bovenste twee. Totaal 7.

Bij 4 schijven: 7 zetten voor de bovenste drie, 1 voor de onderste, nogmaals 7 voor de bovenste drie. Totaal 15.

Zo komen we tot het vermoeden dat voor n schijven $2^n - 1$ zetten nodig zijn.

Dit kan worden bewezen met de methode van volledige inductie:

1°: Voor $n = 1$ klopt het: $2^1 - 1 = 1$.

2°: Stel voor $n = p$ is de formule juist. Voor $p + 1$ redeneren we dan:

In $2^p - 1$ zetten verplaatsen we de bovenste p schijven, daarna in 1 zet de onderste, daarna in $2^p - 1$ de eerste p schijven hierop.

Totaal $2(2^p - 1) + 1 = 2^{p+1} - 1$

Uitgaande van de juistheid voor $n = p$ vinden we dus de juistheid voor $n = p + 1$. Op grond hiervan en van de juistheid voor $n = 1$, geldt de formule voor iedere waarde van n .

De wereld zal dus $2^{64} - 1$ seconden bestaan, dit ligt in de orde van duizend miljard jaar. Tenminste: als het verhaal waar is.

- Cilinder** afgeleid van het Griekse werkwoord voor *rollen*.
- Frequentie** Uit het Latijn *frequens* = *talrijk*. Aantal perioden per tijdseenheid.
- Projectie** Uit het Latijn *projectio* = *het neerwerpen*. Wordt wiskundig zowel gebruikt voor het afbeelden als voor de figuur die door het afbeelden van een andere figuur wordt verkregen.
- Torus** Uit het Latijn *torus* = *iets dat gewelfd is*. Ringvormig lichaam, zoals een opgepompte binnenband.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

BRUNO ERNST, Wilhelminapark 22, Breda.

Drs. A. B. OOSTEN, Turftorenstraat 11A, Groningen.

A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

Artikelen en problemen kunnen naar één van de redacteuren worden gestuurd.

Oplossingen van *Denkertjes* kunnen naar het tweede adres worden gezonden, oplossingen van andere problemen naar het derde adres.

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,50 per jaargang. Voor anderen f 4,—.

Abonnementen kan men opgeven bij J.B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van J.B. Wolters.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.