

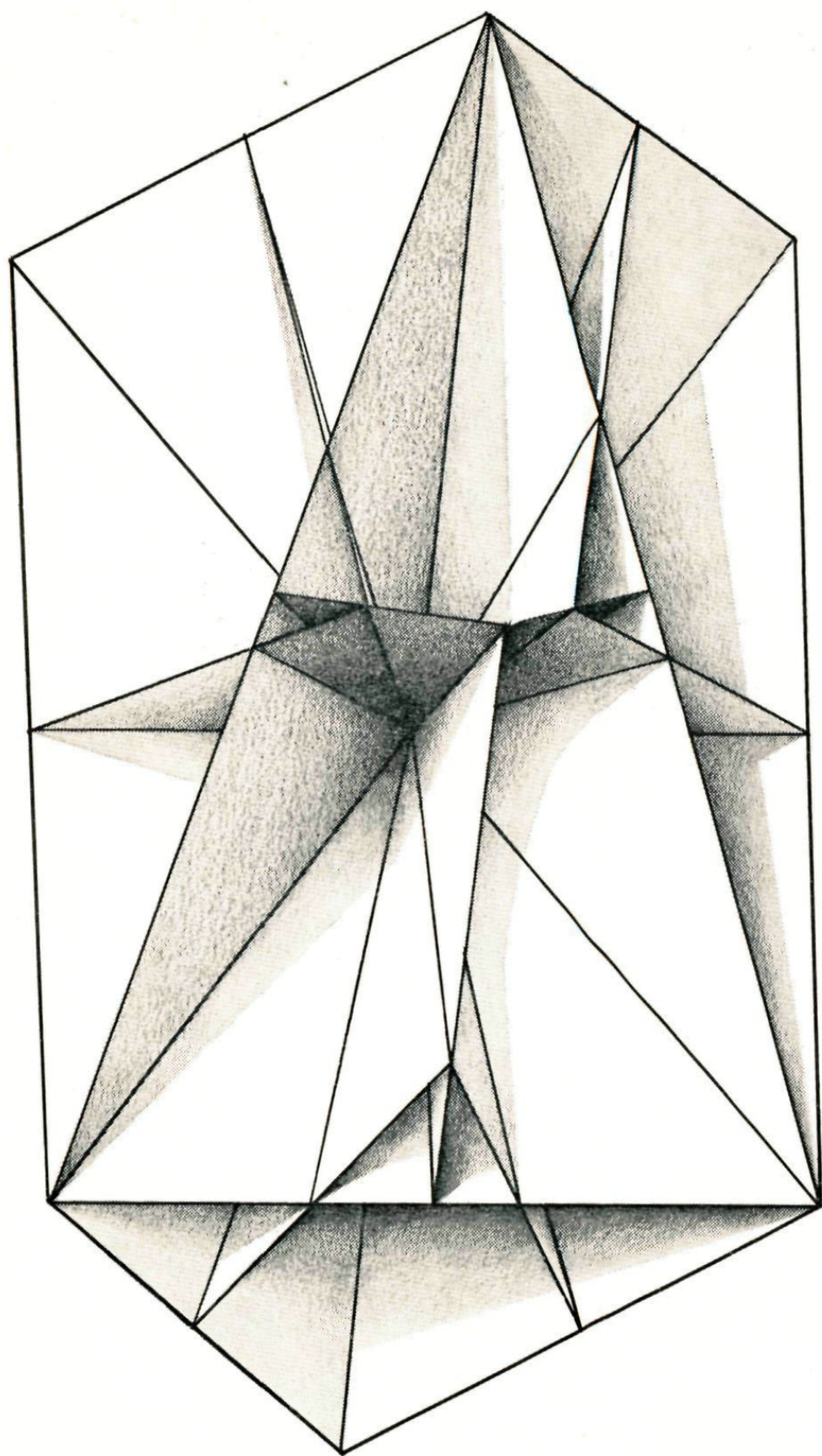
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

4

*Zevende jaargang
1967/1968*



bissectriceloodvlakken, zie blz. 88

•De Spirograaf

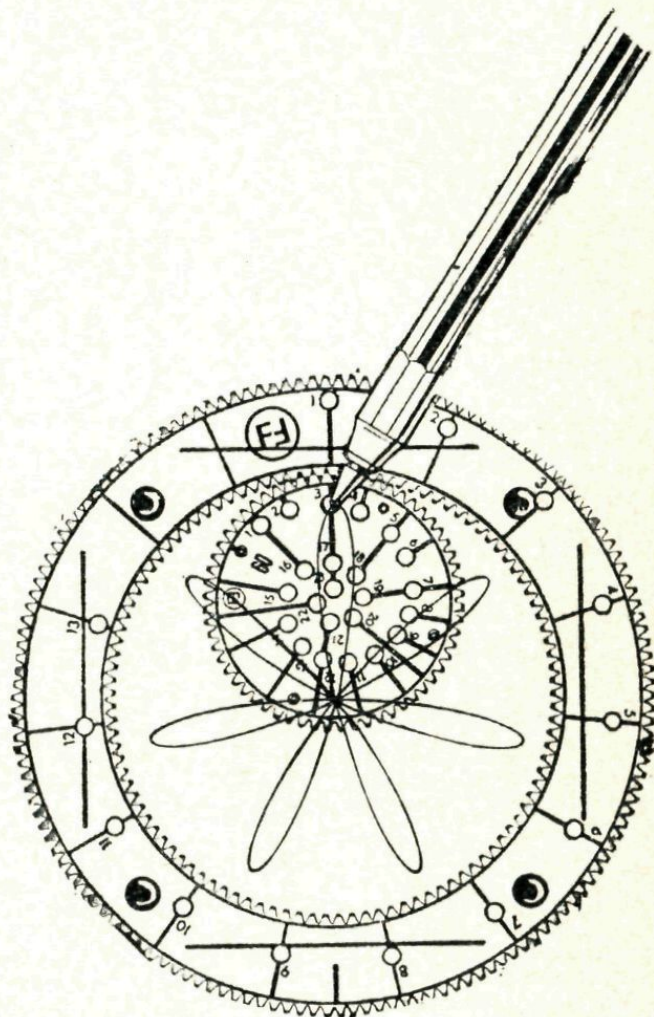


Fig. 1

Onder deze wat raadselachtige naam is onlangs een tekeninstrumentje in de handel gebracht, waar liefhebbers van fraaie wiskundige figuren vele uren mee bezig kunnen zijn. Een plastic ring (zie figuur 1) met 150 tanden aan de buitenomtrek en 105 tanden aan de binnenomtrek is op de tekenplank vastgepunaisd. Een plastic cirkel met 60 tanden langs de omtrek wordt tegen de binnenrand van de ring gelegd. Er zitten in het plastic-cirkeltje een aantal gaatjes. We kiezen er een van en steken er een potlood- of balpen-punt in. Met de balpen drukken we de cirkel tegen de binnenrand aan en bewegen tegelijk met de wijzers van de klok mee. Er ontstaat een figuurtje dat uit zeven lussen bestaat die straalsgewijs naar het middelpunt lopen. (figuur 2). Kiezen we een van de andere gaatjes uit het plastic-cirkeltje, dan houden we zeven lussen, ze zijn alleen wat „kleiner en dikker” en de snijpunten bij het middel-

punt van de figuur liggen anders. We kunnen het kleine cirkeltje ook tegen de buitenkant van de ring leggen en krijgen dan een vrij ingewikkeld vlechtwerk.

De hele set tekenwerktuigjes bestaat uit twee ringen, de ene met 150 tanden langs de buitenrand en 105 langs de binnenrand; bij de tweede

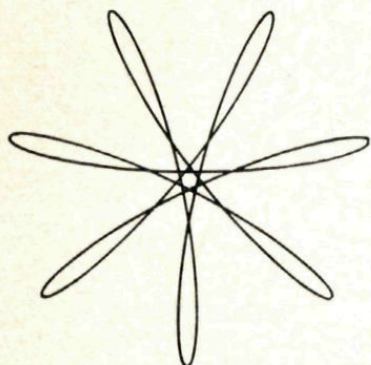


Fig. 2

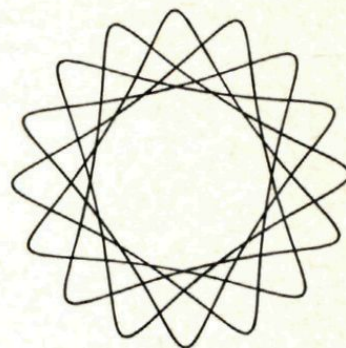


Fig. 3

is dit aantal tanden respectievelijk 144 en 96. Verder zijn er 18 plastic cirkeltjes met (van de kleinste naar de grootste) het volgende aantal tanden: 24, 30, 32, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 52, 56, 60, 63, 64, 72, 75, 80, 84. Ten slotte zijn er nog twee rechte linialen met tanden langs de buitenrand. Met dit assortiment is een onnoemelijk aantal verschillende figuren te tekenen. Al deze figuren zijn epicycloïden, hypocycloïden en cycloïden. Wie beschikt over vroegere jaargangen van Pythagoras kan in jg. 2 nummer 1 een artikel vinden waarin Leendert Klein Haneveld een van meccano-onderdelen gemaakt apparaat beschrijft, waarmee cycloïden te tekenen zijn, en in jaargang 5, nummer 3 komt de zgn. guillocheermachine ter sprake (naar de uitvinder Guillot genoemd) die men gebruikt voor het tekenen van de patronen op bankbiljetten. Vele van deze patronen kunnen ook met de spirograaf gemaakt worden.

Bekijken we figuur 1 en 2 nog eens. De cirkel met 60 tanden loopt tegen de binnenomtrek die 105 tanden telt. We vragen ons nu af hoeveel maal moeten we rond de binnenomtrek om te zorgen dat de kromme sluit (zoals in figuur 2)?

Dat zal gebeuren als dezelfde tand van de cirkel weer staat tegenover dezelfde tand van de binnenkant van de ring als bij de beginstand. Dan geldt: $a \cdot 105 = b \cdot 60$ waarin a en b hele getallen zijn. a geeft het aantal malen aan dat de binnenrand doorlopen is en b het aantal volledige draaiingen van de cirkel.

a en b zijn eenvoudig te vinden als we schrijven $a \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = b \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$

De kleinste hele getallen die we voor a en b vinden zijn dan: $a = 4$ en $b = 7$. We zien ook dat de figuur zeven lussen heeft (elke keer dat de kleine cirkel eenmaal draait ontstaat een lus).

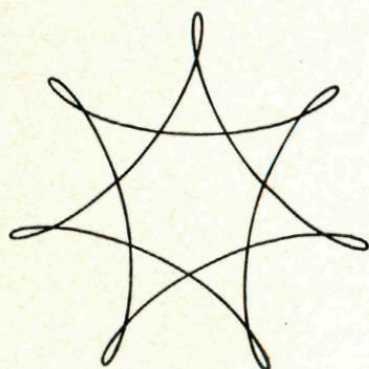


Fig. 4

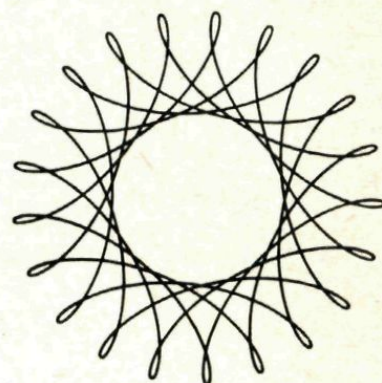


Fig. 5

Hiermee kunnen we al veel voorspellen van de figuren die we zullen krijgen bij gebruik van verschillende cirkels en ringen. Als je weet, dat bij figuur 3 de ring met 96 tanden aan de binnenzijde gebruikt is, hoeveel tanden had dan de cirkel?

Bij figuur 4 en 5 is de ring met 105 tanden aan de binnenzijde gebruikt. Hoeveel tanden hadden de gebruikte cirkels?

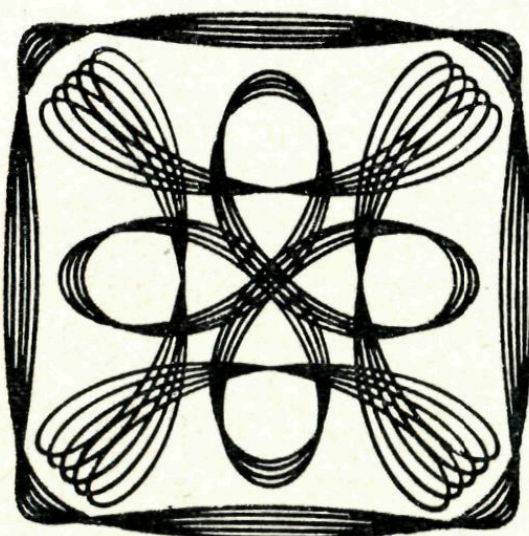


Fig. 6

Om nog iets meer van de mogelijkheden van de spirograaf te tonen is figuur 6 gereproduceerd.

••Continuïteit

Heb je ooit gehoord van het probleem van het broodje met ham? Nou, dat zal dan nu gaan gebeuren. Het is een moeilijk wiskundig probleem, waar een beroepswiskundige echt de handen aan vol kan hebben. Maar jij bent een amateur en jou willen we de moeilijkheden besparen. Geen zorgvuldige, spitsvondige, diepzinnige en exacte bewijzen dus, maar simpele en begrijpelijke redeneringen. Lees en verbaas je, speel het spel van de continuïteit met ons mee.

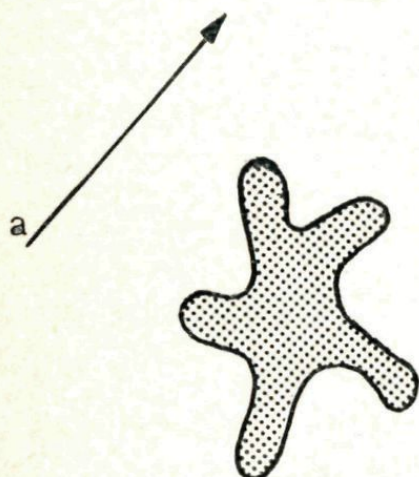


Fig. 7

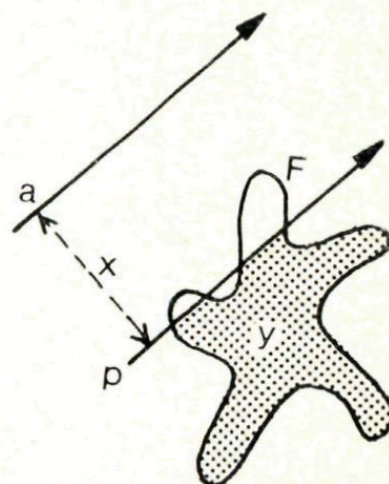


Fig. 8

In figuur 7 zie je een grillige inktvlek, de figuur F , en ook een rechte lijn a . Bestaat er een rechte lijn p die evenwijdig is met a en tevens de oppervlakte van figuur F halveert? Ja, zulk een p bestaat inderdaad en in figuur 8 maken we dat aannemelijk.

We denken ons in het vlak van de rechte a en de figuur F een veranderlijke rechte p , die evenwijdig met a is en blijft. Hij blijft aan de rechterkant van a en zijn afstand tot a noemen we x . Dat deel van de oppervlakte van figuur F , dat rechts van de rechte p ligt, noemen we y . Het is duidelijk dat de waarde van y afhangt van en bepaald wordt door de waarde van x . Anders gezegd: y is een functie van x . Voor kleine waarden van x ligt de rechte p geheel aan de linkerkant van F en dan is y gelijk aan de totale oppervlakte van F . Voor grote waarden van x ligt p aan de rechterkant van F en dan is y gelijk aan 0. Nu vinden wij het vanzelfsprekend, dat y een continue functie van x is. Dat betekent dat een geleidelijke verandering van x een geleidelijke verandering van y tot gevolg heeft. Omdat y geleidelijk verandert van de totale oppervlakte van F tot 0, neemt y elke waarde aan die tussen die totale oppervlakte en 0 ligt. Er bestaat dus een waarde van x , waarvoor de bijbehorende y precies gelijk is aan de helft van de oppervlakte van F .

Met andere woorden: er bestaat een rechte p , die de oppervlakte van F halveert en evenwijdig met a is.

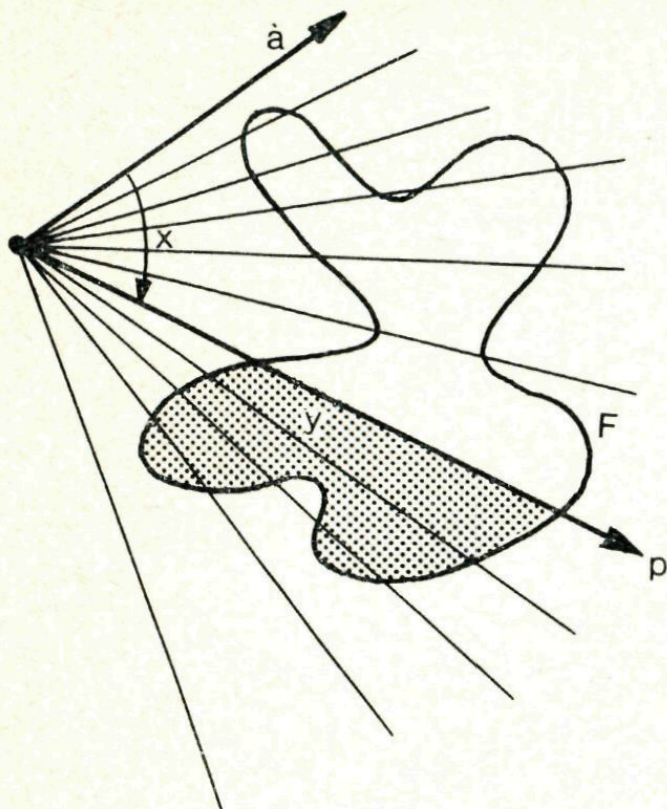


Fig. 9

In de figuren 9, 10 en 11 zie je nog een paar voorbeelden van deze gedachtengang geïllustreerd. De veranderlijke halfrechte p zwiept om het punt A . Het deel van de oppervlakte van F , dat rechts van p ligt

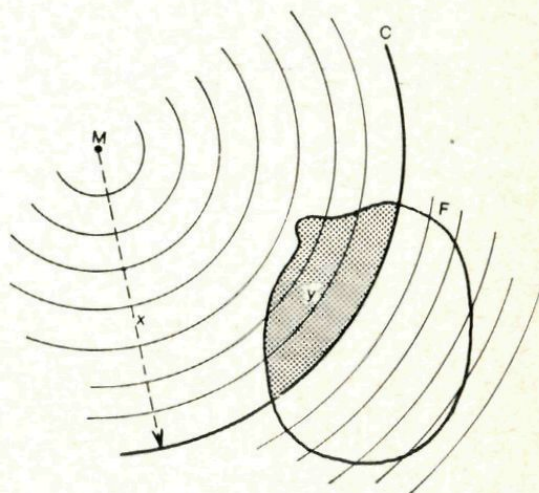


Fig. 10

(y) is een continue functie van de hoek die p met de gegeven halfrechte a maakt (x). Bij geleidelijk draaien van p , bij geleidelijk toenemen van x dus, neemt y geleidelijk af van het volle pond tot 0. Er is dus een stand van p , waarin de oppervlakte van F gehalveerd wordt. (Zie figuur 9).

Dat deel van de oppervlakte van F dat binnen de veranderlijke cirkel c (met vast middelpunt M) ligt, is een continue functie van de straal

van die cirkel. Laten we die straal geleidelijk toenemen, dan verandert die oppervlakte geleidelijk van 0 tot de volle oppervlakte van F. Er bestaat dus een cirkel om M, die de oppervlakte van F halveert. (Zie figuur 10).

Door vermenigvuldiging van de gelijkzijdige driehoek ABC ten opzichte van het centrum P kunnen we een kleinere gelijkzijdige driehoek laten ontstaan, waar precies de helft van de oppervlakte van F binnen ligt. (Zie figuur 11).

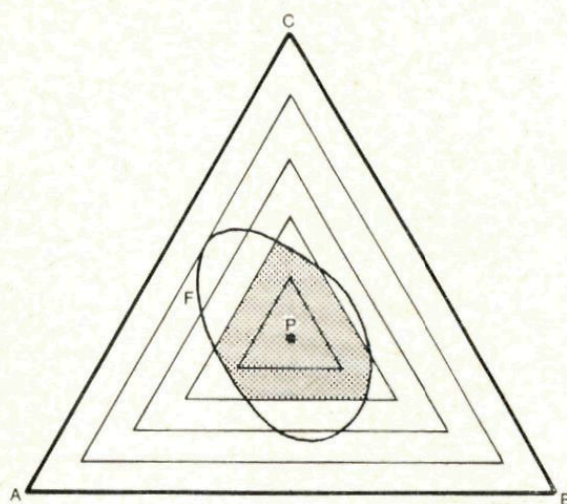


Fig. 11

We gaan nu onze continuïteitsbeschouwing een beetje uitdiepen. In figuur 12 zie je twee inktvlekken, F en G. We gaan „bewijzen” dat er een rechte lijn bestaat die tegelijk de oppervlakte van F halveert en die van G halveert.

Daarvoor nemen we eerst een vaste halfrechte a en een veranderlijke halfrechte b aan, die een veranderlijke hoek x insluiten. De waarde van x kan variëren van 0° tot 360° .

In het begin van dit artikel zagen we dat er een rechte p, evenwijdig met b, bestaat die de oppervlakte van F halveert. We denken die rechte gemaakt en evenzo denken we ons de rechte q gemaakt, die ook evenwijdig met b is en de oppervlakte van G halveert. In het algemeen zullen p en q (helaas) niet samenvallen. De afstand van p en q noemen we y en we rekenen y positief als q rechts van p ligt, zoals in figuur 12 het geval is; ligt q links van p, dan dient y negatief in rekening gebracht te worden. Wat we onder „links van p” of „rechts van p” verstaan, wordt toegelicht door de pijlen, waarmee we p en q voorzien hebben en die overeenstemmen met de richting van de veranderlijke halfrechte b.

Het is voor ons vanzelfsprekend, dat een geleidelijke verandering van de hoek x een geleidelijke verandering van de afstand y tot gevolg

heeft. Met andere woorden: y is weer een continue functie van x .

Goed, we laten x dus veranderen. De halfrechte b gaat draaien, p en q verplaatsen zich. Het is niet van belang hoe dat verplaatsen van p en q gebeurt. We kijken namelijk pas weer op het ogenblik, waarop x toegenomen is met 180° . De halfrechte b is dan in de gestippelde stand gekomen. De rechte p is weer op zijn oude plaats terug en dat is ook met q het geval. Het enige verschil is, dat nu de pijltjes aan de andere

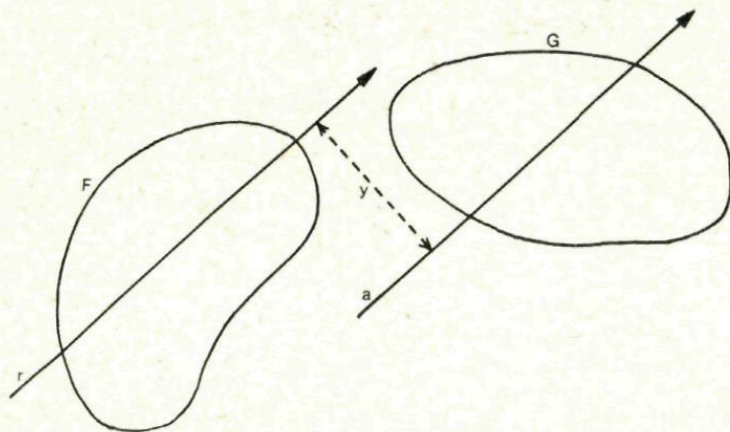


Fig. 12

kant van q en p staan. En dat heeft het wonderlijke gevolg, dat nu q niet meer rechts van p ligt maar links van p ligt. De waarde van y is dus geleidelijk veranderd van het oorspronkelijke positieve getal in het tegengestelde daarvan. Wegens de geleidelijkheid, wegens de continuïteit, moet y dus terwijl we niet keken de waarde 0 gepasseerd zijn. Op dat moment vielen p en q kennelijk samen. Er bestaat dus inderdaad een rechte, die tegelijk de oppervlakten van F en G halveert.

Nu is het in het bovenstaande van geen enkel belang, dat de figuren F en G gescheiden van elkaar lagen. Ze mogen ook best over elkaar heen liggen, zoals de grillig gevormde plak ham G ligt op het broodje F en daarbij hier en daar wat slordig daar buiten uitsteekt. Nou begrijp je, wat de stelling van het broodje met ham inhoudt: het is mogelijk dat broodje met ham zo door te snijden dat niet alleen het brood maar tegelijk ook de ham in twee gelijke porties verdeeld wordt.

Heb je lust om zelf eens je tanden in een soortgelijk probleem als dat van het broodje met ham te zetten? Welnu, hier zijn er zelfs twee:

(I) Bij elke (inktvlek)figuur F bestaat er een tweetal loodrechte lijnen, die de oppervlakte van F in vier gelijke porties verdelen. Bewijs dat.

(II) Bij elke dergelijke figuur F bestaat er ook een zodanig vierkant, dat elke zijde van dat vierkant ten minste een punt van F bevat en dat geen enkel punt van F buiten dat vierkant ligt. Bewijs dat.

Succes ermee. Vind je een oplossing, stuur hem dan maar in naar redacteur Van Tooren. Een boekenbon kan je deel worden.



31. Hoe groot is de zijde van het kleinste vierkant, waarmee je een halve cirkel met een straal van 5 centimeter kunt bedekken?

32. In een plat vlak zijn 10 punten gegeven (waarvan er geen enkel drietal op een rechte lijn ligt). Deze 10 punten bepalen 45 lijnstukken, die elk twee van die 10 punten tot eindpunten hebben. Men wil zo veel mogelijk van die 45 lijnstukken trekken, maar daarbij mag geen driehoek ontstaan die drie van die 10 punten tot hoekpunten heeft. Hoeveel lijnstukken kunnen er getrokken worden?

33. Bereken de kleinste waarde van x , daarvoor geldt: het grootste natuurlijke getal, dat kleiner is dan $\sqrt{x} + 4$, is kleiner dan het kleinste natuurlijke getal, dat groter is dan $\sqrt{x} - 4$.

Tabel 1. De internationale voorkeurreeksen en voorkeurgetallen.

Voorkeurreeksen				Volg-nummer	Berekende waarden	Verskil in % tussen voorkeurgetal en berekende waarde
R 5	R 10	R 20	R 40			
1	1	1	1	0	1	0
			1,06	1	1,0593	+0,7
		1,12	1,12	2	1,1220	-0,18
			1,18	3	1,1885	-0,71
	1,25	1,25	1,25	4	1,2589	-0,71
			1,32	5	1,3335	-1,01
		1,4	1,4	6	1,4125	-0,88
			1,5	7	1,4962	+0,25
1,6	1,6	1,6	1,6	8	1,5849	+0,95
			1,7	9	1,6788	+1,26
		1,8	1,8	10	1,7783	+1,22
			1,9	11	1,8836	+0,87
	2	2	2	12	1,9953	+0,24
			2,12	13	2,1135	+0,31
		2,24	2,24	14	2,2387	+0,06
			2,36	15	2,3714	-0,48
2,5	2,5	2,5	2,5	16	2,5119	-0,47
			2,65	17	2,6607	-0,4
		2,8	2,8	18	2,8184	-0,65
			3	19	2,9854	+0,49
	3,15	3,15	3,15	20	3,1623	-0,39
			3,35	21	3,3497	+0,01
		3,55	3,55	22	3,5481	+0,05
			3,75	23	3,7584	-0,22
4	4	4	4	24	3,9811	+0,47
			4,25	25	4,2170	+0,78
		4,5	4,5	26	4,4668	+0,74
			4,75	27	4,7315	+0,39
	5	5	5	28	5,0119	-0,24
			5,3	29	5,3088	-0,17
		5,6	5,6	30	5,6234	-0,42
			6	31	5,9566	+0,73
6,3	6,3	6,3	6,3	32	6,3096	-0,15
			6,7	33	6,6834	+0,25
		7,1	7,1	34	7,0795	+0,29
			7,5	35	7,4989	+0,01
	8	8	8	36	7,9433	+0,71
			8,5	37	8,4140	+1,02
		9	9	38	8,9125	+0,98
			9,5	39	9,4406	+0,63
10	10	10	10	40	10	0

°°Voorkeurreeksen, een hulpmiddel bij normalisatie en „industrial design”.

In een aantal landen bestaan instituten die zich bezighouden met NORMALISATIE. In Nederland is dit het Nederlands Normalisatie Instituut (NNI). Deze instituten werken nauw samen en proberen te bereiken dat men allerlei producten gaat standaardiseren. Stel eens dat alle landen verschillende railsbreedten hadden voor hun spoorwegen. Doorgaand treinverkeer zou dan niet mogelijk zijn. Het is zonder meer duidelijk dat het normaliseren, het opstellen van een norm, hier noodzakelijk is.

Normaliseren heeft ook een economische betekenis. Als je naar een ijzerwinkel gaat om wat bouten en moeren te kopen voor een knutselwerkje, dan sta je er misschien van te kijken dat de ijzerhandel die dingen in zoveel soorten en maten voorradig heeft. Een groot assortiment is echter niet economisch, niet voor de fabriek, die voor elke variatie de machines weer anders moet stellen en andere grondstoffen in voorraad moet houden, niet voor de grossier en niet voor de winkelier. Ook voor de gebruiker is het niet economisch. Stel dat op de hele wereld bouten en moeren slechts in een beperkt aantal typen te verkrijgen waren, dat alle boren maten hadden die daarmee overeenkwamen en dat de plaatdikten van metaal genormaliseerd waren naar de lengten van de bouten en de dikten van de moeren. Dan zou een knutselwerkje veel eenvoudiger zijn.

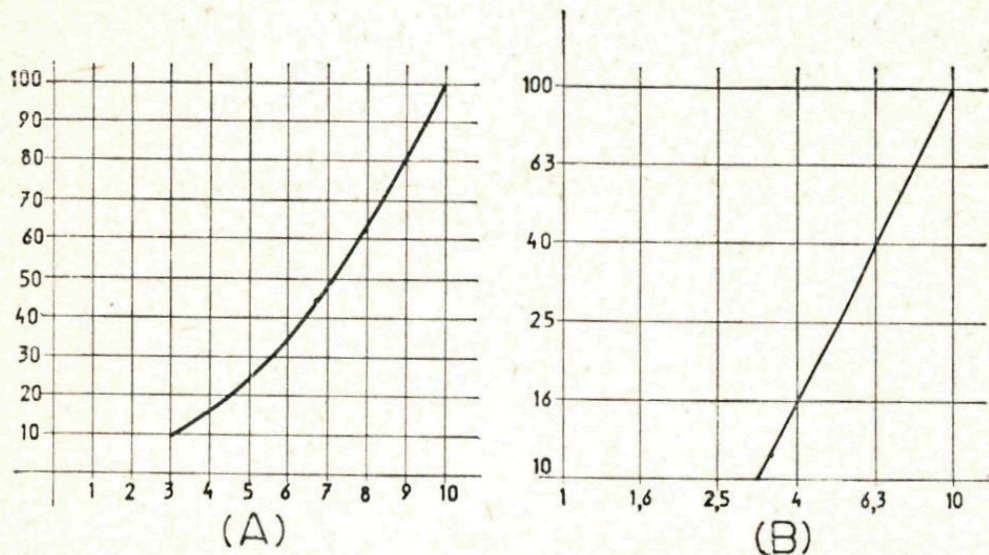
Zover zijn we nog niet. Je moet niet proberen een moertje van een Engelse firma te draaien op een boutje van een Duitse: de Engelse fabrieken gebruiken nog overwegend inchmaten voor hun producten. Als men eenzelfde product in een aantal maten fabriceert bevelen de normalisatie-instituten aan om gebruik te maken van de zogenaamde voorkeurreeksen. Dit zijn meetkundige reeksen (rijen; het woord reeks werd vroeger gebruikt in plaats van rij, we zullen de woorden hier verder door elkaar gebruiken), waarvan de getalwaarden der termen afgerond zijn. De eerste term van de rijen is 1, de reden achtereenvolgens

volgens $\sqrt[5]{10}$, $\sqrt[10]{10}$, $\sqrt[20]{10}$, $\sqrt[40]{10}$.

De reeksen dragen de naam van de Fransman Renard, die de R5-reeks in 1880 het eerst toepaste op kabels. Tabel 1 laat een deel van de verschillende getallen van de reeksen zien. De R10 reeks klimt met kleinere stapjes op als de R5 reeks, maar bevat alle termen

hiervan ook. Ditzelfde geldt voor de R20 en R40 reeksen. De reeksen hebben bijzonder praktische eigenschappen, die ten dele voortvloeien uit het feit dat ze meetkundig zijn, ten dele ook uit de bijzondere keuze van de reden:

1. Het product van twee termen van de reeksen is altijd weer een term van de reeks, hetzelfde geldt voor het quotient.
2. Een gehele positieve of negatieve macht van een term is weer een term van de reeks.
3. De sommen of verschillen van telkens twee opvolgende termen van een voorkeurreeks vormen weer een meetkundige rij met dezelfde reden.
4. De logaritmen van de voorkeurgetallen vormen een rekenkundige rij. Als we voor het weergeven van een kwadratische functie op de assen de getallen uit voorkeurreeksen aanbrengen gaat de kromme over in een rechte. (zie figuur)



5. Heeft men aanvankelijk de getallen van de R5-rij nodig gehad en wil men een uitbreiding, dan gaat men over op de volgende rijen, de oude termen blijven daarin toch gehandhaafd.
6. Er is een verzoening mogelijk tussen de millimeter- en de inch-maten omdat in alle rijen de term 2,5 voorkomt en deze is bij benadering gelijk aan de omrekeningsfactor van inch in millimeters (25,4) Zie tabel 2.
7. Bij uitbreiding van de rijen naar boven en onderen komen de be-

Tabel 2. Voorkeurreeks R 10 toegepast voor lineaire maten in millimeters en inches.

R 10	millimeter	1	1,25	1,6	2	2,5	3,15	4	5	6,3	8	10
1...10	inch			$\frac{1}{16}''$	$\frac{5}{64}''$	$\frac{3}{32}''$	$\frac{1}{8}''$	$\frac{5}{32}''$	$\frac{3}{16}''$	$\frac{1}{4}''$	$\frac{5}{16}''$	$\frac{3}{8}''$
R 10	millimeter	10	12,5	16	20	25	31,5	40	50	63	80	100
10...100	inch	$\frac{3}{8}''$	$\frac{1}{2}''$	$\frac{5}{16}''$	$\frac{3}{4}''$	1''	$1\frac{1}{4}''$	$1\frac{1}{2}''$	2''	$2\frac{1}{2}''$	3''	4''

langrijke decimale getallen 10, 100, 1000 etc. en $1/10$, $1/100$, $1/1000$ etc. in alle reeksen voor.

De voorkeurrijen zijn voor degene die iets te maken heeft met het plannen van industriële producten een handig hulpmiddel, ook al zou hij zich verder (helaas) van normalisatie niets aantrekken.

Tot slot nog een voorbeeld. Glazen schijven voor het slijpen van telescoop-spiegels worden overwegend in de volgende maten geleverd: 10 cm middellijn, 11 cm, 12,5 cm, 15 cm, 16 cm, 18 cm, 20 cm, 25 cm, 30 cm. Om hier tot typenbeperking te komen (dus tot kostenbesparing) zou ik voorstellen ipv. deze maten die uit de R10-reeks te nemen, ze komen er dicht bij en dit is een indicatie dat de behoefte in die richting ligt. De maten die uitvallen liggen zo dicht bij de wel verkrijgbare maten, dat dit geen bezwaar kan zijn. Zoiets zou natuurlijk doorwerken: ook de diameters van telescoopbuizen zouden meegenormaliseerd worden.



34. Van drie verschillende natuurlijke getallen is de som gelijk aan 100. Het middelste van de drie getallen, naar grootte gerekend, ligt tussen 30 en 40. Hoeveel van die drietallen zijn er?

35. Welk eenvoudig verband bestaat er tussen de som van de oppervlakten van de drie buitenste vierkanten en de som van de oppervlakten van de drie binnenste vierkanten in figuur 13?

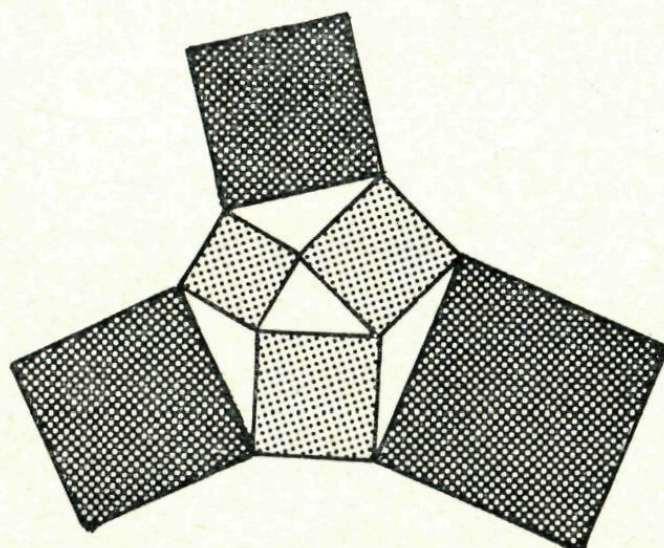


Fig. 13

36. Onder een stambreuk verstaan we een breuk, die 1 tot teller heeft en een natuurlijk getal ≥ 2 tot noemer heeft. Bewijs dat elke stambreuk te schrijven is als som van twee verschillende stambreuken en zelfs op meerdere manieren als som van drie verschillende stambreuken is te schrijven.

°De sneeuwvlok-kurve van Von Koch

Hoe groot de oppervlakte van een dubbeltje is weet ik niet precies, laat ons zeggen ongeveer 1 cm^2 . De omtrek van het dubbeltje is groter dan die van een cirkel met dezelfde middellijn, want het dubbeltje is gekarteld. De omtrek van het ongekartelde dubbeltje is ongeveer 47 mm.

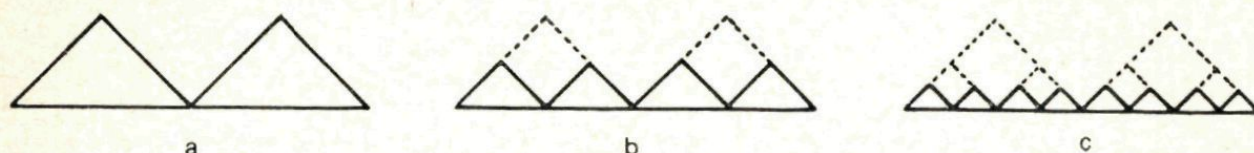


Fig. 14

Als we ons nu eens een karteling voorstellen als in de bovenstaande figuur 14a, dan wordt de omtrek daardoor ongeveer $\sqrt{2}$ maal zo groot. Dat kartelen helpt dus om de omtrek groter te maken. Hierdoor aangemoedigd zou je verder kunnen gaan met kartelen (figuur 14b en 14c). Maar bij even nadenken zie je wel in dat de omtrek daardoor niet meer groter wordt.

Nu zijn er figuren te bedenken, die een bepaalde oppervlakte hebben, bijvoorbeeld 1 cm^2 , en een oneindig grote omtrek.

Von Koch heeft enige fraaie figuren voorgesteld die de genoemde eigenschap bezitten. Eén ervan zullen we hier wat nader bekijken. In figuur 15 zie je vier figuren, waarvan elke volgende op dezelfde wijze uit de voorgaande verkregen is. De gesloten figuur die ontstaat zullen we gemakshalve een kurve noemen. De uitgangskurve (C_0) is hier een gelijkzijdige driehoek. We verdelen elke zijde in drie gelijke stukken en construeren op de middelste stukken weer gelijkzijdige driehoeken; zo ontstaat figuur C_1 . Daarna verdelen we alle zijden weer in drie gelijke stukken, construeren wéér op de middelste stukken gelijkzijdige driehoeken en krijgen kurve 2 (C_2). Bij een volgende herhaling ontstaat C_3 . Als we hier een oneindig aantal malen mee doorgaan ontstaat de kurve van Von Koch. Wat technischer uitgedrukt: de limiet waartoe C_n nadert als n nadert tot oneindig is de kurve van Von Koch: C . Nog korter:

de kurve van Von Koch $C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$.

Misschien kun je je voorstellen dat het uiterlijk van C niet zo heel veel verschilt van C_3 . Zes boogjes naar buiten en zes naar binnen, maar alles „gladder” dan bij C_3 .

°°We kunnen oppervlakte en omtrek van C uitrekenen.

Het aantal zijden van C_0 is 3. Door het constructievoorschrift wordt het aantal zijden in elke volgende figuur 4 maal zo groot als in de voorgaande. Zo heeft C_1 4.3 zijden, en C_n heeft er $4^n.3$.

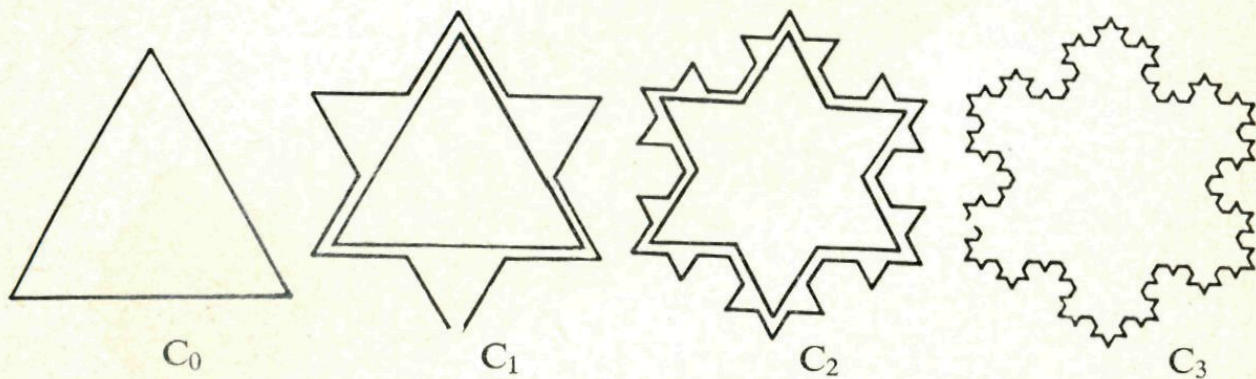
De lengte van de zijden van een volgende figuur is telkens $\frac{1}{3}$ van de zijden van de voorgaande figuur. De lengte van de zijden van C_n is dus $(\frac{1}{3})^n a$, als a de lengte van de zijde van C_0 is. De som van alle zijden van C_n , dus de omtrek van C_n is dus: $4^n.3.(\frac{1}{3})^n.a = 3a (\frac{4}{3})^n$. Daar $\frac{4}{3} > 1$ wordt $(\frac{4}{3})^n$ groter naarmate n groter wordt en nadert tot oneindig als n nadert tot oneindig. In de figurenreeks $C_0, C_1, C_2, \dots$ wordt de oppervlakte telkens vergroot met een steeds groeiend aantal driehoekjes. Deze driehoekjes worden echter ook kleiner naarmate we verder in de reeks komen. Noemen we de oppervlakte van C_0 , V , dan is de oppervlakte van één klein driehoekje dat in C_1 erbij gekomen is $\frac{1}{9} V$. Er zijn echter 3 driehoekjes bijgekomen, dus de oppervlakte van C_1 is $V + 3. \frac{1}{9} V$.

De oppervlakte van de toegevoegde driehoekjes in C_2 is $(\frac{1}{9})^2 V$; het aantal van deze driehoekjes is echter 4 maal zo groot als wat er in de vorige figuur bijgekomen is.

De oppervlakte van C_2 is dus: $V + 3. \frac{1}{9} V + 4.3.(\frac{1}{9})^2 V$.

Zo komen we tot de volgende som van termen voor de oppervlakte van C_n die we nog wat omrekenen:

$$\begin{aligned} \text{Opp} &= V + 3.(\frac{1}{9})V + 4.3.(\frac{1}{9})^2 V + 4^2.3.(\frac{1}{9})^3 V + \dots + 4^{n-1}.3.(\frac{1}{9})^n V \\ &= V + 3. \frac{1}{9} V [1 + 4. \frac{1}{9} + 4^2. (\frac{1}{9})^2 + 4^3. (\frac{1}{9})^3 \dots + 4^{n-1}. (\frac{1}{9})^{n-1}] \\ &= V + \frac{1}{3} V [1 + \frac{4}{9} + (\frac{4}{9})^2 + (\frac{4}{9})^3 \dots + (\frac{4}{9})^{n-1}] \end{aligned}$$

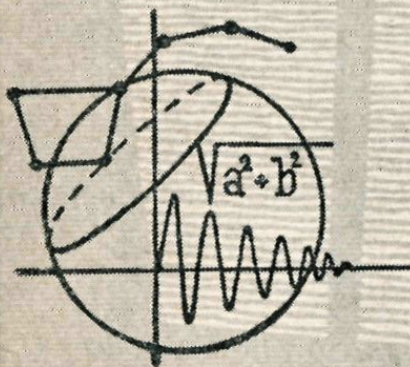


Dit laatste is bekend: de som van de termen van een meetkundige rij (oneindig, afdalende) is $S = \frac{a}{1-r}$. Wat tussen haken staat nadert dus

tot: $\frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$. Zodat de oppervlakte van de sneeuwvlokcurve van Von Koch wordt: $V + \frac{1}{3} V. \frac{9}{5} = \frac{13}{5} V$.

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



3

1967-68
ROČ. 46

ČASOPIS PRO STUDIJICI ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

In het Tsjechische zustertijdschrift van Pythagoras, Rozhledy genaamd, vonden we de volgende aardige puzzel.

In twee ringen staan de cijfers 1 t/m 5 op de volgende manier: (fig. 16)

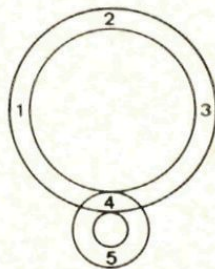


Fig. 16

De cijfers moeten nu worden verplaatst door de ringen: In de grote ring mogen ze een plaats worden opgeschoven met de klok mee of tegen de klok in en in de kleine ring mogen ze van plaats worden verwisseld.

Uitgaande van fig. 16 kunnen zo de situaties van de figuren 17, 18, 19 ontstaan.

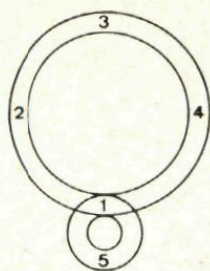


Fig. 17

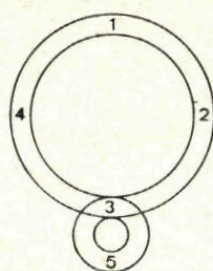


Fig. 18

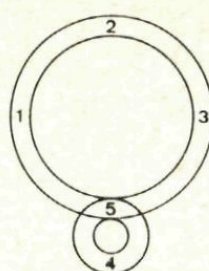


Fig. 19

De opgave luidt: Vorm, uitgaande van de situatie van fig. 16, de situatie van fig. 20.

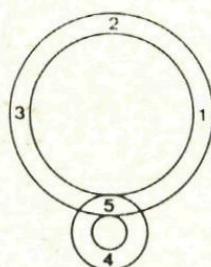


Fig. 20

Daarbij moet beurtelings een „zet” worden gedaan met de cijfers van de grote ring en de cijfers van de kleine ring. Je mag zelf weten met welke je begint. De oplossing staat op blz. 96.



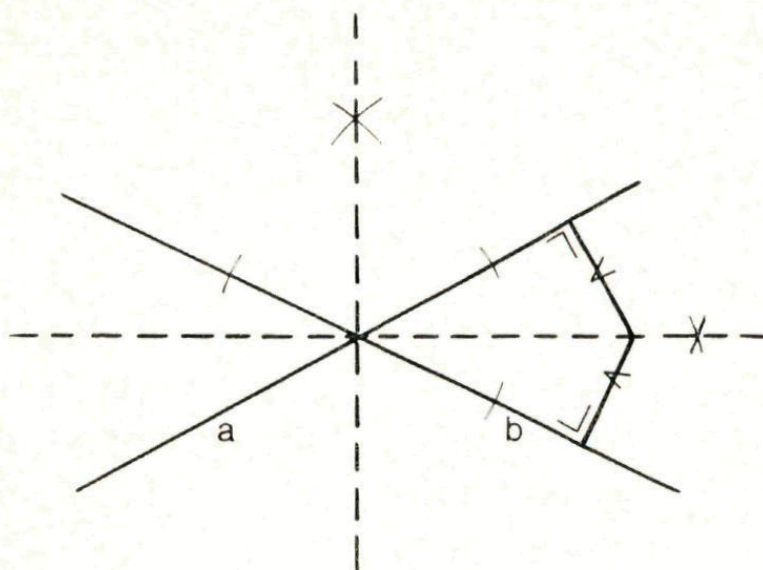
37. Een vierkante cake is bovenop en aan de zijkanten geglaceerd. Zie je kans die cake zo onder 9 personen te verdelen, dat elk evenveel cake krijgt als de anderen en ook evenveel van de glacering krijgt als de anderen?

38. Bepaal het kleinste (gehele) veelvoud van 360, dat met 10 verschillende cijfers geschreven wordt.
39. Driehoek ABC is scherphoekig. Voor welk punt P binnen die driehoek is de som van de afstanden van P tot de hoekpunten A, B, C plus de som van de afstanden van P tot de zijden AB, BC, CA minimaal?
40. Teken driehoek ABC met zijden $AB = 70 \text{ mm}$, $BC = 65 \text{ mm}$, $CA = 60 \text{ mm}$. Construeer dan vierkant BKLM zo, dat C op KL ligt en A op LM ligt.

°° Bissectriceloodvlakken

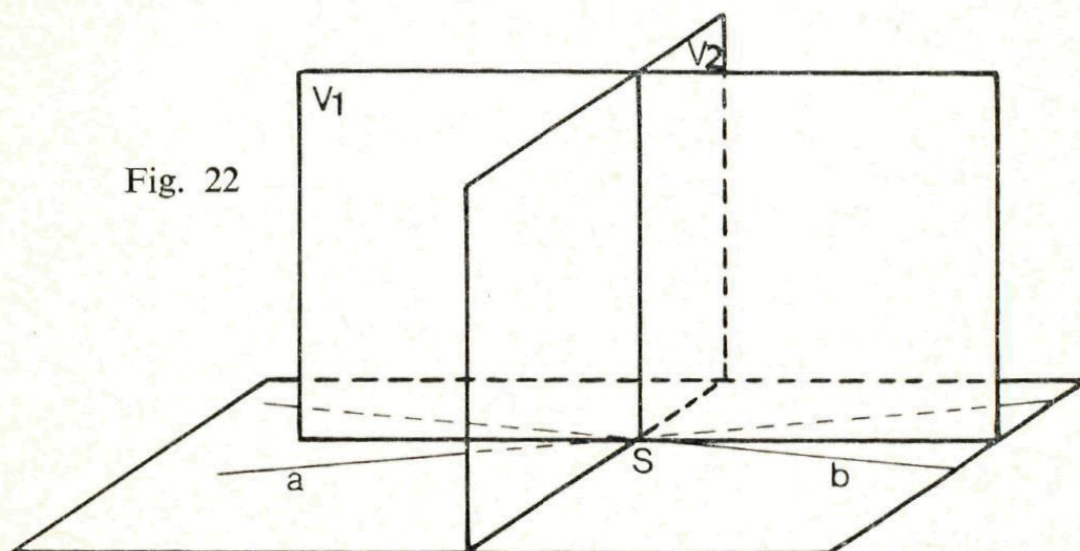
De verzameling van punten met gelijke afstanden tot twee snijdende lijnen a en b bestaat in de vlakke meetkunde uit de bissectrices van de hoeken die die lijnen vormen. (fig. 21)

Fig. 21



Hoe dit in de ruimte wordt laat figuur 22 zien. In de plaats van de twee bissectrices komen twee *bissectriceloodvlakken* V_1 en V_2 , dat wil zeggen twee vlakken die door de bissectrices gaan en loodrecht staan op het vlak door de lijnen a en b .

Fig. 22



Nemen we nog een derde lijn c door het snijpunt van a en b (niet in hetzelfde vlak als a en b) (fig. 23) dan krijgen we voor de verzameling van punten met gelijke afstanden tot a en c twee vlakken V_3 en V_4 . De punten van de snijlijnen van V_1 en V_3 , V_1 en V_4 , V_2 en V_3 , V_2 en V_4 hebben gelijke afstanden tot de drie lijnen a , b en c . Ook de bissectriceloodvlakken van b en c gaan (dus) door deze vier snijlijnen.

Zo, dat was dan een stukje sterometrie dat er wezen mag. Het enige wat er nog te wensen valt is een behoorlijke figuur waarin het bovenstaande wordt gedemonstreerd.

Fig. 23

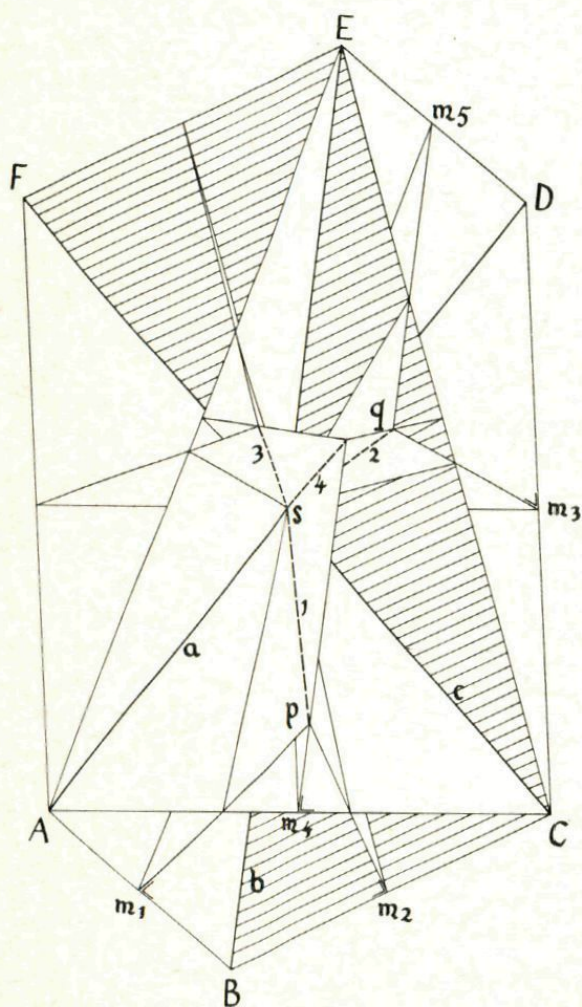
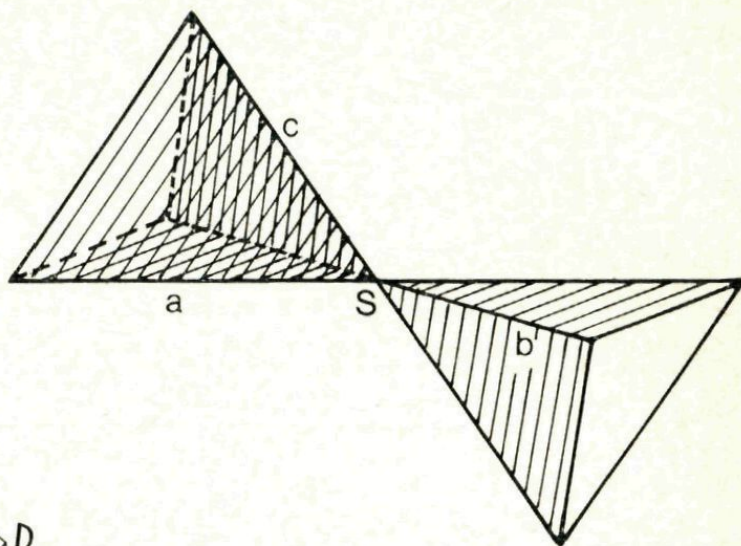


Fig. 24

Maar . . . dat valt niet mee. Egbert Hoogenberk uit Doorn heeft er danig zijn best op gedaan en kwam tot het resultaat dat op de binnenzijde van het omslag is weergegeven. De volgende toelichting hoort er bij, (fig. 24).

De drie lijnen a, b en c snijden elkaar in S. De stukken SA, SB, SC enz. zijn gelijk genomen. De gestippelde lijnen 1, 2, 3 en 4 zijn de gevraagde snijlijnen. Het is overdreven te zeggen dat de figuur de oplossing van het vraagstuk verduidelijkt, maar op zichzelf vonden we de tekening toch erg fraai.

°° Differentietabellen

„Als we een aantal getallen, die steeds met één vermeerderen kwadrateren, dan blijkt dat de verschillen van de opvolgende kwadraten steeds met 2 aangroeien”.

Dit schrijft ons H. Uilenbroek uit Haarlem. Over hetzelfde onderwerp hebben we ook een brief van M. Tilanus uit Hilversum gekregen. Deze lezer voegt er aan toe dat ook voor 3e en hogere machten iets dergelijks te vinden is.

We kunnen het beste een schema maken van b.v. een aantal kwadraten om te zien waarover het gaat.

n	n ²		
10	100		
		21	
11	121		2
		23	
12	144		2
		25	
13	169		2
		27	
14	196		2
		29	
15	225		2
		31	
16	256		

In de tweede kolom staan de kwadraten van de getallen in de eerste kolom. De derde kolom ontstaat door telkens het verschil (*differentie*) te nemen van twee opvolgende getallen uit de tweede kolom. Evenzo de vierde kolom. Voor een aantal derdemachten kunnen we ook zo'n *differentietabel* maken:

n	n^3			
5	125			
		91		
6	216		36	
		127		6
7	243		42	
		169		6
8	512		48	
		217		6
9	729		54	
		271		
10	1000			
11	de derde macht van 11 weet ik niet.			

Het duurt iets langer maar ook nu krijgen we een kolom met steeds hetzelfde getal.

Voor de rij der vierdemachten duurt het nog een kolom langer, maar weer lukt het uiteindelijk. Hoe kan het dat deze rijen zich zo netjes gedragen? De verklaring is eigenlijk eenvoudig.

De n^e term van de rij der derdemachten is n^3 , de volgende is $(n + 1)^3$. De differentie wordt

$$(n + 1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

De differentie is een veelterm van één graad lager dan de rij zelf. De tweede differentie wordt:

$$= 3(n + 1)^2 + 3(n + 1) + 1 - (3n^2 + 3n + 1) = 6n + 6$$

Deze is weer een graad lager, de derde differentie is nog eens een graad lager, dat wil zeggen constant.

Hiermee is meteen duidelijk dat niet iedere getallenrij de zoveelste differentie constant zal zijn, b.v. de rij 2, 4, 8, 16, 32 vertoont een heel ander beeld. Het is niet zo moeilijk na te gaan waarom. Wat is ook weer de derdemacht van 11?

We kunnen dit uit de differentietabel afleiden: Voeg aan de laatste kolom een 6 toe en bereken dan door optelling welke getallen je aan de voorgaande kolommen moet toevoegen: $54 + 6 = 60$, $271 + 60 = 331$, $1000 + 331 = 1331$, dit is de derdemacht van 11.

Differentie-tabellen lenen zich ook voor het opsporen van fouten. In de rij -40, -15, -4, -1, 0, 6, 20, 51, 104, 185, 300 staat één getal dat er niet in hoort. Welk?

°°Voetbal op een papiertje

Het volgende amusante spel is ergens in Rusland ontstaan. De Russische deelnemers aan de Internationale Wiskunde-Olympiade in Sofia (zomer 1966) hebben er hun tegenstanders mee vermaakt. Naar aanleiding daarvan heeft het Oostduitse tijdschrift ALPHA het aan zijn lezers meegedeeld en zo hebben wij er kennis van kunnen nemen. Het speelveld is een stuk roosterpapier van 32 bij 20 hokjes (zie figuur). Het spel begint op de middenstip en de twee spelers zetten om de beurt. In principe bestaat elke zet uit het tekenen van drie lijnstukjes langs een zijde of langs een diagonaal van een hokje; de spelers nemen op die manier telkens en om de beurt „de bal” mee naar een ander rooster-

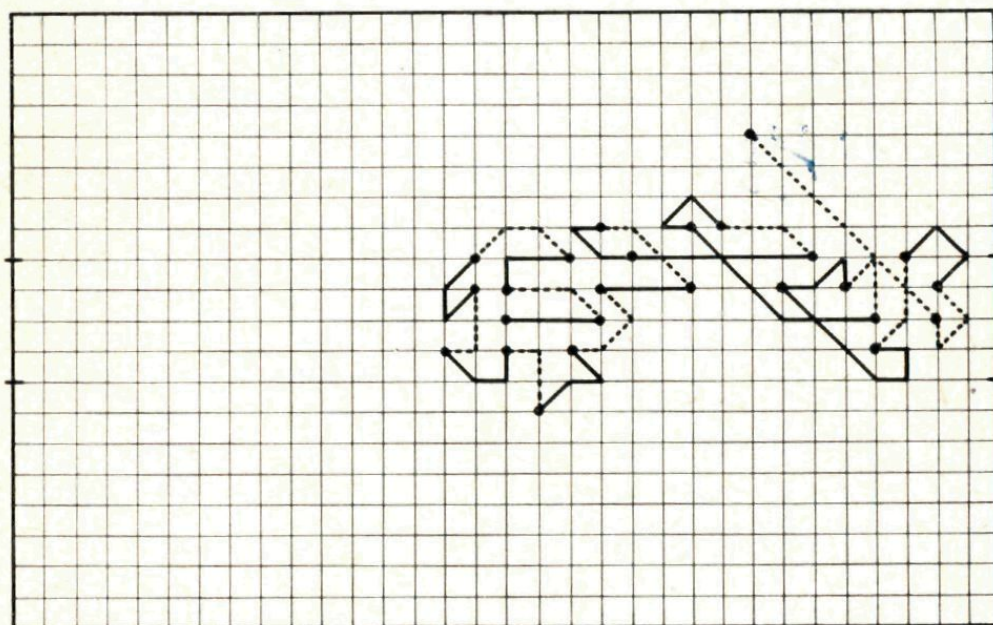


Fig. 25

punt. Hierbij gelden twee belangrijke spelregels:

Regel 1: de rand van het speelveld mag daarbij niet geraakt of gevolgd worden;

Regel 2: de al eerder op het speelveld gevormde zigzaglijn mag ook niet geraakt of gekruist worden.

De enige uitzondering op regel 1 is de doellijn, het tussen de „goalpalen” gelegen deel van de veldgrens. Deze mag geraakt worden en overschreden worden. Alleen het overschrijden van de doellijn telt als een goal en bij het maken van een goal eindigt het spel.

Op regel 2 is ook een uitzondering en die geeft het spel een bijzonder boeiend karakter. Speler A kan speler B in een zodanige positie manoeuvreren, dat deze laatste niet meer in staat is volgens de regels verder te spelen. In dat geval mag A opnieuw zetten, zijn zet moet zes lijnstukjes lang zijn en mag de al eerder gevormde speellijn zowel raken als kruisen.

De figuur brengt verslag uit van het begin van de eerste partij, die wij speelden. Volg deze wedstrijd maar eens. De bewaker van de rechter goal wist op een geraffineerde manier een hachelijke toestand voor zijn doel op te lossen. Dat hielp hem overigens niet veel. Drie schoten later werd zijn doel doorboord.



°° Een ijzersterk geheugen

0112358314	1123583145	2134718976	3145953707	4156178538
0224606628	1235831459	2246066280	3257291011	4268426842
0336954932	1347189763	2358314594	3369549325	4370774156
0448292246	1459437077	2460662808	3471897639	4482022460
0550550550	1561785381	2572910112	3583145943	4592370774
0662808864	1673033695	2684268426	3695493257	4606628088
0774156178	1785381909	2796516730	3707741561	4718976392
0886404482	1897639213	2808864044	3819099875	4820224606
0998752796	1909987527	2910112358	3921347189	4932572910
1011235831	2022460662	3033695493	4044820224	5055055055

Hierboven staan vijftig getallen van tien cijfers elk. Het is heel gemakkelijk om die vijftig getallen even uit het hoofd te leren en dat zullen we je nu eens snel laten zien. Heb je ze straks in je bol gestopt, dan kun je iedereen verbluffen met jouw ijzersterke geheugen.

Om te beginnen zijn de eerste twee cijfers van elk getal niets anders dan het rangnummer van dat getal. Zegt iemand dus tegen je „Schrijf het zevenentwintigste getal maar eens op” dan begin je meteen maar met 27 op te schrijven. Het recept om de volgende cijfers te vinden, luidt als volgt: tel de laatste twee opgeschreven cijfers bij elkaar op en schrijf

het laatste cijfer van de som achteraan er bij; herhaal dit tot je tien cijfers hebt opgeschreven. Zo maak je van 27 dus 279 (omdat $2 + 7 = 9$) en van 279 maak je daarna 2796 (omdat $7 + 9 = 16$), dan ontstaat 27965 (omdat $9 + 6 = 15$), enzovoorts.

Nu ken je dus alle getallen uit je hoofd. Maar je kent ze niet alleen maar van voor naar achter. Kijk maar eens wat je doen moet als gevraagd wordt „Welk getal eindigt op 56?": Trek dan het voorste cijfer van zijn opvolger af (eventueel na lenen van een tiental) en je schrijft het antwoord aan de voorkant erbij; dit herhaal je weer tot het tiental cijfers compleet is. Eerst wordt die 56 dus 156 (omdat $6 - 5 = 1$), daarna komt er 4156 (omdat $5 - 1 = 4$), dan 74156 (omdat $11 - 4 = 7$), en zo verder.

Denk je nu eens in, dat we ons niet beperken tot rijen van tien cijfers, maar dat we onze rijen oneindig lang laten zijn. Het proces van optellen, waardoor uit elk tweetal burens in zo'n rij de opvolger van dat tweetal wordt gevormd, kan immers in principe onbeperkt herhaald worden: 279651673033695493257291011238314

Natuurlijk wordt zo'n rij repetent, wanneer je stuit op een tweetal burens dat je al eerder in die rij ontmoette. Met de tien verschillende cijfers van 0 tot en met 9 kan je echter niet meer dan 100 verschillende paren vormen, zodat dat verschijnsel zich in elke rij moet voordoen. Heb je 101 cijfers van een rij opgeschreven dan kan je daarin al 100 paren burens onderscheiden. Dus dan moet de herhaling beslist beginnen, als hij niet al eerder begonnen is. Met andere woorden: de periode van zulk een repetente rij kan niet meer dan 101 cijfers bevatten. In de praktijk valt dat nog al mee, want nader onderzoek leert dat de langst mogelijke periode uit 60 cijfers bestaat. Er zijn ook rijen, waarin de periode uit 3 of 4 of 12 of 20 cijfers bestaat:

550.550 . . .

8426.8426 . . .

347189763921.347189763921 . . .

46066280886404482022.46066280886404482022 . . .

En tenslotte is er een enkele rij, met een periode van slechts één cijfer. Weet je welke rij dat is?

°Ik kon mijn ogen niet geloven

Ik dacht namelijk, dat het linker potlood langer was dan het rechter. Tot mijn vriend Bart met een passer kwam. Toen zag ik, dat ... Probeer het zelf even.

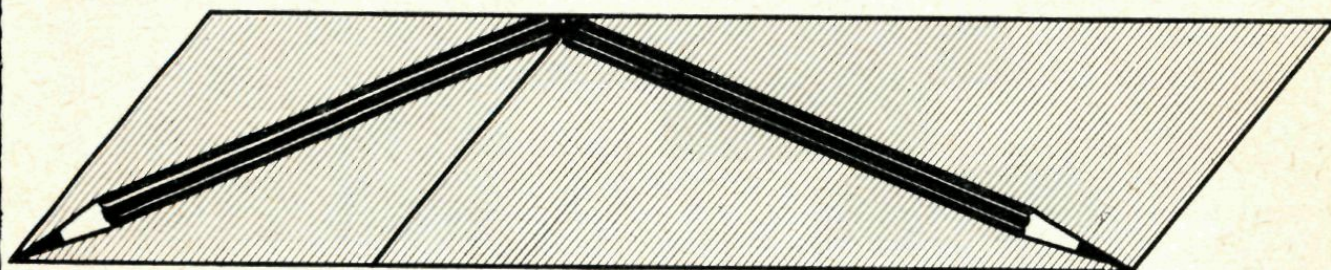


Fig. 26

Ook dacht ik, dat de oppervlakte van het binnenste gestippelde deel groter was, dan die van de buitenste ring.

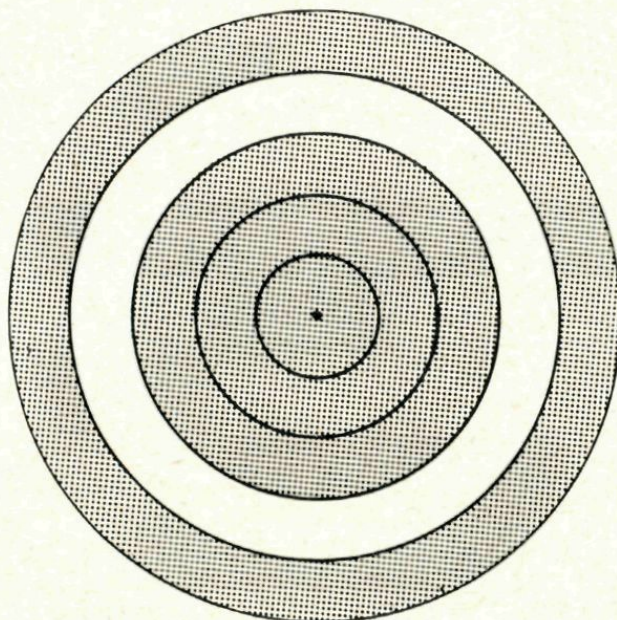


Fig. 27

Maar mijn vriend Bart zei: „Reken nu eens even na. De binnenste oppervlakte is gelijk aan $\pi \cdot 3^2 = 9\pi$.

De buitenste ring heeft als oppervlakte $\pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 4^2 = 9\pi$.”

Nou dus! Ik kon mijn ogen niet geloven.

Oplossingen van Denkertjes uit het vorige nummer

21. Alle waarden tussen 32 en 310.
22. Het schip is 32 en de kapitein 24. 8 jaar geleden was de kapitein 16 en het schip 24.
23. 50 cm^2 . Veronderstel $AB > 10$ en $AC \leq 10$, $BC \leq 10$. Nu is γ de grootste hoek dus α en β beide scherp. Is $AC < 10$, dan kan A' op het verlengde van CA gevonden worden zodat $A'C = 10$. Nu is $\triangle A'BC > \triangle ABC$ en $A'B > 10$. De maximale oppervlakte heeft de driehoek dus als $AC = BC = 10$.
Opp. $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \sin \gamma$ maximaal als $\sin \gamma = 1$, dus $\gamma = 90^\circ$.
Het maximum is 50.
24. De kleinste waarde is 997, de grootste 1010.
25. 10 seconden.
26. Plaats V bij de onderste stip, verder opvolgend R, L, A, G, B. Er zijn 48 mogelijkheden.
27. Stel $2n^3 + 9n^2 + 13n = f(n)$. Dan is $f(n+1) = f(n) + 6(n+2)^2$. Het verschil van 2 opvolgende getallen uit de rij is dus een zesvoud. Daar het eerste getal ($n = 1$) een zesvoud is (24) zijn alle getallen van de rij zesvouden.
28. Maximale oppervlakte 140. AB en CD moeten allebei loodrecht op MN staan.
29. Nee, dat kan niet. Elk aantal zetten waarbij een paard van linkerbovenhoek naar rechterbovenhoek gaat, is oneven.
30. Utrecht-Amsterdam + Amsterdam-Leeuwarden is korter dan Utrecht-Leeuwarden. Met afstand wordt hier dus niet steeds bedoeld: de kortste verbinding. De langere weg zal echter wel de snelste verbinding zijn.

Oplossing van de puzzel op blz. 86
Er zijn twee series die de gewenste eindtoestand leveren:
 $M-K-T-K-M-K-M-K-M-K-T-K-T$
 $en K-M-K-T-K-M-K-M-K-M-K-T-K-T$
Hierin betekenen M en T verschuivingen langs de grote ring, opvolgend MET de klok mee en TEGEN de klok in. En natuurlijk betekent K dan een verschuiving langs de kleine ring.

Misschien kun je ook zelf figuren verzinnen waarvan de omtrek oneindig lang is en de oppervlakte eindig, zoals de sneeuwvlokcurve van blz. 84. Stuur je vondsten naar het eerste redactieadres. Oplossingen van de Denkertjes inzenden voor 1 april 1968.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

H. J. ENGELS, Muggenbroekerlaan 41, Roermond.

BRUNO ERNST, Wilhelminapark 22, Breda.

Drs. A. B. OOSTEN, Turftorenstraat 11A, Groningen.

A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

G. A. VONK, Fahrenheitstraat 688, Den Haag.

Artikelen en problemen kunnen naar één van de redacteuren worden gestuurd.

Oplossingen van *Denkertjes* kunnen naar het derde adres worden gezonden, oplossingen van andere problemen naar het vierde adres.

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,50 per jaargang. Voor anderen f 4,—.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.