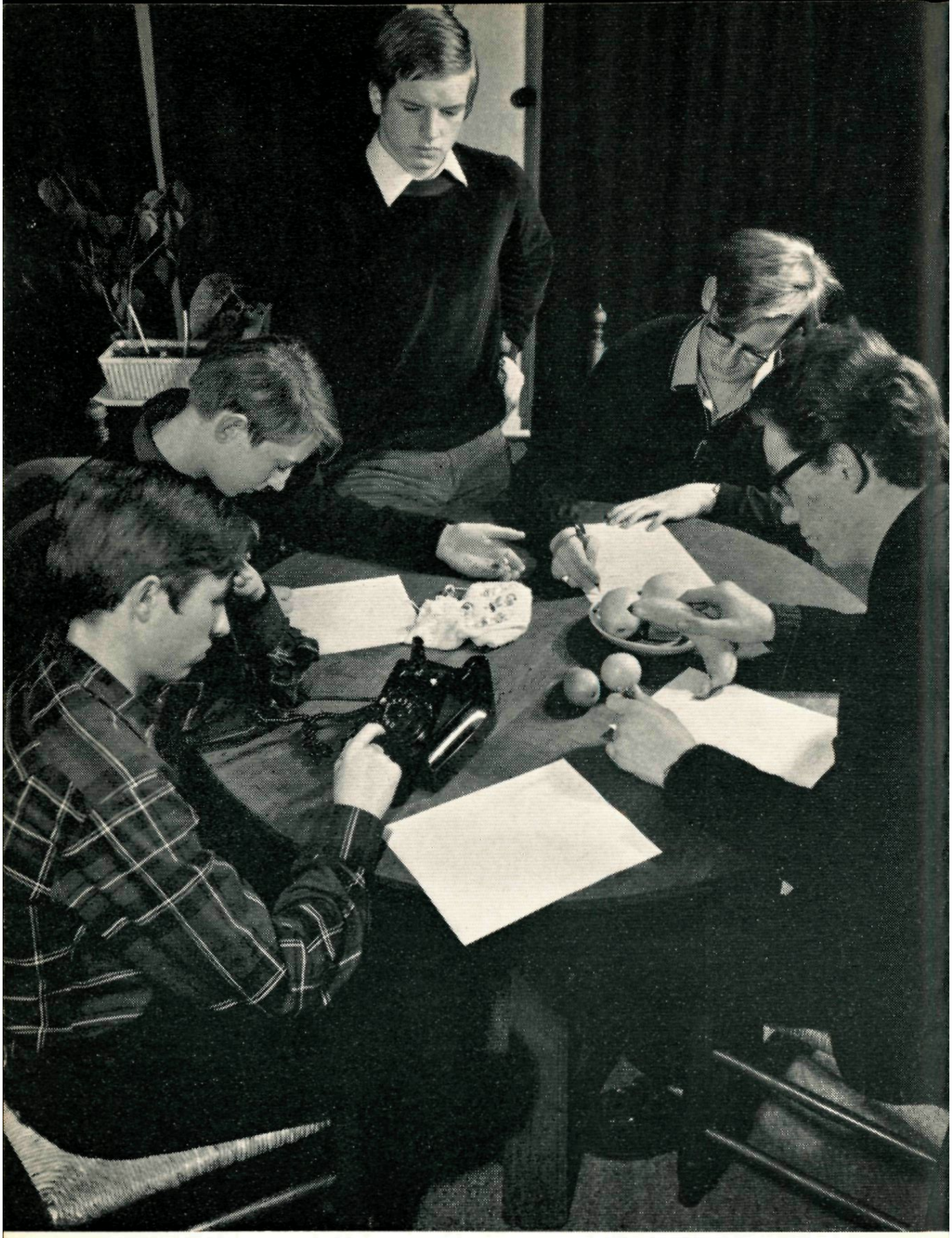
PYTHAGORAS

Wiskundetijdschrift
voor jongeren

5

Zevende jaargang
1967/1968



De commissie ter bevordering der bestudering der Kansrekening

pythagoras

jaargang 7 no 5

Drie van de vijf

Een kamer. Aan tafel Joop, Arend, Marc, Dick en Wim. Met zijn vijven vormen ze een commissie. Op tafel een gebrekkig telefoontoestel, een zak met rode, gele, groene, blauwe en witte knikkers en een fruitschaal met een appel, een peer, een banaan, een perzik en een pompelmoes.
De commissie moet van een voorzitter, secretaris en penningmeester worden voorzien, de vijf leden zijn volkomen gelijkwaardig, zodat er een groot aantal mogelijkheden is. Joop vraagt zich af hoeveel precies.

Arend speelt met het gebrekkige telefoontoestel. Alleen de cijfers 4, 5, 6, 7 en 8 functioneren nog. Hij berekent hoeveel nummers van drie cijfers hij hiermee kan draaien.

Marc neemt steeds drie knikkers uit de zak en berekent hoeveel verschillende drietallen hij kan krijgen, daarbij wel bedenkend dat verschillende drietallen iets anders is dan drietallen verschillenden.

Dick treft het. Hij mag drie vruchten van de fruitschaal nemen, maar moet eerst uitrekenen hoeveel verschillende combinaties hij kan kiezen.

Wim tenslotte, houdt het toezicht op zijn zwoegende vrienden. Inwendig verkneutert hij zich, omdat hij denkt dat ze alle vier hetzelfde aan het doen zijn. Ze zoeken toch alle vier uit op hoeveel manieren je drie dingen uit vijf kunt kiezen? Heeft hij gelijk?

Na een hele tijd rekenen en tellen hebben ze alle vier een antwoord gevonden, alle antwoorden blijken verschillend te zijn, zodat ze besluiten er maar mee op te houden. Marc stelt voor naar de bioscoop te gaan, Arend prefereert de televisie. Aangezien de commissie beslist niet uiteen mag vallen besluiten ze een kwartje op te gooien: bij kruis wordt het de bios, bij munt wordt het kastje kijken en als het geldstuk op de rand blijft staan, dan gaan ze aan het werk, want

tenslotte heeft iedere commissie een taak. De *kans* op dit laatste is trouwens te verwaarlozen, *waarschijnlijk* gaan ze toch maar naar de bioscoop, daarbij het *risico* lopend dat de voorstelling uitverkocht is.

De woorden kans, waarschijnlijk, risico duiden de mogelijkheid van het optreden van een bepaalde gebeurtenis.
Van veel gebeurtenissen laat het optreden zich niet verklaren door eenvoudige wetten van oorzaak en gevolg. We zeggen dan dat ze door het toeval worden bepaald. Op het eerste gezicht is het vreemd dat er over toevallige gebeurtenissen iets zinsvols gezegd kan worden, toch is dit wel het geval.
De **kansrekening** of **waarschijnlijkheidsrekening** houdt zich bezig met het berekenen van de **kans** op het optreden van **toevallige gebeurtenissen**.
Hoe groot is de kans dat het morgen regent?
„ „ „ „ „ „ ik ouder word dan 70 jaar?
„ „ „ „ „ „ Feijenoord kampioen wordt?
„ „ „ „ „ „ een radiumatoom vervalt?
„ „ „ „ „ „ iemand kleurenblind is?
En vooral: Hoe groot is de kans dat ik win?
Want de kansrekening is historisch nauw verbonden met gokspelen. In een leerboek treft men dan ook steeds veel voorbeelden aan over munten, dobbelstenen, kaartspelen en wat dies meer zij.
Tegenwoordig is kansrekening niet alleen belangrijk voor gokkers, maar ook voor verzekeringsdeskundigen, natuurkundigen, astronomen, biologen, psychologen en vele andere -ogen.
Zelfs is het zo dat gokkers maar beter niets van kansrekening kunnen weten, het zou hen in vele gevallen maar tot de conclusie leiden dat hun kansen te klein zijn, en niets is erger voor een gokker dan er mee op te houden.
Omstreeks 1650 vermoedde Chevalier de Méré dat hij zou winnen als hij wedde dat hij in 24 worpen met 2 dobbelstenen tenminste eenmaal dubbelzes zou krijgen. In de praktijk bleek hij deze weddenschap vaker te verliezen dan te winnen. De Franse wiskundige en wijsgeer Pascal berekende dat de kans inderdaad minder dan 50% was en geldt sindsdien als grondlegger van de waarschijnlijkheidsrekening. Er is een kans dat je Pascal kunt narekenen als je dit speciale nummer van Pythagoras hebt gelezen (nou ja, *gelezen*).

Iemand gooit een dobbelsteen op. Hoe groot is de kans dat hij een zes werpt?
Het werpen van de dobbelsteen noemen we een *experiment*. Het resultaat van de worp heet de *uitkomst van het experiment*. Er zijn zes mogelijke uitkomsten, omdat de dobbelsteen zes kanten heeft. We nemen aan dat de dobbelsteen „zuiver" is, dat wil zeggen dat alle zes mogelijkheden gelijkwaardig zijn. (Een dobbelsteen die voor de helft van lood en voor de andere helft van plastic is, is niet zuiver.) Eén van de mogelijke uitkomsten is een 6, de kans op een zes is $\frac{1}{6}$. We geven de kans aan met de letter P (van probabilitas = waarschijnlijkheid), dus $P = \frac{1}{6}$.
Het werpen met een dobbelsteen komt op hetzelfde neer als het blindelings trekken van een kaart uit zes kaarten, waarop achtereenvolgens de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6 staan.

Denken we ons N kaarten, met op elke kaart één getal, en komt op m kaarten van de N het getal 5 voor, dan zeggen we dat de kans op het trekken van een 5 gelijk is aan $P(5) = \frac{m}{N}$.

(We gaan er vanuit dat de trekking „zuiver" is. dat wil zeggen dat er geen voorkeur voor bepaalde kaarten is.)
We zien hieruit direct dat $0 \leqslant P \leqslant 1$ is. Zit er geen enkele 5 tussen de kaarten, dan is $m = 0$, dus $P = 0$, staat op alle kaarten een 5, dan is $m = N$, dus $P = 1$. Verder kunnen we opmerken dat de kans om geen 5 te trekken gelijk is aan $P(\text{geen-5}) = \frac{N - m}{N} = 1 - P(5)$.

Een experiment bestaat uit het opwerpen van 2 geldstukken. Hoe groot is de kans dat de uitkomst is: munt-munt?
We nemen aan dat er bij het opwerpen van een geldstuk twee gelijkwaardige uitkomsten mogelijk zijn, „kruis" of „munt". [De mogelijkheid dat de munt op zijn kant blijft staan verwaarlozen we.]
Om de kans op tweemaal munt bij ons experiment te kunnen bepalen, moeten we eerst weten: hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er en hoeveel van deze uitkomsten zijn munt-munt?
Het berekenen van al deze mogelijkheden doet men in de *combinatieleer* of *combinatoriek*.

NOGMAALS DRIE VAN DE VIJF

We keren terug naar de harde werkers van blz. 97. Joop is tot de conclusie gekomen dat er 60 verschillende besturen gevormd kunnen worden van drie leden van de commissie van vijf. Hier volgt zijn redenering:
„Ik kies eerst een voorzitter, dat kan op 5 manieren. Elk van de vijf mogelijke voorzitters kan kiezen uit 4 secretarissen, totaal 20 mogelijke paren. Elk tweetal kan dan nog worden voorzien van 3 verschillende penningmeesters, zo kom ik op 60 drietallen."
Arend heeft iets dergelijks bedacht voor zijn telefoonprobleem. Hij zegt: Voor het eerste cijfer kan ik kiezen uit 5. Ditzelfde cijfer kan ik echter ook de tweede en de derde keer gebruiken, zodat ik op 5.5.5 = 125 mogelijke telefoonnummers kom.

Marc heeft zijn drietallen knikkers in verschillende groepen ingedeeld. Er zijn vijf drietallen met allemaal gelijk gekleurde knikkers. Er zijn ook met twee gelijk gekleurde, bijvoorbeeld twee rode. Als derde knikker kan dan nog optreden een blauwe, gele, groene of witte; totaal 5.4 = 20 drietallen met twee gelijke knikkers. Tenslotte de drietallen met drie verschillend gekleurde knikkers. Deze heeft hij allemaal opgeschreven, waarbij hij op een totaal van 10 kwam. Zodoende kan hij 35 verschillende drietallen vormen.
Dick heeft zijn vruchten a, b, c, d, e genoemd en komt tot 10 combinaties: abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.
Alle vier antwoorden zijn dus inderdaad verschillend.

We gaan dit een beetje systematischer bekijken. Op 5 kaartjes schrijven we achtereenvolgens de cijfers 1 t/m 5. De kaartjes gaan in een doos, we schudden flink en halen er dan één kaartje uit. Het getrokken nummer noteren we. We herhalen de procedure twee keer en krijgen zo een getal van drie cijfers. Maar . . . we hebben niet gezegd wat we met de getrokken kaartjes doen. Stoppen we die na iedere trekking weer in de doos, of niet?

Het totale aantal drietallen dat we kunnen vormen hangt af van:
a. of we ieder getrokken kaartje terugleggen, of niet.
b. of we letten op de volgorde waarin we de drie cijfers trekken, of niet.

1. We leggen *niet* terug, letten *wel* op de volgorde. Dit is het probleem waar Joop mee zat. Immers: Een getrokken voorzitter kan niet meer meedoen in de trekking voor secretaris en A voorzitter, B secretaris is iets anders dan omgekeerd.
De 5.4.3 = 60 mogelijkheden heten het aantal *variaties* van 3 uit 5. Wordt het bestuur nog uitgebreid met een vice-voorzitter en een vice-secretaris, dan is het aantal mogelijkheden 5.4.3.2.1 = 120, dat is het aantal *permutaties* of volgorden van 5 dingen.

2. We leggen *niet* terug, letten *niet* op de volgorde. De 60 variaties moeten nu worden gedeeld door 6, omdat elk drietal zes keer voorkomt, bv. 123, 132, 213, 231, 312, 321. Een peer, een appel en een banaan is immers hetzelfde als een appel, een banaan en een peer. De 10 mogelijkheden heten het aantal *combinaties* van 3 uit 5.

3. We leggen *wel* terug, letten *wel* op de volgorde. Nu is ook 444, 445, enz. mogelijk, dus totaal 5.5.5 = 125 (telefoonnummers).

4. We leggen *wel* terug, letten *niet* op de volgorde. Dit is het lastigste geval. Dat er 35 mogelijkheden zijn, hebben we al bij de knikkers gezien, door verschillende gevallen te onderscheiden.

°°°Een andere afleiding voor dit aantal is: Plaats de drie cijfers van een trekking naar opklimmende grootte, tel bij het tweede cijfer 1 op en bij het derde cijfer 2. De drie zo gevormde getallen zijn zeker verschillend. Als we dit doen met alle mogelijke drietallen, dan hebben we alle combinaties van 3 uit 7, dus $\frac{7.6.5}{6} = 35$.

I. **Uit twee groepen met respectievelijk p en q verschillende objecten kunnen p.q verschillende paren worden gevormd, met uit elke groep een helft van het paar.**

II. **Het aantal volgorden of rangschikkingen of permutaties van N objecten is 1.2.3.4.5. . . N (—) $\overset{\text{def.}}{=}$ N! (spreek uit: N faculteit.)**

III. **Het aantal variaties van m objecten uit N is**

$$\frac{N.(N-1).(N-2)\ldots(-)\,(N-m+1) = N.(N-1)\ldots(-)\quad 3.2.1}{(N-m)\,(N-m-1)\ldots\quad 3.2.1} = \frac{N!}{(N-m)!}$$

IV. **Het aantal combinaties van m objecten uit N is gelijk aan het aantal variaties gedeeld door het aantal permutaties van de m objecten:**

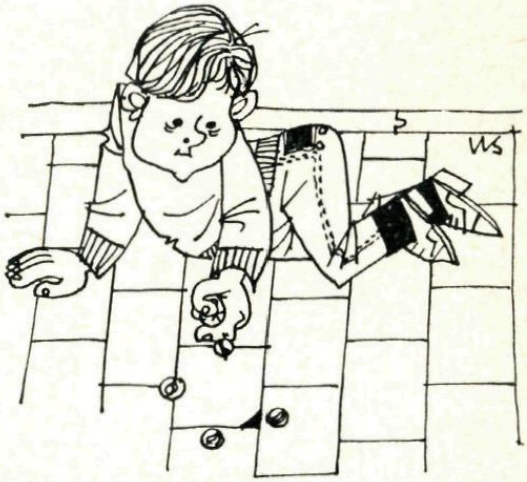
$$\frac{N!}{(N-m)!} : m! = \frac{N!}{m!(N-m)!} = \binom{N}{m}$$ **(spreek uit: N boven m.)**

We definiëren 0! = 1. Voor het aantal combinaties van N objecten uit N kunnen we dan ook gebruiken $\binom{N}{N} = \frac{N!}{N!\ \ 0!} = 1$, wat in overeenstemming is met de feiten.

Denkertjes

1. Op hoeveel manieren kun je 3 boeken rangschikken? En 4 boeken? En 5? Op hoeveel manieren kun je 3 boeken kiezen uit een stapeltje van 6 verschillende?
   Op een totoformulier moet van 13 voetbalwedstrijden worden voorspeld of de thuisclub wint, gelijkspeelt, of verliest. Hoeveel mogelijkheden?
   Hoe groot is het aantal combinaties van 0 uit N? Verklaar waarom het aantal combinaties van 5 uit 12 even groot is als het aantal combinaties van 7 uit 12.
2. Een loterij heeft een rode, een blauwe en een witte serie loten, elk van 500 stuks. Hoeveel mogelijkheden zijn er als je drie loten wilt kopen, van elke serie één?
3. Hoeveel verschillende basketbalteams van 5 spelers kun je vormen uit 8 beschikbare spelers?
4. Een kluis heeft een letterslot met vier ringen. Op elke ring staan de letters A t/m H. Bij één bepaalde samenstand van de vier ringen gaat de kluisdeur open. Een inbreker probeert 2 standen per minuut. Hoe lang heeft hij hoogstens werk met het openen van de kluis?

KANSEN MET KNIKKERS



In een vaas zitten N balletjes, waarvan m rode. We nemen een balletje uit de vaas, de kans dat het een rood balletje is, is $P(\text{rood}) = \frac{m}{N}$.

Balletjes in vazen, knikkers in bakjes, kaarten in dozen, allemaal variaties op eenzelfde thema. Het zal wel niet je dagelijkse bezigheid zijn knikkers uit bakjes te „trekken", in de kansrekening is dit een veel voorkomende handeling. De reden hiervan is dat het zogenaamde vaasmodel zich uitstekend leent voor het illustreren van eigenschappen van kansen.

We denken ons daarom een bakje met 10 knikkers, 5 rode, 3 witte en 2 blauwe.

Onze experimenten bestaan uit het nemen of trekken van één of meerdere knikkers, waarbij we aannemen dat de trekking willekeurig of *aselect* is, dat wil zeggen dat iedere knikker dezelfde kans heeft om getrokken te worden.
De uitkomst van een trekking noemen we een *gebeurtenis*. Als we één knikker trekken zijn er 10 mogelijke gebeurtenissen.
Vragen we naar de kans op een witte knikker, dan noemen we de gebeurtenis dat we inderdaad een witte knikker trekken een *gunstige gebeurtenis*. De kans op een witte knikker is

$$P(\text{wit}) = \frac{\text{aantal gunstige gebeurtenissen}}{\text{aantal mogelijke gebeurtenissen}} = \tfrac{3}{10}$$

(deze definitie van kans is dezelfde als die van blz. 99, alleen een beetje anders geformuleerd.)
Hoe groot is de kans dat we geen witte knikker trekken? Nu zijn de gunstige gebeurtenissen: geen witte knikker: P(niet-wit) $= \frac{7}{10} = 1 - \frac{3}{10}$
dus P(wit) + P(niet-wit) = 1.

V. COMPLEMENTENREGEL

Is bij een experiment P(G) de kans op het optreden van de gebeurtenis G, dan is de kans op de gebeurtenis niet-G P(niet-G) = 1 — P(G).

We trekken 1 knikker. De kans op een witte is P(wit) $= \frac{3}{10}$, op een blauwe P(bl) $= \frac{2}{10}$.
Er zijn 5 knikkers die of wit of blauw zijn, de kans dat een getrokken knikker wit of blauw is, is
P(w of bl) $= \frac{5}{10} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} =$ P(w) + P(bl).

VI. SOMREGEL

Zijn G_1 en G_2 mogelijke gebeurtenissen bij een experiment, die elkaar uitsluiten, en zijn de kansen op G_1 en G_2 achtereenvolgens $P(G_1)$ en $P(G_2)$, dan is $P(G_1 \text{ of } G_2) = P(G_1) + P(G_2)$

We trekken 1 knikker, daarna uit de overgebleven 9 nogmaals 1. Hoe groot is de kans dat we achtereenvolgens een witte en een blauwe getrokken hebben? P(w) $= \frac{3}{10}$, P(bl) $= \frac{2}{9}$.

P(wit *en* blauw) berekenen we als volgt:
Het aantal mogelijke gebeurtenissen is 10.9 = 90.
Het aantal gunstige gebeurtenissen is 3.2 = 6 (regel 1 op blz. 102!).
$P(w + bl) = \frac{6}{90} = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = P(w).P(bl)$.

VII. PRODUCTREGEL

Bestaat een experiment uit 2 onafhankelijke deel-experimenten, waarbij het ene deel kan leiden tot gebeurtenis G_1 en het andere deel tot gebeurtenis G_2, dan is $P(G_1 \text{ en } G_2) = P(G_1).P(G_2)$.

Voorbeelden:

1. *We trekken 3 knikkers, zonder teruglegging, uit het bakje van blz. 104. Hoe groot is de kans dat er minstens 1 rode bij is?*
We geven deze kans aan met P(G). P(niet-G) is nu de kans dat er geen enkele rode bij is. Deze kunnen we berekenen.
Het aantal mogelijke gebeurtenissen is 10.9.8. Er zijn 5 niet-rode knikkers, hieruit kunnen we op 5.4.3 manieren drie trekken, dus
$$P(\text{niet-G}) = \frac{5.4.3}{10.9.8} = \frac{1}{12}.$$
De kans dat er wel een rode knikker bij is, is $\frac{11}{12}$.

2. *De letters van het woord* **zonder** *worden op kaarten geschreven. Na schudden worden zonder teruglegging 4 kaarten getrokken.*
1. *Hoe groot is de kans dat het resultaat* **zoen** *is?*
$P(z) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{360}$, volgens de productregel. Anders gezegd: Het aantal variaties van 4 uit 6 is 6.5.4.3 = 360. Eén van deze variaties is zoen.

3. *Hoe groot is de kans dat het woord* **zoen** *gevormd kan worden met de vier getrokken letters?*
Het aantal combinaties van 4 uit 6 is
$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15.$$
De kans dat zoen gevormd kan worden met de vier getrokken letters is $\frac{1}{15}$.

4. *Iemand gooit 5 maal een munt op. Hoe groot is de kans dat hij minstens éénmaal „kruis" werpt?*
P(niet-G) is de kans op geen keer kruis, dus vijf keer munt. Volgens de productregel is $P(\text{niet-G}) = (\frac{1}{2})^5 = (\frac{1}{32})$, dus $P(G) = \frac{31}{32}$.

Iemand werpt met twee dobbelstenen. Hoe groot is de kans dat hij precies 8 punten werpt?
Met twee dobbelstenen zijn er 36 mogelijke gebeurtenissen. We kunnen deze als volgt uitzetten:

6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,3)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	2	3	4	5	6

Horizontaal zijn de zes uitkomsten van de ene steen uitgezet, verticaal die van de andere. In elk van de 36 hokjes staat één van de mogelijke uitkomsten van de worp.
De kans op „som 8" is $\frac{5}{36}$, want er zijn 5 uitkomsten met als som 8.
Hoe groot is de kans op 10 punten?
„ „ „ „ „ „ meer dan 9 punten?
„ „ „ „ „ „ een 3 en een 5?

Denkertjes

5. Uit een bakje met 6 witte en 8 zwarte knikkers worden aselect, zonder teruglegging 3 genomen. Hoe groot is de kans dat ze dezelfde kleur hebben?
6. In een zaal zitten 100 taxichauffeurs, 50 dragen een uniform, 70 een pet, waaronder 30 geüniformeerde. Als er willekeurig iemand uit wordt gekozen, hoe groot is dan de kans P(u) dat hij een uniform draagt? En de kans P(p) dat hij een pet draagt? Hoe groot is P(u *of* p)? En P(u *en* p)?
7. In een volledig spel zitten 52 kaarten, verdeeld in vier soorten: klaver, ruiten, harten, schoppen. Iemand trekt 13 kaarten. Hoe groot is de kans dat het allemaal schoppenkaarten zijn?

„Niets is moeilijker, dan de gewone lezer ervan te overtuigen, dat wanneer men bij het werpen met een dobbelsteen tweemaal achtereen zes heeft gegooid, men voldoende reden heeft om te wedden, dat men bij de derde worp niet zes zal gooien. Een opmerking van deze strekking wordt gewoonlijk onmiddellijk door het verstand verworpen. Men houdt het niet voor mogelijk, dat de twee worpen die gedaan zijn, en die nu voorgoed tot het verleden behoren, invloed zouden kunnen hebben op een worp die alleen nog maar in de toekomst bestaat. De kans om zes te gooien schijnt nog precies even groot te zijn als op ieder ander tijdstip, d.w.z. slechts afhankelijk van de andere aantallen ogen die men met een dobbelsteen kan gooien. En dit is een overweging die zo vanzelfsprekend schijnt, dat pogingen haar te weerleggen vaker worden ontvangen met een spottende glimlach dan met eerbiedige aandacht."

In dit citaat van EDGAR ALLAN POE wordt een geraffineerde poging gedaan de lezer zijn gevoel voor wat „normaal" is te doen verliezen en hiervoor in de plaats te stellen het „paranormale". Inderdaad, men houdt het niet voor mogelijk dat een gedane worp nog invloed kan hebben op een komende worp. Men? En al die mensen die denken dat ze nu wel „kruis" moeten gooien met een geldstuk, omdat ze al vier keer „munt" gegooid hebben? En al die mensen in Monte Carlo met hun lijstjes van nummers die gevallen zijn bij de roulette?

Ons verstand zegt ons: de kansen zijn gelijkwaardig, altijd weer, maar ons gevoel, zo je wil ons bijgeloof, wil ons anders doen geloven. En als ons gevoel nu eens gelijk kreeg, wat gebeurde er dan met de waarschijnlijkheidsrekening? Niets.

Elke tak van wiskunde maakt een ontwikkeling door zoals bv. de meetkunde. De Egyptenaren die de piramiden bouwden gebruikten al eenvoudige meetkundige eigenschappen. Met het verstrijken der eeuwen groeide de meetkundige kennis langzamerhand, aanvankelijk als beschrijving van verschijnselen uit de fysische wereld, later als theoretisch vak. De overgang hiertussen is uitermate belangrijk. Historisch is het niet precies na te gaan, in elk geval is zeker dat op een gegeven moment Euclides de aanwezige kennis verzamelde en ordende. Hij maakte gebruik van een aantal uitgangspunten, axioma's en postulaten, waarop hij zijn meetkundige theorie opbouwde. Juist dit maakt het vak tot wiskunde, los van de fysische werkelijkheid. Tegenwoordig zijn we zo gewend aan het zelfstandig bestaansrecht van de meetkunde, dat we wel eens te weinig letten op het bestaansrecht buiten zichzelf.
Zo ging het ook met de waarschijnlijkheidsrekening. Nu gaan we niet terug naar het oude Egypte, maar naar Pascal in de zeventiende eeuw, en de rol die Euclides speelde in de meetkunde, die was nu weggelegd voor ene Kolmogorov. Deze publiceerde in 1933 voor het eerst een axiomastelsel, waardoor we de waarschijnlijkheidsrekening ook kunnen zien als een stuk wiskunde, dat los staat van de fysische waarde. Daarom mag Edgar Allan Poe van ons best gelijk hebben, het zou alleen betekenen dat de kansrekening niet meer toepasbaar was op dobbelstenen, munten en wat dies meer zij, wat door sommigen betreurd zou worden, door anderen bepaald niet.

Wat we tot nu toe gedaan hebben aan kansrekening kan de naam wiskunde niet dragen. We hebben experimenten uitgevoerd, zij het dan in gedachten, we hebben een definitie gegeven van de kans op iets wat we een gebeurtenis hebben genoemd. Door middel van dobbelstenen en knikkers hebben we eigenschappen afgeleid, waarbij begrippen als ,,elkaar uitsluitende gebeurtenissen'' en ,,onafhankelijke gebeurtenissen'' optraden. Wat deze begrippen inhouden hebben we niet gezegd, we hebben ze intuïtief aanvaard.
We kunnen in Pythagoras natuurlijk niet een axiomatische opbouw van de waarschijnlijkheidsrekening geven. Een tijdschrift is tenslotte geen handboek. We zullen slechts een paar opmerkingen maken. In het algemeen is het niet nodig dat de uitkomsten van een experiment gelijkwaardig zijn, ook mogen er wel oneindig veel uitkomsten zijn.
De uitkomsten vormen tezamen de zogenaamde uitkomstenruimte U. Een bepaalde uitkomst heet een punt van de uitkomstenruimte. Je kunt je dit voorstellen met behulp van de tabel van blz. 106. De verschillende worpen met twee dobbelstenen zijn op te vatten als coördinaten van 36 punten in het vlak. Een gebeurtenis

A is een deelruimte van de ruimte U. Aan iedere gebeurtenis A wordt een getal P(A) toegevoegd, dat voldoet aan de volgende axioma's:

I. Voor iedere A uit U geldt $P(A) \geqslant 0$.

II. $P(U) = 1$.

III. Als A en B elkaar uitsluitende gebeurtenissen zijn, dat wil zeggen deelruimten van U die geen punt gemeenschappelijk hebben, dan geldt
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(Het teken $\cup$ betekent: de vereniging van A en B, oftewel A en B samen; kenners zien hieraan dat we in de verzamelingsleer beland zijn.)
In het derde axioma is het begrip ,,elkaar uitsluitende gebeurtenissen'' gedefinieerd en tevens vastgelegd dat hiervoor de somregel van blz. 104 zal gelden. Dit axioma neemt in de opbouw dus de plaats in van de somregel die we intuïtief hadden gevonden.

KANSVERDELINGEN

Een experiment heeft een aantal mogelijke uitkomsten. Tot nu toe hebben we steeds gevraagd naar de kans op het optreden van een bepaalde uitkomst. We kunnen ook kijken naar alle mogelijke uitkomsten en de verdeling van de kansen op die uitkomsten.

Als voorbeeld nemen we het werpen met een muntstuk. Wanneer we een aantal malen achter elkaar een munt opgooien, dan kunnen we de mogelijke uitkomsten als volgt weergeven

1e worp			k				m	
2e worp	kk			km		mk		mm
3e worp	kkk	kkm	kmk	kmm	mkk	mkm	mmk	mmm

We zien: Elke worp meer verdubbelt het aantal mogelijke uitkomsten. Hoe groot is de kans op twee maal kruis in 3 worpen? We zien gemakkelijk dat deze kans $\frac{3}{8}$ is.
Bij een vraag als deze letten we niet op de volgorde van de uitkomsten, we kunnen het schema dan ook zo schrijven:

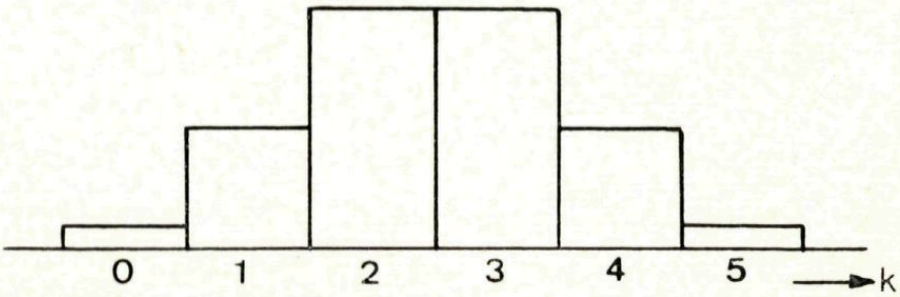
1e worp			k		m		
2e worp		k^2		$2km$		m^2	
3e worp	k^3		$3k^2m$		$3km^2$		m^3

Hierbij hebben we k^3 geschreven in plaats van kkk. k^2m betekent dus: 2 maal kruis en 1 maal munt. Schrijven we alleen de coëfficiënten op, dan ontstaat de zogenaamde *driehoek van Pascal:*

1e worp					1		1				2	mogelijkheden
2e „				1		2		1			4	„
3e „			1		3		3		1		8	„
4e „		1		4		6		4		1	16	„
5e „	1		5		10		10		5		1	32	„

Bij 5 worpen krijgen we de volgende kansverdeling:
De kans op vijfmaal kruis is 1/32, op viermaal kruis 5/32,
op driemaal kruis 10/32, op tweemaal kruis 10/32,
op eenmaal kruis 5/32, op nulmaal kruis 1/32.

De kansverdeling voor het aantal keren munt is natuurlijk dezelfde; dit blijkt ook direct uit de symmetrie van de driehoek van Pascal. Van de kansverdeling kunnen we een zogenaamd *histogram* maken.



Als de totale oppervlakte van de rechthoekjes 1 is, geeft elk rechthoekje de kans op het er onder staande aantal keren kruis aan, bij vijf worpen met een geldstuk.

DRIEHOEK VAN PASCAL EN BINOMIAALCOEFFICIENTEN

Elke rij getallen in de driehoek van Pascal begint en eindigt met een 1, terwijl de getallen daartussen worden verkregen door de twee die er schuin links en rechts boven staan op te tellen:

1	0e rij
1 1	1e „
1 2 1	2e „
1 3 3 1	3e „
1 4 6 4 1	4e „

.....

Voor de volledigheid plaatsen we aan de top van de driehoek nog een 1. De rijen nummeren we achtereenvolgens met 0, 1, 2, 3, enz. We kunnen de rijen van de driehoek beschouwen als de coëfficiënten van de opvolgende machten van een tweeterm:

$$(p + q)^0 = \mathbf{1}$$
$$(p + q)^1 = \mathbf{1}p + \mathbf{1}q$$
$$(p + q)^2 = \mathbf{1}p^2 + \mathbf{2}pq + \mathbf{1}q^2$$
$$\text{enz.}$$

In de n^e rij van de driehoek staan de coëfficiënten van $(p + q)^n$. We hebben al gezien dat de driehoek tevoorschijn komt als kansverdeling van een herhaald experiment met twee gelijke kansen. Dit geeft ons de mogelijkheid om de driehoek wat anders te schrijven. De vraag: Hoe groot is de kans op driemaal kruis als ik vier keer een geldstuk opwerp, leidt tot de vraag: hoeveel combinaties van 3 „kruisjes" uit kkkkmmmm zijn er?
We roepen nu regel IV van blz. 102 in herinnering: „Het aantal combinaties van m objecten uit N is

$$\binom{N}{m} = \frac{N!}{m!\,(N - m)!} = \frac{N.(N - 1)\ldots\ (N - m + 1)}{1.2.3\ldots(-)\ m}.$$

Het aantal combinaties van 4 „kruisjes" uit 4 is $\binom{4}{4} = 1$,

van 3 uit 4. . . . . $\binom{4}{3} = 4$, van 2 uit 4. . . . . $\binom{4}{2} = 6$,

van 1 uit 4. . . . . $\binom{4}{1} = 4$, van 0 uit 4. . . . . $\binom{4}{0} = 1$.

Dit zijn inderdaad precies de getallen uit de 4e rij van de driehoek van Pascal, zodat we deze zo kunnen schrijven:

$$\binom{0}{0} \qquad\qquad 0^e \text{ rij}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \binom{n}{4} \cdots\cdots \binom{n}{n} \qquad n^e \text{ rij}$$

Blijkbaar geldt ook:

$$(p+q)^0 = \binom{0}{0}$$

$$(p+q)^1 = \binom{1}{0} p + \binom{1}{1} q$$

$$(p+q)^4 = \binom{4}{0} p^4 + \binom{4}{1} p^3 q + \binom{4}{2} p^2 q^2 + \binom{4}{3} p q^3 + \binom{4}{4} q^4$$

Met volledige inductie kan ook worden bewezen dat

$$(p+q)^n = \binom{n}{0} p^n + \binom{n}{1} p^{n-1} q + \ldots \binom{n}{n} q^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Deze regel staat bekend als het *binomium van Newton.* De coëfficiënten $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, enz. heten de *binomiaal-coëfficiënten.*

Het teken Σ is de Griekse letter sigma en geeft aan dat gesommeerd moet worden over alle termen die gekregen worden door voor k achtereenvolgens 0, 1, 2, 3 . . . n in te vullen.

Het herhaald opwerpen van een geldstuk is een voorbeeld van een samengesteld experiment waarbij de deelexperimenten slechts twee mogelijke uitkomsten hebben. In dit geval zijn die uitkomsten gelijkwaardig, dit hoeft in het algemeen niet zo te zijn.

De beide mogelijkheden kunnen we kortweg aanduiden met „succes" en „geen-succes". De kans op succes noemen we p, de kans op geen-succes q.

Natuurlijk geldt dan $0 \leqslant p \leqslant 1$ en $q = 1 - p$. Bewezen kan worden dat:
Als een samengesteld experiment bestaat uit n deelexperimenten, met voor elk deelexperiment de kans p op succes, dan is de kans $P_n(k)$ op k successen

$$\mathbf{P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad k = 0 \ldots n \qquad q = 1 - p}$$

Voor het geval dat de kansen niet gelijkwaardig zijn wordt de kansverdeling dus gegeven door de termen van het binomium van Newton. Dit is de zogenaamde *binomiale kansverdeling*.

VERWACHTINGSWAARDE EN SPREIDING

Hoe groot is het aantal punten dat we gemiddeld werpen met een dobbelsteen? De zes mogelijke uitkomsten zijn 1, 2, 3, 4, 5, 6. Het gemiddelde hiervan is $3\frac{1}{2}$. Dit noemen we de *verwachtingswaarde* van een worp met een dobbelsteen. De verwachtingswaarde wordt aangegeven met de letter E (van expectatio, Latijns voor verwachting). Elke kans*verdeling* heeft een verwachtingswaarde, het volgende gaat alleen over de binomiale kansverdeling. We hebben gezien dat de kans op k successen in een n-voudig experiment is

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Het verwachte aantal successen zal daarom zijn:

$$E = 0.P_n(0) + 1.P_n(1) \ldots + n.P_n(n) = \sum_{k=0}^{n} k. \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Dit ziet er ingewikkeld uit, het valt echter erg mee want je kunt aantonen dat $E = n.p$.
Dit eenvoudige resultaat was te voorzien. De verwachtingswaarde van het aantal keren kruis bij 16 worpen met een geldstuk is volgens de formule $16.\frac{1}{2} = 8$, dit had je inderdaad *verwacht*. De verwachtingswaarde van het aantal keren dat je een 4 werpt in 24 beurten met een dobbelsteen is $24.\frac{1}{6} = 4$, ook in overeenstemming met je intuïtie. Het aantal behaalde successen k in het samengestelde experiment wijkt in meerdere of mindere mate af van de verwachtingwaarde.

Deze afwijkingen noemen we de *deviaties* en worden in formulevorm $k - E = k - np$.
Je kunt gemakkelijk inzien (en bewijzen) dat

$$(0 - E)P_n(0) + (1 - E)P_n(1) \ldots + (n - E)P_n(n) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k - np)P_n(k) = 0 \text{ is.}$$

Dat deze som nul is wordt natuurlijk veroorzaakt door het feit dat een aantal van de deviaties negatief zijn en een ander deel positief.

We vormen nu de som $\sum_{k=0}^{n} (k - np)^2 P_n(k)$.

Deze som is het kwadraat van de zogenaamde *spreiding* (of strooiing of standaard deviatie) van de kansverdeling. De spreiding wordt aangegeven met σ (kleine letter sigma). Net als de verwachtingwaarde ziet de spreiding er woester uit dan hij is, bewezen kan worden dat $\sigma^2 = \mathbf{npq}$.
σ^2 heet wel: de variantie.

Samenvattend:

Een binomiale kansverdeling wordt gegeven door de verdelingswet

$$\mathbf{P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

De verwachtingswaarde is $\mathbf{E = \sum_{k=0}^{n} k.P_n(k) = n.p}$

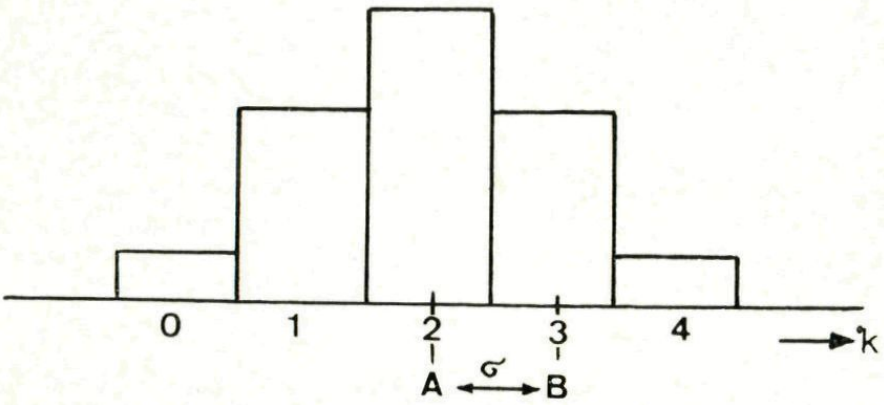
De spreiding is σ **met** $\sigma^2 = \mathbf{\sum_{k=0}^{n} (k - np)^2 P_n(k) = n.p.q}$

Vraag: Waaruit volgt dat de som van alle kansen in een binomiale kansverdeling 1 is?
Het is zeer goed denkbaar dat je door het voorgaande enigszins onder de voet gelopen bent, we zullen proberen aan de hand van twee voorbeelden het geheel wat toe te lichten.

Het *eerste voorbeeld* is het experiment dat bestaat uit het viermaal opwerpen van een geldstuk. Als succes beschouwen we de uitkomst „kruis", elke keer werpen vormt een deelexperiment, met $p = \frac{1}{2}$, dus ook $q = \frac{1}{2}$.
Het aantal successen k staat in de eerste kolom van de volgende tabel, de kans op dat aantal in de tweede kolom:

k	$P_4(k)$	$k.P_4(k)$	k—E	$(k-4p)^2P_4(k)$
0	$\frac{1}{16}$	0	—2	$\frac{4}{16}$
1	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	—1	$\frac{4}{16}$
2	$\frac{6}{16}$	$\frac{12}{16}$	0	0
3	$\frac{4}{16}$	$\frac{12}{16}$	1	$\frac{4}{16}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	2	$\frac{4}{16}$
	$\sum_{k=0}^{4} P_4(k) = 1$	$\sum_{k=0}^{4} k.P_4(k) = 2$		$\sigma^2 = \frac{16}{16} = 1$

In de derde kolom is de verwachtingswaarde E uitgerekend; dat $E = 2$ volgt ook uit $E = 4.\frac{1}{2}$.
De vierde kolom geeft de deviaties van de kansverdeling en in de laatste is de spreiding uitgerekend. Dat $\sigma = 1$ volgt ook uit $\sigma^2 = n.p.q = 4.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 1$.
Tenslotte tekenen we het histogram van de kansverdeling, het punt A geeft hierin de verwachtingswaarde aan, het stuk $AB = 1 = \sigma$.



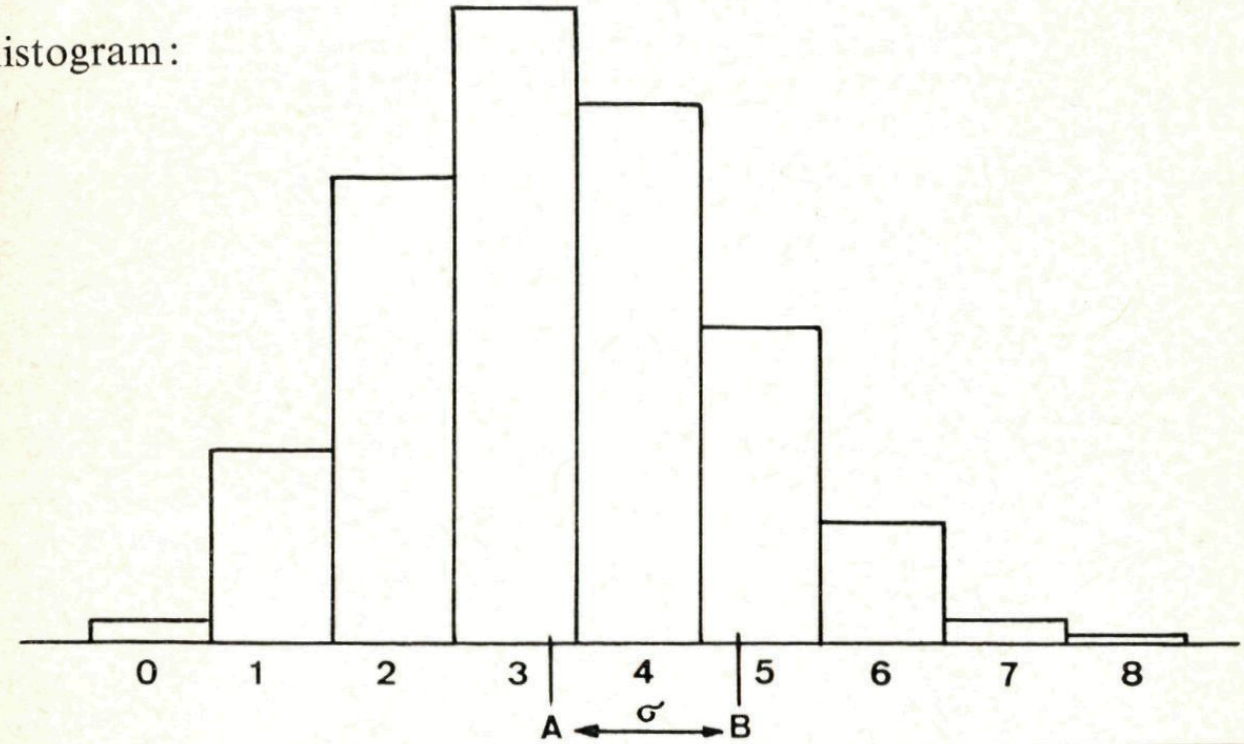
Verwachtingswaarde en spreiding zijn twee karakteristieken die de vorm van het histogram bepalen. In het algemeen ligt tussen de waarden $E - \sigma$ en $E + \sigma$ van een histogram ongeveer 2/3 van de totale oppervlakte.
Opmerking. Je bent nu in staat het probleem van Chevalier de Méré van blz. 98 op te lossen.
In het *tweede voorbeeld* werpen we met een dobbelsteen. Als succes beschouwen we het werpen van een drievoud, (3 of 6) dus $p = \frac{1}{3}$ $q = \frac{2}{3}$.
We werpen 10 maal ($n = 10$). De kans op k successen is $P_{10}(k) = \binom{10}{k} (\frac{1}{3})^k (\frac{2}{3})^{10-k}$, wat is uitgerekend in de volgende tabel:

k	$P_n(k)$	$k.P_n(k)$
0	0,0173	0,0000
1	0,0867	0,0867
2	0,1951	0,3902
3	0,2601	0,7803
4	0,2276	0,9104
5	0,1367	0,6835
6	0,0569	0,3414
7	0,0163	0,1141
8	0,0030	0,0240
9	0,0003	0,0027
10	0,0000	0,0000
	1,0000	3,3333

$$E = 10.\tfrac{1}{3} = 3\tfrac{1}{3},$$

$$\sigma = \sqrt{10.\tfrac{1}{3}.\tfrac{2}{3}} = 2/3\sqrt{5}.$$

histogram:



8. Bewijs $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1$

en $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np$ als $p + q = 1$.

9. In drie dozen zitten gouden en zilveren kogels. In het eerste doosje twee gouden, in het tweede twee zilveren en in het derde een gouden en een zilveren. Iemand neemt aselect een kogel uit een doos en daarna de tweede uit dezelfde doos. Hoe groot is de kans dat de tweede kogel van goud is onder het gegeven dat de eerste van goud was?

10. Een leraar geeft les in een groot aantal klassen van 25 leerlingen. In elke klas zegt hij: „Ik wed dat er onder jullie wel twee zijn die op dezelfde dag jarig zijn. Als het niet zo is krijgen jullie allemaal een kwartje van mij, als het wel zo is krijg ik van jullie allemaal een kwartje." Is de leraar te goed of heeft hij een goede kans om te winnen?

EEN ANDERE KANSDEFINITIE

Alle experimenten die we tot nu toe (in gedachten) hebben uitgevoerd, hebben dit gemeen:

1. we weten de kans op een uitkomst *vooraf*;
2. het aantal mogelijke uitkomsten is betrekkelijk klein, in elk geval eindig.

In de praktijk komt het voor dat aan geen van deze twee voorwaarden wordt voldaan. Hoe moet men b.v. de kans definiëren bij een onzuivere dobbelsteen? De enige mogelijkheid is dan: de dobbelsteen een groot aantal keren werpen en de uitkomsten „turven". Zo komen we tot de volgende definitie:

Als bij n herhalingen van een experiment de gebeurtenis G k maal is opgetreden, dan is de kans op de gebeurtenis G: $P(G) = \frac{k}{n}$, mits n voldoende groot genomen is.

Hoe groter n is, des te meer nadert P(G) naar de juiste waarde. De „nieuwe" kansdefinitie heeft als voordeel boven de tot nu toe gebruikte dat de uitkomsten van een experiment niet gelijkwaardig behoeven te zijn en . . . ze vraagt er als het ware om n naar oneindig te laten naderen. Als beide definities toegepast kunnen worden, leiden ze tot hetzelfde resultaat.

DE NORMALE KANSVERDELING

De bovenrand van het histogram van een binomiale kansverdeling vertoont een soort klokmodel. Als we n groter nemen wordt dit steeds duidelijker.

Wat gebeurt er nu als $n \to \infty$? Weinig fraais, want $\lim\limits_{n\to\infty} E = \lim\limits_{n\to\infty} np = \infty$ en $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{npq} = \infty$.

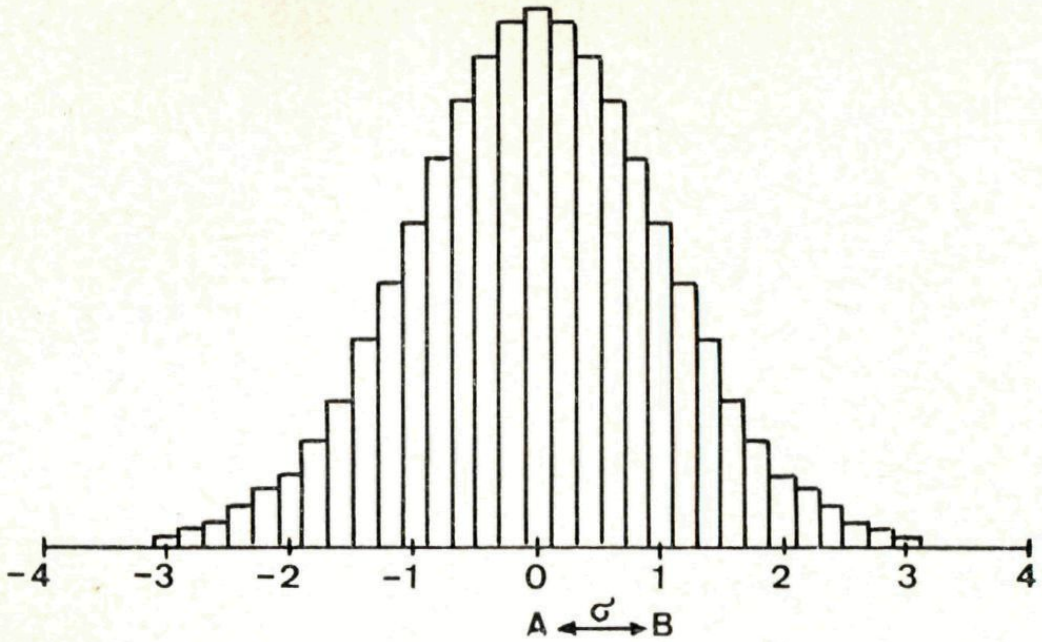
We moeten daarom eerst de kansverdeling *normeren*, dwz. we zorgen ervoor dat $E = 0$ en $\sigma = 1$ worden gemaakt. In plaats van het aantal successen k zetten we uit:

$$k' = \frac{k - E}{\sigma} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Hierdoor wordt bereikt dat $E = 0$ en $\sigma = 1$.

We noemen dit een *genormeerde binominale kansverdeling*.

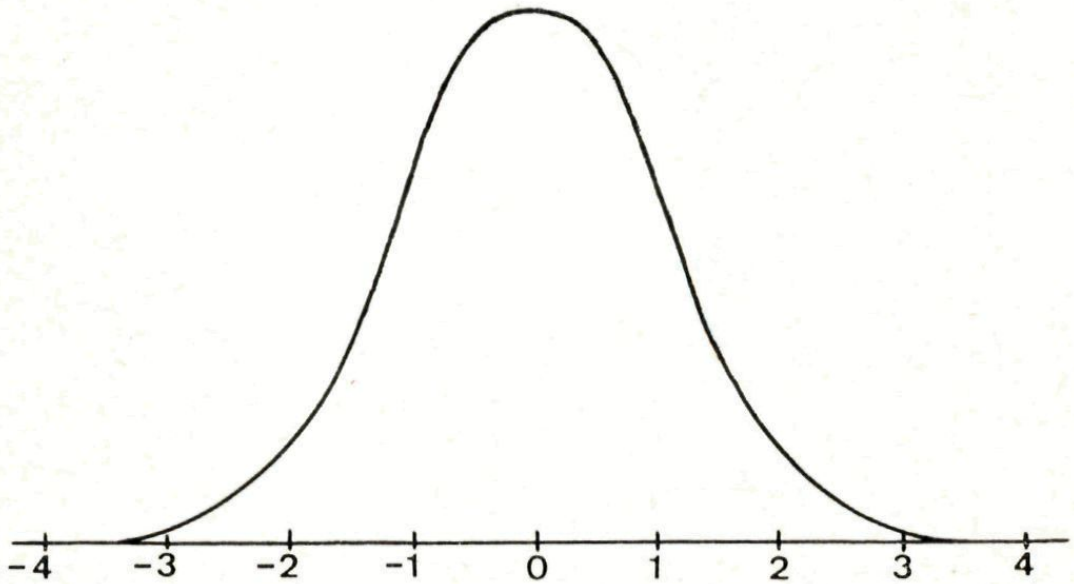
Voor n = 100 ziet het histogram er zo uit:



De bovenrand van het histogram nadert nu tot een kromme die de grafiek is van de functie

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, met e = 2,71828 . . , een irrationaal getal zoals ook π.

De kromme is in de vertikale richting sterk vergroot weergegeven.



De kansverdeling die wordt bepaald door deze functie heet de *normale kansverdeling* en is ontdekt door De Moivre, een Frans wiskundige, in ongeveer 1720. De functie $\varphi(x)$ heet de dichtheidsfunctie van de verdeling, x kan alle reële waarden aannemen, we spreken van een *continue kansverdeling*, in tegenstelling tot de binominale kansverdeling, waarbij k alleen maar de natuurlijke getallen kan doorlopen,

zodat er sprake is van een *discrete kansverdeling*. In de praktijk geeft de normale kansverdeling een goede benadering van de genormeerde binominale verdeling. Het voordeel hiervan is dat van de normale verdeling uitgebreide tabellen bestaan, zodat men de uitkomst gewoon kan opzoeken.
De normale verdeling heet ook wel de *foutenwet* omdat blijkt dat bij proeven, waarbij een bepaling een groot aantal malen wordt herhaald en de uitkomsten alleen toevallige fouten vertonen, deze uitkomsten verdeeld blijken te zijn volgens de normale verdeling. Ook in de natuur komt men de normale verdeling tegen, bv. de lichaamslengten van een lichting rekruten vertonen dit beeld.

DE POISSONVERDELING

De kansrekening kent nog een aantal andere verdelingen die we hier natuurlijk niet kunnen bespreken, het boekje is trouwens ook bijna vol. Eén uitzondering moeten we echter maken en wel voor de Poissonverdeling. De verdelingswet hiervoor is:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-k}}{k!}, \text{ met } E = \lambda, \sigma = \lambda.$$

De Poissonverdeling heet ook wel de *wet van de kleine getallen*, omdat hij juist erg goed toepasbaar is op verdelingen bij kleine waarden van k.
Voorbeelden zijn:

1. Het aantal drukfouten per pagina van dit nummer van Pythagoras, alsmede het aantal keren dat het woord „of" per pagina voorkomt (tenzij de schrijver een speciale voorkeur voor of afkeer van dit woord heeft).
2. Het aantal per tijdseenheid vervallende atomen van een radioactief preparaat.
3. Het aantal per tijdseenheid passerende auto's op een niet te drukke weg, gemeten over een bepaald tijdvak. Daarbij moet de tijdseenheid zo gekozen worden, dat er per tijdseenheid maar weinig gevallen zijn.
4. Het aantal gevallen per jaar dat een soldaat van het Pruisische leger door een trap van een paard om het leven kwam. (Dit komt nu niet veel meer voor.)

5. Het aantal bominslagen in de tweede wereldoorlog in Londen, verdeeld over 576 gebieden, elk van 25 hectare. Het totale aantal inslagen bedroeg 537, het gemiddelde per gebied 0,9323. De aantallen werden vergeleken met die welke volgens de Poisson verdeling voor $\lambda = 0{,}9323$ verwacht konden worden:

k	0	1	2	3	4	$\geqslant 5$
aantal gebieden met k bominslagen	229	211	93	35	7	1
aantal verwacht volgens Poisson	226,74	211,39	98,54	30,62	7,14	1,57

De overeenstemming is werkelijk verbluffend.

We hebben niet meer dan een indruk van de kansrekening kunnen geven. Toch hopen we dat je er uit hebt kunnen afleiden dat ook gebeurtenissen die zich toevallig voordoen kunnen worden bestudeerd en dat er veel verstandigs over gezegd kan worden.

Voor verdere studie kunnen we aanbevelen:

1. Dr. L. N. H. Bunt: Statistiek voor het voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs. (schoolboek).
2. Prof. dr. H. Freudenthal: Waarschijnlijkheid en statistiek. (Studieboek, beknopt, vrij moeilijk.)
3. Prof. dr. H. Stam: Inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening. (Studieboek, uitvoerig.)
4. M. L. Wijvekate: Verklarende Statistiek (Aula pocket).

Aselect	*a* is een ontkennend voorvoegsel, *select* = uitgekozen.
Binomium	Uit het Lat., betekent *tweeterm.*
Combinatie	Uit het Lat., betekent: *telkens twee.*
Deviatie	Uit het Lat., betekent *afwijking.*
Faculteit	Uit het Lat., *facultas* = *vermogen om iets te doen.* Product van factoren die telkens met eenzelfde bedrag toenemen.
Histogram	Uit het Grieks, *histos* = balk en *gramme* = lijn
Permutatie	Uit het Lat., Betekent *verwisseling.*

Oplossingen van de Denkertjes inzenden voor 1 mei 1968, onder vermelding van leeftijd, klas en schooltype.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

H. J. ENGELS, Muggenbroekerlaan 41, Roermond.
BRUNO ERNST, Wilhelminapark 22, Breda.
Drs. A. B. OOSTEN, Turftorenstraat 11A, Groningen.
A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.
G. A. VONK, Fahrenheitstraat 688, Den Haag.

Artikelen en problemen kunnen naar één van de redacteuren worden gestuurd.
Oplossingen van *Denkertjes* kunnen naar het derde adres worden gezonden, oplossingen van andere problemen naar het vierde adres.
Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.
Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, *f* 2,50 per jaargang. Voor anderen *f* 4,—.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff N.V., Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.