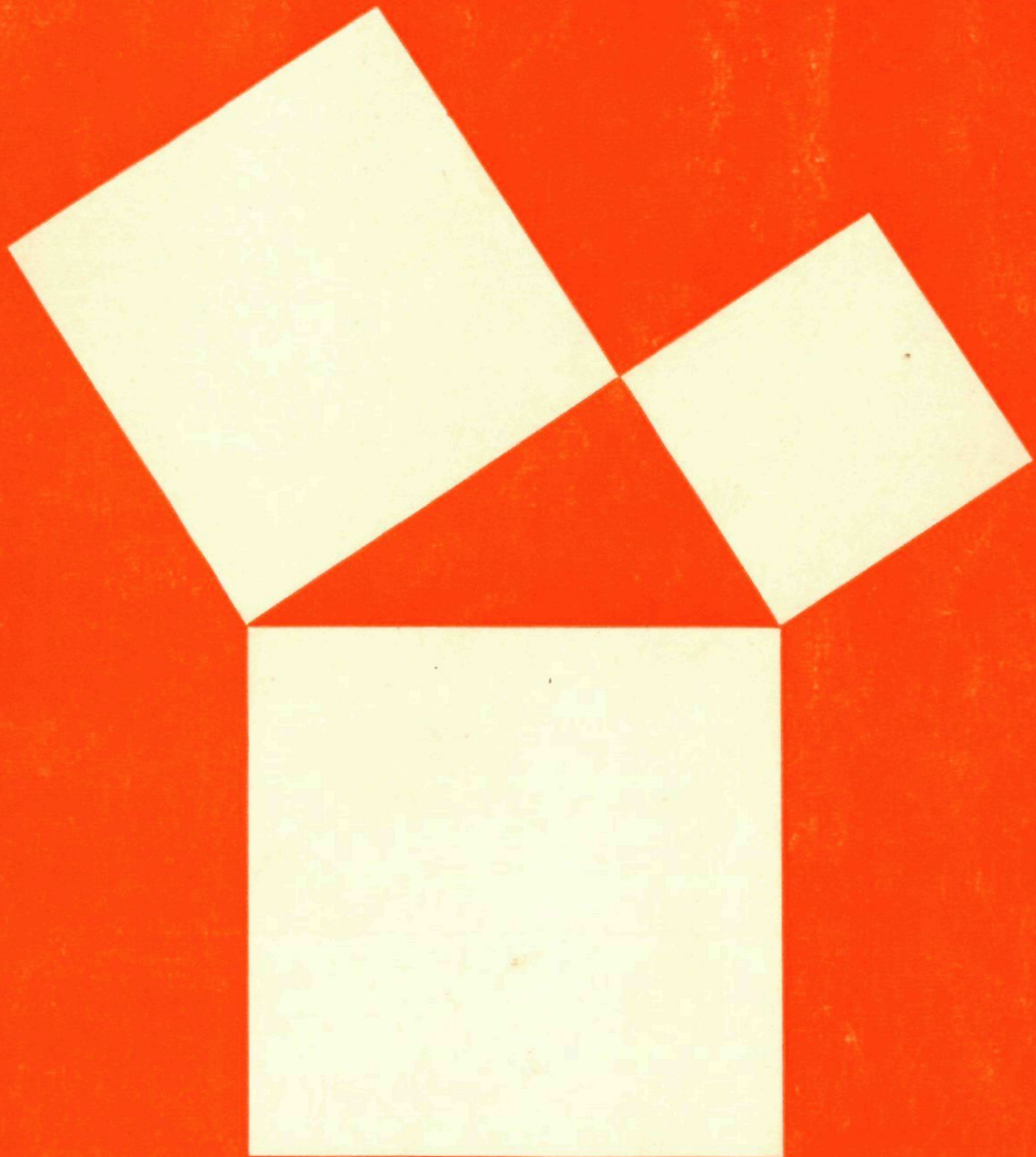


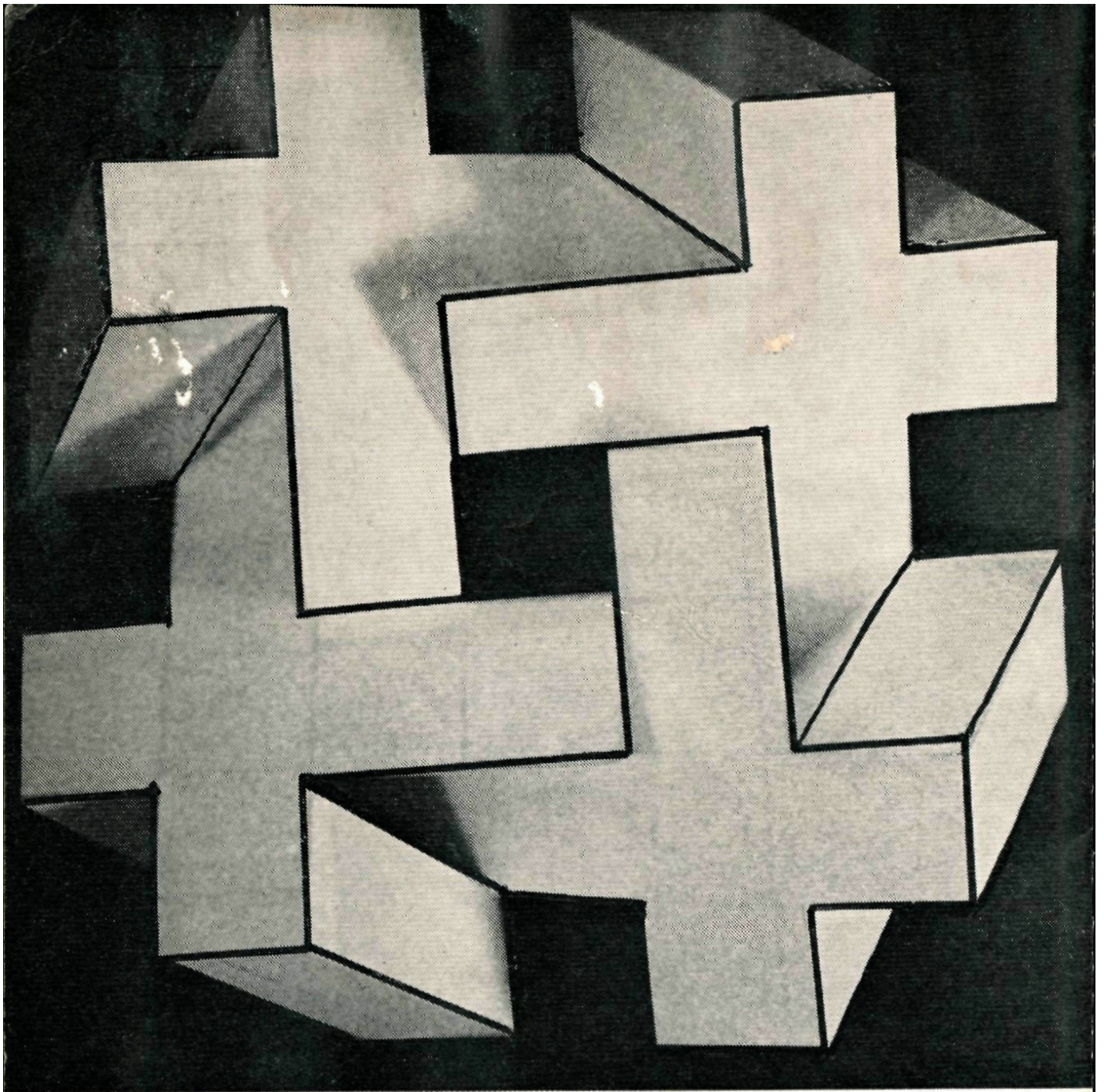
# PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift  
voor jongeren

6

*Zevende jaargang*  
1967/1968



*Paviljoen van Nix.*

## °Van Schaap's boekenrekje tot het paviljoen van Thomas Nix

Bij de redactie ligt nu een dikke map vol OF's en toch zien we weer met belangstelling nieuwe inzendingen tegemoet. Sommige van deze inzendingen blijken ineens veel aandacht te trekken zoals het boekenrekje van B. Schaap uit Slochteren (fig. 1). Hierin veranderen zij-kanten van balkjes in voorkanten en omgekeerd. Om het effect wat te versterken heeft Toine Moerbeek, leerling van de Hogere pedagogische School De Vossenbergh, er wat omheen gefantaseerd (fig. 2). Zelf vroeg ik me af of het niet mogelijk was om de torsie die in twee balken gesuggereerd werd, bij alle vier de balkjes toe te passen. Dat was vrij eenvoudig. Na enige stylering (waarbij zowel de balkdikte als de balkbreedte en de openingen dezelfde afmetingen kregen) ontstond fig. 3,

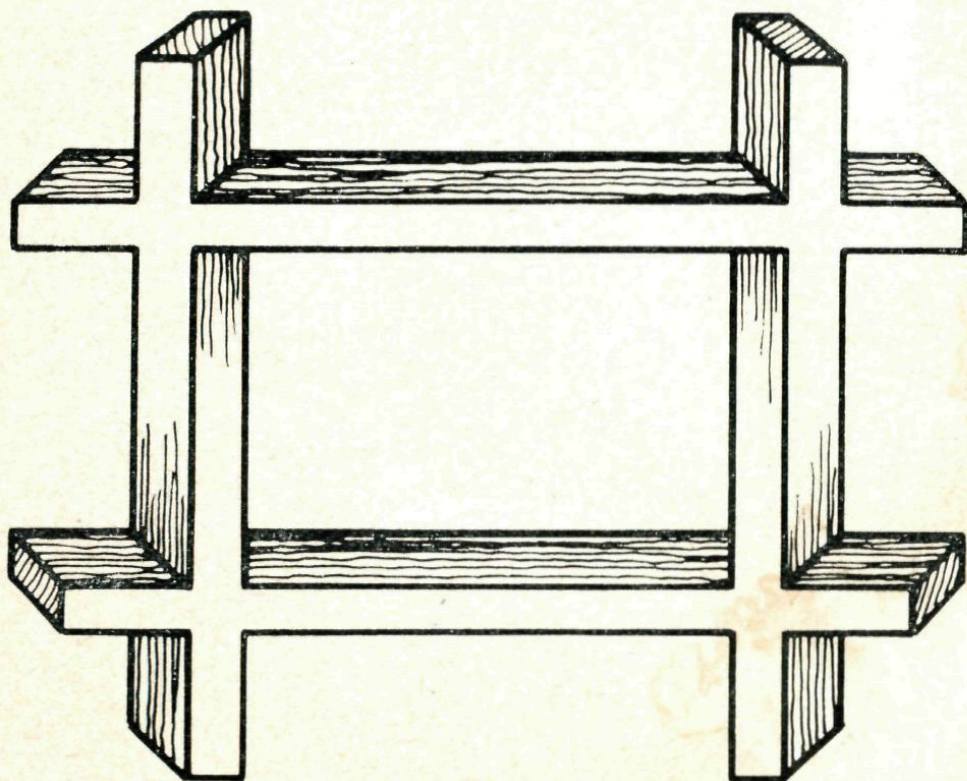


fig. 1

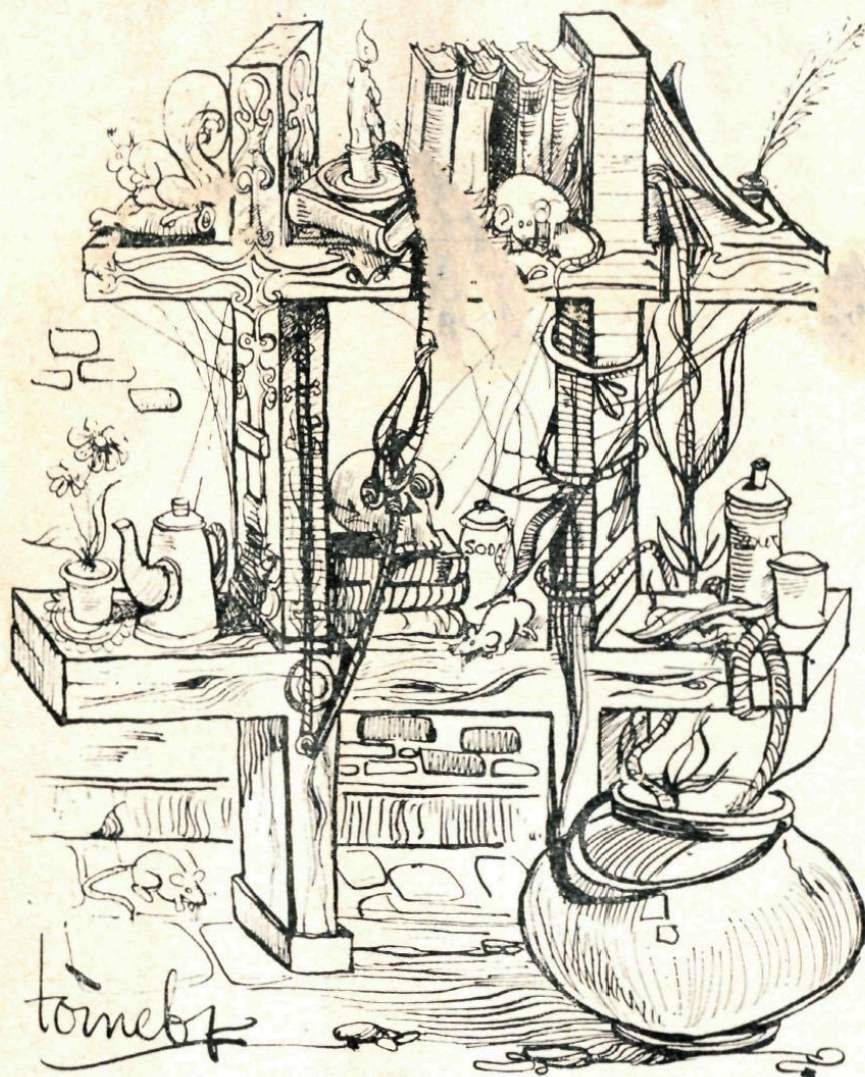


fig. 2

die ik ook als nieuwjaarskaart naar verschillende vrienden stuurde. Onder een van die kaartjes, bestemd voor de architect Dr. Ir. Thomas Nix, schreef ik: „Architecture impossible”. Onmogelijke figuren (OF's) suggereren immers een ruimtelijk voorwerp, terwijl ze onmogelijk de projectie van zo'n voorwerp op een plat vlak kunnen zijn . . . tenminste, dat dachten we. Zo suggereert fig. 3 een blok als fig. 4, maar dan tegelijkertijd uit vier verschillende gezichtspunten gezien. Bijna per kerende post stuurde Thomas Nix een doorsnede en een zijaanzicht van een echt ruimtelijk lichaam dat onze OF als bovenaanzicht had (fig. 5). Hiermee toonde hij aan: òf onze OF was er geen, òf onze omschrijving van OF fout. We hielden het maar op het laatste.

Nu was het heel moeilijk om zich uit de tekeningen van Nix een voorstelling van het lichaam te maken. Daarom heeft Robert Knuf, die

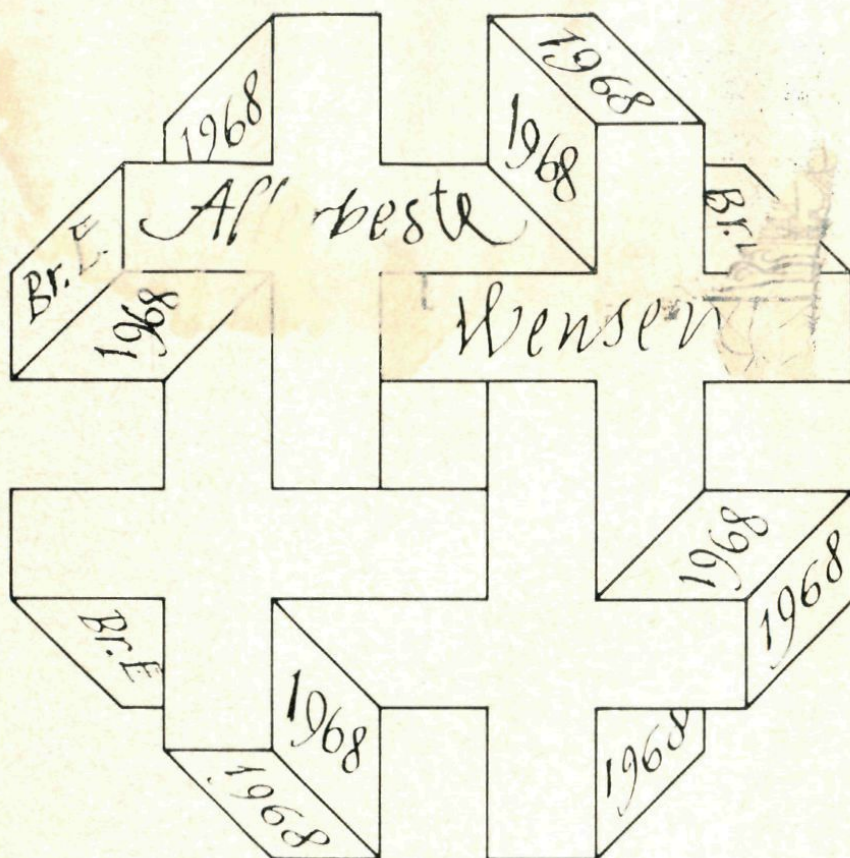


fig. 3

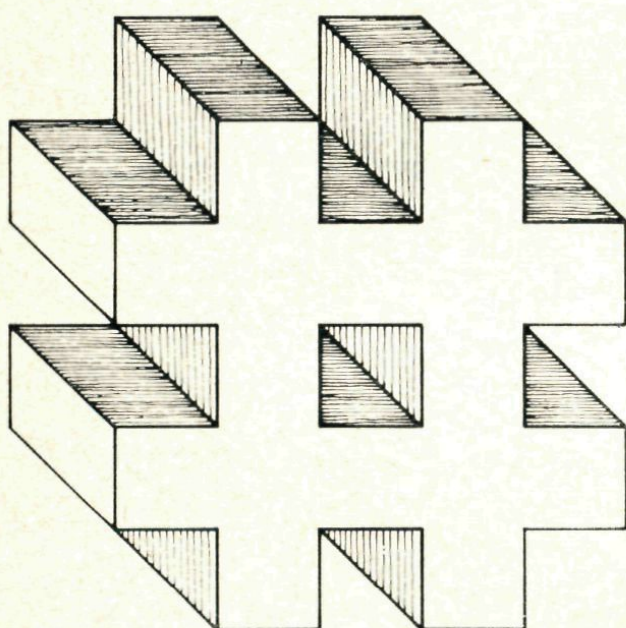


fig. 4

veel tekeningen voor Pythagoras maakt er een ruimtelijk model van geplakt. Met behulp van de volgende serie foto's krijg je een indruk hoe dit ding er uit ziet. Op de binnenzijde van de omslag staat het bovenaanzicht. Bij elke volgende foto (6 t/m 9) bekijk je het lichaam vanuit een lager standpunt. Fig. 10 is vanuit een andere hoek ge-

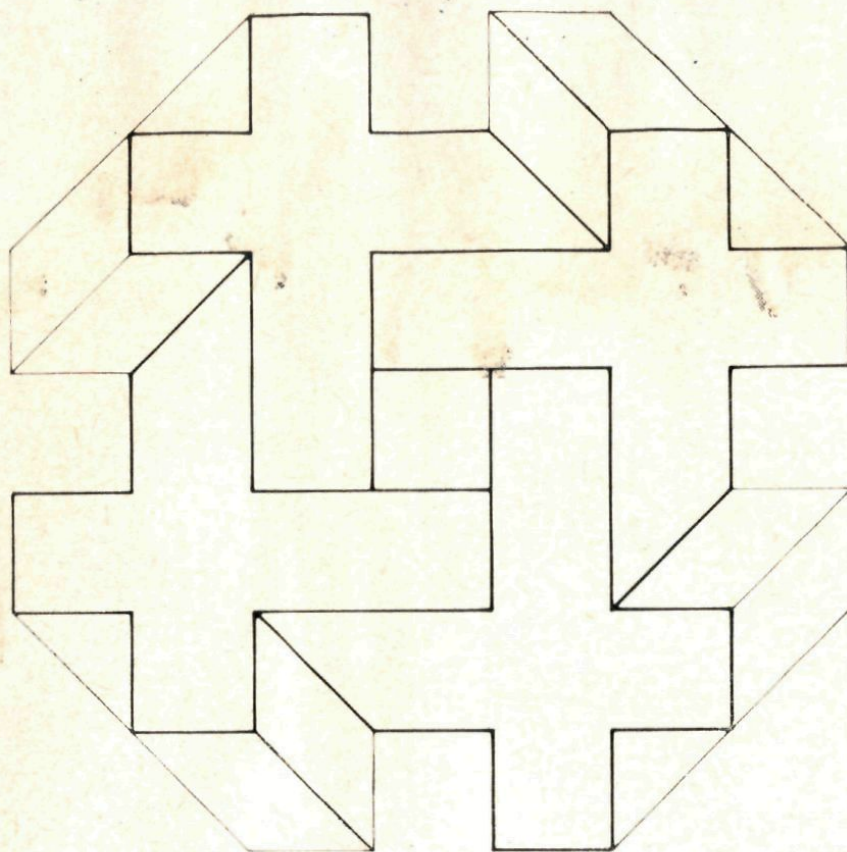


fig. a  
bovenaanzicht

fig. b  
zijaanzicht

fig. c  
doorsnede

fig. a

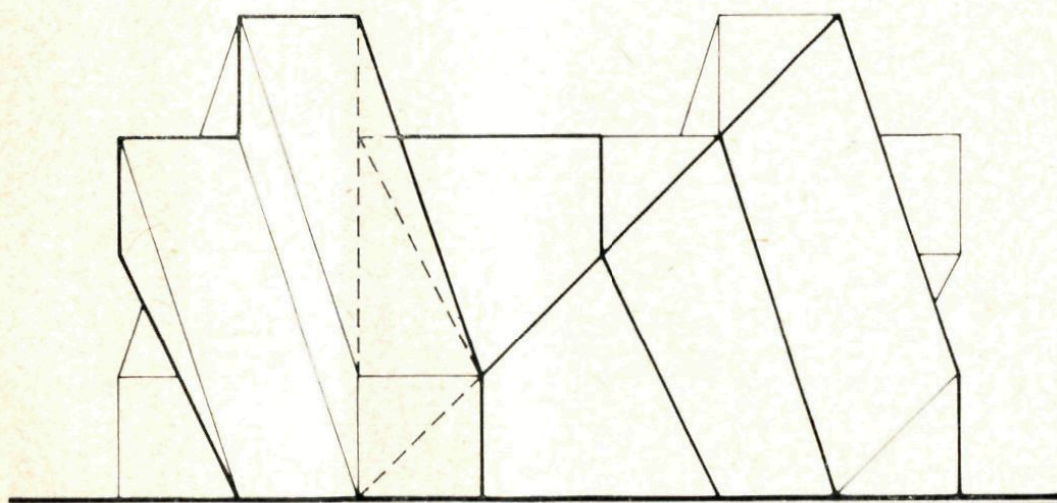


fig. b

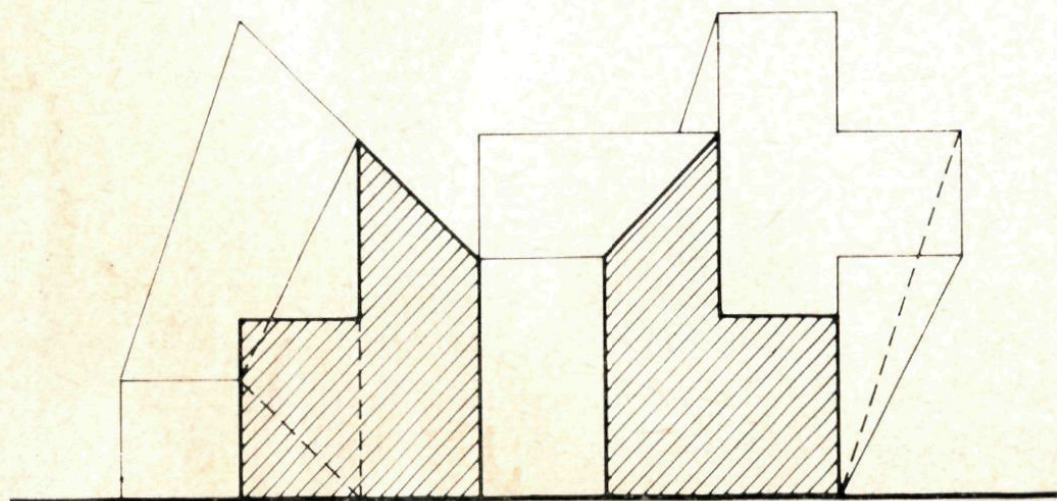


fig. c

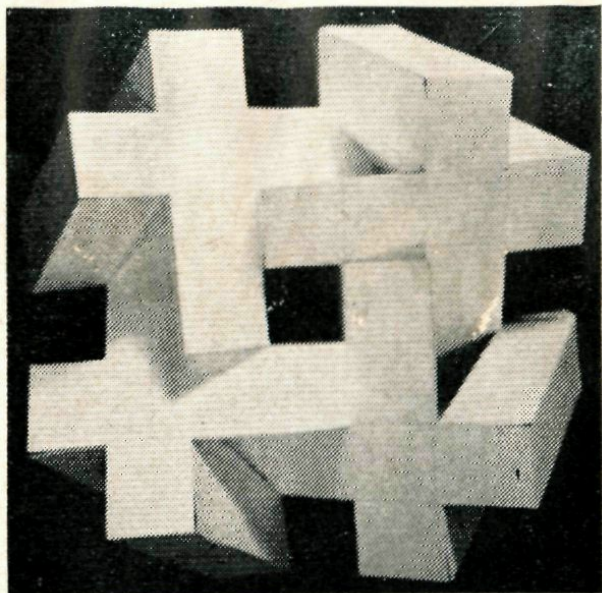


fig. 5

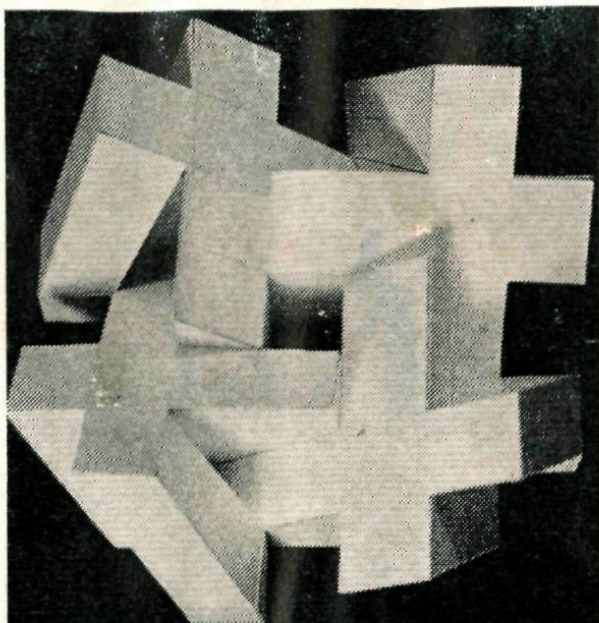


fig. 6

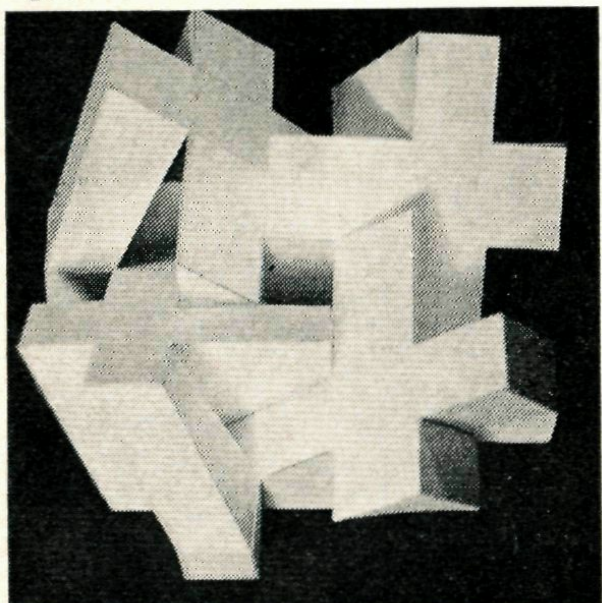


fig. 7

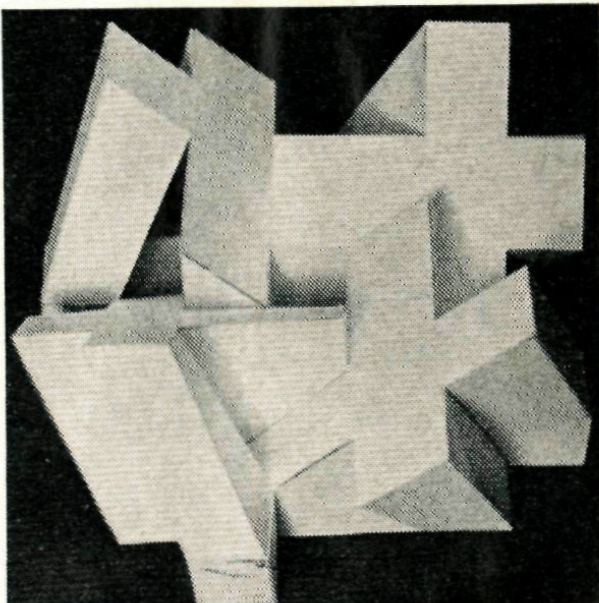


fig. 8

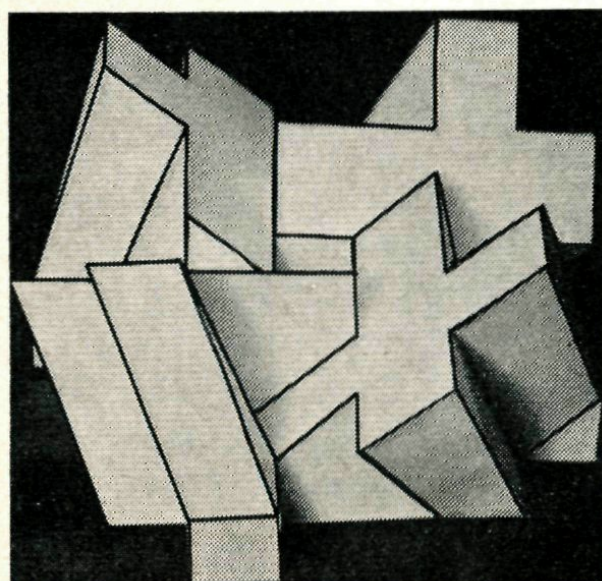


fig. 9

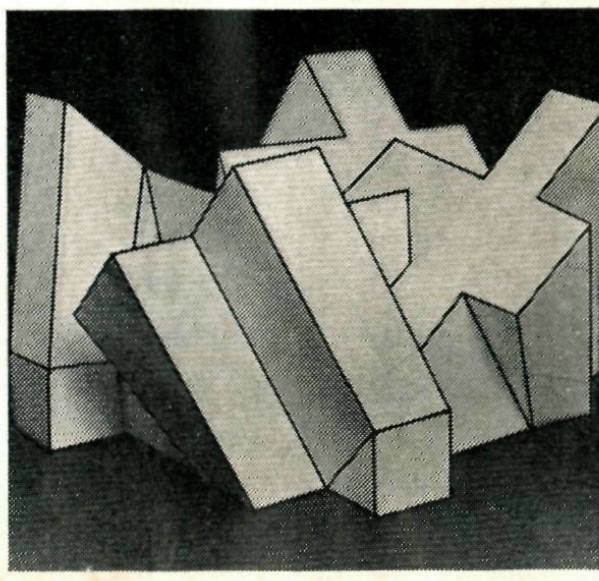


fig. 10

nomen. Het is beslist een merkwaardig en interessant bouwsel, dit paviljoen van Nix.

Er was nog iets anders dat me intrigeerde: is het mogelijk om met fig. 3 door herhaling een heel vlak te vullen. Fig. 11 laat zien hoe je twee figuren aan elkaar kunt krijgen en fig. 12 laat zien hoe de vlakvulling kan. Hier zijn de gaten voor de duidelijkheid iets vergroot, zodat het boekenrek-effect beter naar voren komt.

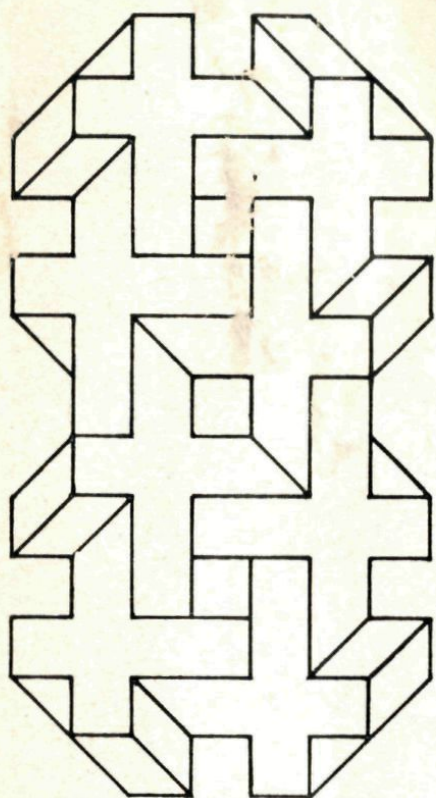


fig 11

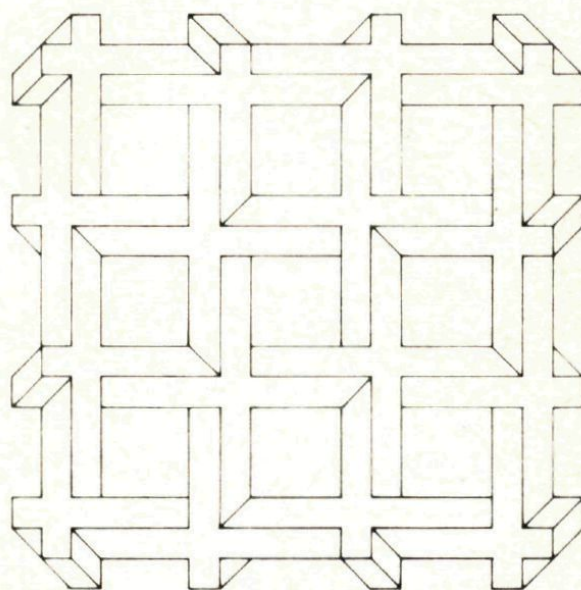


fig. 12

Naar aanleiding van de superkubus op blz. 18 van het eerste nummer van deze jaargang kregen we een brief van een lezer, die schreef: „De linker superkubus is een zeer interessante figuur, maar hij is wel degelijk mogelijk. Men moet zich voorstellen dat dit een stelsel van tegen elkaar geplakte kubussen is, waarbij het bovenste „gat” alleen wat scheef in het lichaam zit.”

Op ons verzoek om er een foto van te maken kwam geen antwoord, zodat we zelf maar een superkubus gemaakt hebben, die gefotografeerd is door de fotograaf John Stoel. Het resultaat is fig. 13.

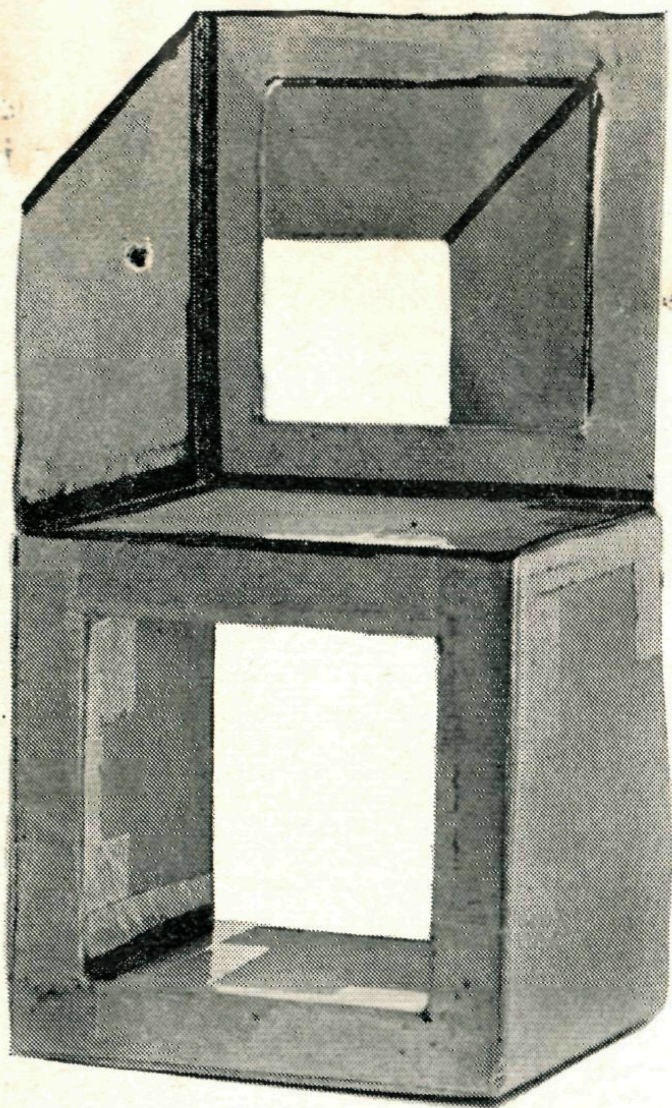


fig. 13

*Superkubus van karton en plakband.*

## Dit nummer . . .

bevat weer een flink aantal onmogelijke figuren. Duidelijk wordt dat steeds onduidelijker wordt wat nu precies onmogelijk is aan zo'n figuur.

Doordat de inzendtermijn van de prijsvragen in het tweede nummer pas op 1 april sloot, was het niet mogelijk alle oplossingen tijdig te verwerken. De oplossing van de eerste prijsvraag staat in dit nummer, op die van de tweede en derde komen we volgend jaar terug. Prijswinnaars krijgen voor de grote vakantie bericht.

De lootprijs voor de Denkertjes uit het tweede nummer is gewonnen door W. Ris, van het Barlaeusgymnasium in Amsterdam, die voor het derde nummer door C. Verhagen, van het Lyceum te Venray, die voor het vierde nummer door D. Wesselman, St. Bonifaciuslyceum, Utrecht. De laddertop is bereikt door

D. L. Buys, Breda, 395 punten; J. Bol, Honselersdijk, 375 punten; H. K. Söhngen, Den Haag, 375 punten; E. de Vrede, Zaandam, 375 punten; L. van den Dries, Ens, 365 punten; A. Heringa, Wageningen, 360 punten; J. van Deen, Groningen, 357 punten; P. Mestrom, Kerkrade, 347 punten; K. Middekamp, Vlagtwedde, 345 punten; W. Ris, Amsterdam, 343 punten; H. Jansen, Zutphen, 340 punten; K. Bakker, Alkmaar, 334 punten; G. J. Westra, Eindhoven, 325 punten; L. Alkema, Leeuwarden, 320 punten; B. Ossewaarde, Breskens, 320 punten; G. Kuiper, Eefde, 318 punten; T. de Zeeuw, Rotterdam, 312 punten; W. ten Hoeve, Emmeloord, 310 punten.

De Denkertjes uit dit nummer kunnen niet worden ingezonden, de oplossingen staan achterin.

We moeten nog even terug komen op een paar Denkertjes van deze jaargang. Velen hebben gevraagd of de oplossing van het allereerste niet eenvoudiger kan volgens fig. 14. Inderdaad, dat kan.

Ook nummer 15 gaf aanleiding tot vragen. Er stond namelijk niet bij dat de zeshoek en de achthoek geen inspringende hoeken mochten hebben, zodat men wel op 48 snijpunten kon komen, zoals in fig. 15.

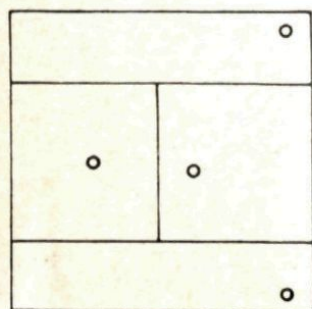
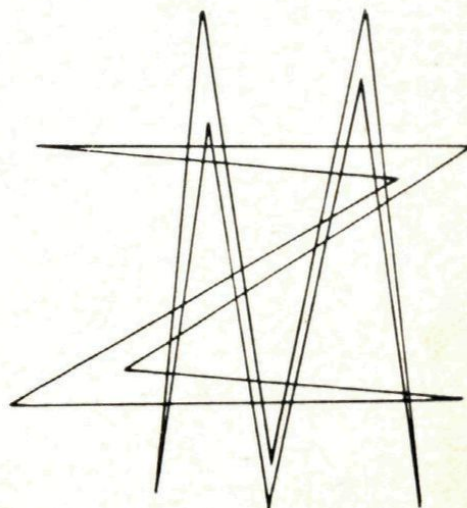


fig. 14

fig. 15



Natuurlijk zouden we uit volle borst kunnen roepen dat het vanzelf spreekt dat dit niet de bedoeling kon zijn, maar dan komen we direct in moeilijkheden met nummer 21. We hebben daarvan als oplossing gegeven  $32 < BD < 310$ , maar voor  $BD$  bijna 32 krijgt de vierhoek een inspringende hoek (fig. 16). Waarmee dan is aangetoond dat ook de redactie fouten maakt.

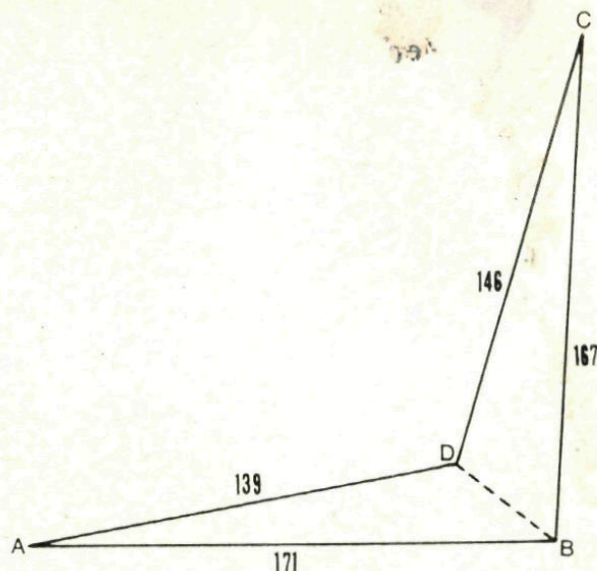


fig. 16



## Denkertjes

*De oplossingen van deze Denkertjes kunnen niet worden ingezonden.*

41. Voor welke getallen  $x$  geldt, dat er tussen  $x$  en  $x^2$  elf gehele getallen liggen?

42. Geloof het of geloof het niet, maar de som van de kwadraten van de natuurlijke getallen 52 tot en met 147 is gelijk aan het kwadraat van 1012. Dus:

$$52^2 + \dots + 147^2 = 1012^2.$$

Bewijs nu met behulp hiervan, dat

$$581^2 + \dots + 676^2 = 6164^2.$$

43. Hoe groot is de maximale oppervlakte van een vierhoek, waarvan de zijden opvolgend 5, 14, 10, 11 zijn?

44. Een rechthoek is in 35 congruente vierkanten verdeeld. Er moet een kronkellijn getekend worden, die in het middelste vierkant begint, door elk van de 35 vierkanten precies één keer heengaat en dan tenslotte eindigt in een randvierkant. Die kronkellijn mag de zijden van de vierkanten alleen maar snijden (niet volgen) en mag geen enkel hoekpunt van zo'n vierkant bevatten. Is dat alles mogelijk of niet?

(Zwitserse Olympiade 1966/67).

## °°Waarom houdt hij zijn kopje scheef?

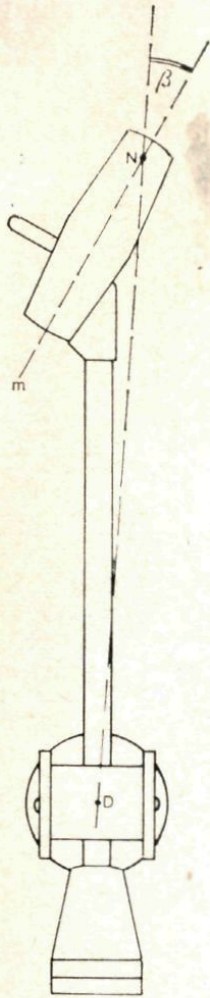


fig. 17

Het... je waarschijnlijk wel eens opgevallen dat bij een platenspeler de arm een knik of bocht vertoont. Het opnemer-element (waarin zich de naald bevindt) maakt een hoek ten opzichte van de rest van de arm. Waarom is dit? Het antwoord is snel gegeven. Het ideaal wat men nastreeft is: de as van het element (de lijn  $m$  in fig. 17) op de plaats van de naald te laten raken aan de groef van de te bespelen grammofoonplaat. Dat dit ideaal niet te verwezenlijken is, zal blijken uit het vervolg van dit verhaal.

De eenvoudigste oplossing zou zijn: het element niet aan een arm te laten draaien, maar de arm evenwijdig over de plaat te verplaatsen (fig. 18). Zo wordt de oorspronkelijke plaat ook ingesneden. Maar een dergelijke schuifconstructie biedt te veel weerstand, zodat de zijdelingse druk op de naald te groot wordt.

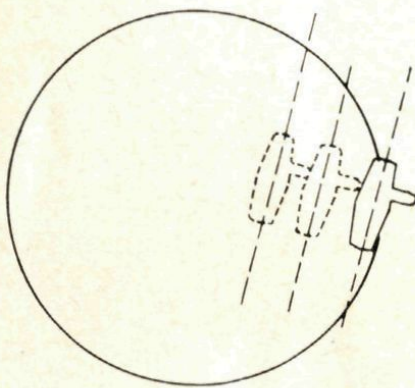


fig. 18

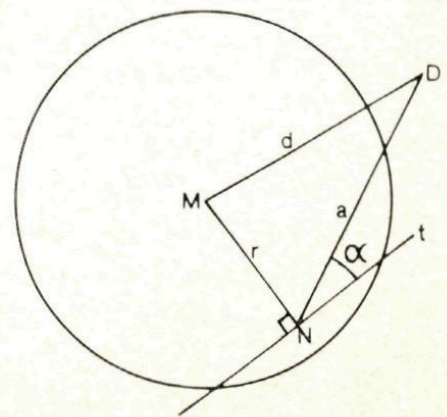


fig. 19

Houden we ons nu noodgedwongen aan een draaibare arm, dan zijn voor ons onderzoek van belang: D = draaipunt van de arm, M = middelpunt van de draaitafel, N = plaats van de naald, MD = d, MN = r, en DN = a. Als we ons de arm recht denken, is  $\alpha$  de hoek tussen deze arm en de raaklijn t aan de groef (fig. 19). Verder spreken we af dat alle lengtematen in cm worden aangegeven. Bij het afspelen van een grote grammofoonplaat varieert r van 15 tot 5. Verder is  $d > 15$ ,  $a > 15$  en om praktische redenen (afmetingen van de installatie, massa van de arm, enz.) is meestal  $a < 25$ .

De cosinusregel in  $\triangle MND$  geeft:

$$d^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos(90^\circ - \alpha) = a^2 + r^2 - 2ar \sin \alpha.$$

waaruit volgt  $\sin \alpha = \frac{a^2 + r^2 - d^2}{2ar} = \frac{a^2 - d^2}{2ar} + \frac{r}{2a}.$

Bereken zelf eens een eenvoudig geval:  $d = a = 22\frac{1}{2}$ . Dan blijkt  $\alpha$  te variëren van ongeveer  $6^\circ$  (voor  $r = 5$ ) tot  $20^\circ$  (voor  $r = 15$ ). De oplossing lijkt de „kop” van de arm over  $\frac{6^\circ + 20^\circ}{2} = 13^\circ$  te draaien

( $\beta$  in fig. 17), maar dan nog blijven we aan het begin en eind van de plaat  $7^\circ$  van ons ideaal af.

De moeilijkheid is niet de grootte van  $\alpha$ , maar de grote variatie van  $\alpha$ , (in het voorbeeld:  $14^\circ$ ). Er blijkt een mogelijkheid te zijn deze variatie te onderdrukken door d niet gelijk te nemen aan a, zodat de breuk  $\frac{a^2 - d^2}{2ar}$  een rol gaat spelen. Nu is  $\frac{a^2 - d^2}{2ar} = \frac{(a + d)(a - d)}{2ar}$ , waarin  $a + d$  ongeveer gelijk is aan  $2a$  (een fout van ongeveer 2%), zodat we kunnen vereenvoudigen tot  $\frac{a - d}{r}$  en

$$\sin \alpha = \frac{a - d}{r} + \frac{r}{2a}, \quad 5 < r < 15$$

De grafieken van deze functie van r zijn, voor  $a = 22\frac{1}{2}$  en voor verschillende waarden van  $a - d$ , weergegeven in fig. 20. (Voor de keners: het zijn delen van scheve hyperbolen en één rechte lijn). Hieruit blijkt dat voor bepaalde positieve waarden van  $a - d$  de grafiek aardig vlak te krijgen is. In het getekende voorbeeld ( $a = 22\frac{1}{2}$ ) blijken, voor  $a - d = 1,5$ , de waarden van  $\alpha$  te liggen tussen  $21\frac{1}{2}^\circ$  en  $25\frac{1}{2}^\circ$ , zodat bij een draaiing van de „kop” over  $\beta = 23\frac{1}{2}^\circ$  de afwijking niet meer dan

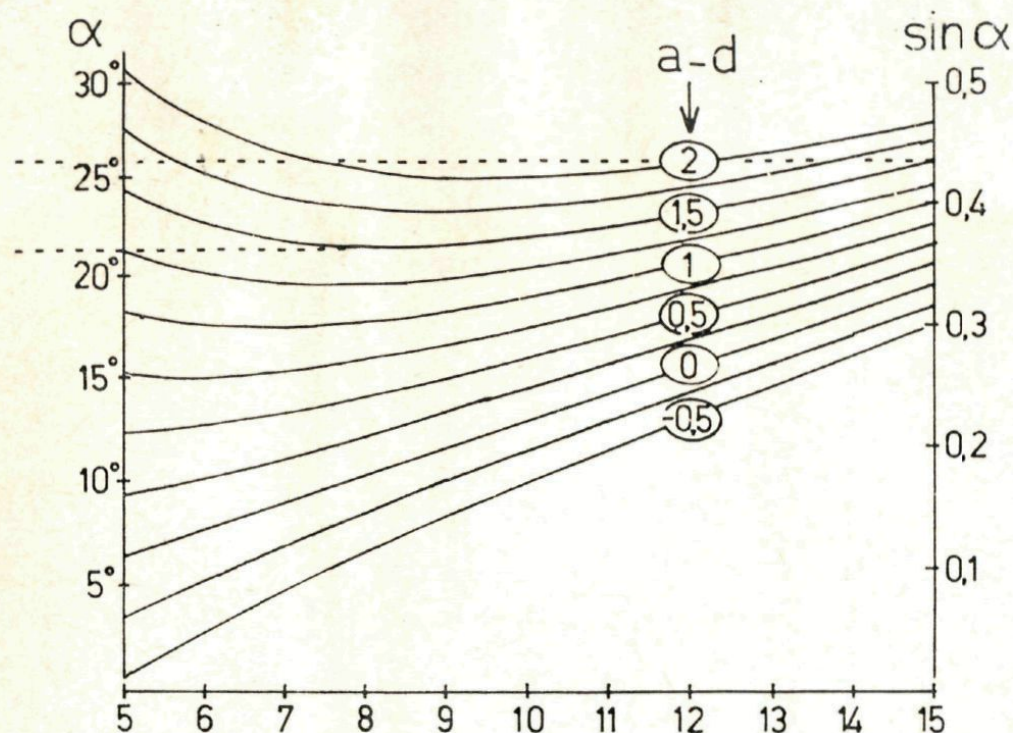


fig. 20

2° bedraagt. Nog een praktisch voordeel van  $a - d \neq 0$  is, dat de naald niet tegen de as van de draaitafel (kapot) kan stoten.

Wil je je eigen installatie controleren, meet dan de constanten  $a - d$ ,  $a$  en  $\beta$  zo nauwkeurig mogelijk op (raadpleeg fig. 1 voor  $\beta$ ). Het laagste punt van de grafiek kan berekend worden op  $\sin \alpha = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - d^2}$ ,

als  $a + d$  wordt benaderd door  $2a$  dan wordt dit  $\sin \alpha = \frac{1}{a} \sqrt{2a(a - d)}$ ,

het hoogste punt is te vinden voor  $r = 5$  of voor  $r = 15$ .



## °Geld wisselen

Zoals bekend hebben wij in ons muntstelsel de volgende munten: *cent*, *stuiver*, *dubbeltje*, *kwartje*, *gulden* en *rijksdaalder*, afgekort resp. c, s, d, k, g en r.

Een *stuiver* kunnen we op één manier wisselen, nl. 5c. Een *dubbeltje* kan op 3 manieren gewisseld worden, n.l. 2s; 1s + 5c; 10c.

Een *kwartje* kunnen we op 12 manieren wisselen, nl.  $2d + 5c$ ;  $2d + 1s$ ;  $1d + 3s$ ;  $1d + 2s + 5c$ ;  $1d + 1s + 10c$ ;  $1d + 15c$ ;  $5s$ ;  $4s + 5c$ ;  $3s + 10c$ ;  $2s + 15c$ ;  $1s + 20c$ ;  $25c$ . Nemen we de volgorde dubbeltjes, stuivers, centen, dan kunnen we deze oplossingen als volgt noteren:  $(2, 0, 5)$ ;  $(2, 1, 0)$ ; —  $(1, 3, 0)$ ;  $(1, 2, 5)$ ;  $(1, 1, 10)$ ;  $(1, 0, 15)$ ; —  $(0, 5, 0)$ ;  $(0, 4, 5)$ ;  $(0, 3, 10)$ ;  $(0, 2, 15)$ ;  $(0, 1, 20)$  en  $(0, 0, 25)$ .

Wanneer we willen onderzoeken op hoeveel manieren een *gulden* of een *rijksdaalder* gewisseld kan worden dan moeten we proberen een methode hiervoor te ontwikkelen. Laten we dit eens bekijken voor het wisselen van een *kwartje*.

Stel dat we een *kwartje* inwisselen tegen  $x$  dubbeltjes,  $y$  stuivers en  $z$  centen, dan krijgen we de vergelijking  $10x + 5y + z = 25$ , waarin  $x$ ,  $y$  en  $z$  niet-negatieve gehele getallen zijn. Hoeveel oplossingen heeft deze vergelijking? Het is duidelijk, dat  $z$  een 5-voud moet zijn. Stellen we  $z = 5u$ , dan wordt de vergelijking  $2x + y + u = 5$ . Noemen we  $y + u = t$ , dan is  $2x + t = 5$ . Daar  $x$  (aantal dubb.) alleen 0, 1 of 2 kan zijn, kan  $t$  alleen de waarden 5, 3 of 1 aannemen. Nu is het gemakkelijk in te zien, dat het aantal niet-negatieve gehele oplossingen van de vergelijking  $y + u = t$  ( $t$  geheel en niet-negatief) gelijk is aan  $t + 1$ , immers we kunnen aan  $y$  elk der waarden 0, 1, 2 . . . . .,  $t$  geven. Het gevraagde aantal oplossingen is dus:

$(5 + 1) + (3 + 1) + (1 + 1) = 12$ , want  $t$  kan alleen 5, 3 of 1 zijn.

Kan men dit aantal ook nog op een andere manier vinden?

Zoals eerder vermeld is  $(1, 2, 5)$  een oplossing van  $10x + 5y + z = 25$ , want  $10 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 = 25$ .

We vergelijken dit eens met het bekende vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal, n.l.  $a^{1 \cdot 10} \cdot a^{2 \cdot 5} \cdot a^{5 \cdot 1} = a^{25}$ . Zo zijn ook b.v. de oplossingen  $(0, 2, 15)$  en  $(2, 1, 0)$  te identificeren met resp.  $a^{0 \cdot 10} \cdot a^{2 \cdot 5} \cdot a^{15 \cdot 1} = a^{25}$  en  $a^{2 \cdot 10} \cdot a^{1 \cdot 5} \cdot a^{0 \cdot 1} = a^{25}$ .

De exponenten van deze machten zijn telkens veelvouden van 10, 5 en 1. Dit brengt ons er toe het product te beschouwen van de volgende *veeltermen* of *polynomen*.

$$V_1 = 1 + a^{1 \cdot 10} + a^{2 \cdot 10} = 1 + a^{10} + a^{20}$$

$$V_2 = a + a^{1 \cdot 5} + a^{2 \cdot 1} + \dots + a^{5 \cdot 5} = 1 + a^5 + a^{10} + \dots + a^{25}$$

$$V_3 = 1 + a^{1 \cdot 1} + a^{2 \cdot 5} + a^{3 \cdot 1} + \dots + a^{25 \cdot 1} = 1 + a + a^2 + \dots + a^{25}$$

In elk van deze veeltermen gaan we niet verder dan  $a^{25}$ , want van het product  $V_1 V_2 V_3$  interesseert ons alleen de coëfficiënt van  $a^{25}$ . In verband met het bovenstaande zie je nu wel in, dat deze coëfficiënt gelijk

is aan het gevraagde aantal manieren, waarop je een kwartje kunt wisselen. Je kunt dit controleren met behulp van bovengenoemde 12 oplossingen.

Nu is:  $V_1 V_2 = 1 + a^5 + 2a^{10} + 2a^{15} + 3a^{20} + 3a^{25} + \dots$

Dit nog vermenigvuldigen met  $V_3 = 1 + a + a^2 + \dots + a^{25}$ .

Deze vermenigvuldiging hoeven we niet uit te voeren, want elk der termen van  $V_1 V_2$  kan met precies één term van  $V_3$  een bijdrage leveren tot de coëfficiënt van  $a^{25}$  in het product  $V_1 V_2 V_3$ , b.v.  $1 \cdot a^{25}$ ;  $a^5 \cdot a^{20}$ ;  $2a^{10} \cdot a^{15}$  enz. Daaruit volgt dat deze coëfficiënt gelijk is aan de som der coëfficiënten van  $V_1 V_2$ , dus  $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 12$ .

Ter illustratie van de polynoom-methode nog het volgende: wanneer je het aantal manieren wil bepalen, waarop je een bedrag van 53 cent kunt betalen met behulp van centen, stuivers, dubbeltjes en kwartjes, dan bepaal je de coëfficiënt van  $a^{53}$  in het volgende product

$(1 + a^{25} + a^{50})(1 + a^{10} + a^{20} + \dots + a^{50})(1 + a^5 + a^{10} + \dots + a^{50})$   
 $(1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{53})$ . Deze coëfficiënt is 49.

Je kunt dit gemakkelijk nagaan.

Tot slot een vraagstuk voor de lezers van dit artikel. Op hoeveel manieren kan men een gulden wisselen? Heb je er plezier in, probeer het dan ook eens voor een rijksdaalder.

Oplossingen met gevolgde methode kunnen naar redacteur Engels worden ingestuurd. Vermeld je school en klas. Voor de beste oplosser is er een boekenbon beschikbaar. Veel succes!



45. Opsporing wordt verzocht van alle punten P in het vlak van het gegeven vierkant ABCD, waarvoor geldt dat één van de vier driehoeken PAB, PBC, PCD, PDA een oppervlakte heeft die gelijk is aan de som van de oppervlakten van de andere drie driehoeken.

46. In deze opgave stellen a, b, c, d positieve getallen voor. Als  $a = b$  en  $c = d$ , dan heeft de vierkantsvergelijking  $4x^2 - (a + b)(c + d)x + abcd = 0$  één wortel.

Bewijs dat en onderzoek of het omgekeerde ook waar is.

47. Binnen een vierkant met zijden van 10 cm is een tweede vierkant getekend, waarvan de hoekpunten op de zijden van het eerste vierkant liggen. Van dat tweede vierkant en van elk van de vier omringende driehoeken is de ingeschreven cirkel getekend.

Voor welke lengte van de zijden van het kleine vierkant is de som van de oppervlakten van deze vijf cirkels minimaal?

(Nationaal kampioenschap jonge wiskundigen, Belgrado, 1967).

## °°Het vermoeden van Fermat

Pierre (de) Fermat (1601–1665), was een Frans jurist. Uit liefhebberij beoefende hij de wiskunde, maar dat betekende niet, dat hij een amateur was. Integendeel in veel opzichten was hij een „meester in het vak”. Met zijn tijdgenoot Descartes was hij een der grondleggers van de analytische meetkunde. Hij is echter het meest bekend door zijn studies op het terrein van de getallentheorie.

Wie zich intensief bezig houdt met de eigenschappen van de natuurlijke getallen (de getallen waarmee je telt) en bijvoorbeeld de deelbaarheid van deze getallen onderzoekt maakt al spoedig kennis met de *priemgetallen*. Dat zijn die getallen, die alleen door 1 en zichzelf deelbaar zijn. Het kleinste priemgetal is 2 en tevens het enige even priemgetal. De verdere zijn 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, ...

Een der problemen uit de theorie van de priemgetallen is de vraag of er een formule te vinden is, die niet anders dan priemgetallen oplevert. Fermat sprak het vermoeden uit dat

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

waarbij  $n$  de rij der natuurlijke getallen 1, 2, 3, ... doorloopt zo'n formule zou zijn. Hij vermeldde er bij, dat hij dit vermoeden niet kon bewijzen.

De getallen  $F_n$  worden erg gauw groot:

$$\begin{aligned} F_1 &= 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5 \\ F_2 &= 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17 \\ F_3 &= 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257 \\ F_4 &= 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65.537 \\ F_5 &= 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.297 \end{aligned}$$

Je zult gemakkelijk kunnen controleren, dat  $F_1$ ,  $F_2$  en  $F_3$  priemgetallen zijn. Wil je onderzoeken of 65.537 een priemgetal is, dan kun je dat doen door te proberen of dit getal door een der priemgetallen 3, 5, 7, ..., tot en met 251 gedeeld kan worden. Het getal is nl. 1 groter dan  $256^2$ . Zou de deler dus groter zijn dan 256, dan was het quotiënt kleiner dan 256. Het quotiënt zou dan echter al eerder als deler geprobeerd zijn. Het is niet zo veel werk om dit onderzoek uit te voeren. Er zijn tot en met 251 niet meer dan 54 priemgetallen. Je hoeft dus hoogstens 54 delingen uit te voeren. Als je dat doet bemerk je, dat  $F_4$  een priemgetal is.

Als een vermoeden juist blijkt te zijn voor  $n = 1, 2, 3$  en  $4$ , dan wordt de verwachting groter, dat het ook juist zal blijken te zijn voor  $n = 5$ . Als je nog eens even naar  $F_5$  kijkt dan zul je bewondering krijgen voor de Zwitserse wiskundige Euler, die in 1732 liet zien, dat  $F_5$  geen priemgetal is, maar gelijk is aan het produkt  $641 \times 6.700.417$ .

Daarmee was het vermoeden van Fermat ontzenuwd. Het was een der weinige misgrepen van deze grote wiskundige.

Nog even iets over enkele der volgende getallen van Fermat:  $F_6 = 2^{64} + 1 = 274.177 \times 67.280.421.310.721$  en dus ook niet priem. Bewezen werd, dat voor  $n = 7, 8, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38, 73$  de getallen  $F_n$  evenmin priem zijn. Van andere getallen  $F_n$  is het wel of niet priem zijn niet bekend.

Tenslotte: Hoe groot de getallen  $F_n$  op de duur wel worden bekijken we nog even aan het getal  $F_{73}$ .

We berekenen daarvoor het aantal cijfers van  $x = 2^{2^{73}}$ .

$$\log x = 2^{73} \log 2.$$

$$\log \log x \approx 73 \log 2 + \log \log 2 \approx 22$$

$$\log x \approx 10^{22}$$

$x = 10^{10^{22}}$ . Probeer je eens voor te stellen hoeveel bladzijden van Pythagoras met dit getal gevuld zouden worden, als het werd uitgeschreven.



## °De kurve van Sierpinski

De kurve van Sierpinski heeft enige merkwaardige eigenschappen, en je ziet er nooit een afbeelding van. Wellicht vind je nu in Pythagoras een primeur. Kijk nu niet naar figuur 21 of 22. Of naar de aardige patroontjes van figuur 24 en 25, dat zijn geen afbeeldingen van de kurve van Sierpinski. Het is figuur 26 . . . ja dat zwarte vierkant, dat is de afbeelding van een kurve met de volgende eigenschappen:

1. Het is een gesloten lijn (je zou kunnen zeggen: het begin- en eindpunt zitten aan elkaar vast).
2. Deze kurve begrenst een oppervlakte die *kleiner is dan de helft van het vierkant*.
3. De kurve bevat *elk* punt binnen het vierkant (vandaar dat het hele vierkant zwart is).

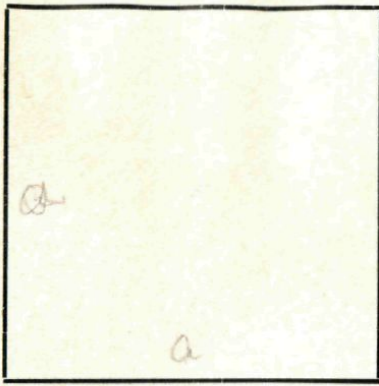


fig. 21

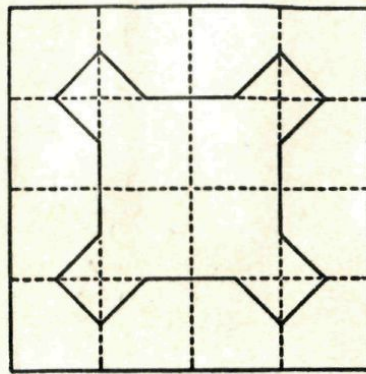


fig. 22

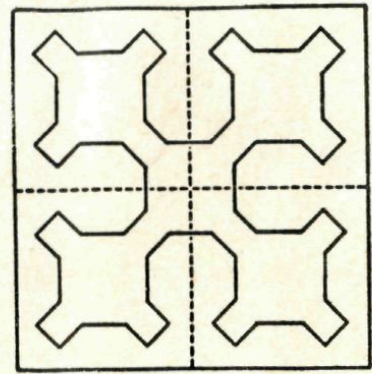


fig. 23

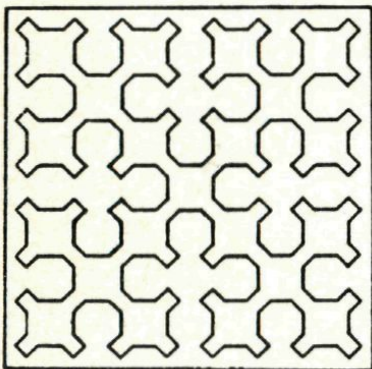


fig. 24

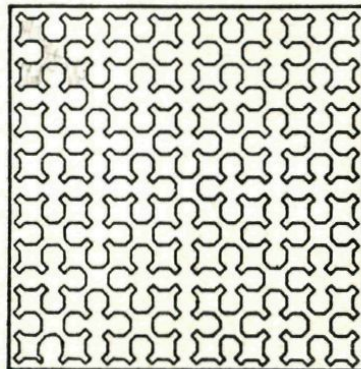


fig. 25

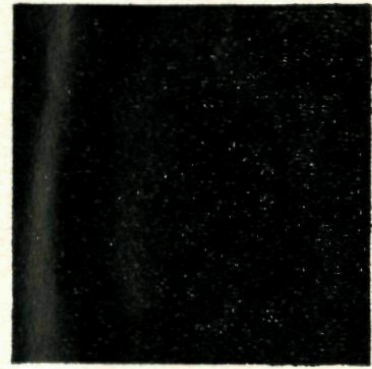


fig. 26

Op het eerste gezicht lijkt een kurve met zulke eigenschappen een onbestaanbaar, een ondenkbaar iets. Als we echter de achtereenvolgende stappen nagaan waarin we de kurve kunnen tekenen, blijkt het „onmogelijke” mogelijk te worden.

Het vierkant van figuur 21 wordt verdeeld in 16 kleinere vierkanten. Van de 12 vierkanten die langs de rand liggen verbinden we de middens der zijden; welke middens precies zie je duidelijk in de figuur.

Bekijk nu figuur 22. Het oorspronkelijke vierkant is verdeeld in 4 vierkanten. Het vierkant links boven behandelen we op dezelfde manier als figuur 21. (dus verdelen in 16 vierkantjes etc.). Als je dit doet bij alle 4 de vierkanten ontstaat figuur 23.

Door het tekenvoorschrift nog twee maal te herhalen krijgen we de figuren 24 en 25. Bij elke volgende herhaling nadert de figuur meer tot figuur 26. Dat de kurve nadert tot een figuur die elk punt binnen het vierkant bevat, is niet zo eenvoudig te bewijzen. Wel is op eenvoudige manier in te zien dat de lengte der kromme nadert tot onein-

dig, terwijl de oppervlakte nadert tot  $\frac{5}{12}a^2$ , als  $a$  de zijde van het vierkant is.

Wie dit bloempje uit de „tovertuin der wiskunde” al fraai genoeg vindt en zich niet wil vermoeien met berekeningen, kan hier de lectuur van dit artikeltje staken. Wie echter graag enige eigenschappen van deze kurve zelf wil verifiëren, zetten we even aan het rekenen.

°°° Als de zijde van het vierkant  $a$  is, dan is de lengte van de kurve in figuur 22:

$$l_0 = a \left( 1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \right)$$

Noemen we figuur 22: kurve  $C_1$  dan is de lengte van  $C_n$ :

$$l_n = 2l_{n-1} + \frac{a}{4^n} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

En uit deze formule is af te leiden dat de kurve oneindig lang wordt als  $n$  oneindig wordt.

De oppervlakte van die de kurve in figuur 22 omsluit ( $V_0$ ) is:  $V_0 = \frac{11a^2}{32}$

De oppervlakte die  $C_n$  omsluit is:  $V_n = V_{n-1} + \frac{7a^2}{32} \cdot \frac{1}{4^n}$

En de oppervlakte van de kurve van Sierpinski is:  $V_\infty = \frac{5}{12}a^2$

Je kunt ook rechtstreeks formules voor  $l_n$  en  $V_n$  afleiden, zonder  $l_{n-1}$  te gebruiken. Misschien vind je dat nog gemakkelijker. Als je maar uitkomt op:  $l_\infty = \infty$  en

$$V_\infty = \frac{5}{12}a^2.$$



48. In de ruimte zijn 30 punten gegeven, waarvan er geen vier in één vlak liggen. Is het mogelijk 300 verbindingslijnstukken van telkens twee van die punten te trekken zonder dat ergens zes van die 300 verbindingslijnstukken de ribben van een viervlak zijn?
49. Een leraar verzint sommen voor een proefwerk. Hij wil elk van de twintig leerlingen uit zijn klas twee sommen opgeven. Dat moet zo gebeuren dat verschillende leerlingen ook verschillende sommenparen voorgelegd krijgen. Hij wil ook dat elk van zijn opgaven door twee verschillende leerlingen gemaakt wordt. Hoeveel sommen heeft hij dan nodig?
50. Een meubelmaker moet een vierkante vitrine bouwen, die gebruikt zal worden voor het tentoonstellen van oude handschriften. Die handschriften zullen in zijn vitrine plat neergelegd worden en wel zonder elkaar te bedekken, ook niet gedeeltelijk. Hij weet niet hoeveel handschriften er zijn. Hij weet alleen dat elk handschrift vierkant is en dat de totale oppervlakte van de handschriften  $1 \text{ m}^2$  bedraagt. Op de gis geeft hij zijn vitrine zijden van  $1,40 \text{ m}$  lengte. Is het mogelijk dat zijn produkt onbruikbaar blijkt te zijn?

## °Verkeerscapaciteit

Het aantal auto's in Nederland neemt dagelijks toe. De wegen moeten een steeds groter aantal auto's verwerken en worden dus steeds drukker. Zou het helpen als de gemiddelde snelheid van de auto's werd opgevoerd?

Een automobilist zal zijn doel sneller bereiken, naarmate hij sneller rijdt (binnen zekere grenzen natuurlijk). Meestal kan hij echter niet zo snel rijden als hij zelf wil, maar moet hij zich aanpassen bij het overige verkeer, en dient hij zijn snelheid daarnaar te regelen.

Hoe?

Volgens het wegenverkeersreglement moet men kunnen stoppen binnen de weg die te overzien en vrij is. Dit betekent dat men moet weten hoe snel men kan stoppen als de auto een bepaalde snelheid heeft. Voor de wet is het voldoende als een auto die 40 km/uur rijdt binnen 16 meter kan stoppen, bij 50 km/uur binnen 25 meter, bij 60 km/uur binnen 36 meter, enz.. Nu is het niet nodig een afstand van 36 meter tot je voorbuurman te bewaren als je met een snelheid van 60 km/uur over een autoweg rijdt, tenminste aangenomen dat die voorbuurman ook rijdende is. Ook hij heeft dan immers een zekere tijd nodig voordat hij kan stilstaan.

De A.N.W.B. adviseert om een afstand te bewaren die in meters de helft is van de snelheid waarmee gereden wordt. Dus bij een snelheid van 60 km/uur moet je een afstand van 30 meter tot je voorbuurman bewaren.

De bedoeling is dat een zo groot mogelijk aantal auto's tegelijkertijd van de weg gebruik kan maken, dat wil zeggen dat per minuut zoveel mogelijk auto's een bepaald punt van de weg passeren. Laten we aannemen dat je in een file verzeild bent geraakt die zich met een snelheid van 30 km/uur voortbeweegt. De automobilisten houden zich netjes aan de regels en bewaren dus een onderlinge afstand van 15 meter. De auto voor je is net een bepaald punt gepasseerd, je moet dus zelf nog 15 meter plus de lengte van je auto afleggen, voor je ook zover bent. We nemen voor het gemak maar aan dat alle auto's 4 meter lang zijn. Aangezien een kilometer 1000 meters telt en een uur 3600 seconden komt 30 km/uur overeen met  $8\frac{1}{3}$  m/sec. De 19 meter leg je dus af in  $19:8\frac{1}{3} = 2,28$  sec.

Dit betekent dat per minuut  $60:2,28 = 26,3$  auto's het bewuste punt passeren.

Maar ziet: Plotseling rijdt iedereen 60 km/uur en . . . nu passeren wel 29,4 auto's per minuut een bepaalde plaats. Dat wil zeggen drie hele auto's meer, bij een verdubbeling van de snelheid!

Algemeen: Bij een snelheid van  $v$  km/uur  $= \frac{v}{3,6}$  m/sec is de afstand

tussen twee voorbumpers

$\frac{1}{2}v + 4$  meter. De tijd nodig om deze afstand af te leggen is

$$\frac{3,6}{v} (\frac{1}{2}v + 4) = 1,8 + \frac{14,4}{v} \text{ sec.}$$

We kunnen hiermee de volgende tabel maken:

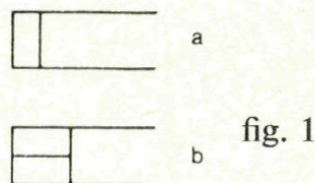
| snelheid  | afstand | passeertijd | aantal auto's/min. |
|-----------|---------|-------------|--------------------|
| 10 km/uur | 9 m     | 3,24 sec.   | 18,5               |
| 20        | 14      | 2,52        | 23,8               |
| 30        | 19      | 2,28        | 26,3               |
| 40        | 24      | 2,16        | 27,8               |
| 50        | 29      | 2,09        | 28,7               |
| 60        | 34      | 2,04        | 29,4               |
| 70        | 39      | 2,01        | 29,9               |
| 80        | 44      | 1,98        | 30,3               |
| 90        | 49      | 1,96        | 30,6               |
| 100       | 54      | 1,94        | 30,9               |

Je ziet dat het aantal passerende auto's per minuut maar zeer langzaam toeneemt. Zelfs is het zo dat dit aantal nooit boven de 33,3 kan komen, al ging je laagvliegend over de weg.



## Oplossing van prijsvraag I uit het tweede nummer

Het aantal manieren, waarop een rechthoek van 2 cm bij  $n$  cm belegd kan worden met dominostenen van 1 cm bij 2 cm, noemen we  $P(n)$ . Veronderstel eens, dat  $n$  ten minste gelijk is aan 3. De linker bovenhoek van je rechthoek kan op twee verschillende manieren gevuld worden, namelijk zoals in fig. 1a en zoals in fig. 1b. In fig. 1a hou je dan nog een rechthoek van 2 cm bij  $(n - 1)$  cm over om te beleggen en dat kan op  $P(n - 1)$  manieren gebeuren. In fig. 1b moet de linker onderhoek wel op de getekende manier volgemaakt worden en je houdt dan nog een rechthoek van 2 cm bij  $(n - 2)$  cm over, die op  $P(n - 2)$  manieren gevuld kan worden. Voor  $n \geq 3$  geldt dus  $P(n) = P(n - 1) + P(n - 2)$ .



Deze formule levert ons de gewenste oplossing, samen met de haast vanzelfsprekende gegevens  $P(1) = 1$  en  $P(2) = 2$ . We vinden er namelijk achtereenvolgens uit:

$$P(3) = P(2) + P(1) = 2 + 1 = 3;$$

$$P(4) = P(3) + P(2) = 3 + 2 = 5;$$

$$P(5) = P(4) + P(3) = 5 + 3 = 8;$$

$$P(6) = P(5) + P(4) = 8 + 5 = 13.$$

Geduldig op deze wijze voortgaande, komen we zo tenslotte tot  $P(50) = 20.365.011.074$ . Dat is het gevraagde antwoord.

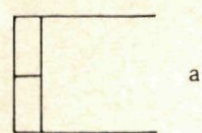
Het aantal manieren om een rechthoek van 4 cm bij  $n$  cm met domino's te beleggen noemen we  $Q(n)$ . Het is duidelijk dat  $Q(1) = 1$  en dat  $Q(2) = P(4) = 5$ . Bij  $n = 3$  beginnen de moeilijkheden.

In fig. 2 zie je de vijf manieren voor het bezetten van de linkerrand. In slechts twee gevallen hou je dan weer een gave rechthoek over (a en d); 2a levert de bijdrage  $Q(n - 1)$  en 2d levert de bijdrage  $Q(n - 2)$  tot  $Q(n)$ . In 2b en 2c heeft het reststuk dezelfde vorm. Verstaan we onder  $R(n)$  het aantal manieren om een reststuk van die vorm en met

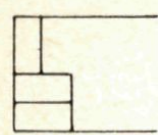
de breedte  $n$  te beleggen, dan leveren 2b en 2c elk een bijdrage van  $R(n-1)$  tot  $Q(n)$ .

Op dezelfde wijze noemen we de bijdrage van 2e tot  $Q(n)$  maar  $S(n-1)$ . Zo vinden we dus, dat voor  $n \geq 3$  geldt  $Q(n) = Q(n-1) + Q(n-2) + 2R(n-1) + S(n-1)$ .

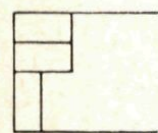
Op deze de manier te werk gaande, vinden we nu bij het bestuderen van de teststukken nog twee formules:



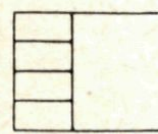
a



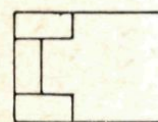
b



c

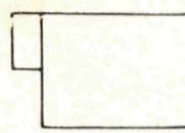


d

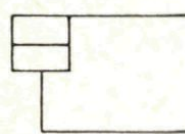


e

fig. 2

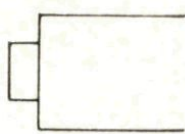


a

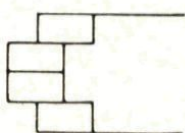


b

fig. 3



a



b

fig. 4

Fig. 3 levert: voor  $n \geq 2$  geldt  $R(n) = Q(n-1) + R(n-1)$ .

Fig. 4 levert: voor  $n \geq 3$  geldt  $S(n) = Q(n-1) + S(n-2)$ .

En na nog de begingegevens  $R(1) = 1$ ,  $S(1) = 1$ ,  $S(2) = 1$  verzameld te hebben, kunnen we weer aan de race naar  $Q(25)$  beginnen:

$$R(2) = Q(1) + R(1) = 1 + 1 = 2$$

$$Q(3) = Q(2) + Q(1) + 2R(2) + S(2) = 5 + 1 + 4 + 1 = 11$$

$$R(3) = Q(2) + R(2) = 5 + 2 = 7$$

$$S(3) = Q(2) + S(1) = 5 + 1 = 6$$

$$Q(4) = Q(3) + Q(2) + 2R(3) + S(3) = 11 + 5 + 14 + 6 = 36$$

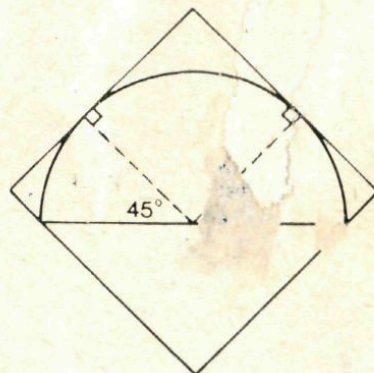
$$R(4) = Q(3) + R(3) = 11 + 7 = 18$$

$$S(4) = Q(3) + S(2) = 11 + 1 = 12$$

$$Q(5) = Q(4) + Q(3) + 2R(4) + S(4) = 36 + 11 + 36 + 12 = 95$$

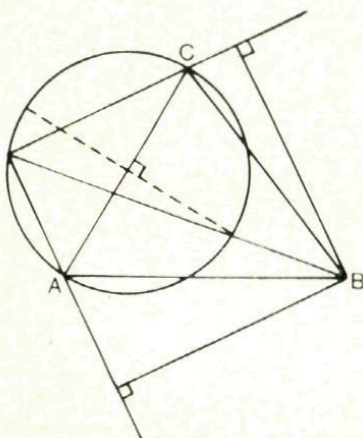
## Oplossingen van de Denkertjes uit het vierde nummer

31. Dat kleinste vierkant heeft zijden van  $5(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})$



32. 25 lijnstukken (verdeel de 10 punten in twee groepen van vijf en verbind elk punt uit de ene groep met elk punt uit de andere groep).
33.  $x = 20$ .
34. 249 drietallen.
35. De som van de oppervlakten van de drie buitenste vierkanten is 3 malen zo groot als de som van de oppervlakten van de drie binnenste vierkanten.
36.  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ . Splitst men een van de twee termen aan de rechterkant weer op deze manier, dan ontstaat een som van drie verschillende stambreuken. Zulk een som kan ook zo verkregen worden:  $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}$ .
37. Verdeel de omtrek van het vierkant in negen gelijke stukken en verbind de deelpunten met het middelpunt van het vierkant.
38. 1234578960.
39. De afstand van P tot een hoekpunt plus de afstand van P tot de zijde tegenover dat hoekpunt is minimaal indien P ligt op de hoogtelijn uit dat hoekpunt. Het gevraagde punt is dus het hoogtepunt van de driehoek.

40.



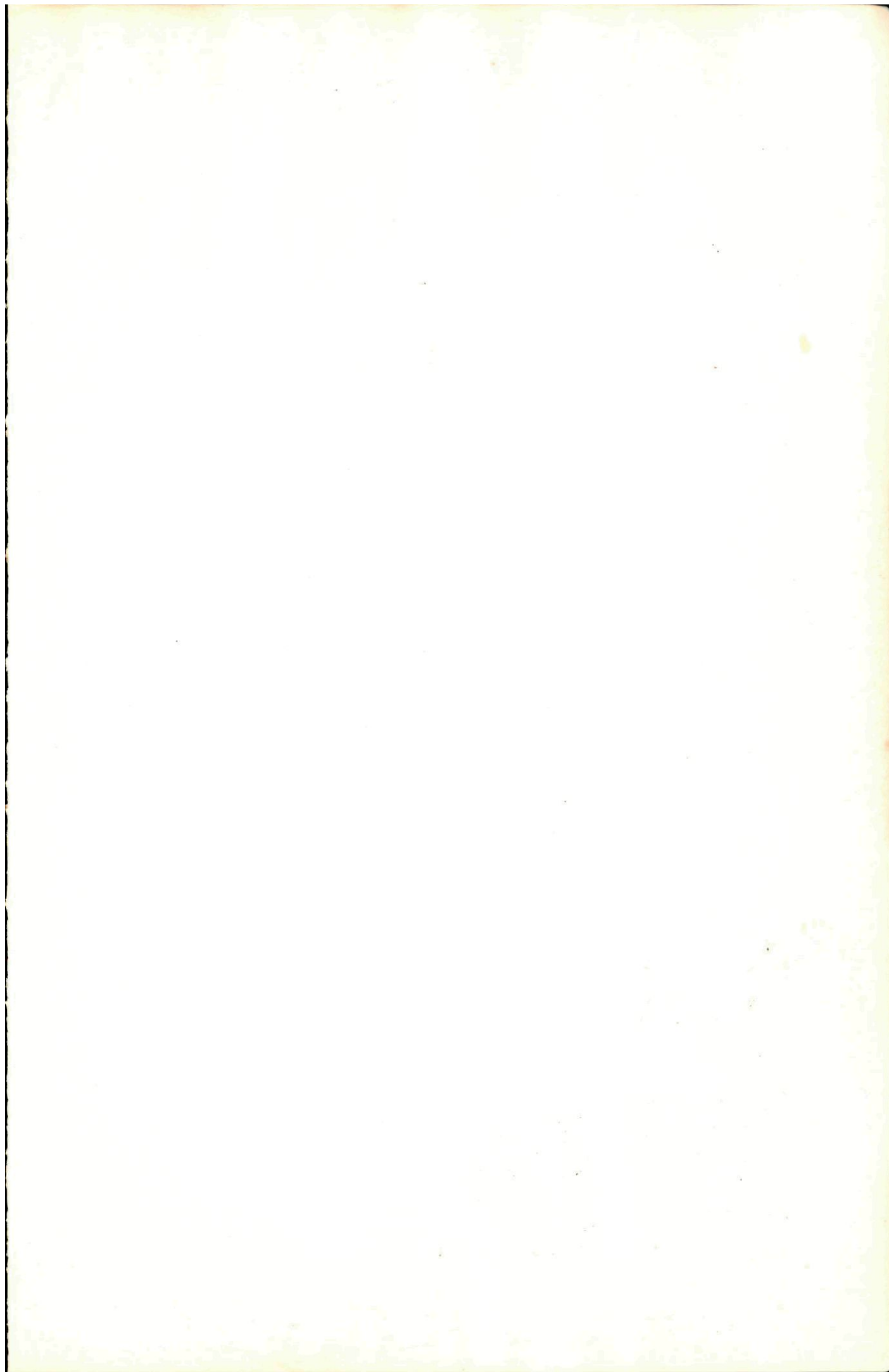
## Oplossingen van de Denkertjes uit het vijfde nummer

- Je kunt 3 boeken rangschikken op  $3! = 6$  manieren, 4 boeken op  $4! = 24$ , 5 boeken op  $5! = 120$  manieren. Je kunt op  $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$  manieren drie boeken kiezen uit een stapeltje van zes, als je *wel* let op de volgorde, anders 20.  
Een toetstformulier kan op  $3^{13} = 1.594.323$  verschillende manieren worden ingevuld, afgezien van de reservewedstrijden.  
Het aantal combinaties van 0 uit N is 1.  
Het aantal combinaties van 5 uit 12 is even groot als het aantal combinaties van 7 uit 12, omdat steeds als je 5 dingen uit 12 kiest er 7 over blijven.
- Volgens regel I kunnen 125.000.000 verschillende drietallen worden gevormd.
- Uit 8 spelers kun je  $\binom{8}{5} = 56$  basketbalteams vormen.

4. Er zijn  $8^4 = 4096$  standen, de inbreker heeft dus 2048 minuten = 34 uur en 8 minuten hoogstens nodig. Hij moet er dus wel een weekend voor uit trekken.
5. De kans op drie witte knikkers is  $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{14 \cdot 13 \cdot 12} = \frac{5}{91}$   
 de kans op drie zwarte  $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{14 \cdot 13 \cdot 12} = \frac{14}{91}$   
 De kans op drie gelijke is volgens regel VI gelijk aan  $\frac{19}{91}$
6.  $P(u) = \frac{1}{2}$ ,  $P(p) = \frac{7}{10}$ ,  $P(u \text{ of } p) = \frac{9}{10}$ ,  $P(u \text{ en } p) = \frac{3}{10}$ .
7. De kans dat het allemaal schoppenkaarten zijn is  $1/\binom{52}{13} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 13}{40 \cdot 41 \dots 52}$
8.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1$  als  $p + q = 1$   
 $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 0 \cdot 1 \cdot p^0 q^n + 1 \cdot n \cdot p^1 q^{n-1} \dots$   
 $+ n \cdot 1 \cdot p^n q^0 = np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k} = np(p + q)^{n-1} = np.$
9. De tweede kogel kan van goud of van zilver zijn, dus  $p = \frac{1}{2}$ .
10. De leraar is zo stom nog niet. Zijn kans om te verliezen is namelijk  $\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \dots 341}{365^{25}} = 0,43$ , dus kleiner dan  $\frac{1}{2}$ .  
 Bij een groep van 40 personen is de kans maar liefst bijna 90% dat er twee op dezelfde dag jarig zijn.

## Oplossingen van de Denkertjes uit dit nummer

41.  $x$  moet voldoen aan  $-3 \leq x < -8$  of aan  $14 < x \leq 15$  of aan  $x = 4$ .
42.  $(581^2 + \dots + 676^2) - (52^2 + \dots + 147^2) = (581^2 - 52^2) + \dots + (676^2 - 147^2) = 529 \cdot 633 + \dots + 529 \cdot 823 = 529 \cdot (633 + \dots + 823) = 529 \cdot 48 \cdot 1456$ .  
 Dus  $581^2 + \dots + 676^2 = 1012^2 + 529 \cdot 48 \cdot 1456 = 92^2 \cdot (11^2 + 3 \cdot 1456) = 92^2 \cdot 67^2 = 6164^2$ .
43. De maximale oppervlakte bedraagt 90 (laat de zijden 5 en 14 een rechte hoek insluiten en de zijden 10 en 11 ook).
44. Kleur de vierkanten wit en zwart, zoals bij een schaakbord. Er zijn 17 witte en 18 zwarte, als je tenminste het centrumveld wit maakt. Elke kronkellijn doorloopt de vierkanten in de volgorde wit-zwart-wit-zwart-... Op elk moment tijdens je reis langs de vierkanten is het aantal doorlopen witte vierkanten gelijk aan het aantal doorlopen zwarte vierkanten of het aantal witte is 1 meer dan het aantal zwarte. De stand 17 witte, 18 zwarte is dus niet bereikbaar.
45. Trek de rechten, waar de zijden van het vierkant lijnstukken van zijn. Je vindt twee paren evenwijdige rechten. De gevraagde verzameling bevat de punten tussen de rechten van een paar, die niet tussen de rechten van het andere paar liggen.
46. Het omgekeerde geldt ook. De discriminant is gelijk aan  $(a - b)^2 (c - d)^2 + 4ab(c - d)^2 + 4cd(a - b)^2$  en dit is slechts als  $a = b$  en  $c = d$  gelijk aan 0.
47. De zijden van het kleine vierkant moeten 8 cm lang zijn.
48. Ja, dat is mogelijk. Verdeel de 30 punten in drie groepen van 10 punten. Verbind nu alleen punten, die tot verschillende groepen behoren; dit geeft precies 30 verbindingslijnstukken. Elk viervlak dat je zou kunnen maken heeft ten minste twee hoekpunten, die tot eenzelfde groep behoren en die twee punten zijn dan niet verbonden.
49. 20 sommen.
50. Ja, dat is mogelijk. Stel, dat er twee handschriften zijn, die elk een oppervlakte van  $0,5 \text{ m}^2$  hebben. Zulk een paar kan niet op de gewenste manier in zijn vitrine gelegd worden.



## *Zakelijke mededelingen*

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

### REDACTIE

H. J. ENGELS, Muggenbroekerlaan 41, Roermond.

BRUNO ERNST, Wilhelminapark 22, Breda.

Drs. A. B. OOSTEN, Turftorenstraat 11A, Groningen.

A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

G. A. VONK, Fahrenheitstraat 688, Den Haag.

Artikelen en problemen kunnen naar één van de redacteuren worden gestuurd.

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

### ABONNEMENTEN

Pythagoras zal in het schooljaar 6 maal verschijnen.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,50 per jaargang. Voor anderen f 4,—.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.