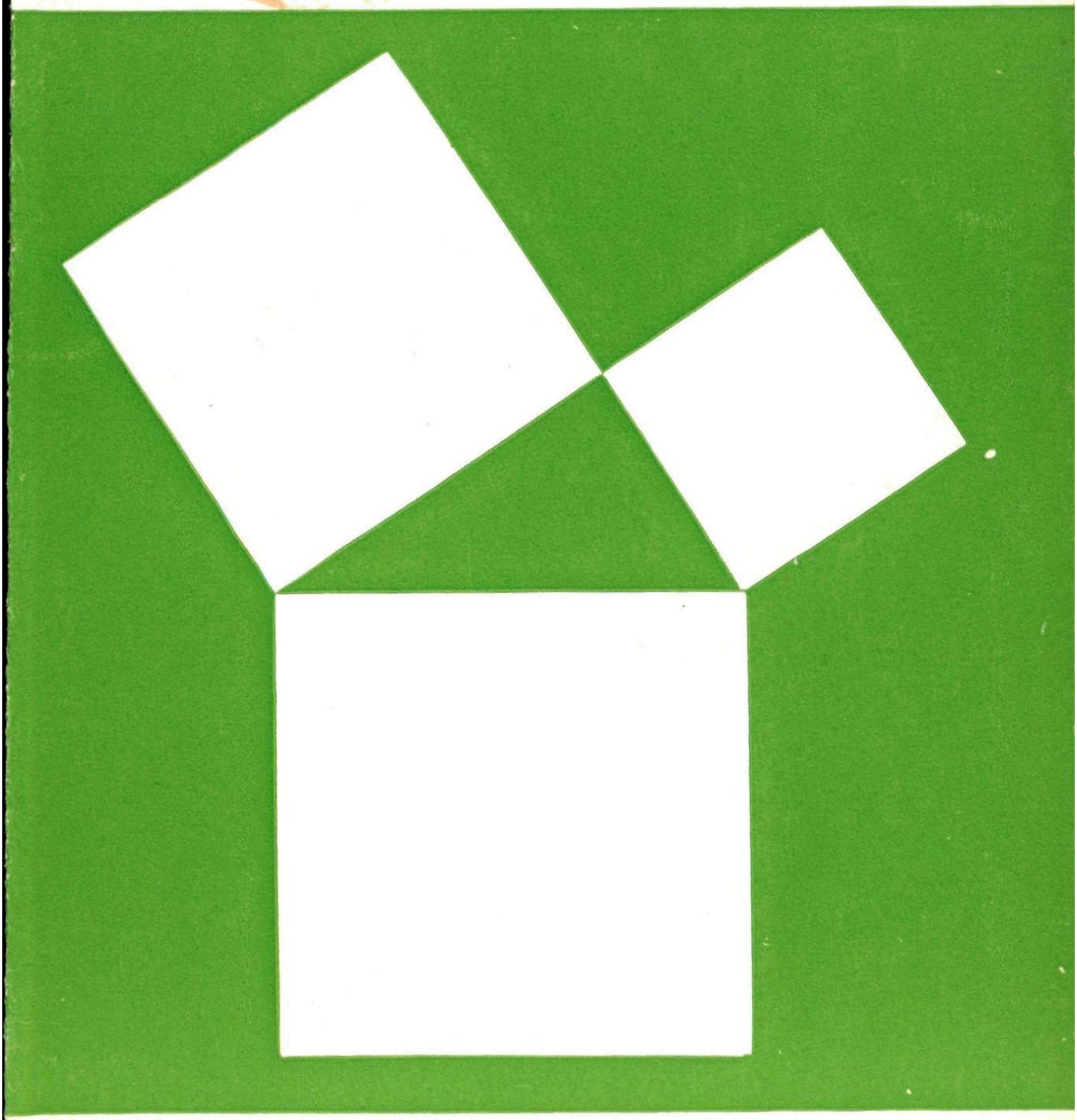
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

1

Achtste jaargang
1968/1969

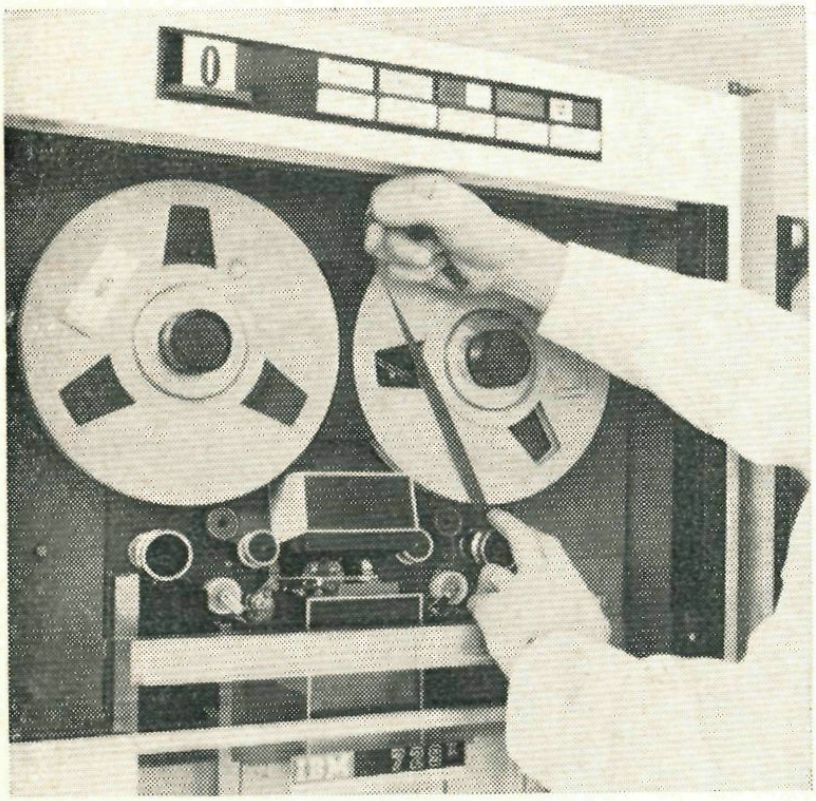
Per dag komen op de girokantoren in Arnhem en 's-Gravenhage 200.000 tot 1.000.000 girokaarten binnen, die worden geponst op ongeveer 800 ponsmachines en gelezen door 18 kaartleesmachines. De leessnelheid is 64.000 tekens per minuut. Op de foto een kaartleesmachine met op de achtergrond kasten met magnetische-band-apparatuur.

pythagoras

jaargang 8 no 1

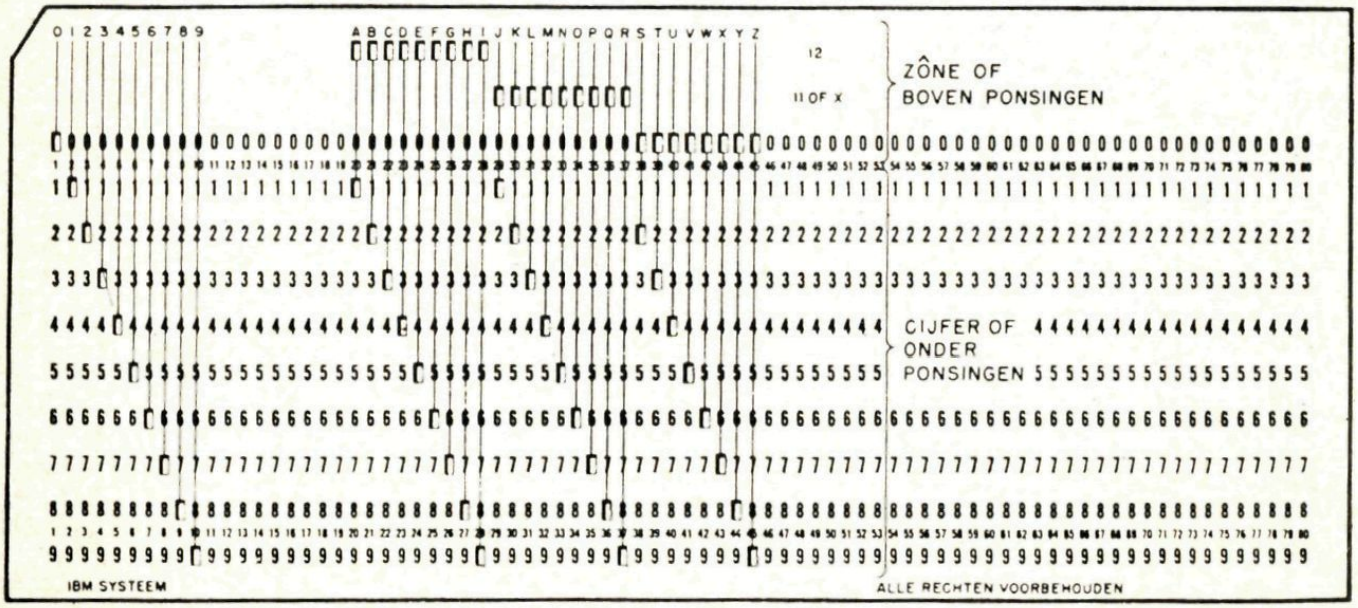
°Invoerproblemen bij de giro

De electronische rekenmachine (computer) is het wonder van deze tijd. Hij kan rekenen, lezen, schrijven en desnoods een liedje fluiten. Geen wonder dat hem nog een andere menselijke vaardigheid wordt toegeschreven, namelijk *denken*. In dit opzicht heeft het apparaat het echter nog niet ver geschopt. Ook het lezen gaat trouwens nog niet zo best. Speciaal met onze menselijke hanepoten heeft hij het erg moeilijk. Toch moet de machine, wil hij wat presteren, de nodige gegevens in zich opnemen.



Magnetische banden vormen het geheugen van de computers die door de PCGD (nog) worden gebruikt. Per dag worden door 18 computers 2500 banden verwerkt met een totale lengte van 1700 kilometer. De tekens op de banden worden gelezen met een snelheid van 41.000 per seconde.

Deze *invoer* kan op verschillende manieren plaats vinden, de belangrijkste hiervan zijn ponskaarten, ponsbanden en magnetische banden. Wie wel eens een girokaart heeft gezien weet meteen hoe een ponskaart er uit kan zien. De girodienst van de PTT werkt namelijk sinds 1965 automatisch, wat wil zeggen dat de boekingen door computers worden verricht. Zeer in het kort komt het proces hier op neer: De bedragen die de rekeninghouders „op de giro" hebben, staan in volgorde van rekeningnummer op magnetische banden, de *saldibanden*. Elke dag komen 200.000 tot 1.000.000 girokaarten binnen op de girokantoren in Den Haag en Arnhem. De opdrachten die op deze kaarten staan komen eveneens op magnetische banden, de *mutatiebanden*. Aan de hand van deze laatste brengen computers de nodige veranderingen aan (mutaties) in de saldibanden. Van alle veranderingen krijgen de rekeninghouders natuurlijk bericht.
De automatisering is nog niet „volmaakt".
De rekeninghouders hebben boekjes met girokaarten, waarin hun gironummer al is geponst (zie Fig. 1b). Op de kaart staat dat meneer Lucassen *f* 125,45 moet betalen aan meneer Van Doorn. Het bedrag en het nummer van meneer Van Doorn moeten ook in de kaart worden geponst. Dit gebeurt met handkracht in één van de tien codeercentra van de girodienst. Als de kaart naar het girokantoor is gezonden, wordt hij dus eerst doorgestuurd naar zo'n codeercentrum. Dit betekent natuurlijk tijdverlies (van een dag) en het spreekt wel haast



Op een ponskaart (uitgevonden door dr. Herman Hollerith in 1889 en in dat jaar voor het eerst toegepast bij een Amerikaanse volkstelling) bevinden zich normaal 80 posities naast elkaar en 12 boven elkaar (Fig. 1a). De bovenste twee rijen hebben de

vanzelf dat naarstig wordt gezocht naar methoden om ook dit coderen machinaal te doen, of, beter nog, de geschreven opdracht direct machinaal te lezen.

Hoe belangrijk dit speurwerk is moge blijken uit het feit dat de prijsvraag, die de Postcheque- en Girodienst heeft uitgeschreven ter gelegenheid van haar 50-jarig bestaan in 1968, de automatisering van de invoer als onderwerp heeft.

Fig. 1b

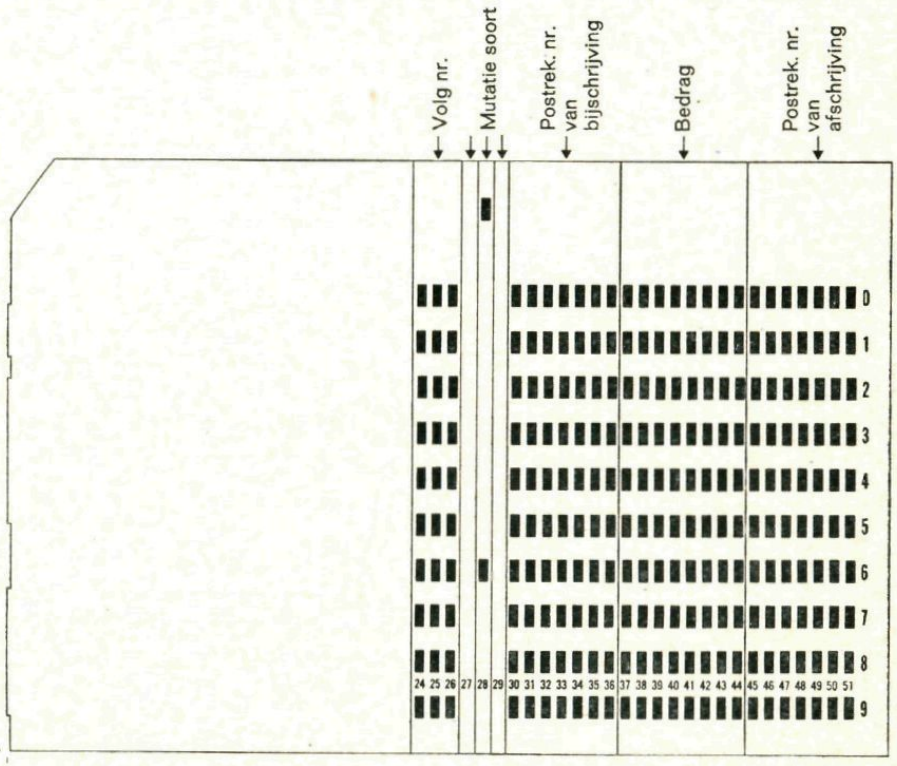


Fig. 1c

waarde 12 en 11, daarna volgen 0 t/m 9.

De girokaart (Fig. 1b) is korter en bevat 51 ponskolommen, waarvan de laatste 28 gebruikt worden (Fig. 1c).

De moeilijkheid hierbij is de grote verscheidenheid (en slordigheid) van handschriften (Fig. 2). De girodienst neemt daarom proeven met zogenaamde merkroosterkaarten, waarbij deze moeilijkheid wordt ondervangen. (Fig. 3).

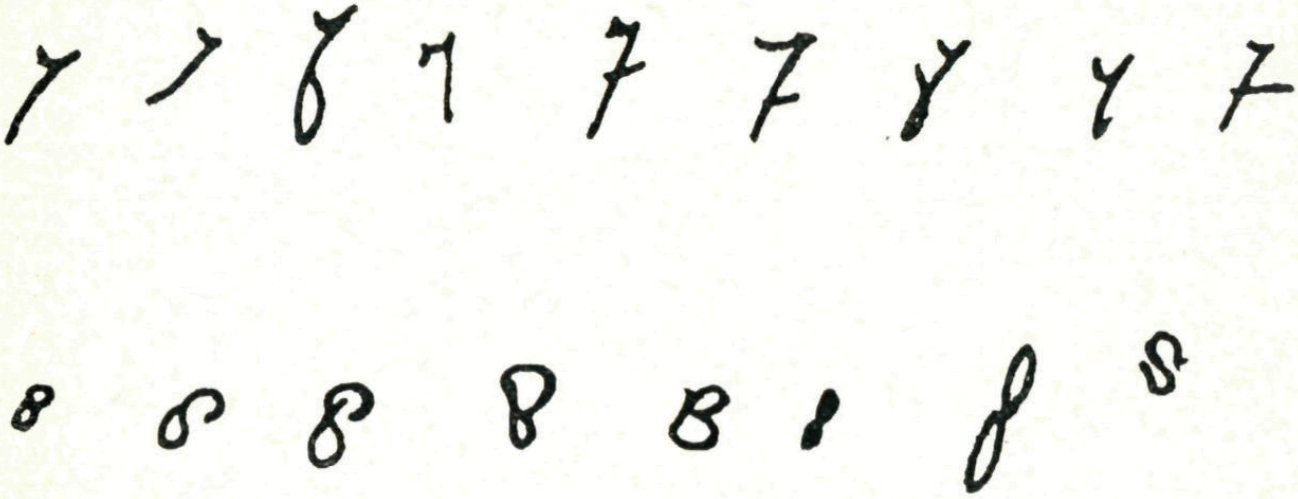


Fig. 2.

Voor het gironummer van bijschrijving en het bedrag staan op de kaart twee *balken*, die zijn onderverdeeld in een aantal *secties*, waarin de cijfers 0 t/m 9 gestippeld zijn aangegeven. In elke sectie moet één cijfer worden overgetrokken bij het invullen van de kaart (Fig. 4). De kaarten zijn in rode kleur uitgevoerd en worden door foto-electrische cellen afgetast, die geen rood waarnemen. Mits men de kaart niet met rood ingevuld heeft, constateert de fotocel dat op een bepaalde *plaats* een cijfer is overgetrokken en geeft automatisch de machine opdracht het cijfer te ponsen. Het doet er dus niet toe hoe netjes het cijfer is overgetrokken (een kruisje kan ook) het gaat er immers maar om op welke plaats het cijfer staat. Het bezwaar van merkroosterkaarten is dat men zich kan vergissen door twee cijfers

Fig. 3.

in één sectie over te trekken en dat de opdracht niet zo gemakkelijk terug te lezen is. Behalve het hier besproken *horizontale* merkrooster zijn er nog andere typen, die echter allemaal op hetzelfde neerkomen: de plaats van het cijfer is bepalend voor de waarde ervan.

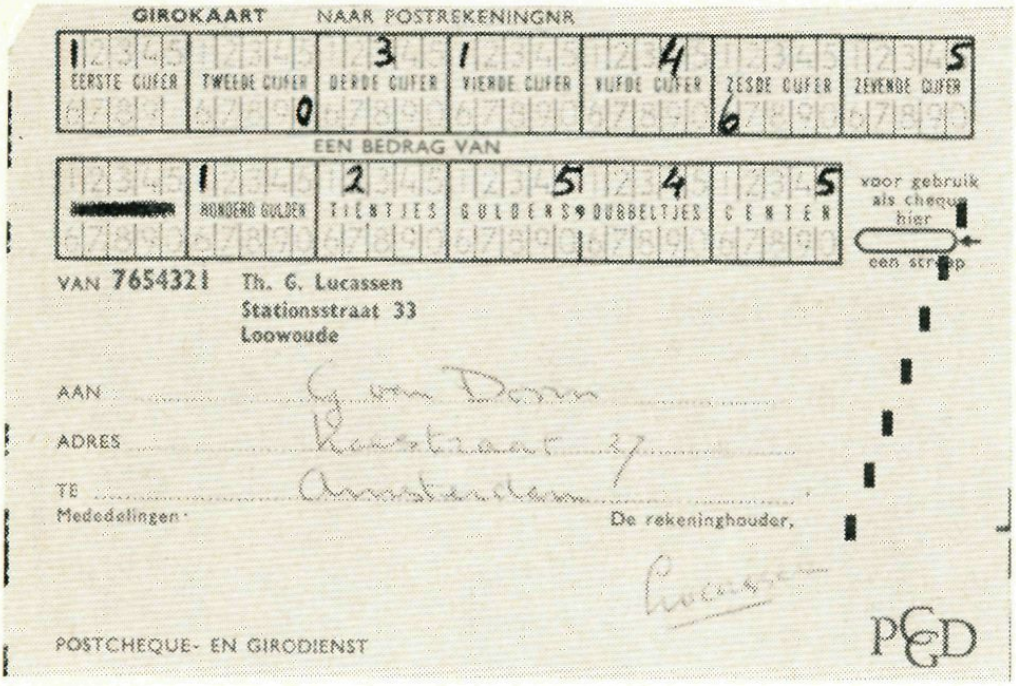


Fig. 4.

De gemeentelijke girodienst van Amsterdam doet onderzoekingen in een andere richting, namelijk het zogenaamde optisch lezen. Er bestaan al machines die menselijk handschrift kunnen lezen. Een aantal stortingskaarten (Fig. 5) is uitgedeeld en na inzending gelezen door een I.B.M.-1287 leesmachine. Deze kon 80% van de kaarten zonder meer lezen, 14% niet en 6% fout. Aan de cijfers worden namelijk wel enige eisen gesteld (Fig. 6) en het is de vraag of het publiek bereid is de nodige zorg aan het invullen te besteden. Bij opgeleid personeel kan het aantal fouten worden teruggebracht tot een paar promille.
Of de optische lezers in de nabije toekomst zoveel vervolmaakt zullen

worden dat ze geen fouten meer maken, of dat de merkroosterkaarten het zullen winnen, zal de toekomst moeten leren. Misschien zal de al genoemde prijsvraag, die natuurlijk in de eerste plaats gericht is op deskundigen, nog geheel nieuwe perspectieven openen.

Fig. 5

Aan de invulling van de bedragen en de rekeningnummers worden weinig eisen gesteld. U gelieve het op elk stortingsbiljet aangegeven cijferpatroon zo nauwkeurig mogelijk na te volgen. Met name dient het in ons land gebruikelijke dwarsstreepje door het cijfer 7 vermeden te worden, terwijl ook de cijfers 4 en 8 speciale aandacht vragen.

Voorbeeld:	goed: 4	fout: 4 4	cijfer 8
	„ : 7	„ : 7 7	bovenaan
	„ : 8	„ : 8	beginnen!

Als in te vullen bedrag kunt u een willekeurig bedrag kiezen. Bij ronde bedragen dienen in de vakjes voor dubbeltjes en centen *nullen* te worden ingevuld. Uw rekening/*etter* gelieve u als blokletter in te vullen. De cijfers van bedrag en rekeningnummer dienen *binnen* de vakjes te worden geplaatst, zodat de groene randen niet worden geraakt.

Fig. 6.

Wie meer wil weten over het boeiende bedrijf van de PCGD kan terecht in de MARKA-pocket nr 80: „Een halve eeuw postcheque- en girodienst".

Pythagoras

De man

Er was eens een man die Pythagoras heette. Hij woonde in Egypte en Klein-Azië en later in het zuiden van Italië, waar hij een school stichtte. Zijn leerlingen, de Pythagoreërs, moesten, voordat ze werden toegelaten, beloven dat ze de kennis die ze zouden verwerven, niet aan buitenstaanders zouden doorgeven. In de Pythagoreïsche leer stond het getal centraal: alle natuurverschijnselen waren te verklaren met eenvoudige gehele getallen. Zo dacht men dat het middelpunt van het heelal werd gevormd door het centrale vuur, met daaromheen draaiend de hemellichamen, op regelmatig toenemende afstanden. Getallen waren ook niet zo maar getallen, nee, elk getal had zijn eigen mystieke betekenis.

De stelling

De naam Pythagoras leeft voort in de beroemdste stelling van de vlakke meetkunde, waarvan twee dingen met zekerheid gezegd kunnen worden: De stelling is in ieder geval niet ontdekt door Pythagoras, maar is veel ouder, en is funest voor de Pythagoreïsche leer.

In een rechthoekige driehoek is de som van de kwadraten der rechthoekszijden gelijk aan het kwadraat van de hypotenusa.

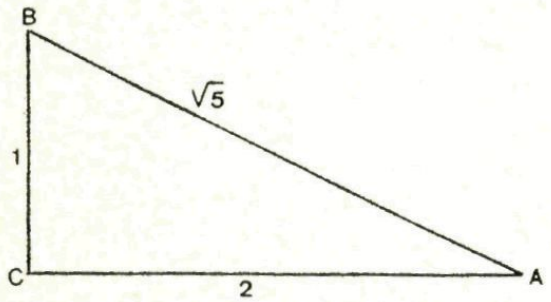


Fig. 7.

Als de rechthoekszijden 1 en 2 zijn, dan is het kwadraat van de hypotenusa $1 + 4 = 5$. De hypotenusa is dan $\sqrt{5}$ en dat is niet een eenvoudig geheel getal, zodat zelfs bij een eenvoudig „natuurverschijnsel" als een rechthoekige driehoek de leer niet opgaat. (Een enkele keer lukt het: als de rechthoekszijden 3 en 4 zijn is de hypotenusa 5 omdat $9 + 16 = 25$. Ook 5, 12, 13 is zo'n *Pythagoreïsch drietal.*)

Er zijn vele bewijzen voor de stelling van Pythagoras, in 1914 verscheen in Amsterdam een boekje van J. Versluys, getiteld: Zesennegentig bewijzen voor het theorema van Pythagoras.

Veel bewijzen gaan met behulp van het begrip oppervlakte, omdat je in plaats van „het kwadraat van een rechthoekszijde" ook kunt zeggen „het vierkant op een rechthoekszijde". Als je op beide rechthoekszijden en de hypotenusa een vierkant tekent krijg je . . . de omslagtekening van dit blad. De beide kleine vierkanten hebben samen een even grote oppervlakte als het grote, zoals je bv. kunt zien in de volgende figuur, bedacht door meneer Perigal in 1830.

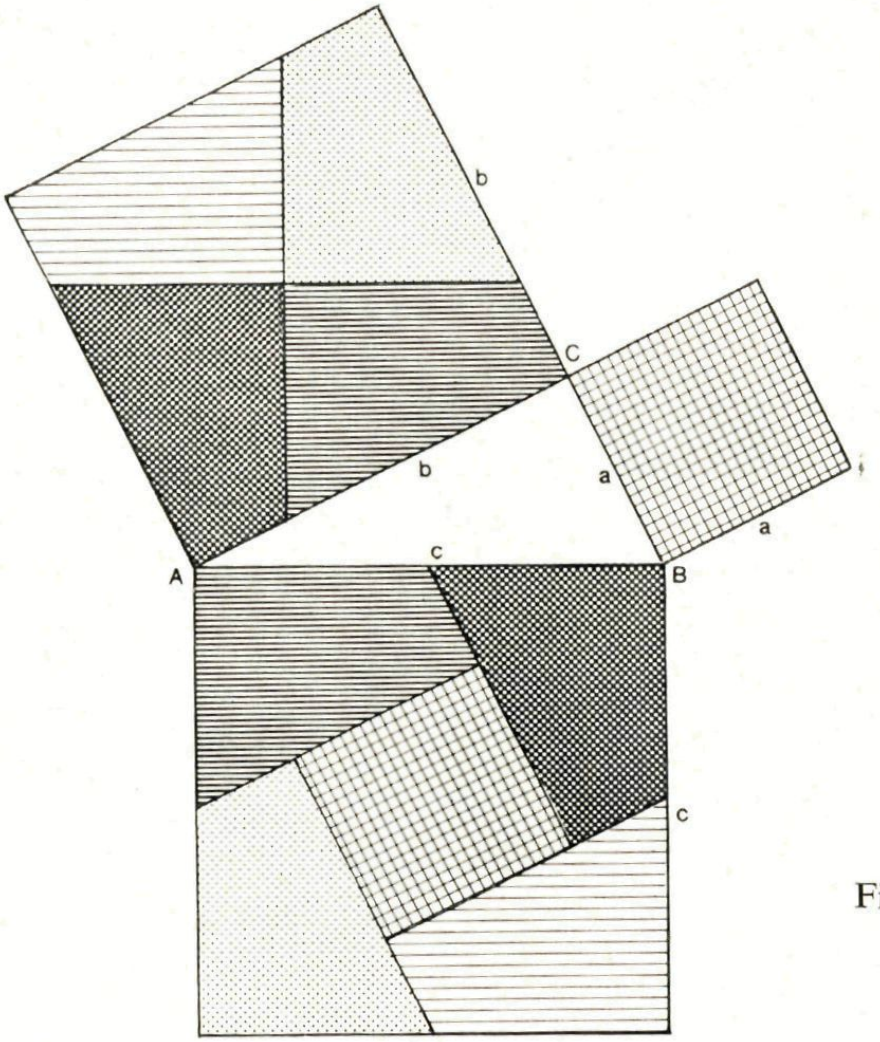


Fig. 8.

Ook uit het vignet dat je als bladvulling in dit tijdschrift kunt tegenkomen, is het bewijs van de stelling af te leiden. Zijn van $\triangle$ ABC de rechthoekszijden a en b en is de hypotenusa c, dan is de oppervlakte van het vierkant ABDE op twee manieren te schrijven. De zijde van het gestreepte vierkantje is b—a, de oppervlakte dus $(b - a)^2$. De oppervlakte van de vier congruente driehoeken is $4.\frac{1}{2}ab = 2ab$, die van het hele vierkant ABDE dus $(b - a)^2 + 2ab$ en dit moet gelijk zijn aan c^2, omdat de zijde van het vierkant c is.

Dus $(b - a)^2 + 2ab = c^2$ of

$$b^2 - 2ab + a^2 + 2ab = c^2$$
$$b^2 + a^2 = c^2$$

Het blad

Voor de nieuwe lezers mogen we behalve over de omslagtekening en het vignet nog wel iets meer vertellen over Pythagoras. Dat je dit tijdschrift leest betekent niet dat we van je verwachten dat je tot het bekende soort mensen met een „wiskundeknobbel" behoort. Overigens is het bestaan van die knobbel nog nooit behoorlijk aangetoond. Het betekent alleen dat je blijk geeft van enige interesse in zaken die verband houden met wiskunde. We zijn tevreden (en hopelijk ben je dat zelf ook) als je in elk nummer *iets* van je gading kunt vinden. Natuurlijk is het lezerspubliek gevarieerd en we proberen elk wat wils te geven. Om te voorkomen dat je je verslikt in een artikel duiden we de graad van moeilijkheid aan met seintjes, °, °° of °°°. Hoe meer nulletjes, hoe moeilijker (tenminste: dat denken we). In elk nummer staan 10 Denkertjes. De oplossingen hiervan kun je sturen naar redacteur *H. J. Engels, Muggenbroekerlaan 41, Roermond.* Onder de goede inzenders wordt een boekenbon verloot. Bovendien worden de behaalde punten van de eerste vier nummers opgeteld en krijgen de winnaars van deze ladderwedstrijd eveneens een boekenbon.

Tenslotte: Ben je tevreden over het gebodene: schrijf het de redactie, ben je ontevreden, schrijf dan zeker!

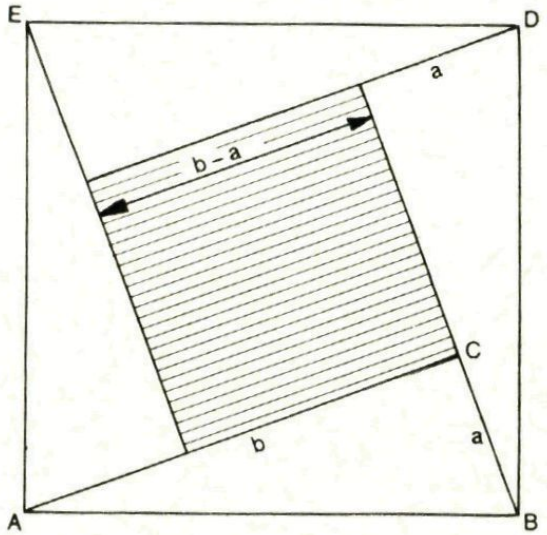


Fig. 9.

Pythagoras schreef veel over wiskunde dat men voor zijn eigen bestwil hoort te weten . . . We hebben geluk gehad dat hij maar zo kort geleefd heeft.

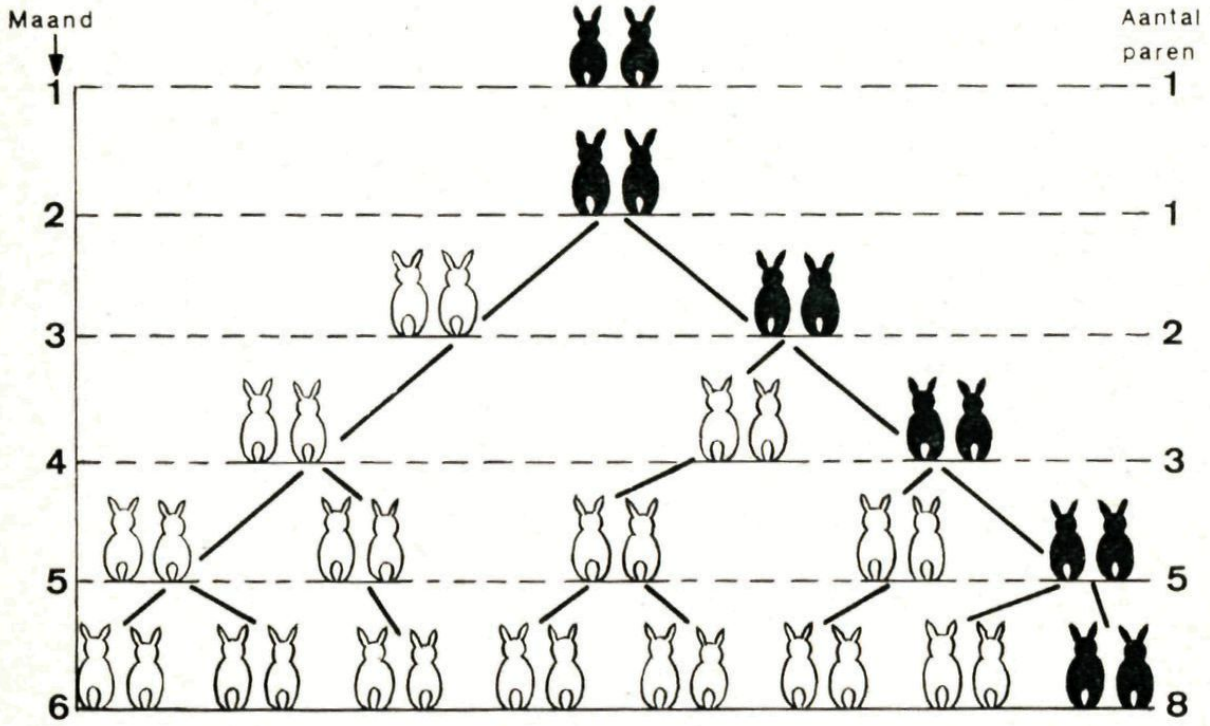
uit: Juf, daar zit een weduwe in de boom.

H. Hoving

°De konijntjes van Fibonacci

„Als een paar konijntjes elke maand een nieuw paar werpt en elk nieuwgeboren paar pas twee maanden na de geboorte hiermee begint, hoeveel konijnen zijn er dan van maand tot maand?"
Deze biologisch weinig realistische rekenopgave stamt van Leonardo van Pisa, bijgenaamd FIBONACCI (van filius Bonacii dwz.: zoon van Bonacci).
In Fig. 10 is de uitwerking van de opgave in beeld gebracht: de eerste maand is er één paar, de tweede maand hetzelfde paar, de derde maand hetzelfde paar plus een nieuwgeboren paar (wit). De vierde maand werpt het eerste paar weer een nieuw paar, maar het in de derde maand geboren paar slaat een maand over enzovoort. Ga dit na in het schema van Fig. 10:

Maand	1	2	3	4	5	6
aantal paren	1	1	2	3	5	8



De getallen die het aantal paren in de opeenvolgende maanden aangeven noemen we de getallen van Fibonacci. Of Fibonacci er zelf (rond 1200) iets bijzonders aan opmerkte is niet bekend. Drie eeuwen later merkt de wiskundige en astronoom Kepler op, dat elk getal uit de rij de som is van de twee voorafgaande. De volgende Fibonaccigetallen zijn dus: 13 21 34 55 89 enz. Deze rij heeft een aantal eigenschappen, waarop we in een volgend artikel zullen terugkomen.

In Fig. 11 is schematisch getekend hoe vele planten zich vertakken: Vanuit de hoofdstengel groeit bij een knoop een blad en een zijscheut. Terwijl de hoofdstengel doorgaat met het vormen van zijscheuten slaat de nieuwe zijscheut eenmaal over en begint dan ook met het doorlopend vormen van nieuwe zijscheuten. Dit proces is analoog aan de door Fibonacci verzonnen voortplantingswijze van konijnen. Tellen we het aantal knopen (of blaadjes) in elk volgend stadium van de ontwikkeling, dan krijgen we ook de getallen van Fibonacci en als we Fig. 11 op z'n kop houden, vertoont ze grote gelijkenis met Fig. 10.

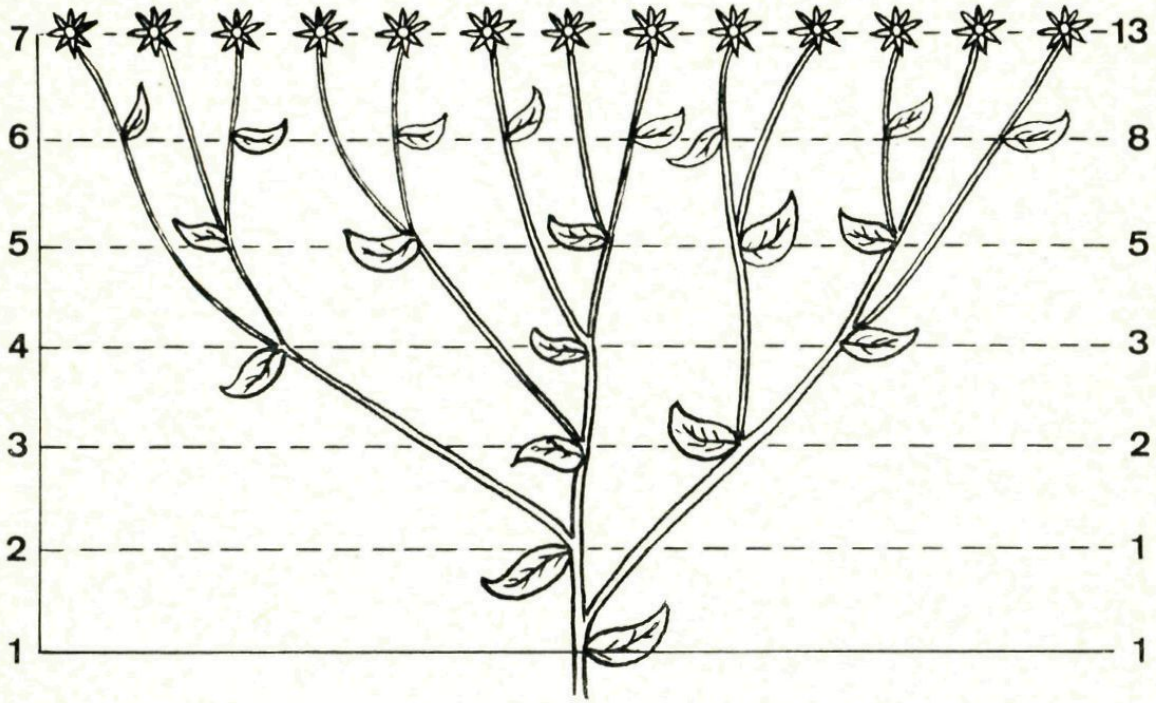


Fig. 11.

Oplossingen kunnen vóór 1 november worden ingezonden naar H. J. Engels, Muggenbroekerlaan 41, Roermond.

1. Een kwartcirkel ligt geheel binnen een gelijkzijdige driehoek, waarvan de zijden 6 centimeter lang zijn. Hoe groot kan de straal van die kwartcirkel ten hoogste zijn?
2. Uit een rechthoekige plaat karton met zijden van 50 cm en 70 cm moeten n gelijke vierkanten van maximale grootte gesneden worden; de snijlijnen moeten daarbij evenwijdig zijn met de zijden van de gegeven rechthoek. Hoe lang zijn de zijden van die vierkanten als $n = 15$ en hoe lang zijn ze als $n = 16$?
3. Een vijfhoek heeft drie gelijke hoeken van 116° en twee andere gelijke hoeken. Hij heeft drie zijden van 2 cm en twee andere gelijke zijden. Hoeveel verschillende vijfhoeken zijn met deze beschrijving in overeenstemming?

In de plantenwereld komen we de getallen van Fibonacci herhaaldelijk tegen. We geven hiervan nog een bijzonder aardig voorbeeld, dat we ontlenen aan een verhandeling van Prof. H. Coxeter.
De buitenkant van een ananas wordt gevormd door een aantal zeshoekige schubben. Deze verlopen in spiralen van onder naar boven. We kunnen drie richtingen onderscheiden waarin de spiralen lopen: in Fig. 12a zijn ze met pijlen aangegeven.

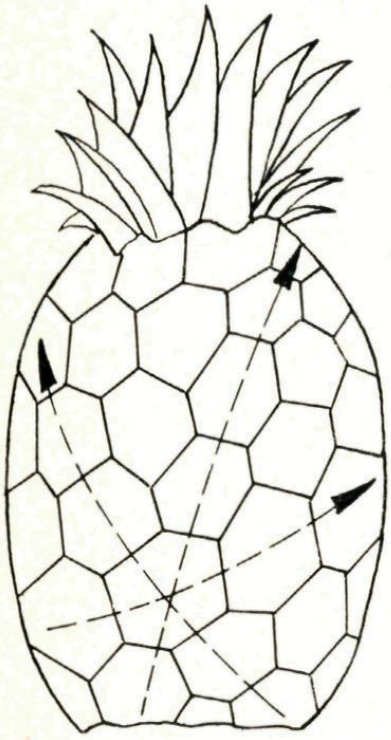
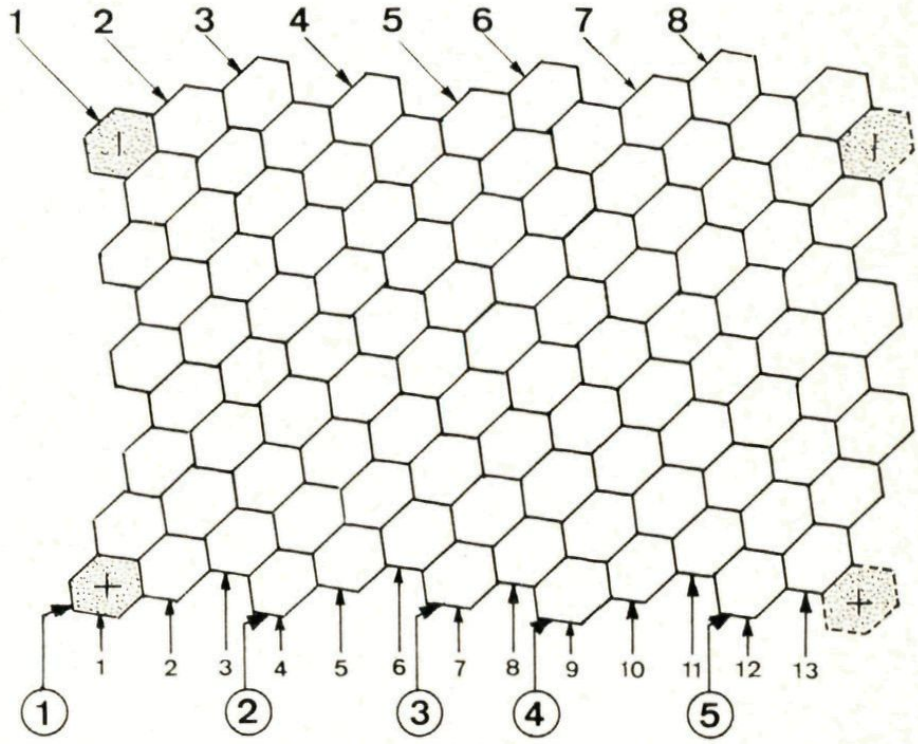


Fig. 12a.

Fig. 12b.



Maken we nu een uitslag van de buitenkant van de ananas, dan ontstaat Fig. 12b: Links onder en boven is een schub gearceerd: dit zijn dezelfde schubben die we ook rechts onder en boven vinden.
Tellen we nu het aantal rijen (op de ananas waren dit de spiralen), die onder een kleine hoek naar rechts boven verlopen dan zijn dit er 5. Verder zijn er 8 naar links boven verlopende rijen en 13 steil naar rechts boven verlopende rijen. En 5, 8 en 13 zijn getallen van Fibonacci. (zie ook de binnenzijde van het omslag achterin.)
Het volgende merkwaardige gedachtenspinsel zal misschien muziekliefhebbers aanspreken: Een chromatische toonladder telt 13 tonen (op de piano corresponderend met de witte en zwarte toetsen van bv. C t/m C^1).

Het aantal witte toetsen is 8. Daarvan vormen er 5 de pentatonische toonladder waarin veel oude volksliedjes geschreven zijn. Drie daarvan vormen een harmonische drieklank. Twee vormen een welluidende terts.

Gaan we nu uit van de G, dan kunnen we het bovenstaande tot een organisch geheel samenvoegen zoals in Fig. 13. En het schema van Fig. 11 en van Fig. 13 is hetzelfde. Frank Land aan wie we dit voorbeeld danken, merkt erbij op: „het is een luchthartig voorbeeld van het systematisch bijeenzetten van uiteenlopende gegevens. Het vinden van zulke patronen is wiskundig erg bevredigend."

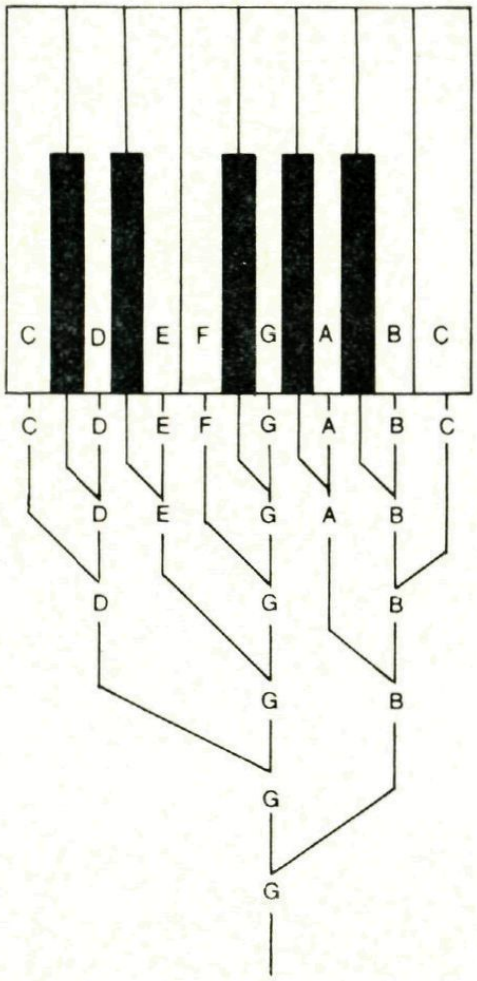


Fig. 13

4. Voor welke waarden van p is de volgende bewering waar: er bestaat een driehoek met een omtrek van p cm, waarbinnen een lijnstuk met een lengte van 10 cm getekend kan worden.
5. Gegeven is dat a, b, c positieve getallen zijn en dat $ab + ac + bc = 1$. Bewijs dat abc kleiner is dan 1.
6. Kan het produkt van vier opvolgende natuurlijke getallen het kwadraat van een natuurlijk getal zijn? (Gemotiveerde oplossing gevraagd).

6.

°Schipper mag ik overvaren? JA of NEE? Moet ik dan ook geld betalen? JA of NEE?

Ontelbare malen moeten we in ons leven een keuze maken: Zullen we uitgaan of thuisblijven? Zal ik aan mijn werk gaan of eerst wat gaan knutselen? Zal ik haar voor zaterdag vragen of niet? Staat het verkeerslicht op rood? Kan ik deze straat inrijden? Zal ik verder gaan met het lezen van dit artikel?

JA of NEE?

Niet elke beslissing vraagt een keuze uit twee mogelijkheden. Maar wie er op let merkt op hoe vaak het ja of nee ons dwingt te kiezen.

Er zijn ook tweetallen, die gelijkwaardig zijn met het paar „ja of nee", bijvoorbeeld: licht aan of licht uit, kraan open of kraan dicht, droog weer of regen, + of —, 1 of 0.
Het paar 1 of 0 wordt dikwijls gekozen als equivalent voor ja of nee. Of omgekeerd wordt een „ja of nee-situatie" gebruikt om de getallen 1 of 0 voor te stellen. Een computer doet dat bijvoorbeeld. Het ferrietringetje *wel* magnetisch („ja") betekent het getal 1, het ferrietringetje *niet* magnetisch („nee") betekent 0. Zet vijf ferrietringetjes op een rijtje en je kunt het „getal" wel-wel-niet-wel-niet vormen en schrijf daar dan maar voor 11010 dan is dat overzichtelijker en je kunt er mee rekenen. Ferrietringetjes worden gebruikt om getallen te „onthouden" in het „geheugen" van de computer. Wat heb je aan getallen, die enkel uit enen en nullen bestaan? Dat gaan we eens bekijken aan Fig. 14. In deze figuur zie je een *keuzeboom*. De boom vertakt zich regelmatig en op ieder vertakkingspunt kun je kiezen naar boven of naar beneden te gaan. Naar boven is nul, naar beneden is 1. Elk eindpunt aan de rechterkant van de figuur (uiteinde van een kleinste takje) kun je bereiken door vier maal een beslissing te nemen.
Bij ieder der eindpunten is de volgorde der keuzen geschreven. Dat is gebeurd met getallen van vier cijfers, nullen of enen. Let er even op, dat de bovenste acht alle met een nul beginnen en de onderste acht met een 1. Kijk bijvoorbeeld maar naar het vijfde en het dertiende getal. Bij 5 staat 0101 en bij 13 staat 1101.
Voor je verder leest moet je eerst eens (op een groter formaat) deze keuzeboom overnemen en dan overal met een vijfde keuze uitbreiden.

Je krijgt dan rechts 32 getallen van vijf cijfers. Van boven naar beneden gelezen:

00000 → 0	01000 → 8	10000 → 16
00001 → 1	01001 → 9	10001 → 17
00010 → 2	01010 → 10	10010 → 18
00011 → 3	01011 → 11	enz.
00100 → 4	01100 → 12	Als je de regelmaat ontdekt hebt,
00101 → 5	01101 → 13	kun je ze wel verder opschrijven.
00110 → 6	01110 → 14	
00111 → 7	01111 → 15	

Je zult nu wel langzamerhand bemerkt hebben, dat je deze uit nullen en enen bestaande „keuzegetallen" kunt gebruiken als een code voor de natuurlijke getallen. Dat wordt nog duidelijker als je (zoals we dat gewend zijn bij het opschrijven van getallen) de nullen aan de linkerkant weglaat. Je ziet dan bij de oorspronkelijke keuzeboom van Fig. 14 én bij de uitgebreide dezelfde getallen optreden:

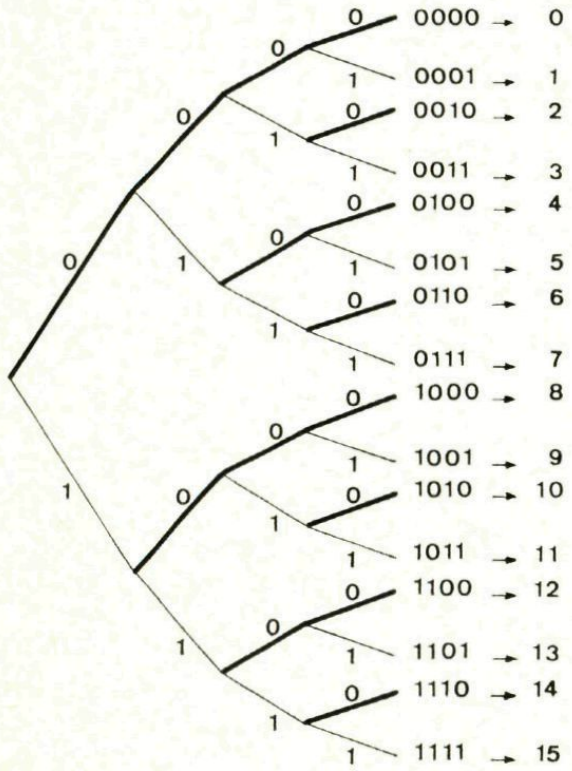


Fig. 14.

0 → 0	1000 → 8
1 → 1	1001 → 9
10 → 2	1010 → 10
11 → 3	1011 → 11
100 → 4	enz.
101 → 5	
110 → 6	
111 → 7	

De uit nullen en enen bestaande getallen noemen we *binaire* getallen. Kunnen we ze echter wel als getallen gebruiken? Kunnen we er mee optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen?
Inderdaad. Dat kan. In dit artikel zullen we laten zien hoe het optellen

in zijn werk gaat. Let eerst eens op de bijzondere getallen, die aan tien, honderd, duizend enz. doen denken. Ze mogen natuurlijk niet zo uitgesproken worden. Je moet ze maar lezen door gewoon de cijfers op te noemen. 1000 lees je dus: één nul nul nul.

10 → 2	100 → 4	1000 → 8
1 → 1	10 → 2	110 → 6
——— +	——— +	——— +
11 → 3	110 → 6	1110 → 14

Tot zover gaat dat allemaal mooi met het optellen. Maar nu

10 → 2
11 → 3
——— +
? → 5

In het overzicht hierboven zie je dat het binaire getal voor 5 moet zijn 101. Hoe vinden we dat als resultaat van het optellen? We moeten bij de binaire getallen blijkbaar zeggen 1 + 1 = 10. Even controleren:

110 → 6	111 → 7
100 → 4	1 → 1
——— +	——— +
1010 → 10	1000 → 8

Die tweede optelling gaat zo:	1 + 1 = 10	0 opschrijven 1 onthouden
Dan weer	1 + 1 = 10	0 opschrijven 1 onthouden
En tenslotte	1 + 1 = 10	10 opschrijven

Hoe kun je nu, zonder een keuzeboom te tekenen, vinden voor welk getal 1001101 de code is? Je moet daarvoor de waarde van elk der enen kennen. Kijk:

1 → 1	10000 → 16 = 2^4
10 → 2 = 2	100000 → 32 = 2^5
100 → 4 = 2^2	1000000 → 64 = 2^6
1000 → 8 = 2^3	10000000 → 128 = 2^7

Je ziet, dat de bijzondere getallen juist de machten van twee zijn, zoals ze bij de getallen in de gebruikelijke schrijfwijze juist de machten van 10 zijn. We zeggen wel, dat de binaire getallen een getalstelsel vormen

met basis 2. Daarom heten ze ook binair, want het Latijnse woord *bini* betekent *telkens twee*.
Hoe kleiner men de basis neemt, hoe minder cijfersymbolen men nodig heeft. Twee is de kleinst mogelijke basis. (Je kunt ook eens experimenteren met het drietallig stelsel, in Fig. 15 is een keuzeboom getekend met telkens keuze uit drie mogelijkheden. De gebruikte symbolen zijn 0, 1 en 2.)

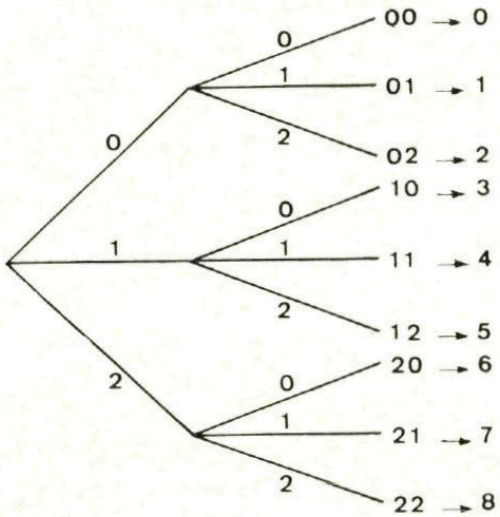


Fig. 15.

Wat is nu de waarde van 1001101?
De wedervraag moet luiden: Over welk stelsel heb je het?
Natuurlijk: voordat je de waarde van een getal kunt bepalen moet je weten in welk stelsel het geschreven is. We zullen daarom het stelsel aangeven als index bij het getal, bv.

11_{10} = elf
maar 11_2 = drie!

De waarde van 1001101_2 is 77_{10}, immers:

$$\begin{array}{rcr} 1000000_2 & = & 64_{10} \\ 1000_2 & = & 8_{10} \\ 100_2 & = & 4_{10} \\ 1_2 & = & 1_{10} \\ \hline 1001101_2 & & 77_{10} \end{array}$$

Omgekeerd kan men 149_{10} binair schrijven door te bedenken dat $149_{10} = 128_{10} + 16_{10} + 4_{10} + 1_{10} = 2^7{}_{10} + 2^4{}_{10} + 2^2{}_{10} + 2^\circ{}_{10} = 10010101_2$
Een eenvoudiger methode om een decimaal getal om te zetten in een binair wordt beschreven in „Een knikkerteller".

°Een knikkerteller

I. Het binaire stelsel, waarmee je kennis gemaakt hebt in „Schipper mag ik overvaren?", is vooral belangrijk omdat het toegepast kan worden bij computers. Aan de hand van een knikkerteller willen we nu demonstreren hoe een apparaat, waarin de keuzemogelijkheid 0 of 1 mechanisch vertaald is, gebruikt kan worden om een getal binair weer te geven.

II. Decimaal herleiden tot binair.

Er is een handige methode om een decimaal getal te herleiden tot een binair getal. De juistheid van de methode kun je zelf nagaan.

11 kunnen we als volgt herleiden:

$$\begin{aligned} 11 : 2 &= 5, \text{ rest } 1 \\ 5 : 2 &= 2, \text{ rest } 1 \\ 2 : 2 &= 1, \text{ rest } 0 \\ 1 : 2 &= 0, \text{ rest } 1 \longrightarrow 10\ 1\ 1_2 = 11_{10} \end{aligned}$$

Het is voor het vervolg van belang dat we begrijpen wat hier gebeurt. In het getal 1011_2 geven de eerste drie cijfers de acht-, vier- en tweetallen aan, dus alle tweevouden. Is het laatste cijfer een 1, dan hebben we hier te maken met een tweevoud + 1, m.a.w. bij deling door 2 houden we een rest 1 over (bovenste regel). Het quotient 5 (overeenkomend met de eerste drie cijfers 101_2 van het binaire getal) behandelen we weer op dezelfde manier, totdat het quotient nul is.

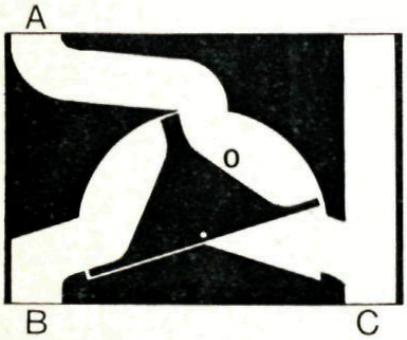


Fig. 16.

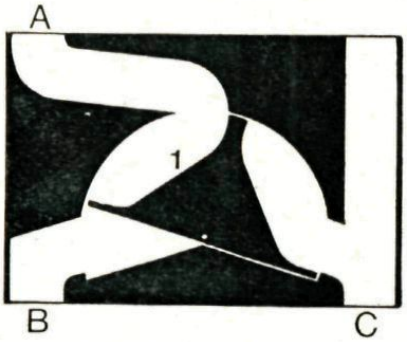


Fig. 17.

III. *De tweedeler.* Bij rekentuigen (computers) gebruikt men ook de genoemde methode om te tellen. De schakeling die een aantal (stroomstootjes) door 2 kan delen en bovendien kan onthouden of de rest 0 of 1 is, heet een tweedeler. De werking kunnen we demonstreren met een apparaat dat we zelf kunnen maken (Fig. 16). Het is een rechthoekig

kastje waarin kanalen zijn uitgespaard (wit), waar doorheen knikkers kunnen rollen. Als het kastje vertikaal staat zal de binnenin gemonteerde wip twee stabiele toestanden kennen, aangegeven in de Fig. 16 en 17. Komt in Fig. 16 een knikker bij A binnen, dan zal deze aan de rechterkant op de wip rollen en de wip doen omslaan in de stand van Fig. 17 en daarna bij C wegrollen. De volgende knikker rolt links op de wip en kiest uitgang B, waarbij de wip weer in de oorspronkelijke stand staat. Letten we op de openingen A en B, dan is dit model

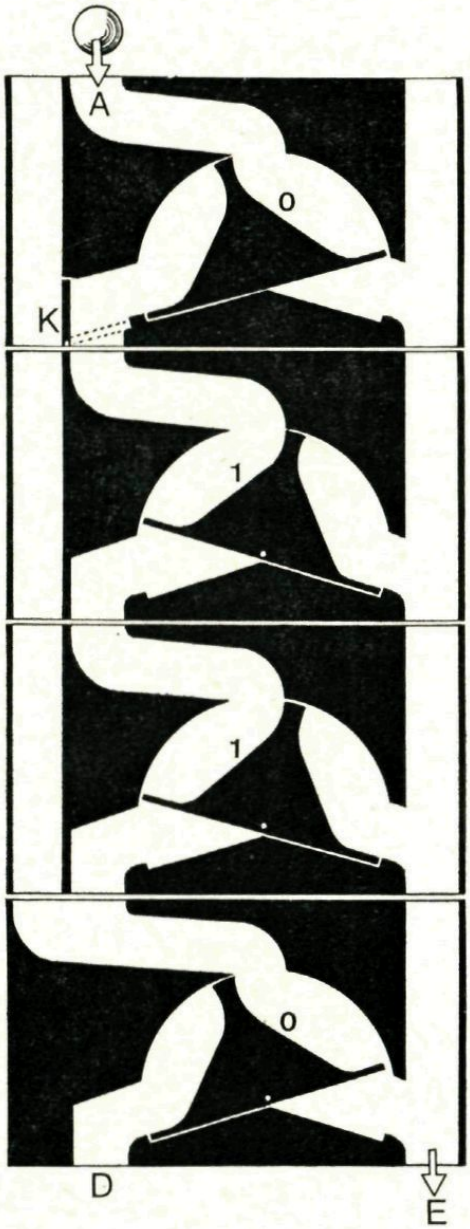


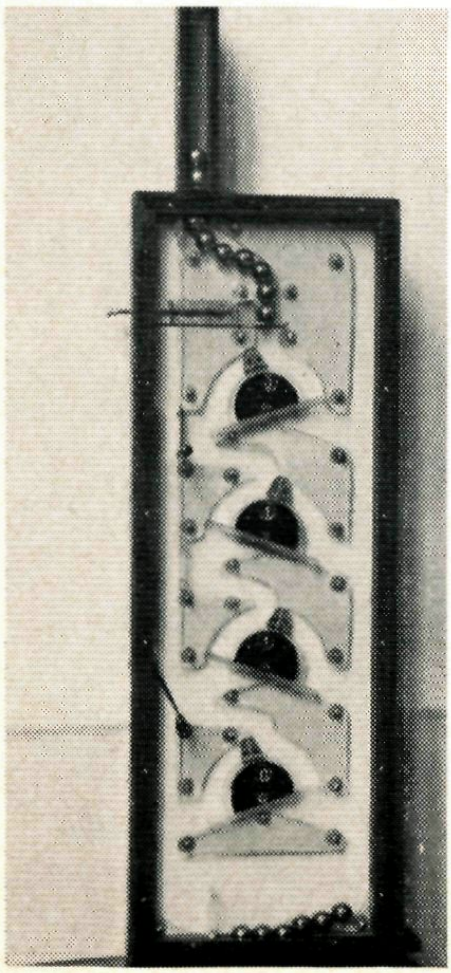
Fig. 18.

een tweedeler. Van ieder tweetal knikkers dat bij A binnenkomt, vertrekt er één bij B. Bovendien staan op de achtergrond de cijfers 0 en 1 geschreven, die beurtelings door de wip bedekt worden, zodat ook de rest na deling door 2 wordt aangegeven.

IV. *De knikkerteller*. Het logische vervolg is een aantal tweedelers achter (hier: onder) elkaar te schakelen, waarna we kunnen tellen.

In Fig. 18 is zo'n knikkerteller te zien nadat 6 knikkers zijn geteld. Je ziet het getal zes binair weergegeven: 0110. Door de bovenste tweedeler zijn deze verdeeld in een drietal dat links naar de volgende tweedeler werd geleid en een drietal dat rechts in een soort stortkoker via E werd afgevoerd. De rest d.w.z. de stand van de wip, is nul. De volgende tweedeler stuurt van de drie knikkers er één door en voert er twee via E af. De rest is 1. Je ziet dat de methode uit II op de voet wordt gevolgd. De knikkers moeten met tenminste zoveel tussenpoos bij A worden ingevoerd dat de bovenste tweedeler ieder exemplaar volledig kan verwerken. De tweedelers verwerken een bepaalde knikker na elkaar. Men spreekt daarom van een asynchrone (niet gelijktijdige) teller. Het grootste aantal dat met deze vier tweedelers geteld kan worden is 1111_2 ($= 15_{10}$). De zestiende knikker doorloopt alle wipjes aan de linkerkant en verlaat het toestel bij D. Hier volgt nog een overzicht van de achtereenvolgende standen.

decimaal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
zuiver	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
binair	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0



Een knikkerteller volgens het beschreven principe. (De cijfers 0 en 1 staan hierbij op de wipjes zelf).

°°V. *De decimaal binaire code*. Een nadeel is dat binaire getallen meestal lang zijn en moeilijk te herkennen. Ons spraakgebruik is grotendeels ingesteld op het decimale stelsel, zodat bijvoorbeeld de binaire code 110101101100 weinig verband lijkt te hebben met het getal drieduizend vierhonderd zes en dertig. Het decoderen is moeilijk. Dit wordt ondervangen door een systeem dat wel in het decimale stelsel werkt, maar ieder cijfer in binaire code aangeeft. Deze decimaal binaire code wordt ook wel in computers toegepast. 3436 wordt dan 0011-0100-0011-0110, 9018 wordt 1001-0000-0001-1000.
De knikkerteller is ook voor dit systeem geschikt te maken. Eerst weer een gedeelte van een lijstje.

decimaal	7	8	9	10	11	12
	1	0	1	0	1	0
	1	0	0	0	0	1
decimaal	1	0	0	0	0	0
binair	0	1	1	0	0	0
	0	0	0	1	1	1
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0

Het verschil zit in de overgang van negen naar tien. Na de tiende knikker moeten de bovenste vier tweedelers weer op nul staan. Bovendien moet deze knikker worden doorgegeven naar de volgende teller voor de tientallen (aangenomen dat we over een tweede teller beschikken). We bereiken dit door in de bovenste tweedeler een klepje K aan te brengen, dat, door middel van stangetjes aan de achterkant, bediend wordt door de onderste wip. Staat deze wip op 0, dan staat de klep vertikaal. Tot en met de zevende knikker werkt alles normaal. Na de achtste knikker heeft de klep de toegang tot de tweede tweedeler afgesloten (de gestippelde stand). De negende knikker treedt rechts uit de bovenste tweedeler. De tiende knikker zet deze tweedeler weer op nul, heeft toegang tot het kanaal uiterst links en gaat direkt naar de onderste tweedeler. De onderste tweedeler wordt op 0 gezet (klep weer vertikaal, alle delers staan nu op 0) en de tiende knikker treedt bij D uit op weg naar de volgende teller. Het afwijkende model van de bovenste en de onderste tweedeler is hierbij verklaard.
Knutselaars die de smaak te pakken hebben gekregen, aan de slag! Andere ontwerpen van dezelfde aard (bijvoorbeeld een model dat twee ingestelde binaire getallen kan optellen) zijn welkom bij de redaktie.

7. Hoeveel nieuwe snijpunten kunnen er ten hoogste ontstaan indien alle zijden van een honderdhoek verlengd worden?
8. Gegeven is, dat x een natuurlijk getal is en dat $x^{100} - 2$ en $x^{101} - 69$ allebei veelvouden van 73 zijn. Bewijs, dat $x + 2$ een veelvoud van 73 is.
9. Weer is gegeven, dat x een natuurlijk getal is. Bewijs nu, dat de breuk
$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$$
onvereenvoudigbaar is.
10. Een gegeven driehoek met hoeken van 30°, 60° en 90° moet verdeeld worden in vier driehoekige stukken. Een van die stukken moet een gelijkzijdige driehoek zijn. De andere stukken zijn gelijkvormig met de gegeven driehoek en verschillend van grootte. Hoe moet de verdeling geschieden?

°°Getallenlichamen

Het woord lichaam ben je in de wiskunde zeker wel tegen gekomen in de stereometrie. Een kubus, een piramide, een prisma worden daar lichamen genoemd. Ook in de algebra spreekt men tegenwoordig over lichamen. Om te begrijpen, wat daarmee bedoeld wordt, moeten we het eerst hebben over verschillende soorten getallen en hun eigenschappen.

Wanneer je telt 1, 2, 3, . . ., enz. dan noem je de *natuurlijke* getallen. Tel je twee natuurlijke getallen op, dan is hun som weer een natuurlijk getal. Bij het optellen van natuurlijke getallen treden we dus niet buiten de *verzameling* van deze getallen. We zeggen, dat de verzameling der natuurlijke getallen *gesloten* is ten aanzien van het optellen. Ten aanzien van het aftrekken is dat echter niet zo, want zodra we $3 - 5$ willen berekenen, moeten we buiten de verzameling der natuurlijke getallen treden. Door het invoeren van de negatieve getallen en het getal nul krijgen we een nieuwe getallenverzameling, die ook voor het aftrekken gesloten is. Maar zodra we gaan delen, blijkt het, dat we ook weer buiten deze verzameling (der gehele getallen) moeten treden. Door het toevoegen van de gebroken getallen $\frac{p}{q}$, waarbij p en q ($q \neq 0$) gehele getallen zijn, wordt een verzamelingver kregen, die zowel

voor het optellen, als voor het vermenigvuldigen, het aftrekken en het delen (met uitzondering van het delen door nul) gesloten is. Deze verzameling heet die der *rationale* getallen. Zijn dus a en b twee rationale getallen, dan zijn

$$a + b,\ a - b,\ a.b,\ \frac{a}{b}(b \neq 0)$$

dat ook. We kunnen ook zeggen, dat in de verzameling der rationale getallen steeds een getal x is te vinden zo, dat

$a + b = x,\ a + x = b,\ b + x = a,$

$a.b = x,\ a.x = b\ (a \neq 0)$ en $b.x = a\ (b \neq 0)$.

Het getal x, dat voldoet aan $a + x = 0$ heet het tegengestelde van a en we schrijven daarvoor $x = -a$. Het getal x, dat voldoet aan $a\ .\ x = 1$, heet het omgekeerde van a en we schrijven dan $x = \frac{1}{a}$ of ook wel $x = a^{-1}$.

Voor de rationale getallen geldt:

Het is een getallenverzameling, die gesloten is ten aanzien van het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen (behalve door 0) terwijl nog de volgende eigenschappen voor deze operaties gelden:

1. $a + b = b + a;\ a.b = b.a$ (commutatieve eigenschappen)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
   $(a.b).c = a.(b.c)$ (associatieve eigenschappen)
3. $a\,(b + c) = ab + ac$ (distributieve eigenschap)

De verzameling van de rationale getallen vormt een voorbeeld van een lichaam in de algebra.

De verzamelingen der natuurlijke en der gehele getallen zijn geen lichamen.

Ook buiten de rationale getallen zijn er echter nog wel getallenverzamelingen, die lichamen zijn. Een bekend voorbeeld daarvan is de verzameling der getallen $a + b\sqrt{2}$, waarin a en b rationale getallen zijn. Tot deze verzameling behoren bijvoorbeeld:

$2 + \sqrt{2},\ 5 - 3\sqrt{2},\ 8 + \frac{1}{2}\sqrt{2},\ 3\frac{1}{4},\ 0,\ \sqrt{2}$ enz.

Het is gemakkelijk te controleren, dat deze verzameling gesloten is ten aanzien van het optellen, aftrekken en vermenigvuldigen. Bijvoorbeeld:

$$(2 + \sqrt{2}) + (5 - 3\sqrt{2}) = 7 - 2\sqrt{2}$$
$$(2 + \sqrt{2}) - (5 - 3\sqrt{2}) = -3 + 4\sqrt{2}$$
$$(2 + \sqrt{2})\,(5 - 3\sqrt{2}) = 4 - \sqrt{2}$$

Maar ook voor het delen is dat het geval. Ga maar na:

$$\frac{2+\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}} \times \frac{5+3\sqrt{2}}{5+3\sqrt{2}} = \frac{16+11\sqrt{2}}{25-18} = \frac{16}{7} + \frac{11}{7}\sqrt{2}$$

Ook is het niet moeilijk in te zien, dat de hierboven genoemde commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen gelden voor de operaties in deze verzameling.

Het lichaam der getallen $a + b\sqrt{2}$ heeft dat der rationale getallen als deelverzameling.

Vraag: Is de verzameling der getallen $a + b\sqrt{3}$, waarin a en b rationaal zijn een lichaam?

Oplossingen van prijsvragen uit jaargang 7

Prijsvraag 1

Prijswinnaars van de eerste vraag: Maurice Tjin-A-Djie, Tuberoosstraat 2, Paramaribo en mej. M. D. van Eijk, Adrianalaan 169, Rotterdam 12 (elk *f* 20,—).

In de tweede vraag werd het aantal oplossingen gevraagd voor een rechthoek van 4 bij 5 hokjes; bedoeld was het aantal oplossingen van een rechthoek van 4 bij 25 hokjes. Niettemin vond men toch de tweede vraag moeilijker dan de eerste. De prijs is gewonnen door Kees Schep, Koningin Julianastraat 58, Krimpen aan de Lek (*f* 10,—).

Prijsvraag 2

Deze tweede prijsvraag heeft de gedachten het meest in beslag genomen, gezien het grote aantal oplossingen. Bovendien heeft men ons verteld, dat ergens in Frankrijk een lezer (zonder succes) verwoede pogingen heeft gedaan om een computer oplossingen te laten produceren. En een Delfts student was pogingen aan het doen ingenieur te worden door een stadsautobus te ontwerpen met een door deze prijsvraag geïnspireerde en zeer ongebruikelijke vorm, die de nauwe straatjes en scherpe bochten in Delft gemakkelijk zou kunnen „nemen".

Toch bleek eenvoud ook hier weer kenmerk van het ware te zijn. Een groot aantal oplossers ging uit van de grondvorm uit figuur 1, waarvan de oppervlakte door variatie van de lengte x gemaximaliseerd werd. De maximale oppervlakte blijkt in dat geval te zijn $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}$ of wel 2,207.

De prijzen werden gewonnen door Dick Voorthuis, Walkade 49, IJsselstein en Steven van Kervel, Veldkamp 27, Harderwijk (elk *f* 20,—) en Jaap Neijzen, Sophialaan 45, Amsterdam (*f* 10,—).

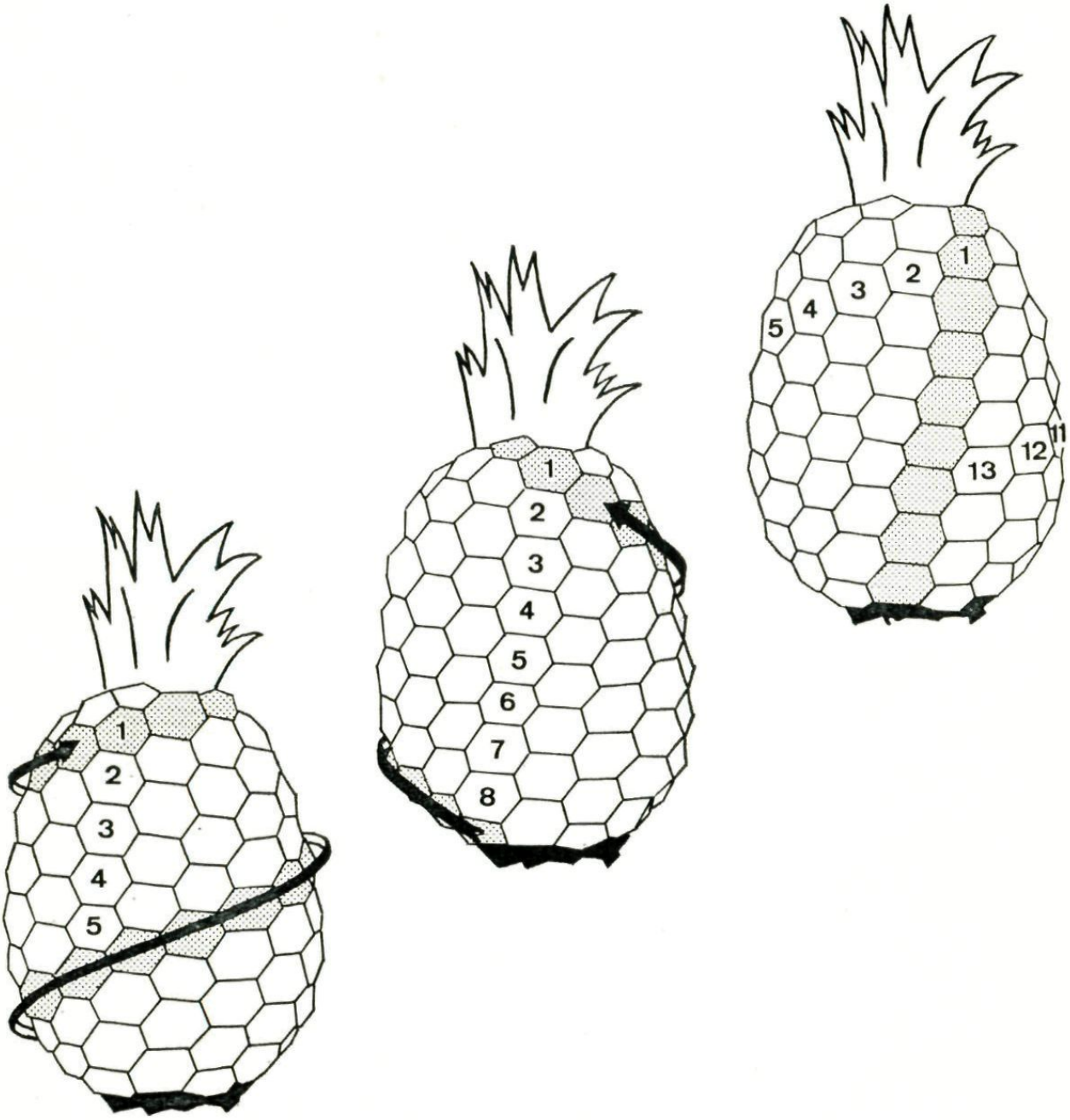
Prijsvraag 3

Bij vraag a kon het gestelde doel bereikt worden met drie cirkels. Wij reiken een prijs van *f* 20,— uit aan Jan Brinkhuis, Overwaard 9, Gorinchem.

Bij vraag b was het gevraagde minimum 78 en het gevraagde maximum 80. Wegens het grote aantal inzendingen, reiken we hier twee prijzen van *f* 20,— uit, en wel aan Tonny van den Berg, Wielstraat 5, Leeuwen Beneden en aan J. Cuppen, Leunseweg 2, Venray.

Bij vraag c moest men voor de dag komen met twee gelijkvormige driehoeken, waarvan de zijden 1, k, k^2 en k, k^2, k^3 zijn (bijvoorbeeld 1, 1,5, 2,25 en 1,5, 2,25, 3,375) of daarmee evenredig zijn. De twee prijzen van *f* 20,— elk werden gewonnen door Niek Rakhorst, Haerstraat 23, Oldenzaal en Bauke Hiemstra, Prof. ter Veen-Lyceum, Emmeloord.

Computer	Uit het Lat., *computare* = *berekenen*
Index	Uit het Lat., *index* = *aanwijzer*
Mutatie	Uit het Lat. *mutatio* = *verandering*
Penta	Uit het Grieks, *penta* = *vijf*



Oplossingen van de Denkertjes voor 1 november 1968 inzenden onder vermelding van leeftijd, klas en schooltype.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

H. J. ENGELS, Muggenbroekerlaan 41, Roermond.
BRUNO ERNST, Daniël Marotstraat 184, Breda.
DRS. A. B. OOSTEN, Turftorenstraat 11A, Groningen.
A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.
G. A. VONK, Fahrenheitstraat 688, Den Haag.

Artikelen en problemen kunnen naar één van de redacteuren worden gestuurd.
Oplossingen van *Denkertjes* kunnen naar het eerste adres worden gezonden, oplossingen van andere problemen naar het vierde adres.
Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, *f* 2,50 per jaargang. Voor anderen *f* 4,—.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff N.V., Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.