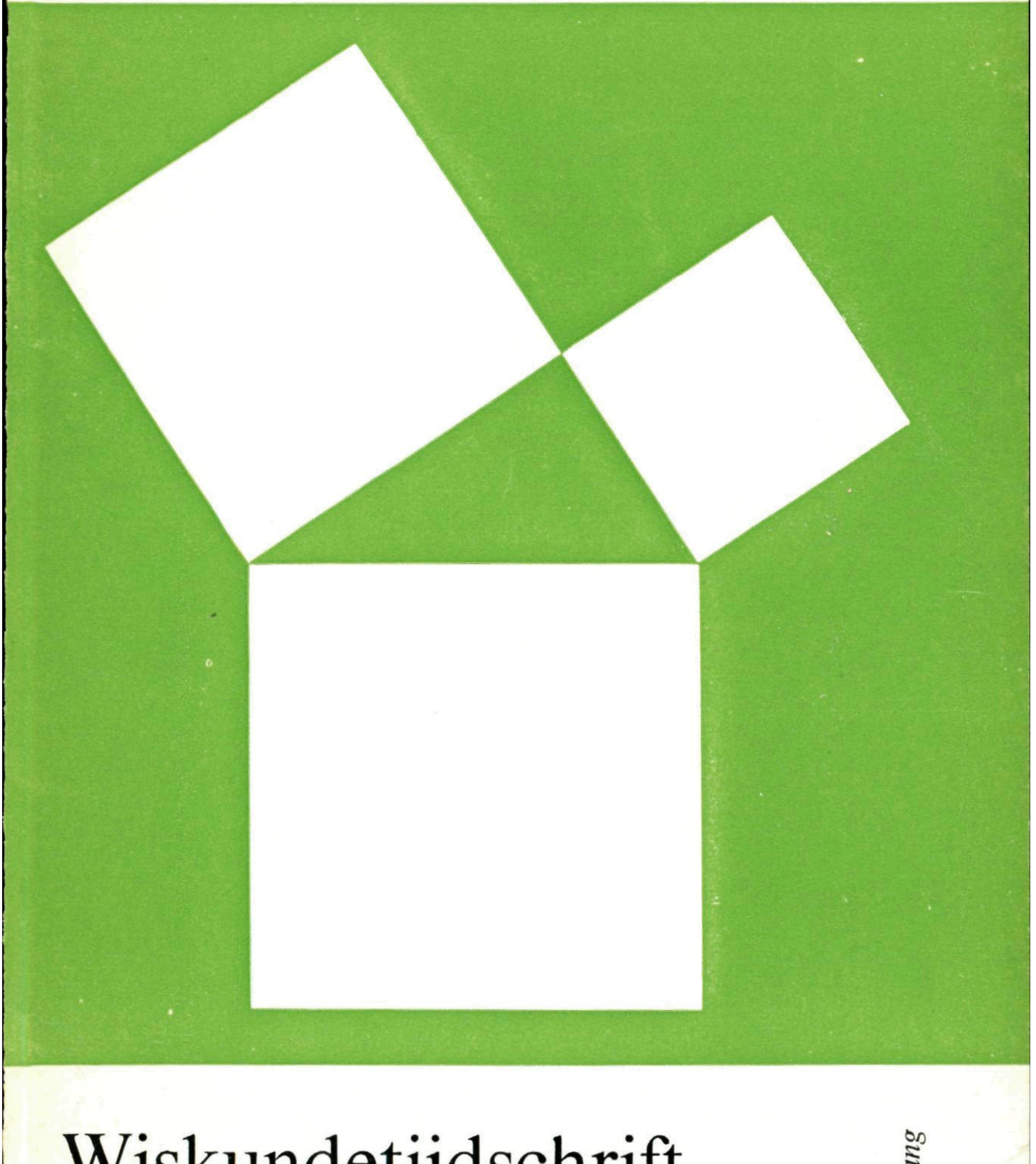
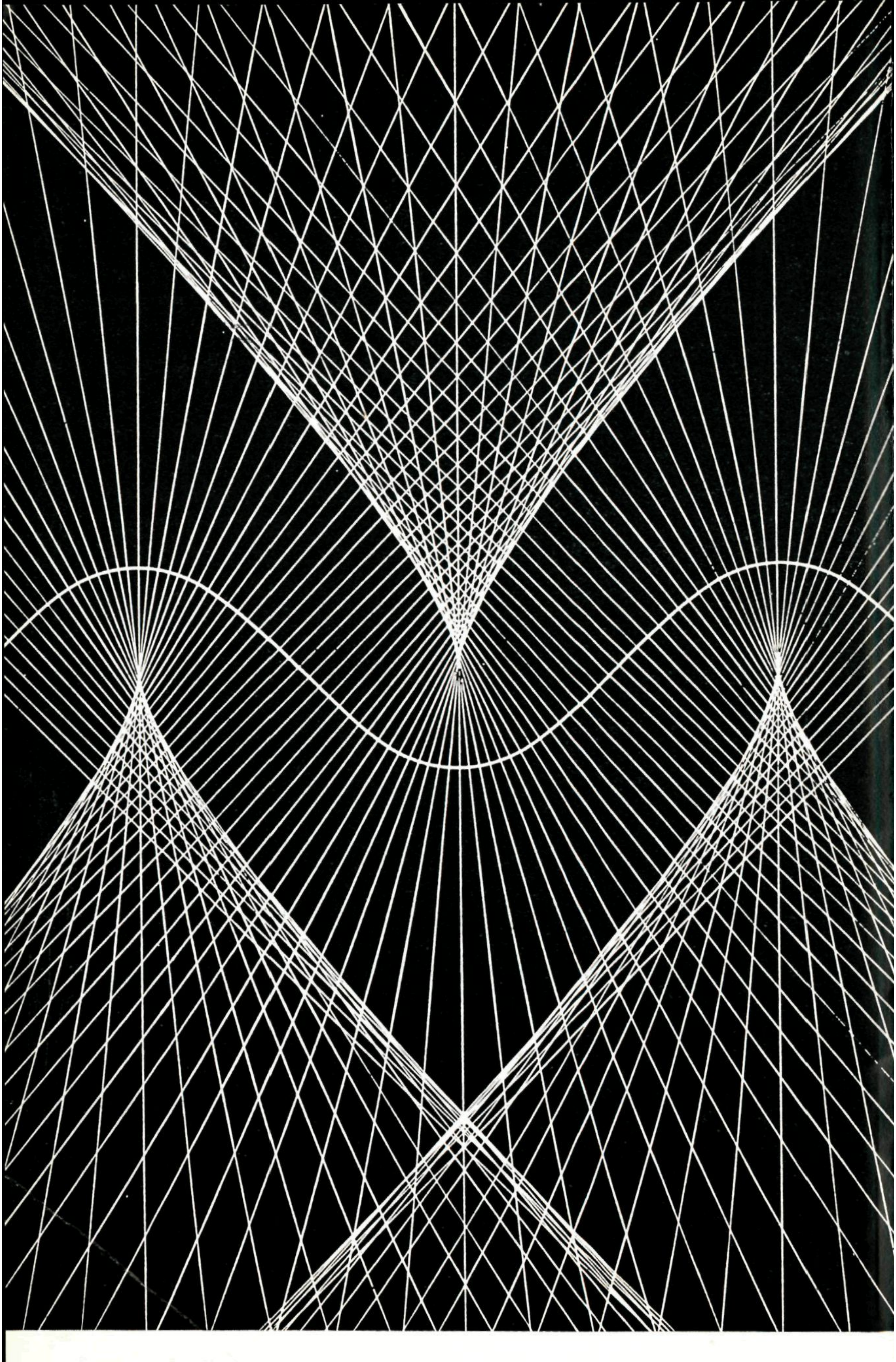
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift voor jongeren

2

Achtste jaargang 1968/1969



pythagoras

jaargang 8 no 2

°Mathemagica

„Mathematics, magic and mystery" is de titel van een boek, geschreven door Martin Gardner. Het eerste woord betekent wiskunde, het tweede betekent magie, toverij, het derde mysterie, geheim, raadsel. Er zijn in het Engels een groot aantal van dit soort boeken, waarin allerlei trucs worden besproken, met een meer of minder wiskundige achtergrond. Veel van deze trucs zijn ook in Nederland natuurlijk bekend, er is schrijver dezes echter geen enkel boek bekend, waarin ze zijn verzameld. Hier volgt een fraaie kaarttruc, die echter in wezen veel meer een berekening dan een truc is.
Je kunt eerst oefenen met de volgende eenvoudige vorm, daarna kun je het wat ingewikkelder maken.
a. Neem 27 speelkaarten en laat een toeschouwer daarvan één in gedachten nemen.
b. Leg de kaarten in een stapel, met de *rugzijden* boven.
c. Leg de bovenste drie naast elkaar op tafel met de *beeldzijden* boven. Leg de volgende kaarten hier op, zodat drie stapels van negen kaarten ontstaan.
d. Vraag de toeschouwer in welke stapel de kaart ligt, die hij in gedachten genomen heeft.
e. Leg de drie stapels op elkaar, met de stapel waarin de gezochte kaart ligt, in het midden.
f. Herhaal de punten b, c, d en e nu *twee* keer.
g. Bekijk, na driemaal uitleggen en weer opnemen, de kaarten één voor één zeer zorgvuldig en besluit na lang aarzelen en veel abracadabra dat de veertiende kaart de gezochte is.
Als je dit onder de knie (en doorzien) hebt en het bovendien je toeschouwers is opgevallen dat de stapel van negen waarin de gezochte kaart ligt, steeds in het midden wordt gelegd, dan kun je het volgende gaan proberen:
De punten a, b, c en d blijven gelijk.
Neem de drie stapels in een willekeurige volgorde op, maar onthoud

wel in welk negental de gezochte kaart ligt. Al naar gelang deze kaart in de stapel van 27 (rugzijden boven) ligt bij de *bovenste*, *middelste* of *onderste* negen, moet je na de eerste keer het getal 1, 2 of 3 onthouden. Na de tweede keer zijn deze getallen 0, 3 of 6 en na de derde keer 0, 9 of 18. Dus:

	eerste keer	tweede keer	derde keer
boven	1	0	0
midden	2	3	9
onder	3	6	18

Tel de drie getallen, die je moest onthouden, op. Is dit bv. 17, dan ligt de gezochte kaart in de laatste stapel op de 17e plaats van boven.

Als je ook hierin de nodige routine hebt verworven, dan kun je nog het volgende doen:

Vraag de toeschouwer (als die inmiddels van verbijstering nog niet in zwijm gevallen is) een kaart in gedachten te nemen *en* je te zeggen op welke plaats deze moet komen te liggen. Dus je bewonderaar zegt: „Ik wil dat de kaart die ik in gedachten heb op de zestiende plaats van boven komt te liggen".

Je rekent dan bliksemsnel uit $16 = 9+6+1$ en je zorgt dat dit de getallen zijn die je moet onthouden. Door de stapeltjes op de juiste wijze op te nemen kun je zo iedere plaats bereiken.

Tenslotte nog iets over de werking van de truc. De eerst besproken eenvoudige vorm is ook het gemakkelijkst te verklaren.

De oorspronkelijke volgorde van de kaarten is willekeurig. Noem de kaarten van de stapel waarin de gezochte ligt na de *eerste* keer uitleggen a, b, c, d, e, f, g, h, i. Deze stapel komt in het midden, zodat bij de *tweede* keer uitleggen de volgende situatie ontstaat:

x	x	x
x	x	x
x	x	x
a	b	c
d	e	f
g	h	i
x	x	x
x	x	x
x	x	x

De kolommen geven de kaarten van de stapels aan. Je kunt nu gemakkelijk nagaan dat de gezochte kaart na de *derde* keer in een stapel als vijfde van boven komt te liggen, zodat het in de definitieve stapel de $9+5 = 14$e kaart is.

De ingewikkelder vorm heeft ook een wat ingewikkelder verklaring, die evenwel op hetzelfde berust als het bovenstaande. We laten dat aan de liefhebber over.

°°Omhullingscurven

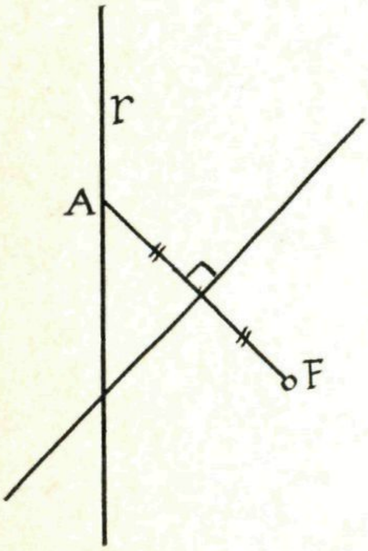


Fig. 1

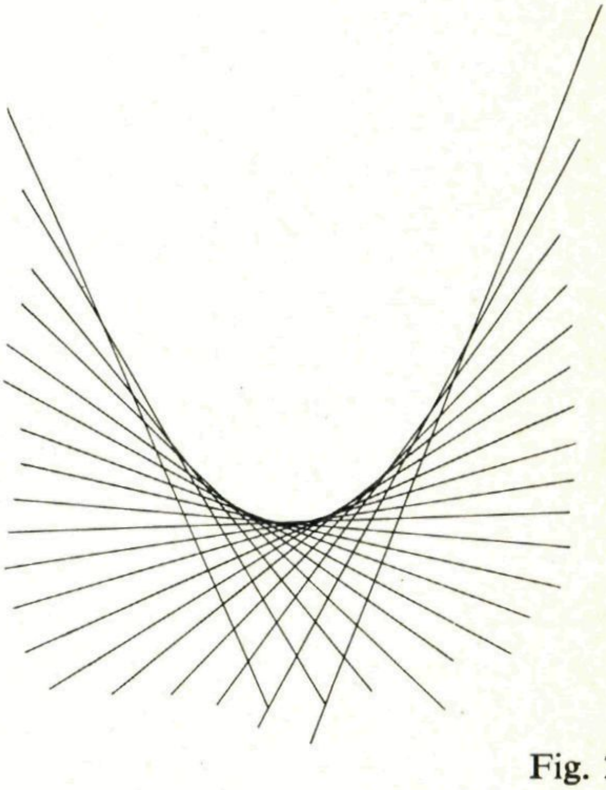


Fig. 2

In figuur 1 gaan we uit van de rechte *r* en het punt F. We verbinden elk punt van *r* met F en trekken de middelloodlijnen van de verbindingslijnen. In figuur 1 is dat voor één punt A en voor één verbindingslijn nl. AF gedaan. Het is interessant om te zien wat er gebeurt als we dit tekenvoorschrift op een groter aantal punten van *r* toepassen. Het resultaat zie je in figuur 2. De daar getekende lijnen „omhullen" een kromme. Je kunt ook zeggen: al die lijnen raken aan een kromme. En die kromme lijkt op een parabool. Dat het inderdaad een parabool is zullen we bewijzen. We gaan daarvoor uit van de brandpunt-richtlijn-definitie van de parabool. Zie figuur 3. Een parabool is de verzameling van alle punten waarvan de afstanden tot een vaste lijn *r* (de richtlijn) en een vast punt F (het brandpunt) gelijk zijn. Punt P in figuur 3 is zo'n punt omdat de loodlijn vanuit P op *r* gelijk is aan PF.

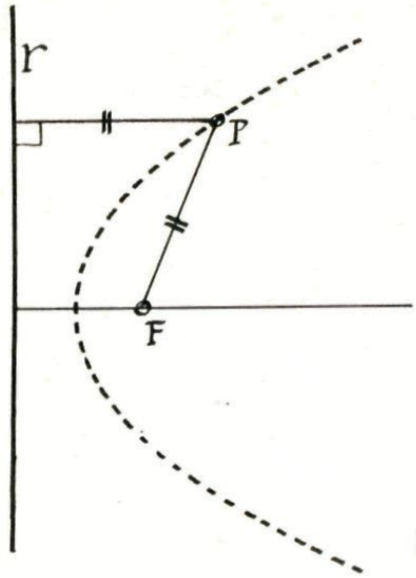


Fig. 3

In figuur 4 zijn vijf punten van de parabool getekend. Het punt M, dat de loodlijn FN halveert noemen we de top van de parabool.
We nemen nu aan dat we een groot aantal punten van de parabool bepaald hebben (figuur 5). P is een punt van de parabool. We trekken de bissectrice van ∠ APF en bewijzen dat deze bissectrice raakt aan

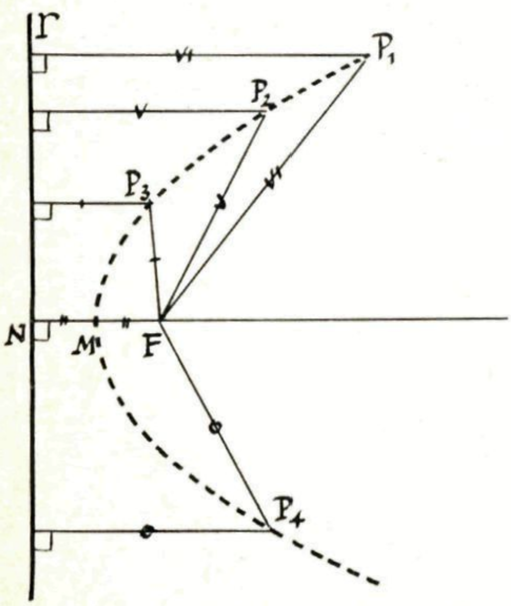


Fig. 4

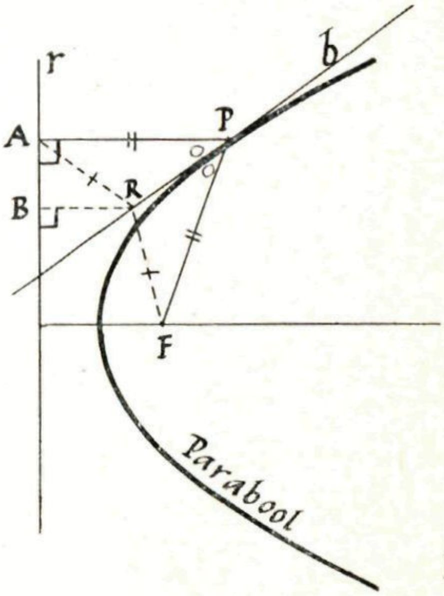


Fig. 5

de parabool. We nemen daartoe een willekeurig ander punt R van deze bissectrice en bewijzen dat R buiten de parabool ligt. Uit de congruentie van de driehoeken PRF en PRA volgt, dat RF = RA. In de rechthoekige driehoek BRA is BR < AR en dus is BR < RF.

En als de afstand van een punt R tot de richtlijn kleiner is dan de afstand van dat punt tot het brandpunt, ligt dat punt R buiten de parabool. Dit laatste zullen we even „tussen haakjes" bewijzen. In figuur 6 is R een punt buiten de parabool.

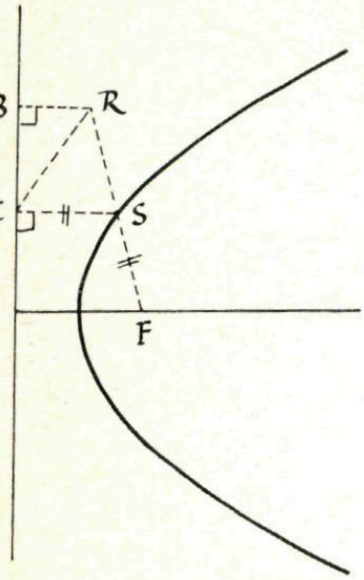


Fig. 6

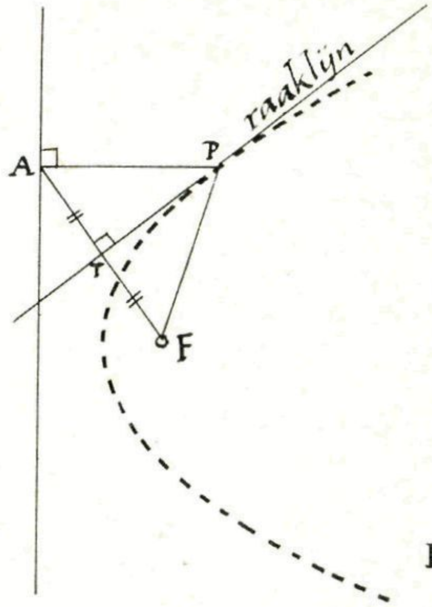


Fig. 7

RF snijdt de parabool in S.
RF = RS+SF = RS+SC > CR > BR.

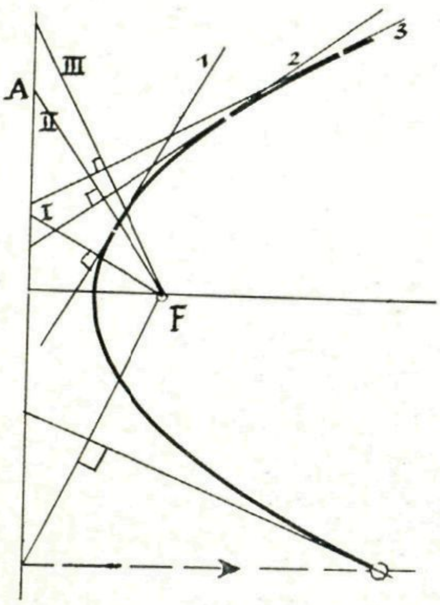


Fig. 8

Indirect is nu eenvoudig aan te tonen: *als* RF > BR, dan ligt R buiten de parabool.
Trekken we nu de raaklijn in P aan de parabool (figuur 7) en tevens de loodlijn PA en de verbindingslijn PF, dan volgt uit congruentie van de driehoeken PTA en PTF dat de raaklijn de middelloodlijn van AF is. Nu komen we weer terug bij het begin van dit artikel. Het is duidelijk, dat de rechten die we volgens het tekenvoorschrift in het

begin van dit artikel vonden de raaklijnen aan een parabool zijn. De parabool is dus de omhullende van deze lijnen (zie figuur 8).

Maar we kunnen nog méér zeggen: We kunnen de raak*punten* op de raaklijnen (bijvoorbeeld van de raaklijnen 1, 2 en 3 in figuur 9) vinden, door in de punten A, B en C van de richtlijn, loodlijnen op te richten.

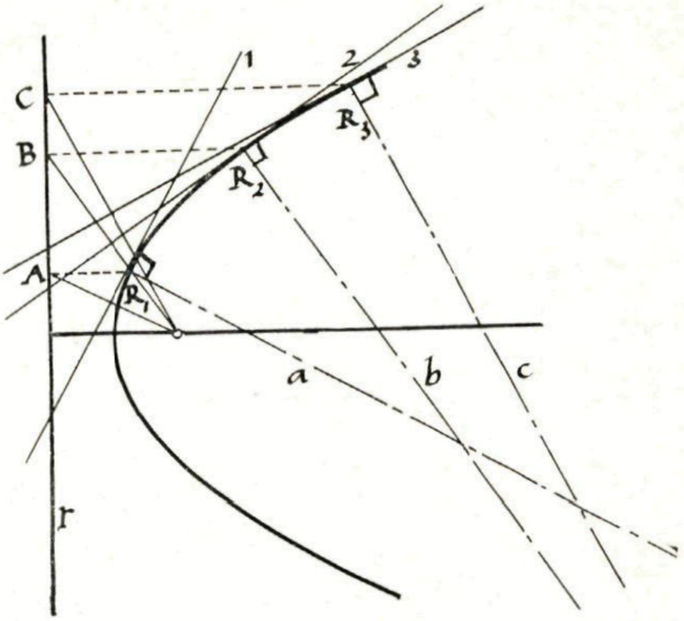


Fig. 9

Waar deze de bijbehorende raaklijnen snijden vinden we de raakpunten. (R_1, R_2, en R_3).

We gaan nog verder en richten in de raakpunten loodlijnen in de raakpunten op (a, b, en c in figuur 9). Als we een groot aantal van deze loodlijnen (normalen) getekend hebben ontstaat een fraaie figuur (figuur 10). De omhullingscurve van deze normalen tekent zich duidelijk af in figuur 10. We volstaan met te vermelden dat deze omhullings-

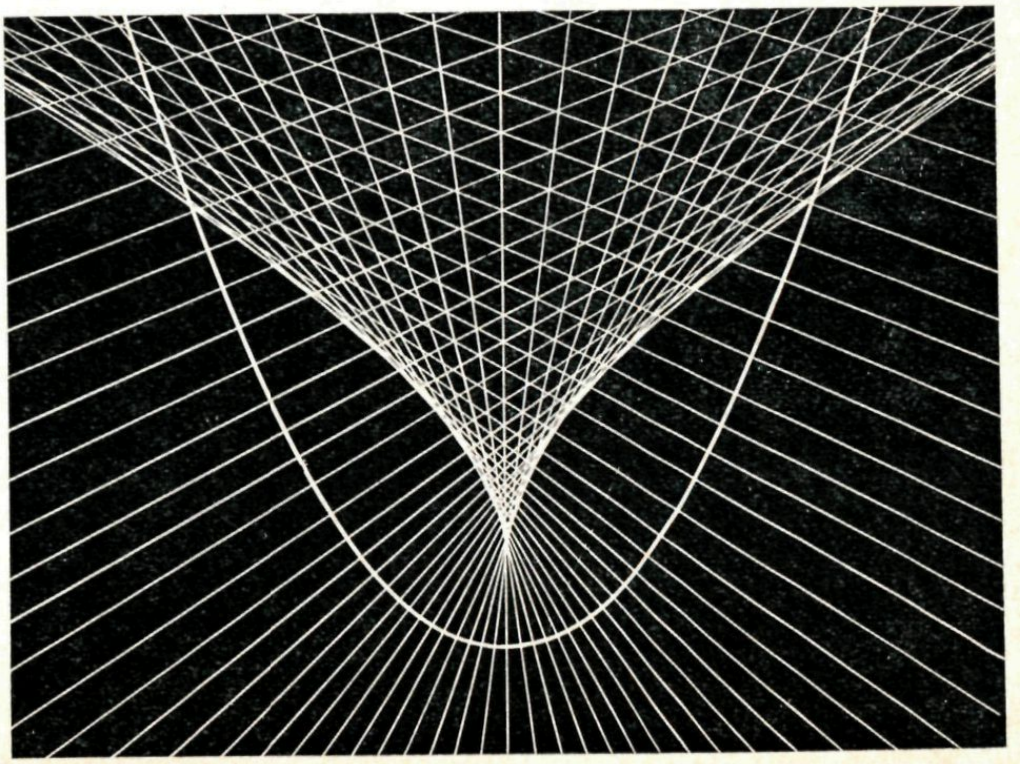


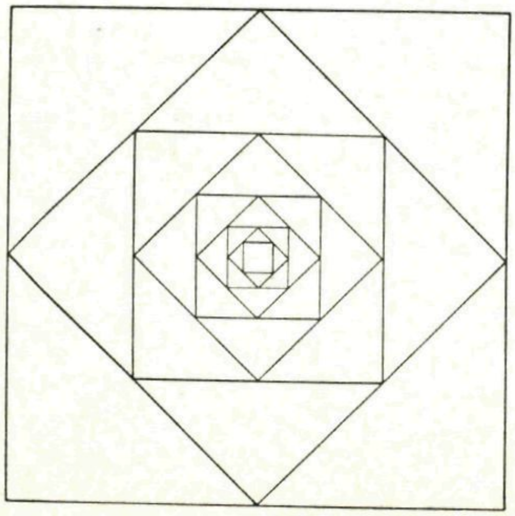
Fig. 10

curve een semi-kubische parabool genoemd wordt, waarvan de vergelijking is $y = x^{3/2}$.

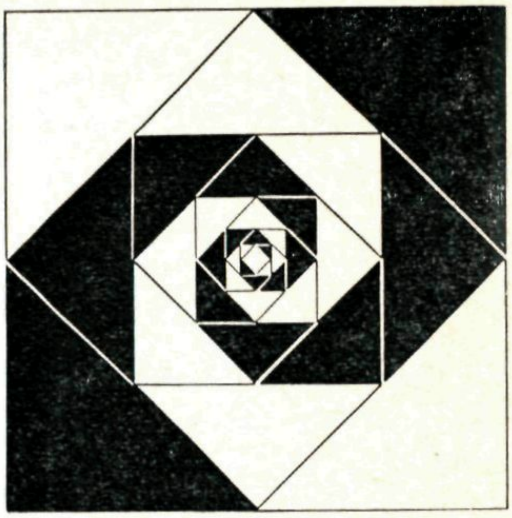
In de figuur op de binnenzijde van de omslag is een sinusoïde getekend en daarvan zijn een groot aantal normalen getekend. De daardoor zichtbaar wordende omhullingscurven lijken veel op die uit figuur 10. Dit was wel te verwachten omdat de drie bogen van de sinusoïde ook op delen van een parabool lijken. Er bestaat een algemene methode om uit de vergelijking van een curve de vergelijking van de omhullende van de normalen op deze curve te vinden en het zal wel duidelijk zijn dat daaruit volgt dat de vergelijking van de omhullingscurve uit de figuur op de binnenzijde van de omslag heel wat ingewikkelder is dan die van de parabool. Zie ook blz. 41 in dit nummer.

In dit nummer . . .

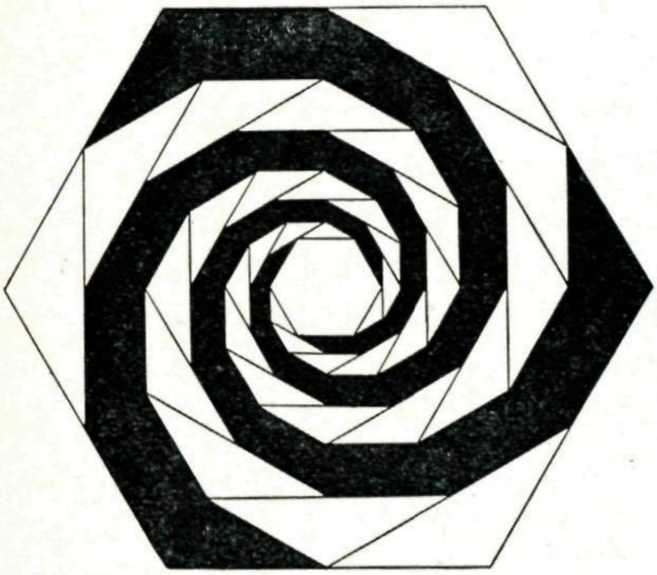
komen we de namen van enkele prominente wiskundigen tegen. In de eerste plaats die van een wiskundige uit de 17e eeuw: Leonhard Euler, een werkelijk grote naam. Verder twee „eigentijdse" namen: de Amerikaan Martin Gardner en de Duitser Hermann von Baravalle. Deze twee hebben gemeenschappelijk dat ze zich erg veel bezig houden met het spel-element in de wiskunde. Voor Gardner betekent dit: problemen en puzzels, zoals je tegen komt in „Mathemagica" op blz. 24. Voor professor Von Baravalle betekent het: spelen met figuren en wel zodanig spelen dat figuren van een bijzondere schoonheid ontstaan. Neem bijvoorbeeld een vierkant en verbind de middens van de zijden. Dan heb je weer een vierkant en zo kun je doorgaan.



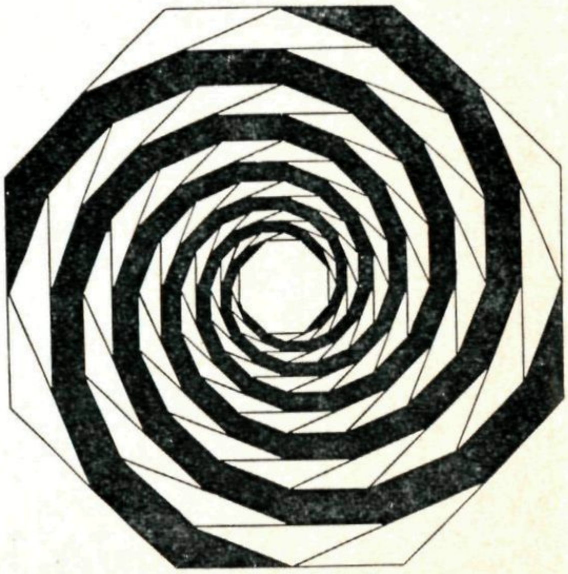
De figuur is niet boeiend. Heel anders wordt dit echter als je van de afgesneden driehoeken telkens twee tegenover elkaar liggende zwart maakt:



Iets dergelijks kun je doen met een zeshoek of een achthoek:



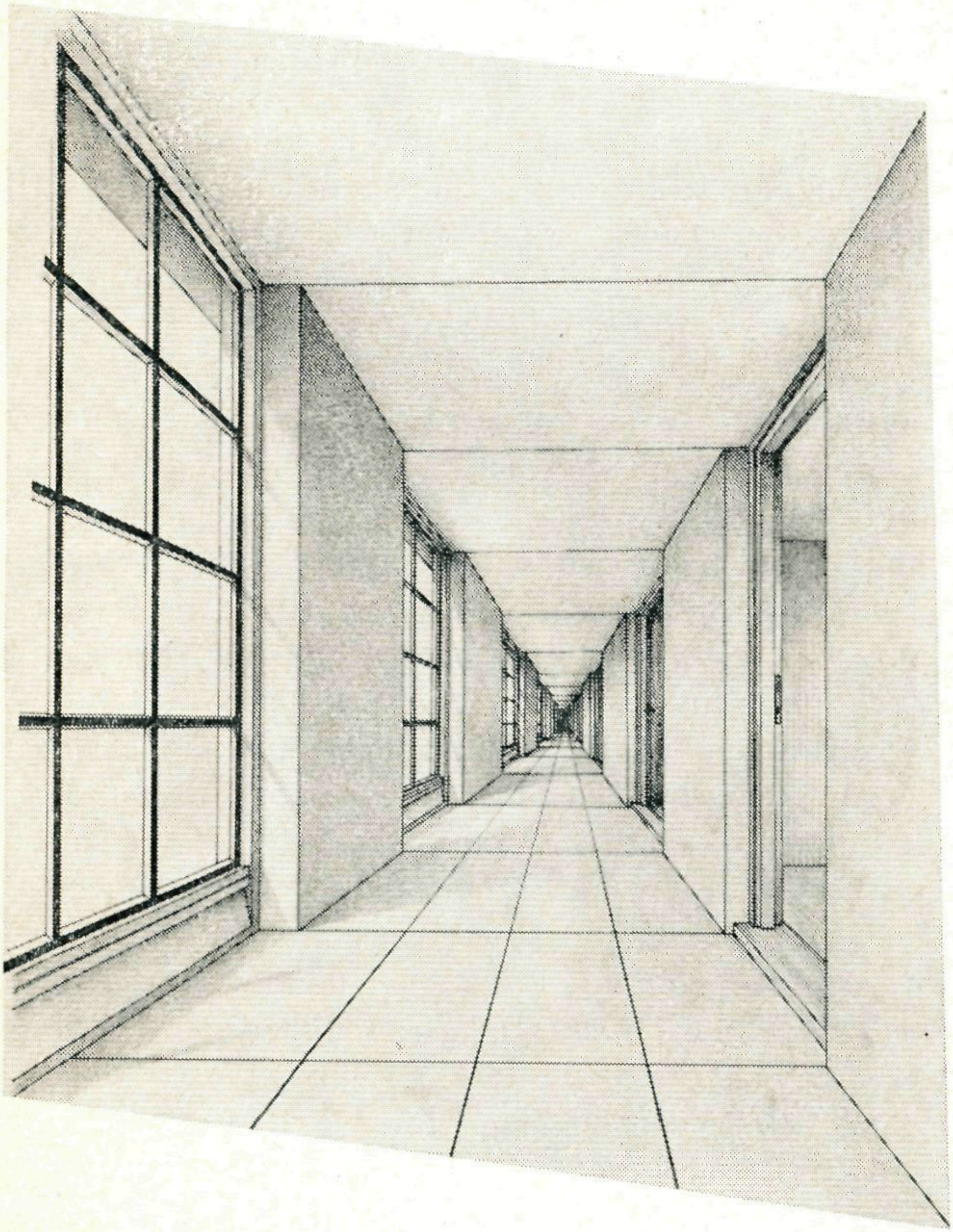
De spiralen die ontstaan maken de figuren als het ware levend.



Ook fig. 10 en de figuur op de binnenzijde van het omslag zijn van prof. dr. Hermann von Baravalle, uit diens boek „Geometrie als Sprache der Formen".

Over spiralen gesproken: Is de gang van het ziekenhuis werkelijk zo dood als het lijkt?

Deze figuur is van E. J. Hoogenberk uit Doorn, die zich afvraagt of de deuren tegenover de ramen staan of niet.



Een cirkel is een ronde lijn, zonder hoeken en gesloten, opdat men niet kan zien waar ze begint.

Uit: „Juf, daar zit een weduwe in de boom", van H. Hoving

°Formule voor leesbaarheid

door Ir. H. M. Mulder

Het verbaast je niet als iemand je zegt dat je morgen 16 jaar wordt, dat je 3 km van de school af woont of dat het nu kwart over negen is. Het gaat hier om meetbare grootheden.
Vreemder lijkt het als ze zeggen dat je wiskundekennis 6 is of je intelligentiequotiënt 97.
Maar je dreigt van verbazing van je stoel te vallen als je hoort dat je rechtvaardigheidsgevoel 23 is of de leesbaarheid van deze tekst 54.
Bij de eerste voorbeelden gaat het om meetbare grootheden; bovendien zijn de begrippen te definiëren.
Bij de tweede groep wordt dat al moeilijker.
Hoe is je wiskundekennis te meten; hoe te definiëren? Natuurlijk, op school doet de leraar een verwoede poging. Soms heeft men zelfs een zeer eenvoudige meetmethode. Men zegt dan: „voor elke fout trek ik een punt af".
Het zal niet meevallen een niet te definiëren begrip te meten!
Toch doen ook psychologen hun best de intelligentie in een getal te vangen. Door een test met letters, getallen, blokjes, figuren en kleuren bepalen ze je intelligentiequotiënt.
Het is opmerkelijk hoe de niet-exacte wetenschappen een steeds exacter gezicht gaan trekken; hoe kwaliteiten worden omgezet in kwantiteiten; hoe ook hier steeds meer gaat gelden: „meten is weten".
Een interessant voorbeeld hiervan is de leesbaarheidsformule.
Het is je bekend dat de ene tekst leesbaarder is dan de andere.
De troonrede van de koningin is gemakkelijker leesbaar dan een regel uit het wetboek van strafrecht, maar moeilijker dan een verslag van een europa-cup-wedstrijd.
Iemand waagt het een formule aan te bieden voor de leesbaarheid die een uitkomst geeft van 0 tot 100. Een 0 zou krijgen: „de infrastrukturele gewoonten lopen ten achter op de strekkingen tot vroegtijdige ingrepen . . . enz." (memorie van toelichting?).
Een 100 zou krijgen: „ik heet wim; ik heb een bal; het is een rode bal enz." (leesles eerste klas). De bedoelde formule bepaalt de moeilijkheidsgraad in verband met:
1. de gemiddelde woordlengte ofwel het aantal lettergrepen per woord

ofwel het aantal lettergrepen gedeeld door het aantal woorden. We zullen dit aangeven met de letter l.
2. de gemiddelde zinslengte ofwel het aantal woorden per zinseenheid ofwel het aantal woorden gedeeld door het aantal zinseenheden. We zullen dit aangeven met de letter w.
Natuurlijk spelen nog andere faktoren hier een rol, zoals het gebruik van minder bekende woorden, maar genoemde twee faktoren zijn althans meetbaar. De formule luidt:
$L = 195 - 67l - 2w$
Hier volgen twee teksten waarbij L berekend is.
Annie M. G. Schmidt schrijft in „Jip en Janneke" het verhaal van een sneeuwman:
„Vader, hoe maak je een sneeuwman? vraagt Jip. Ik zal jullie helpen, zegt vader. Hij haalt een schop uit de schuur. En Jip krijgt een klein schopje. En Janneke ook. En dan werken ze heel hard. Koud, zegt Janneke. Mijn handen prikken. Dat gaat wel over, zegt Vader. Hard werken. Eindelijk is de sneeuwman klaar. enz.".
Het hele verhaaltje heeft 43 zinnen, 230 woorden en 297 lettergrepen.
Zo vindt men: $L = 195 - 67.\,(297 : 230) - 2.\,(230 : 43)$
ofwel $L = 195 - 87 - 11 = 97$ (dus zeer leesbaar).
Vervolgens een artikel uit het Rijksambtenarenreglement:
„Voor de ambtenaren, die niet gedurende het volle kalenderjaar werkelijk dienst hebben gedaan, wordt de duur van het vacantieverlof zo mogelijk van het lopende en overigens van een volgend kalenderjaar, naar evenredigheid verminderd, met dien verstande dat het resterend gedeelte tot hele dagen naar boven wordt afgerond en dat zodanige vermindering in geval van afwezigheid wegens ziekte of verblijf onder de wapenen, anders dan voor eerste oefening, alleen zal worden toegepast, bijaldien de afwezigheid langer dan onderscheidelijk 3 maanden en 6 weken heeft geduurd".
Dit schoon geschrift heeft 5 zinnen, 84 woorden en 168 lettergrepen.
Zo vindt men: $L = 195 - 67.\,(168 : 84) - 2.\,(84 : 5)$
ofwel $L = 195 - 134 - 34 = 27$ (dus slecht leesbaar).
In ons cijfersysteem op school zouden deze teksten 10^- en 3^- gekregen hebben.

Leonhard Euler, 15 april 1707—7 september 1783

°Euler en de Grieks-Latijnse vierkanten

De naam Euler is voor de trouwe lezers van Pythagoras niet onbekend. Geen wonder, het is de naam van één van de grootste wiskundigen aller tijden.

Leonhard Euler werd geboren op 15 april 1707 te Bazel, als zoon van een predikant. Hij studeerde wiskunde bij Johann Bernoulli en raakte bevriend met diens zonen Daniel en Nikolaus, die ook wiskunde studeerden. Nikolaus werd in 1725 uitgenodigd om naar St. Petersburg te komen, Euler ging met hem mee en bleef daar tot 1741. In dat jaar kreeg hij een uitnodiging, om niet te zeggen bevel, van Frederik de Grote om naar Berlijn te komen. In 1766 ging hij terug naar Rusland, waar hij tot zijn dood in 1783 bleef. De laatste veertien of vijftien jaar van zijn leven was hij volledig blind, wat hem niet verhinderde zijn werk voort te zetten, bijgestaan door één van zijn dertien kinderen en door assistenten.
Tijdens zijn leven verschenen meer dan 500 artikelen, welk aantal na zijn dood nog aangroeide tot meer dan 800, doordat de Academie van St-Petersburg nog jaren nodig had om zijn nagelaten manuscripten te publiceren. Hij schreef ook een aantal leerboeken, waarin onderdelen van de wiskunde systematisch werden behandeld. Hij had een zo groot gezag dat vele notaties die hij gebruikte, door anderen werden overgenomen en zo hun definitieve vorm kregen. Voorbeelden hiervan zijn de bekende afkortingen voor sinus, cosinus, enz., de letter e voor het getal 2,71828..., π, de notatie f(x) voor een functie. (Dit betekent niet dat Euler ook steeds de *eerste* was die deze notaties gebruikte.)

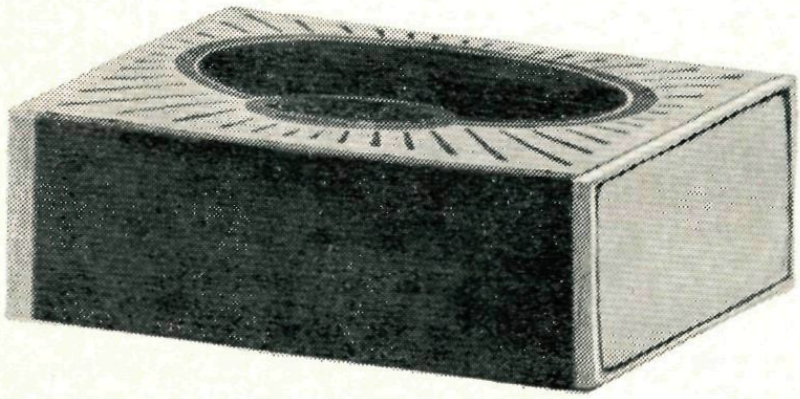


Fig. 11

De naam van Euler leeft voort in bijvoorbeeld de *formule van Euler:* $h + z = r + 2$.
Deze formule slaat op veelvlakken, h is het aantal hoekpunten, z is

het aantal zijvlakken, en r is het aantal ribben. Bijvoorbeeld een lucifersdoosje heeft 8 hoekpunten, 12 ribben en 6 zijvlakken.
De formule is besproken in het vierde nummer van de vierde jaargang van Pythagoras.
Iets anders is de *rechte van Euler*. Deze komt men in de vlakke meetkunde tegen: Het hoogtepunt, het zwaartepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek liggen op één lijn, de rechte van Euler. (zie figuur 12).

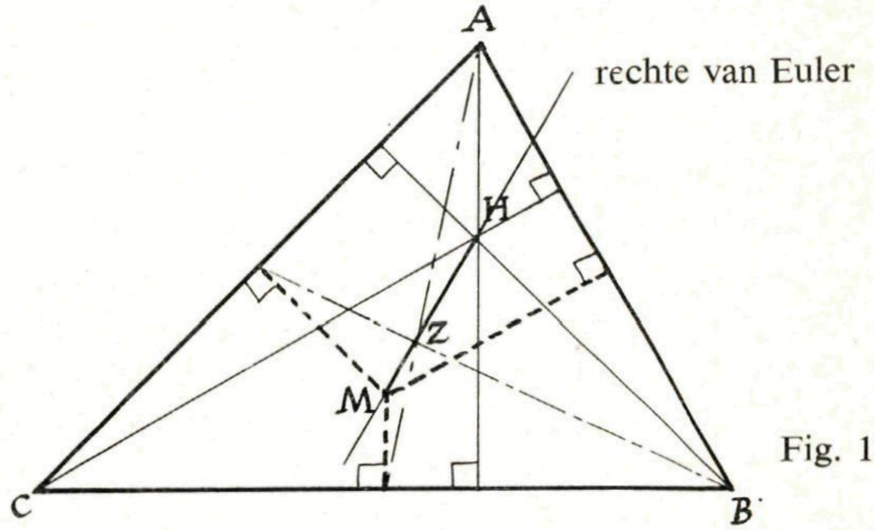


Fig. 12

Ook het beroemde Koningsberger bruggenprobleem is verbonden met de naam Euler.

,,De stad Koningsbergen, die sinds 1945 Kaliningrad heet, ligt aan de oevers van de rivier de Pregel. De oevers en de eilanden waren in Eulers tijd door zeven bruggen verbonden, zoals men ziet in het schetsje van figuur 13.

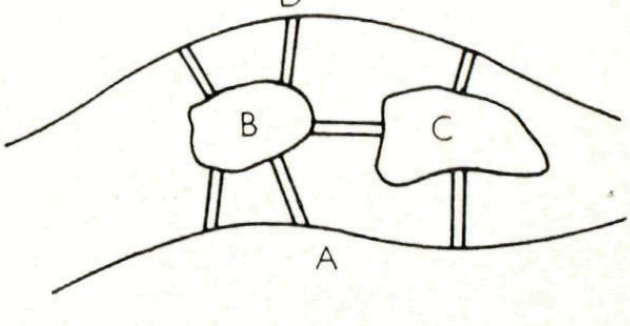


Fig. 13

De Koningsbergers waren gewend 's zondags een lange wandeling door en om de stad te maken, en Euler vroeg zich nu af of hij voor één der inwoners een wandeling zo zou kunnen ontwerpen, dat deze daarbij elk der bruggen juist eenmaal zou passeren'' zo lezen we in het eerste nummer van de vierde jaargang van Pythagoras. Voor degenen die dit ook willen proberen vermelden we aan het eind of het kan of niet.

Een ander probleem dat door Euler werd opgeworpen is dat van de Grieks-Latijnse vierkanten, ofwel van de 36 officieren.
Hoe kan men 36 officieren van 6 regimenten en 6 rangen in een vierkant opstellen, zodat in elke rij en elke kolom één officier van elke rang en elk regiment staat?
Men kan de regimenten aanduiden met Griekse letters en de rangen met Romeinse, aldus ontstaat een Grieks-Latijns vierkant. We kunnen natuurlijk ook letters en cijfers gebruiken.
Een Latijns vierkant van de vierde orde kunnen we schrijven als

a	b	c	d		1	3	2	4
b	c	d	a	of	2	4	1	3
c	d	a	b		4	1	3	2
d	a	b	c		3	2	4	1

In elke rij (horizontaal) en elke kolom (verticaal) komt elke letter of elk cijfer precies eenmaal voor. Gecombineerd vormen de vierkanten een Grieks-Latijns vierkant van de vierde orde ($n = 4$):

a,1	b,3	c,2	d,4
b,2	c,4	d,1	a,3
c,4	d,1	a,3	b,2
d,3	a,2	b,4	c,1

Elke letter en elk cijfer komt in elke rij en kolom precies eenmaal voor, en *bovendien komt elke combinatie van een letter en een cijfer slechts eenmaal voor*.
Voor $n = 5$ kan het ook:

a,1	b,2	c,3	d,4	e,5
b,3	c,4	d,5	e,1	a,2
c,5	d,1	e,2	a,3	b,4
d,2	e,3	a,4	b,5	c,1
e,4	a,5	b,1	c,2	d,3

Zestien officieren van vier regimenten en vier rangen leveren dus geen probleem op, evenmin als vijfentwintig officieren van vijf regimenten en vijf rangen. We proberen het ook voor $n = 6$.

a,**1**	b,2	c,3	d,4	e,5	f,**6**
b,**3**	c,4	d,5	e,6	f,1	a,2
c,**5**	d,6	e,1	f,2	a,3	b,4
d,**2**	e,3	f,4	a,5	b,6	c,1
e,**4**	f,5	a,6	b,1	c,2	d,3
f,	..	..	..	..	..

Hier lopen we vast. Het enige cijfer dat nog niet in de eerste kolom staat is 6. Dit cijfer is echter al in de eerste rij gecombineerd met de f en mag dus niet weer worden gebruikt.

Euler bewees dat het mogelijk is vierkanten van oneven orden en van de orden 4, 8, 12, 16, . . . te maken. Blijven over $n = 6, 10, 14, 18, \ldots$ Je kunt het zelf nog eens proberen voor $n = 6$, maar het zal je niet lukken, want omstreeks 1900 is bewezen dat het niet kan, domweg door alle mogelijkheden te proberen. Het probleem van de 36 officieren is dus niet oplosbaar, evenmin als het Koningsberger bruggenprobleem.

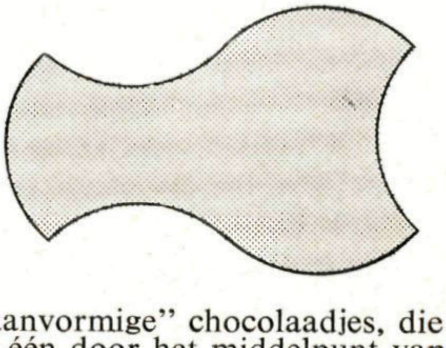
Euler dacht dat voor $n = 4k + 2$ $(k = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ geen oplossingen bestonden, in 1959 is het echter gelukt een tiende-orde vierkant te construeren, wat op de voorpagina van de NewYork Times van 26 april van dat jaar te lezen was.

Voor hogere viervouden-plus-twee is het niet bekend of er oplossingen zijn of niet.

Denkertjes

Oplossingen inzenden voor 20 december naar redacteur Engels.

11. Hoeveel verschillende soorten dobbelstenen kun je onderscheiden, wanneer je alleen maar let op de manier waarop de zes ogenaantallen over de zes zijvlakken verdeeld zijn?
12. Gevraagd wordt een listige manier om de oppervlakte van de onderstaande figuur te bepalen.



13. Een fabriek maakt „maanvormige" chocolaadjes, die begrensd worden door twee cirkelbogen waarvan er één door het middelpunt van de ander gaat; beide bogen hebben een straal van 3 centimeter. Ze worden verpakt in ronde dozen met een straal van 6 centimeter. Wat is het grootst mogelijke aantal chocolaadjes dat je (in één laag) in zo'n doos kunt leggen en hoe zou jij dat doen? Zend als oplossing alleen maar een tekening in.
14. Op het ogenblik is de kilometerstand van mijn auto een getal dat uit vijf gelijke cijfers bestaat. Het aantal kilometers, dat ik nog moet rijden om voor het eerst weer een kilometerstand te krijgen die uit vijf verschillende cijfers bestaat, is een priemgetal. Welke kilometerstand heb ik nu?

°Hoe krom is een kromme? (I)

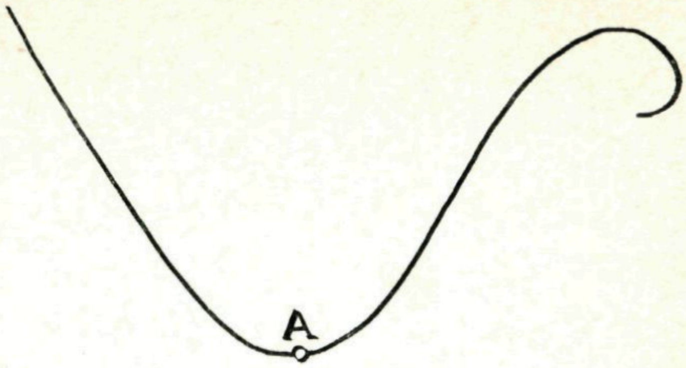


Fig. 14

Bij voorbaat moet gezegd worden, dat we deze vraag niet kunnen beantwoorden. Bij bovenstaande (vlakke) kromme bijvoorbeeld, zal je opvallen dat deze op de ene plaats sterker gebogen (gekromd) is dan op een andere. We zullen daarom zoeken naar de mate van kromming op een bepaalde plaats, bijvoorbeeld in het punt A.
We nemen daartoe een cirkel die de kromme in A en in een wat verderop gelegen punt B snijdt. Laten we nu het punt B over de kromme naar A toe glijden, dan gaat de cirkel over in de stand van figuur 16. We

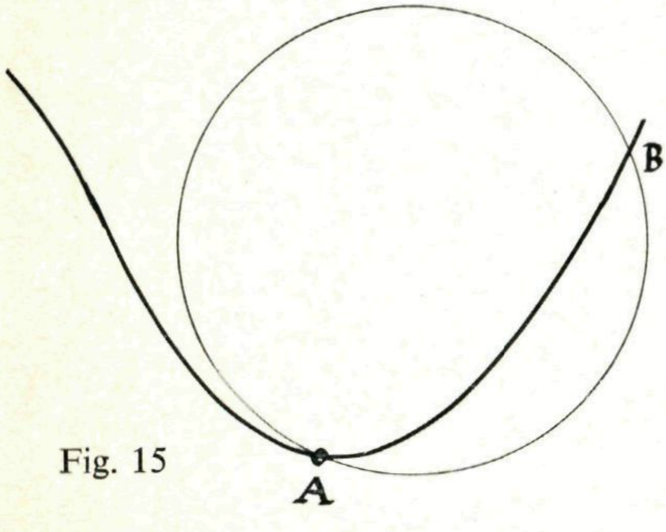


Fig. 15

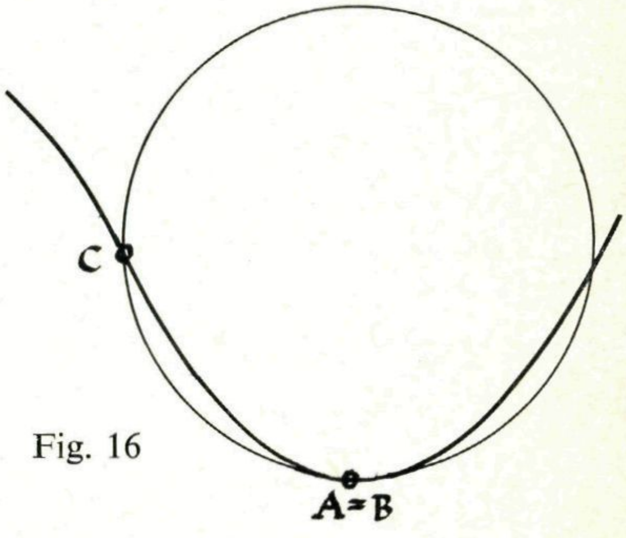


Fig. 16

zeggen nu dat de cirkel twee samenvallende snijpunten heeft met de kromme en dat de cirkel de kromme in A raakt. Zoals je in figuur 16 ziet, kan zo'n raakcirkel, behalve het raakpunt, nog wel andere punten met de kromme gemeenschappelijk hebben (bijvoorbeeld C). We gaan nu de raakcirkel zo verkleinen dat het punt C ook weer net met A en B samenvalt. Deze cirkel (figuur 17) die (tenminste) drie samenvallende snijpunten met de kromme gemeenschappelijk heeft, wordt *osculatiecirkel* genoemd. (Kijk eens in de woordenlijst achterin en je zult begrijpen hoe men aan die naam komt). De lijn AM heet de normaal in A (zie ook het artikel „Omhullingscurven" in dit nummer). Een klein stukje van de kromme in de naaste omgeving van A zal vrijwel gelijk zijn aan een overeenkomstig boogje van de osculatiecirkel. We zouden nu de lengte r van de straal van de osculatiecirkel als maat kunnen nemen voor de kromming in A. Maar dat is in strijd met ons gevoel. Hoe sterker (groter) immers de kromming, hoe kleiner r. Men neemt daar-

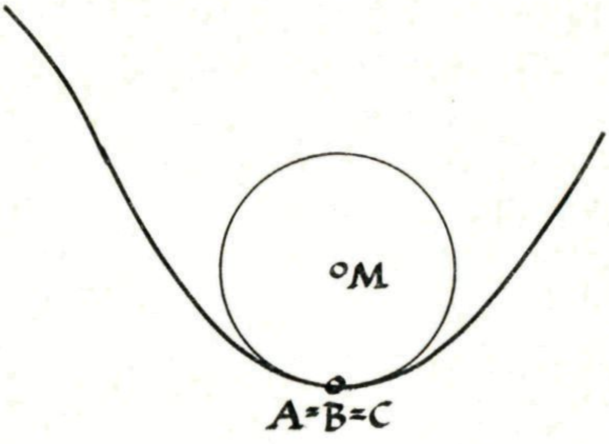


Fig. 17

om $\frac{1}{r}$ als maat voor de kromming. De kromming wordt aangegeven met de Griekse letter ϱ (rho). In de punten van de kromme waar r onmeetbaar is, zegt men dat $\varrho = 0$. Die punten heten *buigpunten.* In de punten waar de kromme een „knik'' vertoont is ϱ niet gedefinieerd.
Vragen. Bij welke kromme is ϱ in alle punten gelijk?
Wat is de kromming in elk punt van een rechte lijn?
Het middelpunt van de osculatiecirkel wordt ook wel kromtemiddelpunt genoemd.
Verder heeft men onderscheid willen maken naar de richting waarin gekromd is. Men neemt daarom de kromming positief of negatief, afhankelijk van de kant waaraan het kromtemiddelpunt ligt.

$|\varrho| = \frac{1}{r}$, r = de straal van de osculatiecirkel.

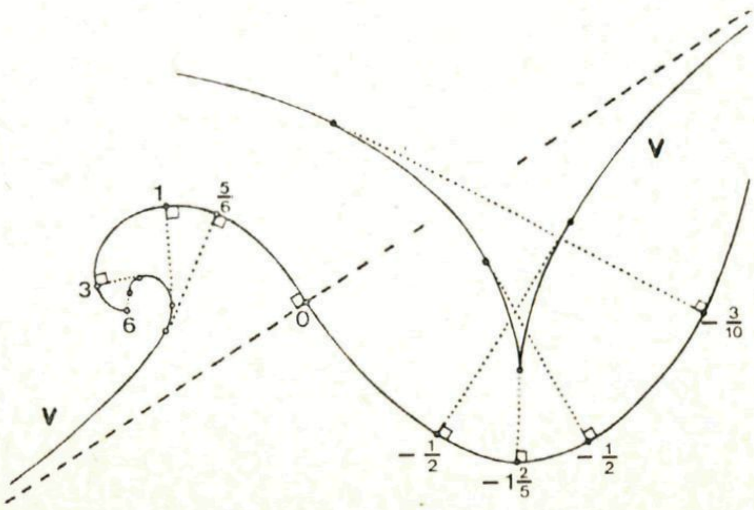


Fig. 18

In bovenstaande figuur zijn bij de kromme K de krommingen in verschillende punten aangegeven, evenals de verzameling V van de kromtemiddelpunten.

°° *De verzameling van de kromtemiddelpunten*

Over de verzameling V van de kromtemiddelpunten is nog het volgende op te merken.

a. Als de kromme K een buigpunt heeft, heeft V een asymptoot.

b. De normalen van K (uitgezonderd die van een buigpunt) raken aan de kromme V, zodat V de *omhullingscurve* is van de normalen van K! (zie desbetreffend artikel).

Dit laatste kan als volgt aannemelijk worden gemaakt. Zaag de kromme V uit hout en leg er een touwtje langs met aan het eind een lusje. Steek nu een potlood door het lusje en ontwind het touwtje. Je tekent dan een kromme (fig. 19 en 20).

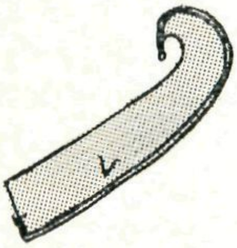


Fig. 19

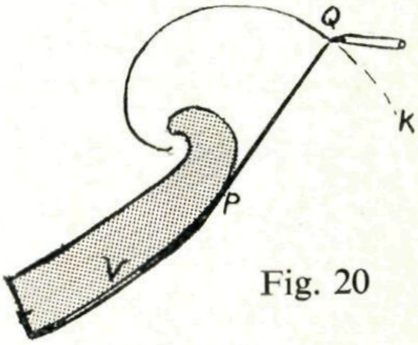


Fig. 20

Op elk moment zal het rechte deel van het touw raken aan de kromme V. De getekende kromme zal zich in de buurt van Q „gedragen” als een cirkelboog (osculatiecirkel!) met middelpunt P (het kromtemiddelpunt). Zo blijkt dat de kromme K te verkrijgen is uit de kromme V door deze laatste te „ontwinden”. K heet daarom ook wel de ontwindende (evolvente) van V en V heet de ontwondene (evolute) van K. (Zie 3e jaargang, nr 1).

Denkertjes

15. Zijn er machten van 2, die op vier gelijke cijfers eindigen? Zo ja, welke is de kleinste? Zo nee, waarom zijn ze er niet?
16. Een timmerman moet een vierkante vloer leggen met zijden van 4 meter lang. Hij heeft de beschikking over twee soorten planken, die allemaal 20 centimeter breed zijn; de lengten van die planken zijn 380 cm en 360 cm. Kan hij die vloer leggen zonder te zagen?

°°Een zelf berekende sinustafel

Toen ik voor het eerst kennis maakte met de tafels van de goniometrische functies had ik er een diep respect voor. Daar moest wel onnoemelijk lang op gerekend zijn! En *hoe* werden die „sinussen" en „tangensen" berekend? Waren daar formules voor? Die zouden dan wel erg ingewikkeld zijn! In feite kan een goniometrische tafel met heel elementaire middelen berekend worden. Er komt wel veel tot zeer veel rekenwerk bij te pas al naar gelang het aantal decimalen dat we willen hebben. In de loop der eeuwen heeft men met succes gezocht naar formules die hetzelfde resultaat met minder rekenwerk gaven. We gaan daar verder niet op in, maar willen eens onderzoeken hoever wij zèlf kunnen komen met een minimum aan gegevens en een minimum aan rekenwerk. Het resultaat zal een sinustafel zijn, oplopend met 1 graad en nauwkeurig tot op 2 decimalen. Als we daarbij bedenken dat bij metingen in het vrije veld, met eenvoudige middelen, een nauwkeurigheid van één graad al heel mooi is en dat nauwkeurigheid in meer dan 2 decimalen daarbij geen zin heeft, blijkt zo'n tabel nog bruikbaar ook.

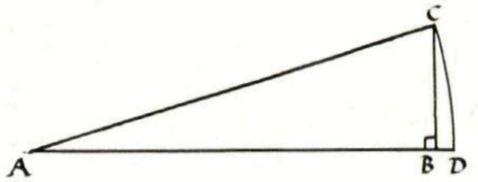


Fig. 21

In figuur 21 is $\angle B = 90°$ en CD is een cirkelboog. Als $\angle A$ klein is verschillen CB en CD niet veel. We mogen dan bv. schrijven:

$\sin 1° = \frac{CB}{AC} = \frac{CD}{AC} = \frac{2\pi r}{360r} = 0{,}0175$ en dit is ook de waarde die we voor sin 1° vinden in een tafel in 4 decimalen. Sin 2°, sin 3°, sin 4° enz. vinden we nu door vermenigvuldiging met 2, 3, 4, enz.

We kunnen hier natuurlijk niet onbeperkt mee blijven doorgaan. Als we afronden op twee cijfers achter de komma, zouden we dan op deze manier nog een goede waarde voor sin 15° vinden? Volgens het bovenstaande is sin 15° gelijk aan 0,2625 hetgeen afgerond wordt op sin 15° = 0,26.

Nu kunnen we natuurlijk een officiële tafel erbij halen en kijken of het klopt. Het is aardiger als we het zonder tabel af kunnen en daar-

cm berekenen wes in 15° zelf. Zie figuur 22. Daarin is $\angle A_1 = \angle A_2 =$ 15°. Verder zijn $\angle B$ en $\angle E$ gelijk aan 90°.
De berekening verloopt als volgt: We stellen AC = 1 en berekenen AE in $\triangle$ AEC. We vinden AE $= \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866$. Dan is
ED = 1 — 0, 866 = 0,134.

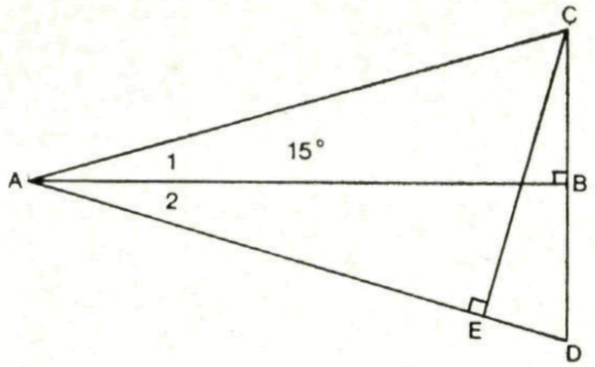


Fig. 22

In $\triangle$ CED berekenen we DC en vinden DC = 0,518, waaruit volgt BC = 0,259 en tevens sin 15° = 0,259.
Als we dit afronden komen we ook op sin 15° = 0,26. Maar we zien meteen aan de derde decimaal in beide uitkomsten, dat we onze eerste rekenwijze beslist niet veel verder mogen doorzetten.
Omdat in een rechthoekige driehoek met een tophoek van 30° de zijde tegenover deze hoek de helft is van de schuine zijde, is sin 30° = 0,5.
We nemen nu even aan dat de sinus van de hoeken tussen 15° en 30° met gelijke bedragen toeneemt. Deze bedragen zullen dan zijn; (0,50 — 0,26) : 15 = 0,016.
Hiermee berekenen we:
sin 16° = 0,26 + 0,016 = 0,28
sin 17° = 0,26 + 0,032 = 0,29
. . . .
sin 25° = 0,26 + 0,16 = 0,42 enz.
Vergelijken we deze waarden met die uit een goniometrische tafel, dan blijken de gevonden decimalen te kloppen. Hierdoor aangemoedigd zetten we hetzelfde proces door tot 45°.
Sin 45° $= \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707$. Voor elke graad meer vermeerderen we de sinus dus met (0,707 — 0,500) : 15 = 0,014.
Op deze manier krijgen we:
sin 31° = 0,50 + 0,014 = 0,51 etc. Tot 45° blijken de zo berekende waarden weer goed overeen te stemmen met die uit de tafel.
Heb je wel eens een grafiek gezien van de functie y = sin x? Dan is je misschien opgevallen dat de waarde van de sinus boven de 45° niet

meer zo gelijkmatig toeneemt. Als we nu nog willen blijven werken met evenredige delen, worden onze stapjes te klein en bovendien moeten we dan weer de sinus gaan berekenen van een aantal hoeken tussen 45° en 90°.

We nemen daarom onze toevlucht tot de volgende kunstgreep: als we de sinus van een hoek tussen 45° en 90° willen vinden, gaan we uit van de sinus van het complement. Stel we willen vinden sin 53°.

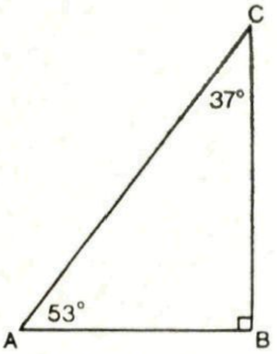
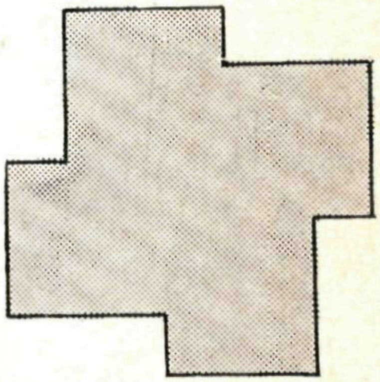


Fig. 23

Volgens het voorgaande vinden we voor sinus (90° — 53°) = 37° de waarde 0,60. We berekenen dan in ABC (zie Fig. 23) BC met behulp van de stelling van Pythagoras en vinden: BC = 0,8. Dan is sin 53° = 0,80.

Is het ook mogelijk om op deze wijze een tangenstafel samen te stellen?

Denkertjes



17. Het grijze gebied in de nevenstaande figuur ontstaat door uit een vierkant met zijden van 12 centimeter vier rechthoeken van 2 cm bij 5 cm weg te knippen. Teken dat grijze gebied over en construeer dan een zo klein mogelijk vierkant, dat dat gebied omsluit. Los deze opgave ook op voor het geval, dat de 5 cm veranderd wordt in 4 cm.
18. Je kunt de grijze massa van je hersenen nog op een andere manier laten spelen met het grijze gebied uit de figuur bij Denkertje 17. Het is geen kunst dat gebied in stukken te knippen, waarvan je een nieuw vierkant kunt leggen. Het is wel een kunst om het aantal stukken daarbij zo klein mogelijk te houden. Laat eens zien, wat je kunt bereiken.
19. Kies de drie getallen x, y, z zodanig, dat voldaan is aan de drie ongelijkheden
$$\begin{aligned} x + y + 3z &\geqslant 13 \\ x + 2y &\geqslant 4 \\ x &\geqslant 1 \end{aligned}$$
en dat tevens x + y + z minimaal s. (Beredeneerde oplossing gevraagd).
20. Voor een proefwerk werden de volgende cijfers gegeven: één twee, vier vieren, drie zessen en verder nog enkele achten en enkele tienen. Het gemiddelde cijfers was 6,3. Wat kan je uit deze gegevens te weten komen omtrent het aantal achten?

°Haasje over

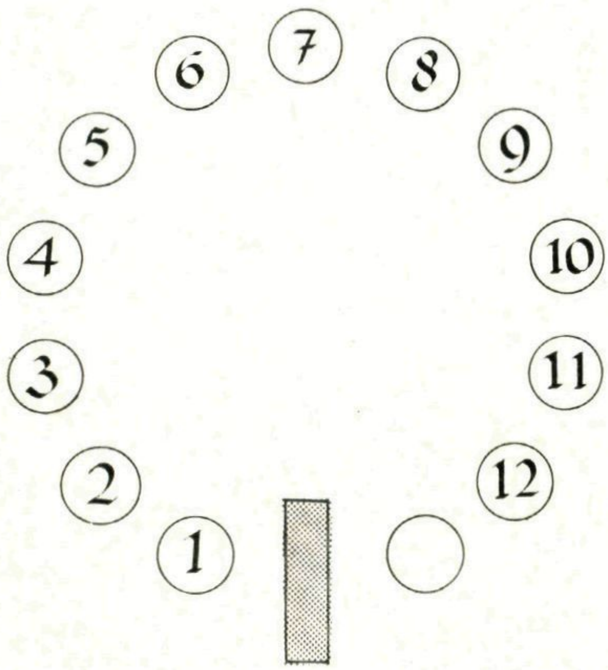
Bart Habers, Boccherinistraat 18, Castricum schreef ons een brief over de volgende puzzel:

Twaalf getallen staan in een kring, waarin ook een open plaats en een „hindernis" is opgenomen. Ze staan kloksgewijs opklimmend gerangschikt. Het is de bedoeling om daarvan te maken kloksgewijs afdalend (de 12 links van de hindernis, waar nu de 1 staat; de 1 op de plaats waar zich nu 12 bevindt; de open plaats op zijn oude plekje rechts naast de hindernis). Om dat doel te bereiken, zijn de volgende zetten toegestaan:

a Een getal dat zich vlak naast de open plaats bevindt, zonder dat de hindernis daar tussen staat, mag je naar die open plaats verschuiven.

b Wordt een getal alleen maar door één ander getal van de open plaats gescheiden, dan mag het over dat andere getal naar de open plaats toe springen.

c Een getal, dat vlak naast de hindernis staat mag tenslotte een reuzensprong maken door eerst over de hindernis en dan over het daarachter liggende getal te zeilen en onmiddellijk daarna op de open plaats te landen.



Van de beginstand uit kan alleen 12 de a-zet doen en alleen 11 de b-zet doen. De c-zet is van de beginstand uit niet mogelijk; als de eerste zet het verschuiven van 12 is, dan kan de tweede zet echter de reuzensprong van 1 zijn.

Bart Habers heeft het doel bereikt na 44 zetten. Zijn vraag is: kan het korter, kan het anders, Probeer het eens. En vind je een oplossing in niet meer dan 44 zetten, stuur hem die dan per briefkaart toe. Hij wacht vol spanning op jullie getallengymnastiek.

Oplossingen van Denkertjes uit het eerste nummer

1. Het wordt wel tijd dat wij in ons taalgebruik onderscheid gaan maken tussen de cirkel als lijn en de cirkel als gebied. De Fransen en Belgen doen dat door te spreken over „cercle" en „disque" of over „cirkel" en „cirkelschijf". Zullen wij hun voorbeeld maar volgen? Anders moeten we ruzie gaan maken over de twee getoonde oplossingen: een kwart cirkelschijf met een straal van $2\sqrt{3}$ en een kwart cirkel met een straal van $3\sqrt{2}$. Met een goed antwoord heb je al tien ladderpunten verdiend, maar stuurde je ze allebei dan krijg je vijftien punten.

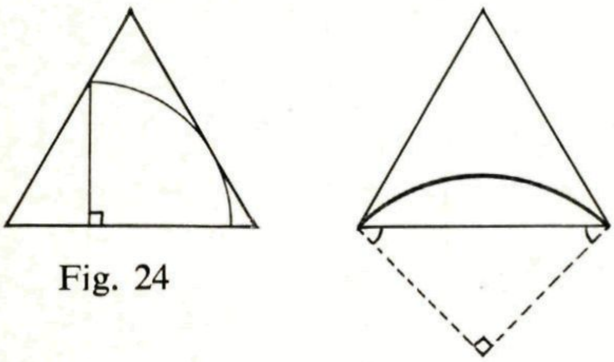


Fig. 24

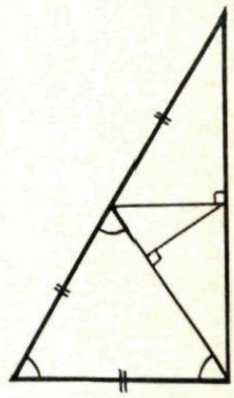


Fig. 25

2. 15 vierkanten met zijden van 14 centimeter (vijf rijen van drie); 16 vierkanten met zijden van 12,5 centimeter (vier rijen van vier).
3. Vier verschillende vijfhoeken (de drie gelijke hoeken kunnen wel en niet op elkaar volgen en zo is het ook met de drie gelijke zijden).
4. De gevraagde waarden van p zijn die, welke groter dan 20 zijn.
5. ab, ac en bc zijn positief en hebben 1 tot som. Elk van deze drie getallen ligt dus tussen 0 en 1. Daaruit blijkt dat hun produkt $a^2b^2c^2$ ook tussen 0 en 1 ligt. Zo zie je, dat het positieve getal abc kleiner dan 1 is.
6. Het produkt van vier opvolgende natuurlijke getallen kan *niet* het kwadraat van een natuurlijk getal zijn: het is namelijk altijd 1 minder dan zulk een kwadraat. Dit blijkt als volgt:
$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = (x^2 + 3x + 1 - 1)(x^2 + 3x + 1 + 1) = (x^2 + 3x + 1)^2 - 1.$
7. Op elke zijde tel je ten hoogste $100 - 3 = 97$ nieuwe snijpunten. Het maximale aantal nieuwe snijpunten bedraagt dus de helft van 9700 of 4850.
8. Omdat $x^{100} - 2$ een 73-voud is, is ook $x^{101} - 2x$ een 73-voud. Omdat het verschil van twee 73-vouden zelf ook een 73-voud is, blijkt dus het getal
$(x^{101} - 69) - (x^{101} - 2x) = 2x - 69$
een 73-voud te zijn. Andere 73-vouden zijn dan ook $(2x - 69) + 73 = 2x + 4$ en de helft daarvan, dus $x + 2$.
9. Een priemfactor, die deelbaar is zowel op $x^2 - x + 1$ als op $x^2 + x - 1$, is deelbaar op hun verschil $2x - 2$ en op hun som $2x^2$. Omdat $x^2 - x + 1$ en $x^2 + x - 1$ allebei oneven zijn, kan zulk een priemfactor niet 2 zijn. Daarom kan het voorgaande herleid worden tot: zulk een priemfactor is deelbaar op $x - 1$ en op x. Dit echter is duidelijk onmogelijk.
10. Zie figuur 25.

Osculatie

Uit het Latijn *os* = *mond*, betekent mondje of kus. In de wiskunde wordt het gebruikt voor de nauwe aanraking van twee krommen, wanneer drie snijpunten zijn samengevallen.

Parabool

Uit het Grieks; *paraballein* = *er langs leggen.*

Sinus

In de Indische wiskunde heette de helft van de koorde van het dubbele van een cirkelboog de *ardhâ-jyâ* van die boog. Dit werd, afgekort tot *jyâ* of *jîv*, door de Arabieren geschreven als *ĝîb*. Dit leek veel op *ǧaib* = plooi of opening van een kledingstuk; figuurlijk: boezem. In het Lat. vertaald werd dit *sinus.*

Oplossingen van de Denkertjes inzenden vóór 20 december 1968

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

H. J. ENGELS, Muggenbroekerlaan 41, Roermond.
BRUNO ERNST, Daniël Marotstraat 184, Breda.
DRS. A. B. OOSTEN, Turftorenstraat 11A, Groningen.
A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.
G. A. VONK, Fahrenheitstraat 688, Den Haag.

Artikelen en problemen kunnen naar één van de redacteuren worden gestuurd.
Oplossingen van *Denkertjes* kunnen naar het eerste adres worden gezonden, oplossingen van andere problemen naar het vierde adres.
Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, *f* 2,50 per jaargang. Voor anderen *f* 4,—.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff N.V., Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van Wolters-Noordhoff.