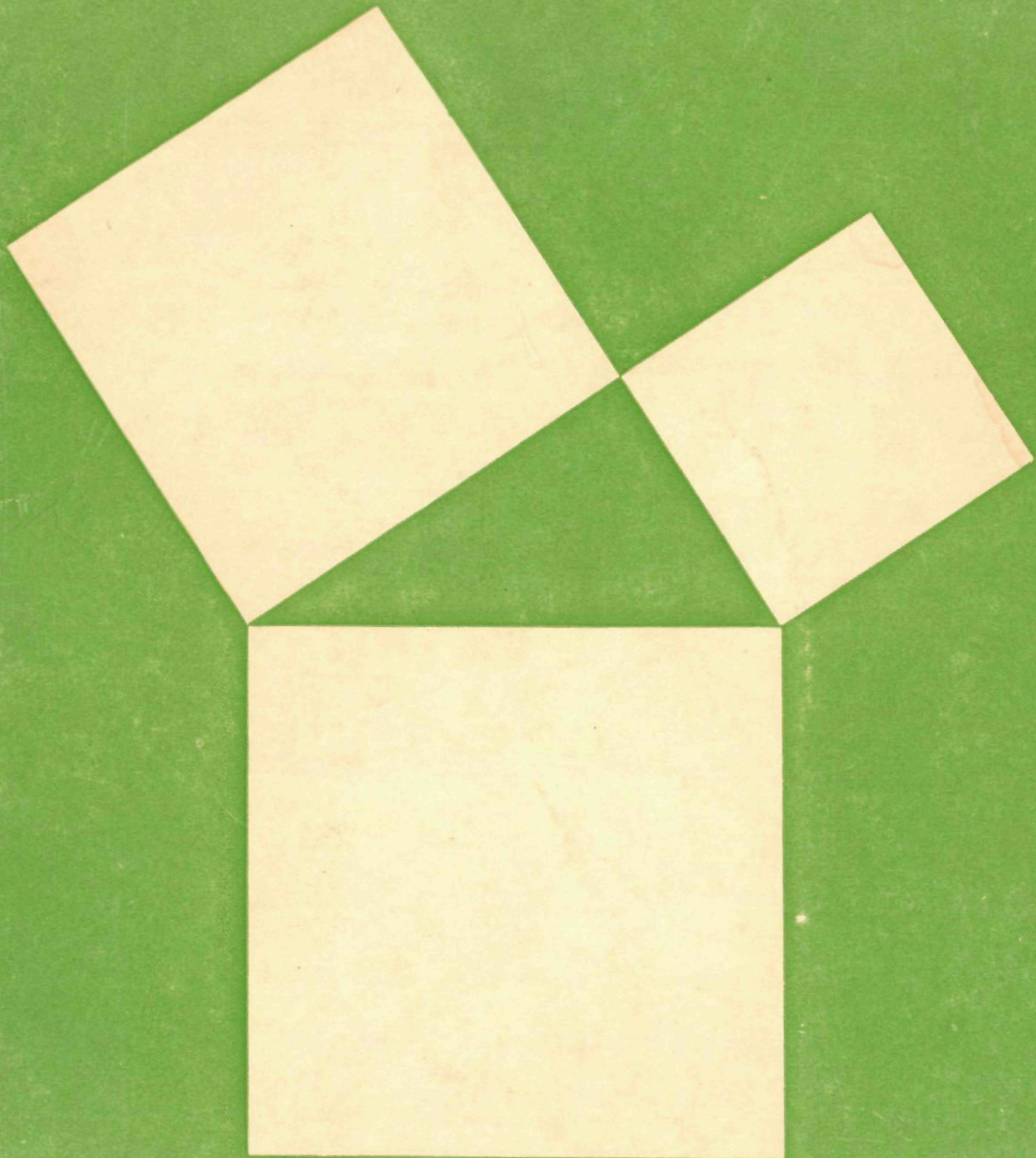


PYTHAGORAS^{over}



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

3

Achtste jaargang
1968/1969



Het sterrenbeeld de Grote Hond. De helderste ster is Sirius die 8,7 lichtjaar van ons verwijderd is.

Opname van R. Phildius, een zwitsers amateurastronoom. (uit Thieme's Sterrenfoto-boek)

Dit nummer . . .

heeft een licht sterrenkundig tintje.

Een wiskundetijdschrift kan zich dat wel eens een keer veroorloven, want de sterrenkunde is een van de oudste gebieden van toepassing van de wiskunde en omgekeerd is de sterrenkunde steeds een bron van inspiratie geweest voor het ontwikkelen van nieuwe wiskundige theorieën.

De bewegingen van zon, maan en sterren en het optreden van zons- en maansverduisteringen waren al lang voor het begin van onze jaartelling onderwerpen van studie. Iemand die het tijdstip van een zonsverduistering kon voorspellen moest wel groot aanzien genieten onder zijn tijdgenoten. Zo iemand was Thales van Milete, van wie het verhaal gaat dat hij op een avond zo verdiept was in de sterren, dat hij in een sloot tuimelde. Waarop een oude vrouw uitriep: „Hoe kunt U zeggen wat er in de hemel gebeurt, als U niet kunt zien wat er vlak voor Uw voeten ligt?”

Er is nog een andere reden waarom de sterrenkunde wel eens wat aandacht mag hebben en die is dat Nederland op dit terrein een wereldreputatie heeft. Natuurlijk is het waarnemen in de sterrenkunde een belangrijk onderdeel en in dit opzicht is Nederland niet bepaald bevoorrecht wat de mogelijkheden aangaat.

Tenminste, wat betreft de *optische* sterrenkunde. Hierbij kan alleen 's nachts de hemel worden afgespeurd, en dan ook alleen nog bij onbewolkte hemel. Vandaar dat de waarnemingsstations tegenwoordig hoog in de bergen liggen, o.a. in Californië en Zuid-Afrika.

Er is echter nog een ander soort sterrenkunde en wel de *radio-sterrenkunde*, waarbij radio-signalen uit de ruimte worden opgevangen. Dit kan 24 uur per etmaal gebeuren, ongeacht of het nu regent of dat de zon schijnt.

De Nederlandse radio-telescoop in Dwingelo is enige tijd de grootste ter wereld geweest, voor bv. de machtige telescoop te Jodrell Bank in Engeland gereed kwam (bekend van de ruimtevaart).

Op het ogenblik wordt te Hooghalen een aantal radiokijkers gebouwd, die tezamen één reusachtige kijker zullen vormen. Inderdaad, op astronomisch gebied telt Nederland mee in de wereld, en dat is toch ook iets dat wel eens gememoreerd mag worden.



°°Waarom paraboolspiegels?

De grote radiotelescoop in Dwingelo, waar zoveel belangrijke astronomische ontdekkingen mee zijn gedaan, heeft een holle spiegel van metaalgaas. De hierop vallende „radio-golven” uit het heelal worden gereflecteerd naar de antenne die in het brandpunt is bevestigd. De doorsnede van deze spiegel mag niet een deel van een cirkel zijn, maar ze moet parabolisch zijn.

Men spreekt daarom van paraboolspiegels. Deze benaming is niet erg correct want de spiegel heeft de vorm van een omwentelingsfiguur van de parabool en moet daarom *paraboloïde* heten.

Ook de spiegels van verschillende soorten optische telescopen zijn paraboloïden.

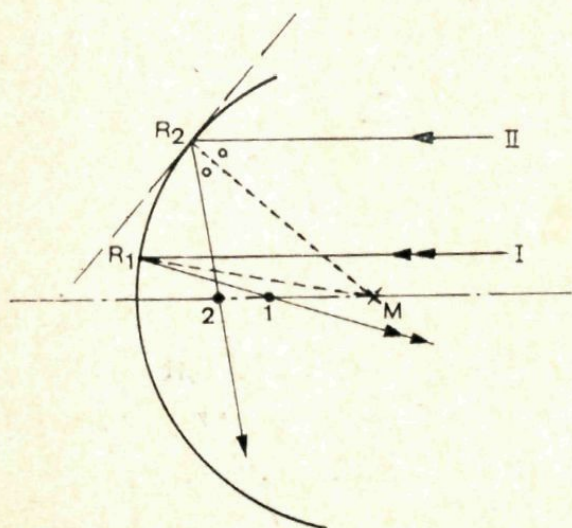


Fig. 1

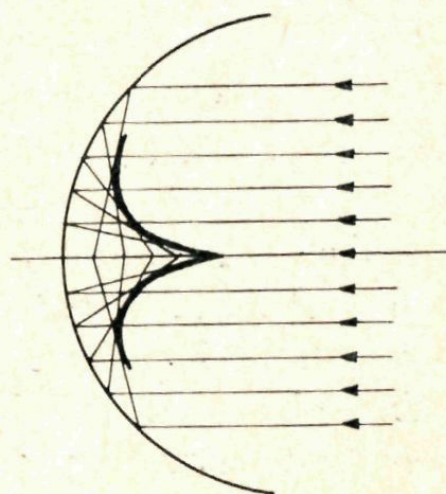


Fig. 2

Waarom kan men hier geen sferische spiegels gebruiken? In figuur 1 is de cirkelvormige doorsnede van een sferische spiegel getekend, met twee evenwijdig invallende stralen I en II. Construeren we de teruggekaatste stralen dan blijken deze de hoofdas in twee verschillende

punten 1 en 2 te snijden. (De constructie van de teruggekaatste straal is eenvoudig: bij R_1 en R_2 moet de hoek van inval gelijk worden aan de hoek van terugkaatsing en dit is zo als we zorgen dat de stralen MR_1 en MR_2 deellijnen zijn van de hoeken tussen invallende en teruggekaatste straal).

Een bundel evenwijdig invallende stralen wordt dus niet naar één punt teruggekaatst. De omhullende figuur van de teruggekaatste stralen vormt een zgn. kaustische lijn, zie figuur 2.

Als we figuur 1 nog eens bekijken en we stellen ons voor dat de spiegeldoorsnede uit een reep buigzaam spiegelend materiaal bestaat, dan zouden we kunnen zorgen dat ook straal II teruggekaatst werd naar punt 1, als we bij R_2 de spiegel een iets kleinere kromming geven. We moeten hem als het ware iets terugbuigen.

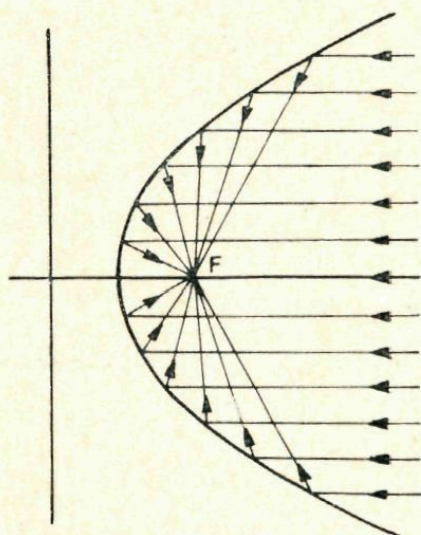


Fig. 3

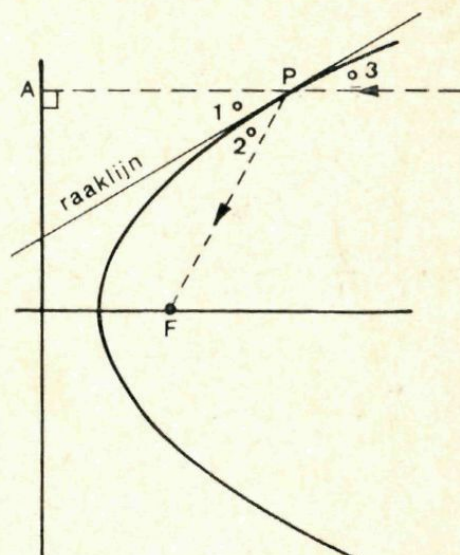


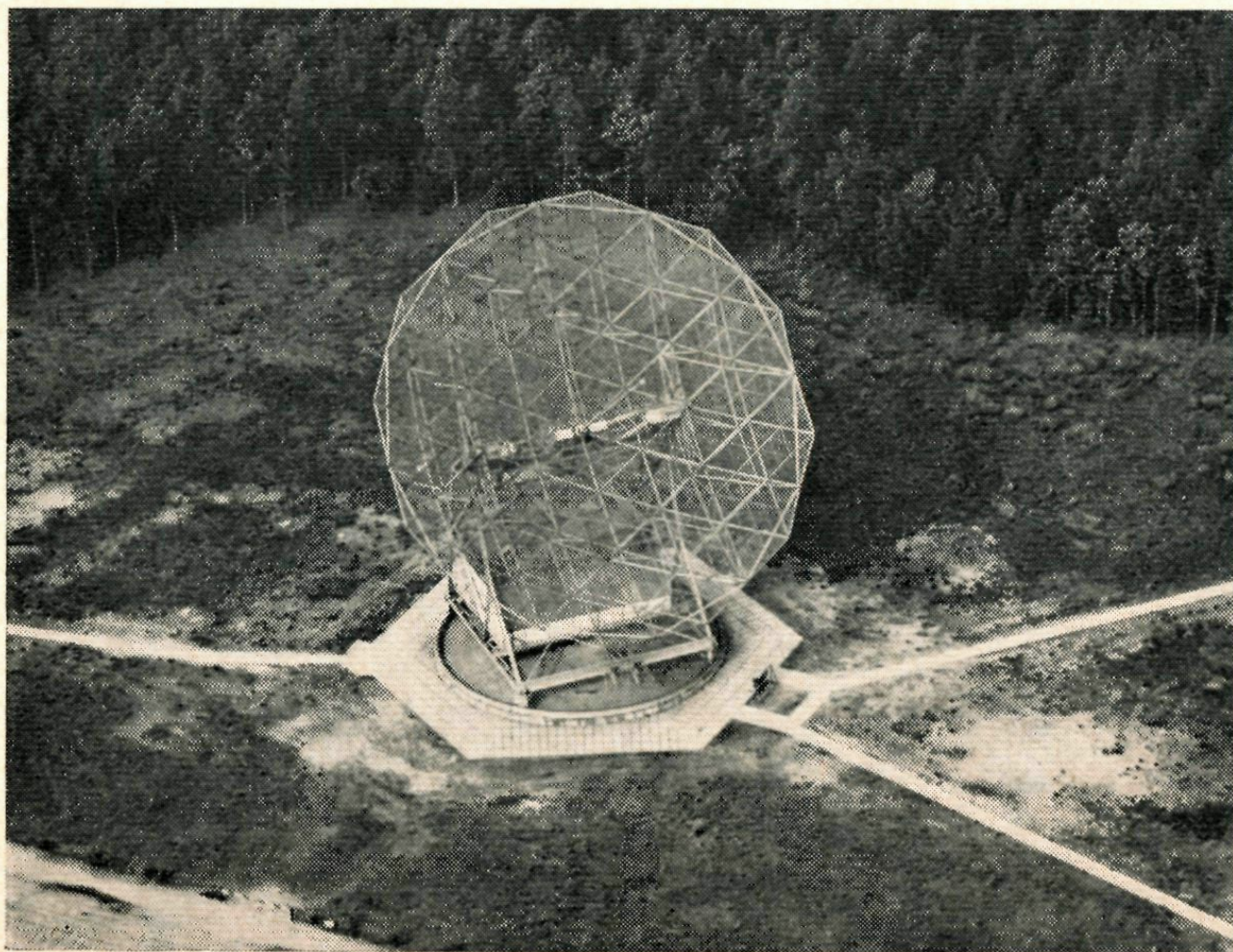
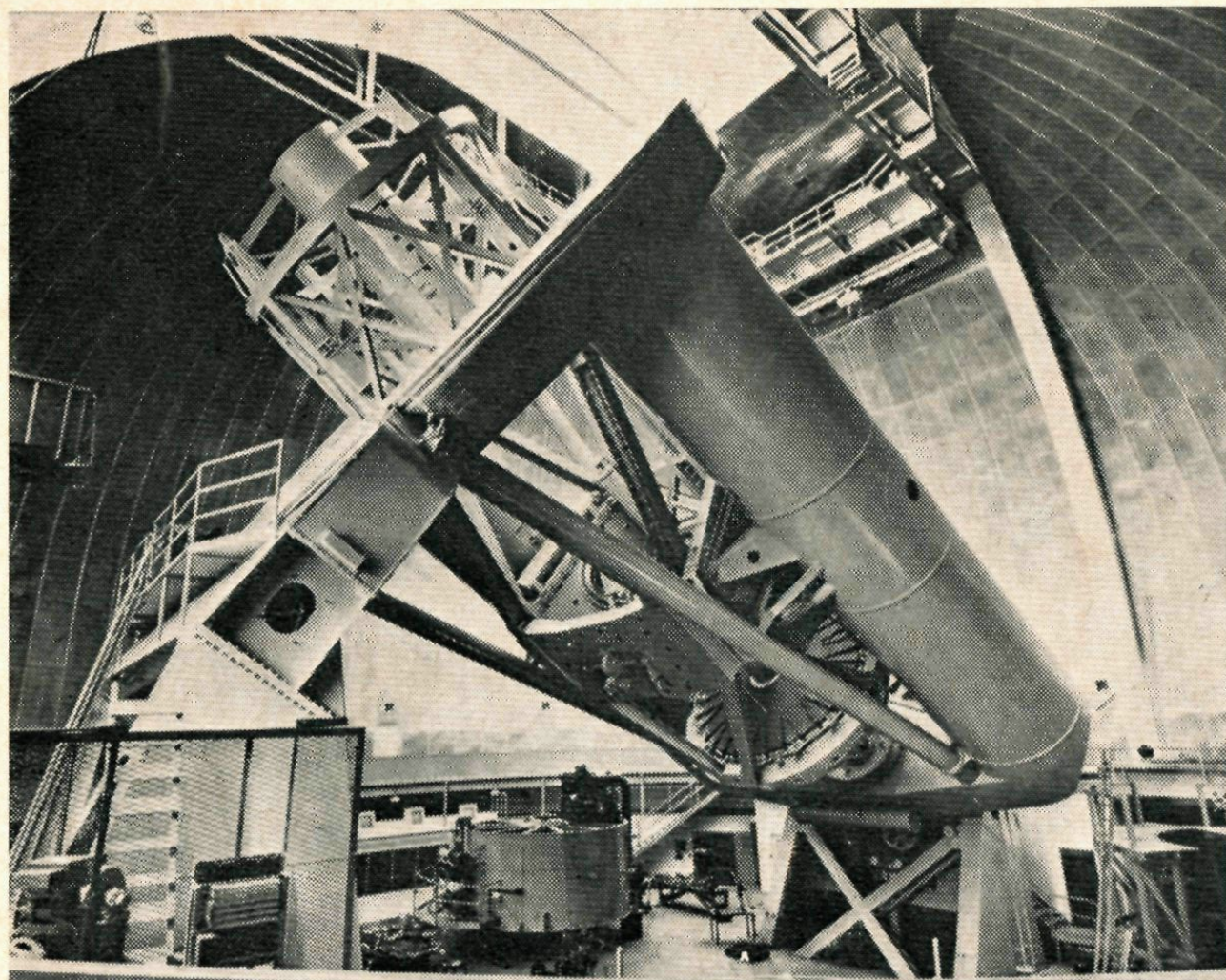
Fig. 4

Een figuur waarbij alle evenwijdig invallende stralen in één punt F (dit punt F heet daarom brandpunt) worden teruggekaatst is de parabool. Dit is eenvoudig te bewijzen (figuur 3) als we bedenken dat de raaklijn in P aan de parabool de hoek FPA middendoor deelt. Dit laatste is bewezen in het vorige nummer van Pythagoras (pag. 28).

Dus $\angle P_1 = \angle P_2$.

$\angle P_1$ en $\angle P_3$ zijn overstaande hoeken dus $\angle P_1 = \angle P_3$ en bijgevolg $\angle P_2 = \angle P_3$. M.a.w. de hoek van inval is gelijk aan de hoek van terugkaatsing.

Omdat dit geldt voor iedere straal van de bundel die evenwijdig aan de as invalt, worden alle stralen van die bundel naar F teruggekaatst. Zie figuur 4.



Bij parabolische reflectoren, waarbij in F een lichtbron staat om een evenwijdig uittredende lichtbundel te krijgen, is de paraboloidvorm dikwijls goed te zien (denk maar aan een fietslantaarn). Bij spiegels die voor beeldvorming moeten dienen, bv. in een spiegeltelescoop, is het verschil tussen een sferische spiegel en een paraboloid niet zo maar zichtbaar.

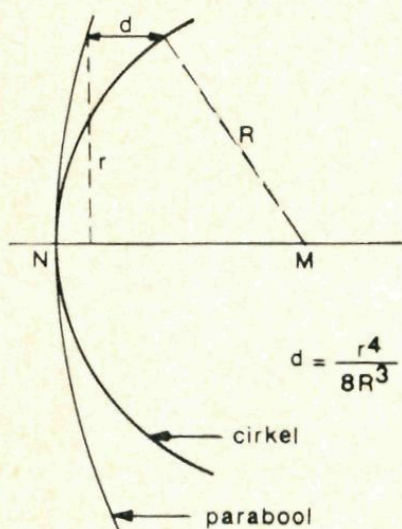


Fig. 5

In figuur 5 is de doorsnede van een sferische en een paraboloidespiegel getekend. Beide spiegels hebben dezelfde middellijn.

De kromtestraal van de sferische spiegel is R . Als beide spiegeloppervlakken elkaar in N raken, dan zijn de randen van de spiegels op een afstand d van elkaar. We kunnen d berekenen met de formule

$$d = \frac{r^4}{8R^3} \text{ (deze formule leiden we hier niet af).}$$

Berekenen we d eens voor een telescoopspiegel met een middellijn van 15 cm en een kromtestraal van 240 cm, dan blijkt dat $d = 0,0000285$ cm en dat is ongeveer een halve golflengte van geel licht!

Bij grote spiegels met een betrekkelijk korte brandpuntsafstand is dit natuurlijk wel wat meer. Bereken d maar eens voor de spiegel van de grootste spiegeltelescoop die wij hebben, nl. de telescoop op de Mount Palomar in Californië; daarvan is $r = 250$ cm en $R = 3300$ cm.

Foto links boven: De 200 inch Hale telescoop op de Mount Palomar in Californië.
Foto links onder: De radio-telescoop te Dwingelo, met een doorsnee van 25 meter.

°Kepler en de ellips

Zo rond 1600 leefde de beroemde Deense astronoom *Tycho Brahe*, die een groot aantal nauwkeurige waarnemingen deed over de bewegingen van de planeten langs de hemel. Een kleine honderd jaar tevoren had *Copernicus* al een theorie dat niet de aarde, maar de zon het middelpunt van ons zonnestelsel is. Bekend is ook dat *Galileo Galilei* deze leer nog in 1632 publiekelijk moest afzweren, omdat ze in strijd zou zijn met de Heilige Schrift.

De assistent en latere opvolger van Tycho Brahe was *Johann Kepler*, die de waarnemingen van de Deen gebruikte voor berekeningen. Tegenwoordig kennen we allerlei hulpmiddelen voor het rekenwerk, in die tijd was dit nog niet het geval. Kepler leerde de moeilijkheden van het rekenen aan den lijve kennen en was dan ook zeer verheugd over het voorstel van *Simon Stevin* om gebroken getallen als tiendelige breuken te gaan schrijven. Voor die tijd werden breuken in zestigsten uitgedrukt, (minuten en seconden!) wat het rekenen erg ingewikkeld maakt. De uitvinding van de logaritmen betekende een verdere stap naar vereenvoudiging van het rekenwerk.

Alle moeite van Kepler werd beloond. Hij slaagde erin drie wetten af te leiden over de loop van de planeten, die nog altijd bekend staan als de wetten van Kepler.

De eerste wet luidt: *De baan die een planeet beschijft om de zon, is een ellips. De zon staat in één van de brandpunten van die ellips.*

Wat is een ellips?

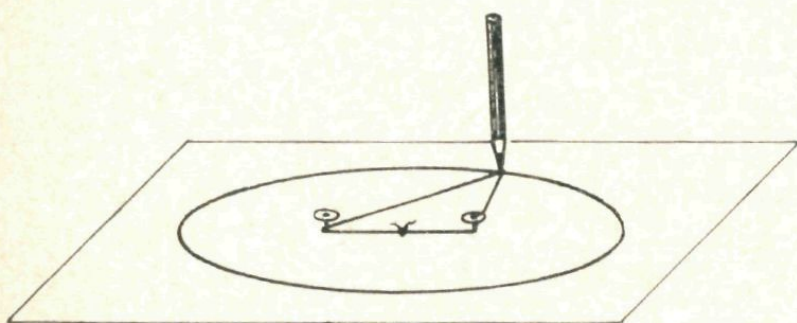


Fig. 6

Neem een touwtje en twee punaises. Knoop de uiteinden van het touwtje aan elkaar en zet de punaises vast op een stuk papier. Leg het touwtje om de punaises en span het strak met een potlood. Beweeg het potlood om de punaises, het beschrijft dan een ellips. Het is dus een verzameling van punten waarvan de som van de afstanden tot twee vaste punten constant is.

De twee vaste punten (de punaises) heten de brandpunten van de ellips. Hoe verder je de punaises uit elkaar zet, hoe platter de ellips wordt en hoe dichter je ze bij elkaar zet, hoe meer de ellips op een cirkel gaat lijken. In fig. 7 heet AB de lange as van de ellips. De planeetbanen zijn erg ronde ellipsen, d.w.z. ze wijken maar weinig af van cirkels.

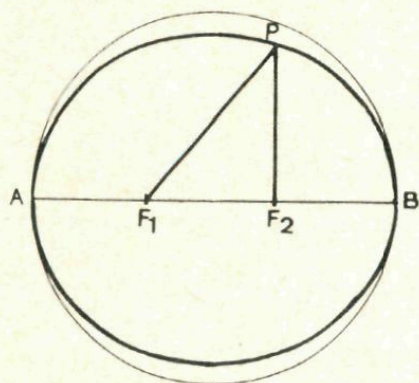


Fig. 7a

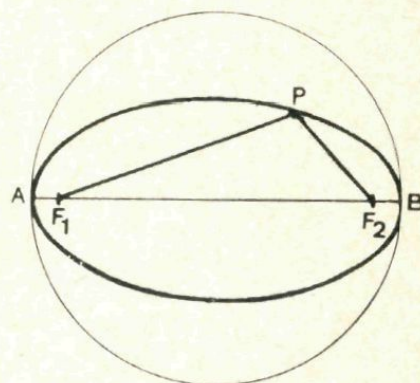


Fig. 7b

Waarschijnlijk neem je stilzwijgend aan dat de planeten met constante snelheid hun ellipsen om de zon draaien.

Dit is niet waar, de tweede wet van Kepler zegt:

De verbindingslijn van de zon naar de planeet doorloopt in gelijke tijdvakken gelijke oppervlakten.

Dit is de zogenaamde perkenwet en deze houdt in dat de planeet als hij dicht bij de zon is sneller loopt dan wanneer hij veraf is, omdat de oppervlakte van de ellipssectoren die de voerstraal in een bepaald tijdvak doorloopt, constant moet zijn.

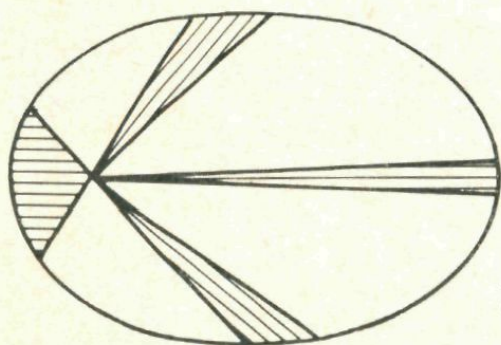


Fig. 8

De planeten staan op verschillende afstanden van de zon. Het dichtst bij de zon staat Mercurius, dan Venus, Aarde, Mars, Jupiter, Saturnus, Uranus en Pluto. De aarde draait in een jaar haar baan, Pluto heeft daar 248 jaar voor nodig.

De derde wet van Kepler geeft een verband tussen de omloopstijd en de afstand tot de zon.

De kwadraten van de omloopstijden van de planeten verhouden zich als de derde machten van de lange assen van hun ellips-banen.

De drie wetten van Kepler vormen een goed voorbeeld van toepassing van de wiskunde op de sterrenkunde, bovendien zijn ze bijzonder up to date in dit tijdperk van ruimtevaart, want ook op de banen van kunstmatige satellieten, die tegenwoordig in grote aantallen om de aarde draaien, zijn de wetten van Kepler van toepassing. Hierbij staat dan niet de zon maar de aarde in een brandpunt van de ellips die ze beschrijven.

De lootprijs voor de Denkertjes uit nummer 1 is gewonnen door Fred Pach uit Laren (N.H.).

De top van de ladder ziet er na het eerste nummer als volgt uit: J. Teekens, Den Haag 102; J. Bergstra, Rotterdam 100; G. de Lavalette, Rotterdam 100; A. Hoekstra, Naarden 100; H. Schumacher, Heemstede 100; H. Jansen, Zutphen 98; D. Hoekzema, Sliedrecht 96; C. Jacobs, Amsterdam 95; T. van der Berg, Leeuwen Beneden (Gld.) 90; K. Bakker, Alkmaar 90; B. Arnold, Utrecht 90; K. Baggerman, Gorinchem 90.

De Denkertjes uit dit nummer moeten voor 10 februari 1969 worden ingezonden naar redacteur Engels. Ook wanneer dit niet nadrukkelijk wordt gevraagd dient de redenering of berekening die tot het antwoord leidt, er bij te worden vermeld.



21. Een spel voor twee spelers begint met het neerleggen van een lange, aaneengesloten rij centen op tafel. Daarna doen de twee spelers beurtelings een zet. Elke zet bestaat uit het wegnemen van één cent of uit het wegnemen van twee tegen elkaar aan liggende centen. Het spel eindigt door het

wegnemen van de laatste cent en degene, die dat doet, is winnaar.

Laat zien dat één van de spelers door op een bepaalde manier te spelen zich zeker kan stellen van de winst.

22. Los x, y, z op uit $x^2 + y^2 + z^2 + yz + xz + xy = 0$.

(Ingezonden door Jan Bol, Honselersdijk.)

23. Lever 100 opvolgende natuurlijke getallen, waarvan elk de eigenschap heeft groter te zijn dan die macht van 2, die de som van zijn cijfers tot exponent heeft. (Voorbeeld: het getal 12 heeft die eigenschap, want 12 is groter dan 2^{1+2} .)

°Hoe ver staat die ster van ons af?

Waarschijnlijk heb je allemaal wel eens de ster Sirius gezien. Hij is de helderste ster die wij op het noordelijk halfrond kunnen zien. Hij staat in het verlengde van de drie gordelsterren van ORION; schuin eronder. In de wintermaanden een spectaculaire verschijning aan de avondhemel.

Hoe ver staat zo'n ster nu van ons af?

Tot 1838 kon men slechts gissen naar de afstanden van sterren.

Door bijzonder fijne metingen gelukte het toen aan de Duitse astronoom Bessel om de afstand van een ster te bepalen. Het was een betrekkelijk lichtzwak sterretje in de ZWAAN (ster no 61). Deze bleek op de onvoorstelbaar grote afstand van 11 lichtjaar te staan. Dat is 11 maal de afstand die het licht in één jaar aflegt, dus $11 \times 60 \times 60 \times 24 \times 365 \times 300\,000$ km.

Het is niet zo moeilijk dit te verifiëren als je ervan uitgaat dat het licht in een seconde de afstand van 300 000 km aflegt.

Bij latere metingen bleek de dichtstbijzijnde ster 4,4 lichtjaar van ons af te staan (de ster proxima Centauri).

Hoe meet men zulke afstanden?

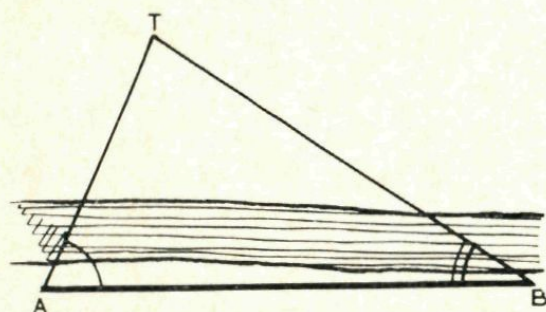


Fig. 9a

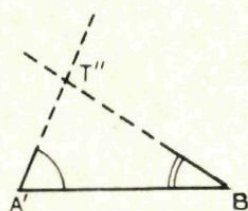


Fig. 9b

Daarvoor kijken we eerst eens naar figuur 9a. Een landmeter ziet aan de overkant van de rivier een bergtop T die hij in kaart moet brengen. Hij kan echter niet bij de top komen om eventueel rechtstreeks zijn afstand tot de rivier te meten. Hij zet bij A en bij B palen in de grond. Staande bij A meet hij de hoek A, daarna meet hij in B de hoek B. De afstand AB wordt ook nauwkeurig gemeten.

Het is duidelijk, dat hij nu op schaal de driehoek A'B'T' kan tekenen (figuur 9b), en daaruit de afstand van T tot de basislijn A'B' kan bepalen. Het is je misschien bekend, dat de landmeter hiervoor niet op

schaal gaat tekenen, maar dat hij uitgaande van zijn meetgegevens enige goniometrische berekeningen maakt om de afstand van T te bepalen. Maar het principe blijft hetzelfde.

Zo zouden we ook de afstand van een ster kunnen bepalen door op aarde een zo groot mogelijke basis AB te kiezen en van daaruit de hoeken naar de ster te meten. Dan blijkt dat de hoeken A en B samen 180° plus of min de meetfouten zijn. Een basis op aarde is dus niet groot genoeg om de enorme afstand van een ster te kunnen bepalen. Gelukkig beschikken wij nog over een grotere basis. De aarde beschrijft in een jaar haar baan om de zon. Op twee tijdstippen die een

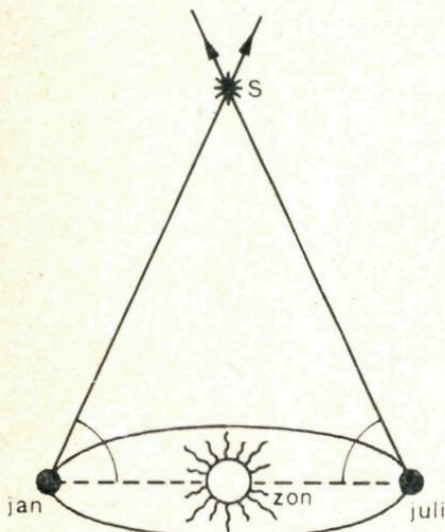


Fig. 10

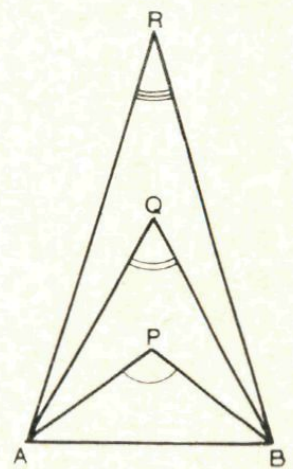


Fig. 11

half jaar uiteen liggen, kunnen we beschikken over een basis van 300 000 000 kilometer! (figuur 10) Maar ook dan is de meting nog bijzonder moeilijk.

Maar kijken we eerst eens naar figuur 11. Hier zijn A en B de plaatsen die de aarde bijvoorbeeld in januari en in juli inneemt. In P, Q en R staan hemellichamen op steeds grotere afstanden. We zien, dat de tophoeken van de driehoeken ABP enz. kleiner worden naar gelang het hemellichaam verder weg staat. Deze tophoek is dus een maat voor de afstand, en deze tophoek is rechtstreeks te meten, zoals we dadelijk zullen zien.

In figuur 12 is nogmaals de situatie van de aarde, de zon en een ster weergegeven. De afstand aarde-zon wordt als eenheid gebruikt (de zogenaamde Astronomische Eenheid, de A.E.). De hoek p noemt men de parallax van de ster. Dit is dus de helft van de tophoek die in figuur 11 bedoeld is.

Hoe meet men zo'n hoek aan de hemel? Bessel moest nog zeer nauwkeurig aan het oculair van zijn telescoop op twee data (een half jaar uit elkaar gelegen) de positie van een ster tussen de andere sterren meten om een kleine verschuiving te kunnen constateren. Tegenwoordig gaat het fotografisch. Zie figuur 13a en b. Een ster staat in januari op de plaats S_1 en in juli op de plaats S_2 . De verschuiving aan de hemel in hoekmaat is nu de tophoek uit figuur 12 ofwel twee maal de parallax van de ster.

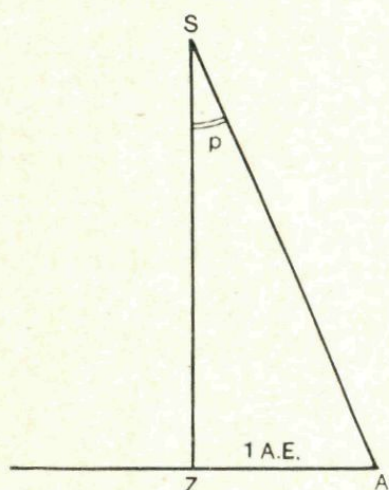


Fig. 12

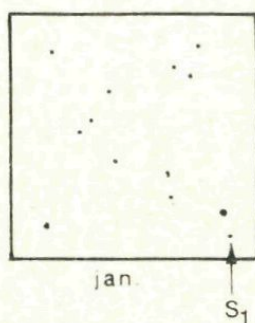


Fig. 13a

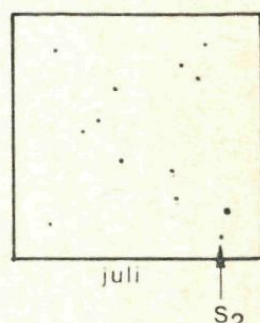


Fig. 13b

Hoe groot zijn nu sterparallaxen? Die van de dichtst bijzijnde ster is *nog geen boogseconde* (1 boogseconde ofwel $1''$ is $1/3600$ graad). Hier volgen enige parallaxen van bekende sterren met daarachter de afstand van de ster in lichtjaren:

α -Centauri	$0'',760$	4,4 lichtjaar
Sirius	$0'',375$	8,7 „
Wega	$0'',123$	26,5 „
Spica	$0'',021$	160 „

En met Spica is de landmetersmethode (triangulatiemethode) haar grens genaderd. Een hoek van $0'',02$ is tegenwoordig nog juist te meten. Eigenlijk ligt de grens voor het bepalen van een *betrouwbare* parallax al bij $0'',05$. En van ca 700 sterren zijn op het ogenblik betrouwbare parallaxen bekend.

Je zult je meteen afvragen: hoe meet men dan grotere afstanden? Dit zullen we in een volgend nummer behandelen.

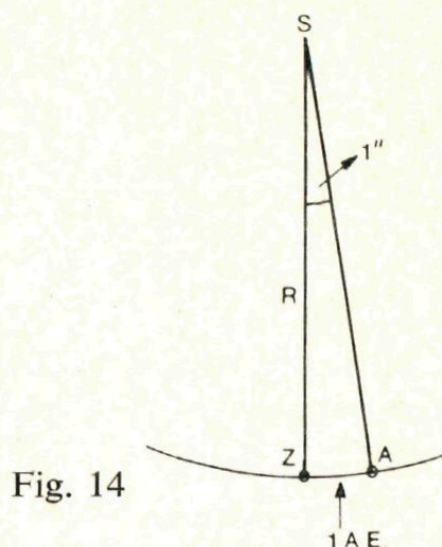
Nu rest ons nog het volgende: hoe berekent men de afstand in lichtjaren als de parallax van een ster gemeten is?

In figuur 14 is met de ster S als middelpunt en de afstand van de ster

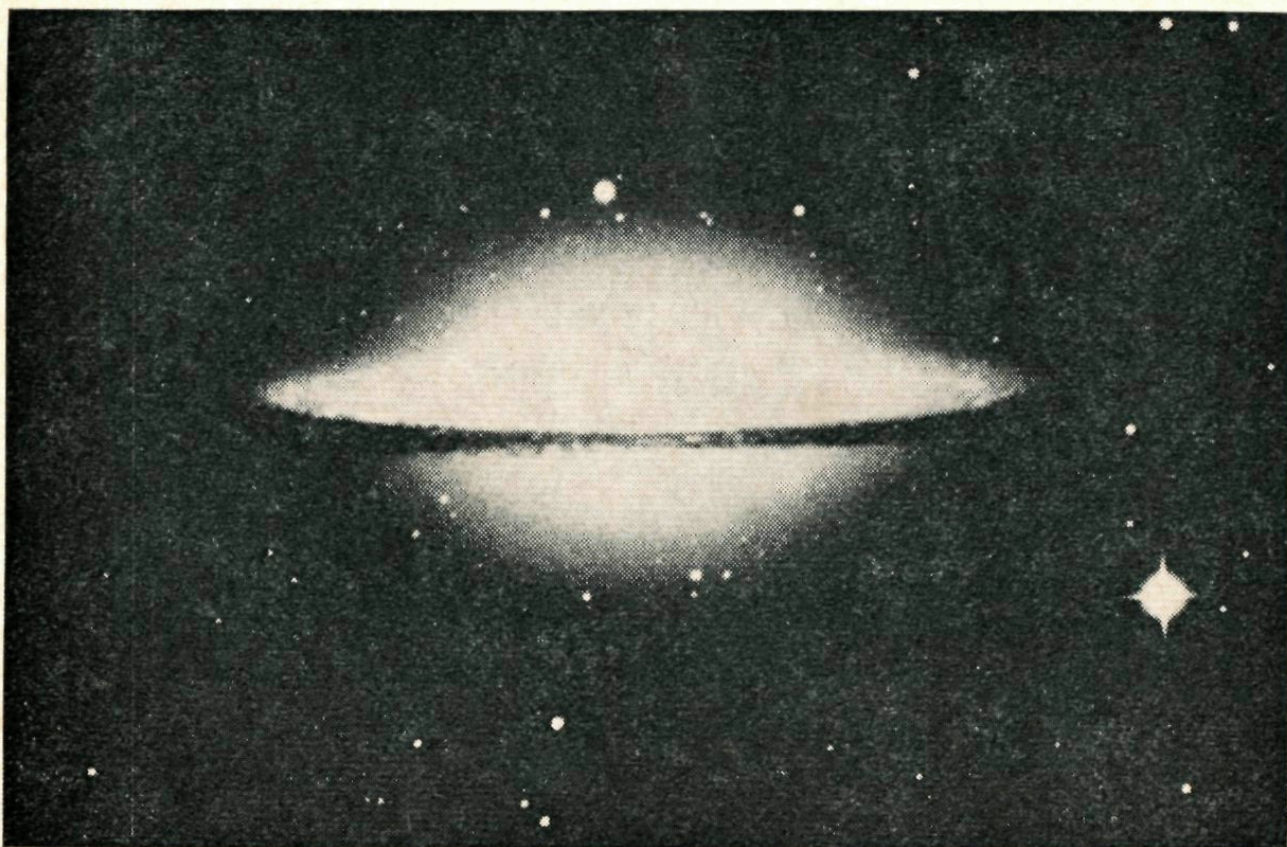
als straal een cirkel getrokken. Stel nu dat de ster een parallax van $1''$ heeft, dan is $1''$ op de cirkelomtrek 1 A.E. De hele cirkelomtrek is dan 60.60.360 A.E. Hieruit is R te berekenen:

$$2\pi R = 60.60.360 \text{ A.E.}$$

$$R = \frac{60.60.360}{2\pi} \text{ A.E.}$$



Reken nu zelf na dat dit 206 265 A.E. is of 3,26 lichtjaar. Nu kun je ook de opgegeven afstanden van de sterren α -Centauri, Sirius, Wega en Apica controleren. De afstand is immers omgekeerd evenredig met de parallax. Dit volgt uit figuur 11 en de overweging dat het hier gaat om zeer kleine hoeken.



Melkwegstelsel, dat wij zien in de richting van het sterrenbeeld de Maagd. Het is 20 miljoen lichtjaar van ons verwijderd. Zulke afstanden kan men niet met behulp van de triangulatiemethode bepalen.

°° Hoe krom is een kromme? (II)

In het vorige nummer hebben we gezien hoe we, volgens bepaalde afspraken, hierop een antwoord kunnen geven voor elk punt van een kromme. Dit betrof echter alleen krommen in een plat vlak. We willen nu kijken naar *ruimtekrommen*.

Voor de *vlakke kromme* gebruikten we de osculatiecirkel (M,r) , die in een punt van de kromme zich zo dicht mogelijk bij de kromme aansloot (drie samenvallende snijpunten), M heette het kromtemiddelpunt en r de kromtestraal. Van de kromming ρ in A gold dan $|\rho| = \frac{1}{r}$

Bij de rechte lijn is de kromming in elk punt nul, bij de cirkel is de kromming in elk punt gelijk aan het omgekeerde van de straal.

De wiskunde kent ook krommen die niet in een plat vlak liggen. Van een dergelijke *ruimtekromme* is een voorbeeld getekend in figuur 15.

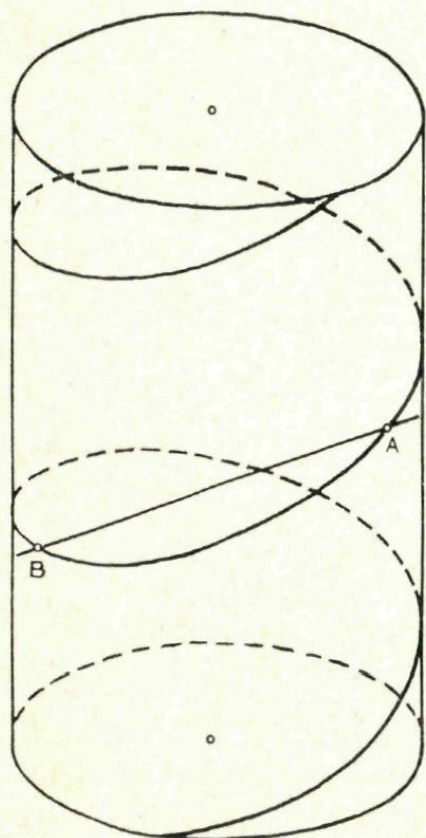


Fig. 15

Deze heet een regelmatige cirkelschroeflijn, een kromme die gelijkmatig langs een cilinder omhoogslingert. Je kent deze kromme wel van de schroefdraad van bouten en moeren. Kunnen we ook bij deze ruimtekromme K spreken van de kromming in een punt A ? Het

antwoord is natuurlijk ja, want anders zouden we er geen artikel aan wijden. Maar voor we deze kromming kunnen bepalen moeten we eerst weer enkele definities geven, namelijk van *raaklijn* en *osculatievlak*.

De raaklijn. Door het punt A en een wat verder gelegen punt B is een rechte lijn mogelijk (figuur 15). Schuiven we het punt B over de kromme naar A toe, dan gaat de rechte AB over in de rechte m (figuur 16) die twee samenvallende punten met de kromme gemeenschappelijk heeft. Dit noemen we een raaklijn.

Het osculatievlak. We nemen een vast punt A, in dit punt de raaklijn m aan de kromme. Verder een variabel punt B. Door B en m gaat een vlak. Schuiven we nu weer het punt B in de richting A langs de kromme, dan draait dit vlak om m. In de stand van het vlak die we bereiken op het moment dat B samenvalt met A spreken we van het *osculatievlak* O (figuur 16). Dit osculatievlak is het vlak dat zich in A zo dicht mogelijk bij de kromme aansluit. In het algemeen gaat daarbij de kromme door het osculatievlak.

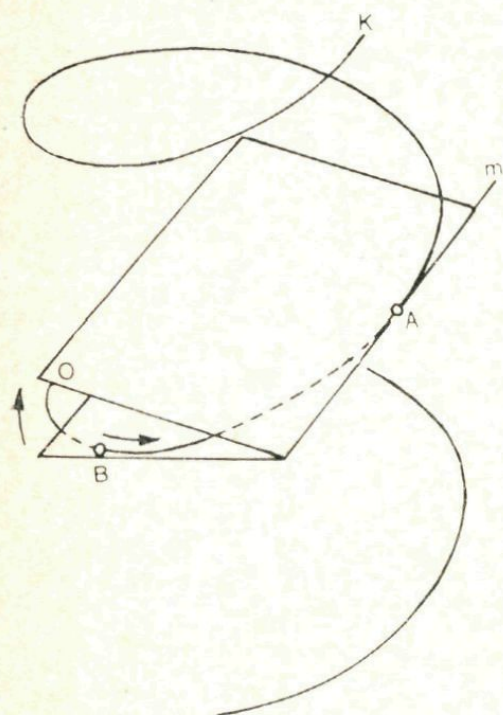


Fig. 16

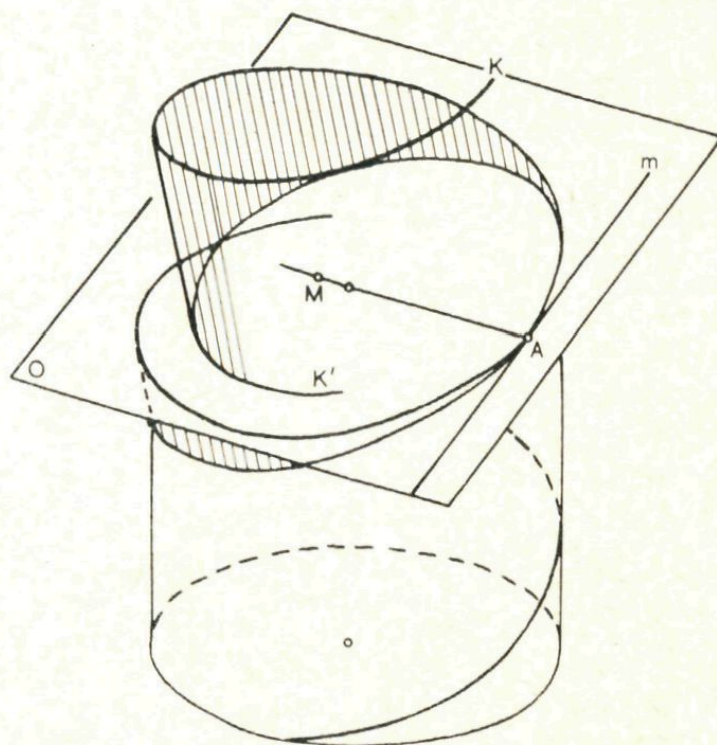


Fig. 17

We vormen nu de loodrechte projectie K' van K op het osculatievlak O (figuur 17). Deze vlakke kromme K' zal in de buurt van A vrijwel overeenkomen met K en men stelt daarom de kromming van K gelijk aan die van K' in A. Het kromtemiddelpunt is M.

We hebben hiermee het probleem van de bepaling van de kromming

van een ruimtekromme in een bepaald punt dus teruggebracht tot de bepaling van de kromming van een vlakke kromme in dat punt. Wie niet sterk is moet slim zijn.

Vragen.

Wat is het osculatievlak van een vlakke kromme?

Is de kromtestraal van een regelmatige cirkelschroeflijn in A groter dan, gelijk aan, of kleiner dan de straal van de cilinder?

Is de kromming van de regelmatige cirkelschroeflijn in alle punten gelijk?

Ook al kunnen we nu spreken over de kromming van een ruimtekromme, toch heeft deze nog geheimen voor ons. Niet alleen de kromming in elk punt is bepalend voor een ruimtekromme, ook de wijze waarop hij zich door de ruimte „wringt”. Die wringing of *torsie* komt tot uitdrukking in de verandering van de richting van het osculatievlak, zoals in figuur 18 is aangegeven met de osculatievlakken in A en C. De grootte van de torsie wordt gedefinieerd met behulp van de hoek tussen de osculatievlakken en de lengte van de boog AC.

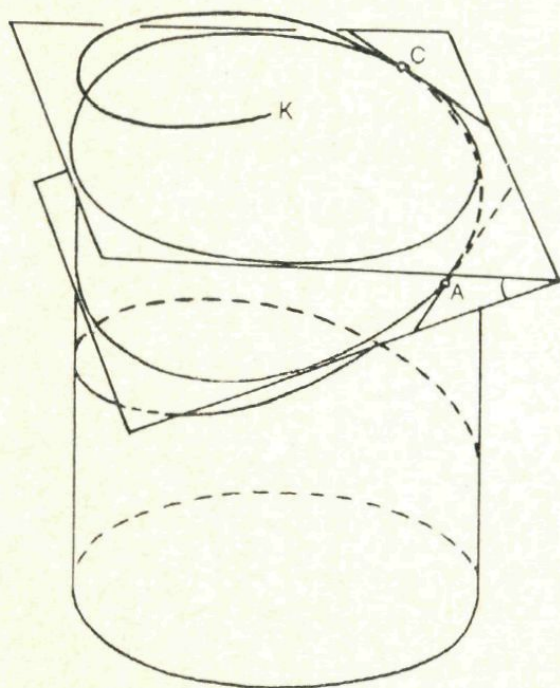


Fig. 18

Het zou te ver van de titel voeren om de torsie volledig te behandelen. De theorie van de ruimtekrommen speelt een belangrijke rol bij de ruimtevaart. Het onderdeel van de wiskunde waarin deze zaken worden bestudeerd heet de „differentiaal-meetkunde”, waarin ook gebogen oppervlakken aan de orde komen. In een artikel over regeloppervlakken in het volgende nummer kun je daarmee kennis maken. Je zult in dat artikel ook de antwoorden kunnen vinden op de vragen die hier in stonden.



24. Een driehoek bezit een hoogtelijnstuk met een lengte van 10 cm. Welke lengten kan de straal van de ingeschreven cirkel van die driehoek hebben?
25. Hieronder staan twee breuken. Welke breuk is de grootste van dat tweetal? (Geef een beredeneerd antwoord).

$$\frac{37^{37} + 1}{37^{30} + 1} \quad \text{en} \quad \frac{37^{25} + 1}{37^{18} + 1}$$

26. Op een groot vel roosterpapier wordt de kromme getekend, die $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10$ tot vergelijking heeft; als lengte-eenheid wordt daarbij gebruikt de zijde van een roostervierkantje. Hoeveel roostervierkantjes worden er door die kromme gesneden?
27. Een glasplaat met een dikte van 2 cm laat 81 % van het opvallende licht door en houdt dus blijkbaar 19 % van het opvallende licht tegen. Beredeneer met behulp van dit gegeven hoeveel procent van het opvallende licht doorgelaten zal worden door een glasplaat met een dikte van 1 cm (gemaakt uit dezelfde soort glas natuurlijk).

Mathemadics

Het Engels leent zich blijkbaar voor prachtige samentrekkingen, behalve mathemagics is er ook „mathemadics”, met de nadruk op „mad”. Het woord is geïntroduceerd door Martin Gardner, die in Amerika behalve door zijn boeken vooral beroemd is door zijn puzzelrubriek in het tijdschrift „Scientific American”. Wat houdt het begrip mathemadics in? Dat is moeilijk uit te leggen. Kijk zelf maar, hier volgen een aantal. De redactie houdt zich aanbevolen voor nieuwe vondsten.

parallel

optellen

integraal

permutatie

exponent

Hyperbool

ASYMPTOOT

continuu

DRAAIING
VERSCHUIVING

LOODRECHT

vector

wortel

wortel

spiegeling

sinus

EQUIVALENT

°Het bewijs kwam na 25 jaar

Worden er nog nieuwe stellingen gevonden in de vlakke meetkunde? Je zou misschien denken dat na zo'n 26 eeuwen studie op de meetkunde in het platte vlak er geen nieuwe vondsten meer worden gedaan. Het tegendeel is waar. Nog regelmatig wordt melding gemaakt van nieuwe stellingen. Aan één van deze is nog een kleine geschiedenis verbonden, die we niet onvermeld willen laten.

Hier volgt eerst de stelling, die zegt dat in onderstaande figuur: $AB \parallel CD$ en $EF \parallel GH$.

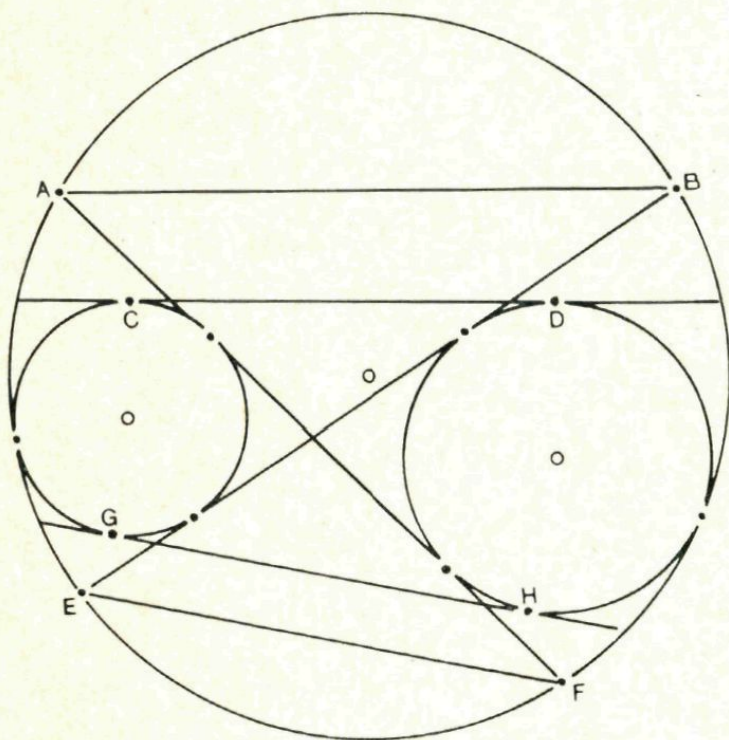


Fig. 19

Deze stelling is gevonden en na een maand bewezen door H. J. A. Duparc, in het begin van 1936. Duparc, nu hoogleraar, verbleef toentertijd in Indonesië (het voormalige Nederlands-Indië) en werd tijdens de Japanse bezetting in de tweede wereldoorlog gevangen gezet in het krijgsgevangenkamp te Tjimahi (Java). In 1942 deelde hij de stelling mee aan een geïnteresseerde medegevangene, die (als tijdverdrijf) trachtte de stelling te bewijzen.

In 1967 zag prof. Duparc zijn assistent bezig met dezelfde stelling en het bewijs. Deze laatste vertelde dat zijn vader jhr. ir. H. S. van Lennep eens van een onbekende in het gevangenkamp deze opgave had opgekregen en dat zijn vader na 25 jaar de stelling had weten te bewijzen,

en wel uitsluitend met behulp van stellingen uit de vlakke meetkunde. Dat dit bewijs (een ander dan prof. Duparc oorspronkelijk gegeven had) na een kwart eeuw bij de „opdrachtgever” terugkwam, was louter toeval.

ooo We zullen je niet vragen om ook eens te proberen deze stelling te bewijzen, want je begrijpt dat het bewijs niet bepaald makkelijk is. Als je toch de verleiding niet kunt weerstaan, neem dan een wat eenvoudiger geval, waarin de kleine cirkels elkaar raken. De beide rechten AF en BE gaan dan over in de machtlijn van beide cirkels en de rechte AB in de raaklijn l aan de grote cirkel.

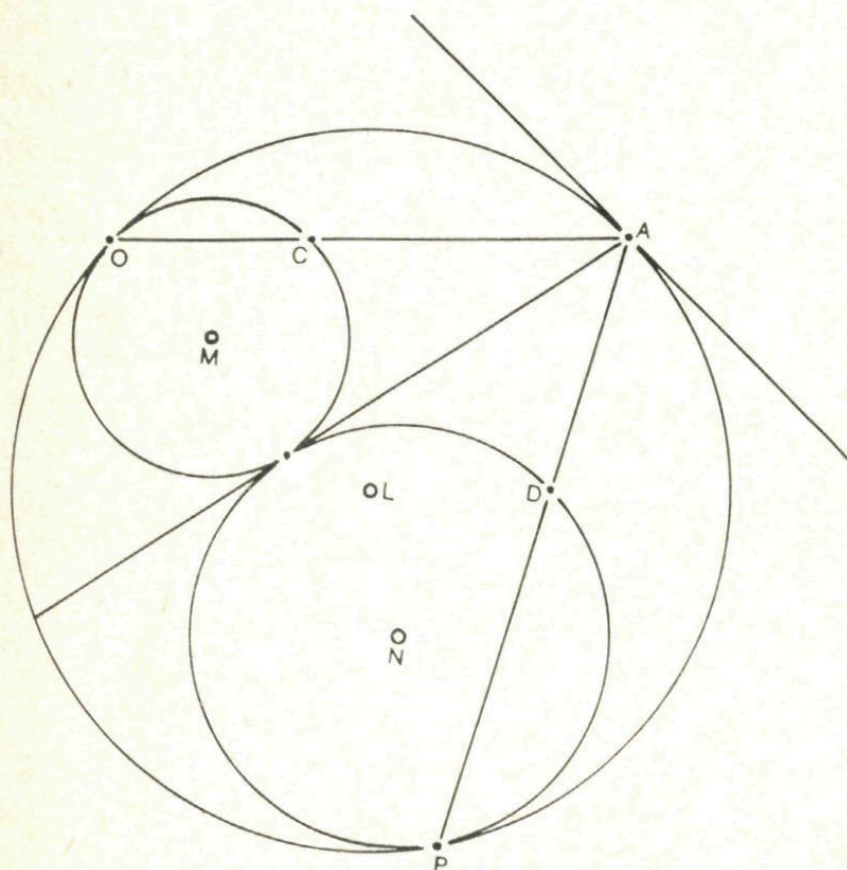


Fig. 20

Het bewijs gaat dan in de volgende stappen. a. Omdat A op de machtlijn ligt kan bewezen worden dat $\triangle OAP \sim \triangle DAC$. b. Bewijs dat de rechte CD van de grote cirkel een boog afsnijdt, waarvan A het midden is. c. Bewijs dat $AL \perp CD$. d. Bewijs dat $MC \parallel LA$, zodat $MC \perp CD$. e. Bewijs analoog dat CD de raaklijn is aan de cirkel met middelpunt N. f. Bewijs dat $CD \parallel l$.

Ontleend aan: Nieuw Archief voor Wiskunde (3), XVI 30–31 (1968)

° Een vierkante graad

De uitdrukking *vierkante graad* wordt in astronomische litteratuur nogal eens gebruikt. Zo lees je bijvoorbeeld dat er gemiddeld 7,7 sterren van de 10-de grootte per vierkante graad aan de hemel voorkomen in de melkweg, tegen slechts 1,8 sterren van de 10-de grootte op 90° daar vandaan. Of: deze sterrenfoto beslaat een veld van 20 vierkante graden.

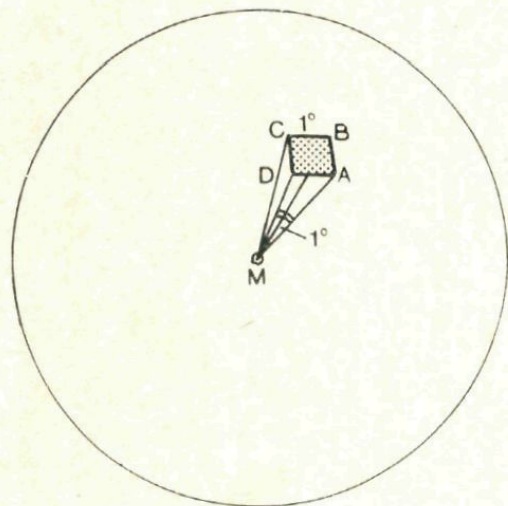


Fig. 21

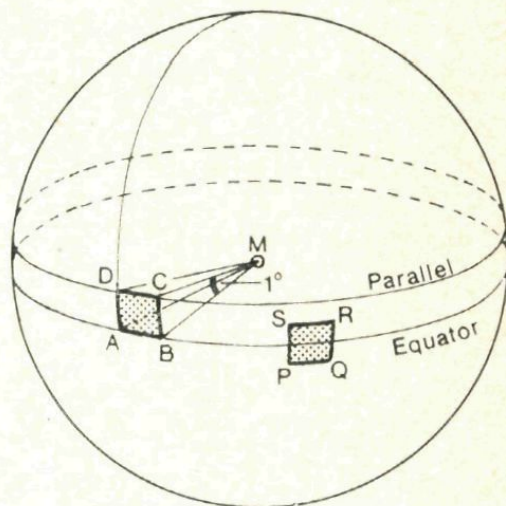


Fig. 22a

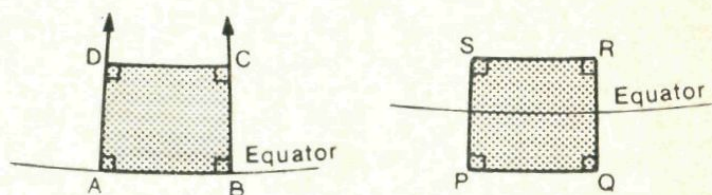


Fig. 22b

Wat verstaat men onder een „vierkante graad?” In figuur 21 is een bol getekend met het middelpunt M. De vier stralen MA, MB, MC en MD zijn zo getekend dat de hoeken AMB, BMC, CMD en DMA elk 1° zijn. De figuur ABCD op de boloppervlakte noemen we een vierkante graad. De zijden van dit „vierkant” zijn delen van grootcirkels, d.w.z. cirkels waarvan het middelpunt samenvalt met het middelpunt van de bol. Nu is het vervelend dat we deze „vierkantjes” niet tegen elkaar aan kunnen schuiven om de oppervlakte van de bol te bedekken, er blijven altijd kleine tussenruimten over. Misschien denk je aan een oplossing die in figuur 22 is getekend. Daar ligt AB op de equator (een willekeurig gekozen grootcirkel) en CD op een parallel (op de aardbol zouden we het een breedtecirkel noemen). Daar is echter DC kleiner dan AB, zodat we moeilijk meer van een vierkante graad kun-

nen spreken en dit wordt nog erger als we nog meer parallellen boven de eerste gaan tekenen: dan wordt de „vierkante” graad steeds kleiner. Het wordt er niet beter op als we een „vierkante” graad zo tekenen dat de equator hem halveert (PQRS). Daar is SR kleiner dan SP.

Maar eigenlijk is het helemaal geen bezwaar dat we de *vierkante graden* niet aan elkaar kunnen passen. We willen alleen maar weten een hoeveelste deel de vierkante graad van het boloppervlak is. Nu bestaat er een ingewikkelde formule waarmee we de oppervlakte van een willekeurige boldriehoek kunnen berekenen. Die zouden we daarvoor kunnen gebruiken, want door het trekken van een grootcirkel door C en A kunnen we de vierkante graad in twee congruente boldriehoeken verdelen.

In het bekende Amerikaanse tijdschrift voor amateur-astronomen: „Sky and Telescope”, wordt de volgende methode aangegeven.

Als de straal van een bol r is, is zijn omtrek $2\pi r$ en zijn oppervlakte $4\pi r^2$. De omtrek is ook 360° , en voor de straal mogen we zetten:

$r = \frac{360^\circ}{2\pi}$. Als we dit invullen in de formule voor de oppervlakte dan krijgen we:

$$O = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{360^\circ}{2\pi} \right)^2 = \frac{129600}{\pi} = 41252,96 \text{ vierkante graden.}$$

Als we nu eens overgaan op een nieuwe eenheid, bv. „vierkante twee-graden” (de hoeken AMB etc. in fig. 1 zijn dan 2°), is de dan de oppervlakte van deze „vierkante twee-graad” gelijk aan 4 vierkante graden?

Een astro-camera heeft een veld van 10 bij 10 graden. Hoeveel verschilt de afgebeelde oppervlakte van de hemel met 100 vierkante graden? Als je het bovenstaande hebt kunnen beantwoorden, begrijp je wel wat voor praktische moeilijkheden er kleven aan het invoeren van het begrip *vierkante graad*.





28. In de eredivisie van de voetbalcompetitie spelen 18 elftallen. Aan het eind van de competitie moeten drie van die elftallen degraderen; uiteraard zijn dat de drie elftallen met het laagste aantal punten. Kan het voorkomen dat een elftal 30 punten behaalt en niettemin degraderen moet? Zo ja, laat

dat met een voorbeeld zien. Zo nee, beredeneer dan wat het maximale aantal punten is, waarmee degradatie nog mogelijk is.

(Ingezonden door dr. J. Groenman, Groningen)

29. Teken twee lijnstukken die een gegeven vierkant verdelen in drie delen met gelijke oppervlakte en die samen een minimale lengte hebben.
30. De hoeken van driehoek ABC zijn $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 50^\circ$ en $\gamma = 100^\circ$. Een cirkelboog moet tot eindpunten hebben een hoekpunt van driehoek ABC en een punt van de zijde tegenover dat hoekpunt; verder moet die boog geheel binnen driehoek ABC liggen en bovendien ook nog een zo groot mogelijk aantal booggraden hebben. Hoe moet die boog lopen en hoe groot wordt zijn aantal booggraden?

°De gewichtenpuzzel van Bachet

Bachet (1587–1638) stelde de volgende vraag: Stel, dat ik een aantal voorwerpen heb van 1, 2, 3, 4, ... enz. gram. Hun gewichten klimmen dus telkens met 1 g op. Stel dat ik ze wil wegen met een weegschaal met twee schalen (in zijn tijd waren er nog geen snelwegers) zo, dat op de ene schaal de voorwerpen geplaatst worden en op de andere schaal de gewichten. Er mogen dus geen gewichten geplaatst worden op de schaal van de voorwerpen. Hoe moet ik nu de gewichtendoos samenstellen om met een zo klein mogelijk aantal gewichten een zo groot mogelijk aantal voorwerpen te kunnen wegen?

Het is niet moeilijk deze vraag proefondervindelijk te beantwoorden. We moeten beginnen met een gewicht van 1 g. Ook met een van 2 g. * Maar 3 g kunnen we dan opbouwen uit $1 + 2$. Het volgende gewicht, dat we nodig hebben is dan 4 g. We kunnen met de drie dan aanwezige gewichten maken:

$$1 \text{ g} = 1 \text{ g}$$

$$2 \text{ g} = 2 \text{ g}$$

$$3 \text{ g} = (1 + 2) \text{ g}$$

$$4 \text{ g} = 4 \text{ g}$$

$$5 \text{ g} = (1 + 4) \text{ g}$$

$$6 \text{ g} = (2 + 4) \text{ g}$$

$$7 \text{ g} = (1 + 2 + 4) \text{ g}.$$

Kiezen we er nu een gewicht van 8 g bij, dan kunnen we al tot 15 g komen. Het volgende gewicht, dat dan nodig is, is 16 g.

Het principe is waarschijnlijk al duidelijk. Stel de gewichtendoos samen uit de gewichten (in grammen):

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, enz.

Of anders geschreven:

1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , 2^5 , 2^6 , 2^7 , 2^8 , 2^9 , enz.

Met de tien genoemde gewichten kunnen we alle gewichten tot en met 1023 g in hele grammen samenstellen. Bijvoorbeeld 712 g wegen we met $512 \text{ g} + 128 \text{ g} + 64 \text{ g} + 8 \text{ g}$. Of in een schema geschreven:

2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0

Het gewicht van 712 g zou dus symbolisch opgeschreven kunnen worden met het getal 1011001000.

Welk gewicht zou worden voorgesteld door de symbolische schrijfwijze 101011? Vul maar even in het schema in:

$$(2^5 + 2^3 + 2 + 1)\text{g} = 43 \text{ g}.$$

Welke gewichten moet men gebruiken om een voorwerp van 78 g te wegen? Het zal duidelijk zijn dat hiervoor 78 geschreven moet worden als binair getal. Immers de beschikbare gewichten vertegenwoordigen de achtereenvolgende machten van 2, zodat elk gewicht bereikt moet worden door middel van combinatie van machten van 2. Elk voorwerp kan met deze gewichtendoos dus op precies één manier gewogen worden.

* Het is niet noodzakelijk als tweede gewicht 2 g te nemen, men zou ook nog een gewicht van 1 g kunnen gebruiken, de reeks gewichten wordt dan bv: 1, 1, 3, 6... Men komt met vier gewichten van deze reeks (en van iedere andere) echter minder ver dan met vier gewichten van de reeks 1, 2, 4, 8,...

Wanneer de voorwaarde dat op de voorwerpenschaal geen gewichten bijgeplaatst mogen worden, wordt losgelaten dan kan de gewichtendoos samengesteld worden met 1, 3, 9, 27... g. Bv. $13 = 1 + 3 + 9$, $14 = 27 - 1 - 3 - 9$, $15 = 27 - 3 - 9$, enz.

Oplossingen Denkertjes uit het tweede nummer

11. Er zijn *twee* soorten dobbelstenen. Dat kun je bijvoorbeeld als volgt inzien:
Leg alle dobbelstenen zo neer, dat op het grondvlak 1 staat en dus op het bovenvlak 6 staat. Draai dan de dobbelstenen zo, dat het voorvlak de 2 toont (en dus het achtervlak de 5). Bij sommige dobbelstenen zal nu de 3 links en de 4 rechts staan, bij andere is dat juist omgekeerd.
Een andere manier is: kijk naar het hoekpunt, waar de zijvlakken met de 1, de 2 en de 3 samenkomen. Nu is het mogelijk, dat 1-2-3-1 in wijzerzin op elkaar volgen, maar ook kan dat in tegenwijzerzin gebeuren.
12. De figuur toont, dat het „scholletje” en de gestippelde rechthoek gelijke oppervlakte hebben. Deze oppervlakte is $6 \cdot 3 = 18$ vierkante centimeters.
13. Figuur 23.

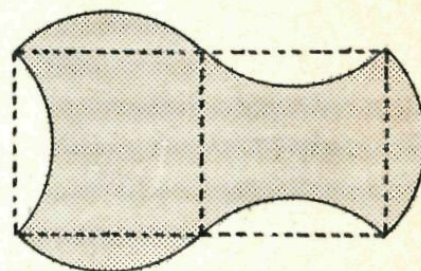
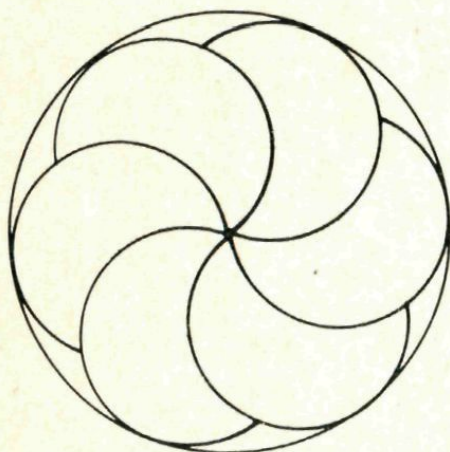


Fig. 23

14. Het bijgaande tabelletje toont de kilometerstanden, die uit vijf gelijke cijfers bestaan, bij elk de eerstvolgende kilometerstand die uit vijf verschillende cijfers bestaat, tenslotte het aantal kilometers verschil. De gevraagde stand blijkt 55555 te zijn

00000	01234	1234 = 2.617
11111	12034	923 = 13.71
22222	23014	792 = 2.396
33333	34012	679 = 7.97
44444	45012	568 = 2.284
55555	56012	457 is een priemgetal
66666	67012	346 = 2.173
77777	78012	235 = 5.47
88888	89012	124 = 2.62
99999	01234	1235 = 5.247

15. Alle machten van 2 zijn even (behalve $2^0 = 1$) en daarom behoeven we alleen maar even eindcijfers te beschouwen.

De helft van een getal, dat op twee tweeën eindigt, eindigt zelf op tenminste één een en kan dus geen macht van 2 zijn. Geen enkele macht van 2 eindigt dus op twee tweeën (en dus zeker ook niet op vier tweeën).

De helft van een getal, dat op drie vieren eindigt, eindigt zelf op tenminste twee tweeën. Die helft kan dus geen macht van 2 zijn en daarmee weten we meteen dat geen enkele macht van 2 eindigt op drie (of meer) vieren.

Op dezelfde manier bewijzen we, dat een macht van 2 evenmin op vier zessen of achten kan eindigen.

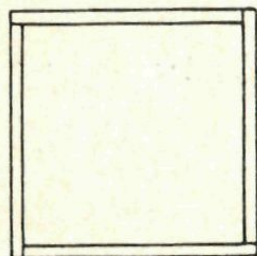


Fig. 24

16. Zolang je niet weet of de timmerman slim is, is de gestelde vraag niet te beantwoorden. Een slimme timmerman moet zonder zagen de vloer kunnen leggen.
Maakt hij een rand van vier lange planken, zoals figuur 24 toont, dan blijft er een vierkant over met zijden van 360 cm. En dat is met de korte planken gemakkelijk op te vullen.

17. In figuur 25 zie je het kleinste omsluitende vierkant. Hebben de weggesneden rechthoeken afmetingen van 2 cm bij 4 cm, dan is het kleinste omsluitende vierkant het oorspronkelijke vierkant met zijden van 12 cm.

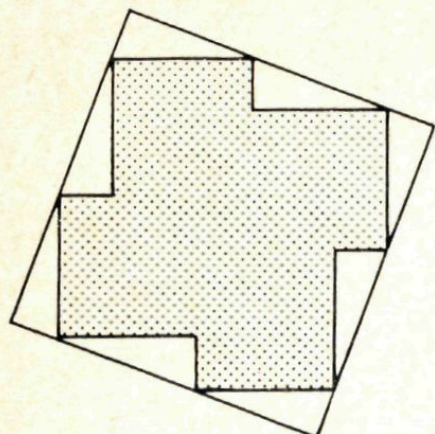


Fig. 25

18. Figuur 26.

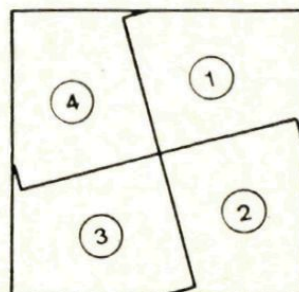
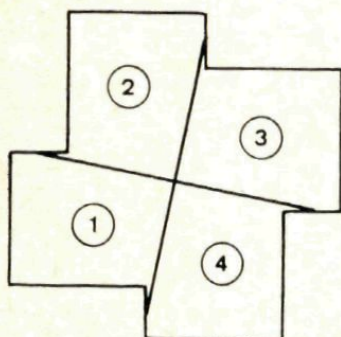


Fig. 26

19. Uit $3(x + y + z) = (x + y + 3z) + (x + 2y) + x \geq 13 + 4 + 1$ blijkt, dat $x + y + z$ minimaal 6 is. Om dat minimum te bereiken moeten x, y, z voldoen aan $x + y + 3z = 13, x + 2y = 4, x = 1$. We kiezen dus $x = 1, y = 1,5, z = 3,5$.
20. Het aantal uitgereikte achten noemen we x en het aantal tienenvoelen we y . Er zijn dan $8 + x + y$ cijfers gegeven en daarvan is de som $36 + 8x + 10y$. Omdat er in de opgave gesproken wordt over enkele achten en enkele tienenvoelen, is zowel x als y tenminste gelijk aan 2.
- Het gemiddelde cijfer kan niet precies gelijk zijn aan 6,3. In dat geval moest namelijk gelden $(8 + x + y) \cdot 6,3 = 36 + 8x + 10y$ en dit is te herleiden tot $17x + 37y = 144$. Deze laatste vergelijking heeft geen oplossing met natuurlijke getallen voor x en y .
- Het gemiddelde cijfer is dus kennelijk afgerond op 6,3 en ligt dus tussen de uitersten 6,25 en 6,35. Dit betekent, dat x en y voldoen aan $(8 + x + y) \cdot 6,25 \leq 36 + 8x + 10y \leq (8 + x + y) \cdot 6,35$.
- Hieruit leiden we af de twee ongelijkheden $7x + 15y \geq 56$ en $33x + 73y \leq 296$.
- Aan de laatste van die twee voldoen de volgende paren:
- $y = 2$ en x is een van de getallen 2, 3, 4;
 $y = 3$ en $x = 2$;
- Rekening houdende met het feit dat x en y natuurlijke getallen zijn en ten minste gelijk zijn aan 2.
- Van deze mogelijke paren voldoen aan de eerste ongelijkheid alleen maar $y = 2, x = 4$ en $y = 3, x = 2$.
- Het aantal achten is dus 2 of 4.

Ellips	}	Uit het Grieks:
Hyperbool		<i>ekleipein</i> = <i>tekortschieten</i>
Parabool		<i>hyperballein</i> = <i>overschieten</i>
		<i>paraballein</i> = <i>er bij aanpassen</i> .
		Men kan als vergelijking van de parabool geven $y^2 = ax$.
		Men kan deze zo lezen dat er een rechthoek is met vaste lengte a en variabele breedte x , waarbij bij elke waarde van x (>0) een vierkant hoort met zijde y , dat dezelfde oppervlakte als de rechthoek heeft. („Er bij aangepast is”.)
		De vergelijking $y^2 = x(a + x)$ stelt een hyperbool voor. Nu is het vierkant (y^2) groter dan de rechthoek (ax). („Er schiet wat over”.)
		De vergelijking $y^2 = x(a - x)$ stelt een elips voor. Het vierkant is nu kleiner dan de rechthoek („schiet te kort”).
Invers		Uit het Latijn, <i>invertere</i> = <i>omkeren</i> .
Parallaxis		Uit het Grieks, betekent <i>afwijking</i> Schijnbare verplaatsing van het object, als gevolg van de verplaatsing van de waarnemer.
Torsie		Uit het Latijn, <i>torquere</i> = <i>draaien</i> .

*Oplossingen van de Denkertjes inzenden voor
10 februari 1969.*

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

H. J. ENGELS, Muggenbroekerlaan 41, Roermond.

BRUNO ERNST, Daniël Marotstraat 184, Breda.

Drs. A. B. OOSTEN, Turftorenstraat 11A, Groningen.

A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.

G. A. VONK, Fahrenheitstraat 688, Den Haag.

Artikelen en problemen kunnen naar één van de redacteuren worden gestuurd.

Oplossingen van *Denkertjes* kunnen naar het eerste adres worden gezonden, oplossingen van andere problemen naar het vierde adres.

Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,50 per jaargang. Voor anderen f 4,—.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff N.V., Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.