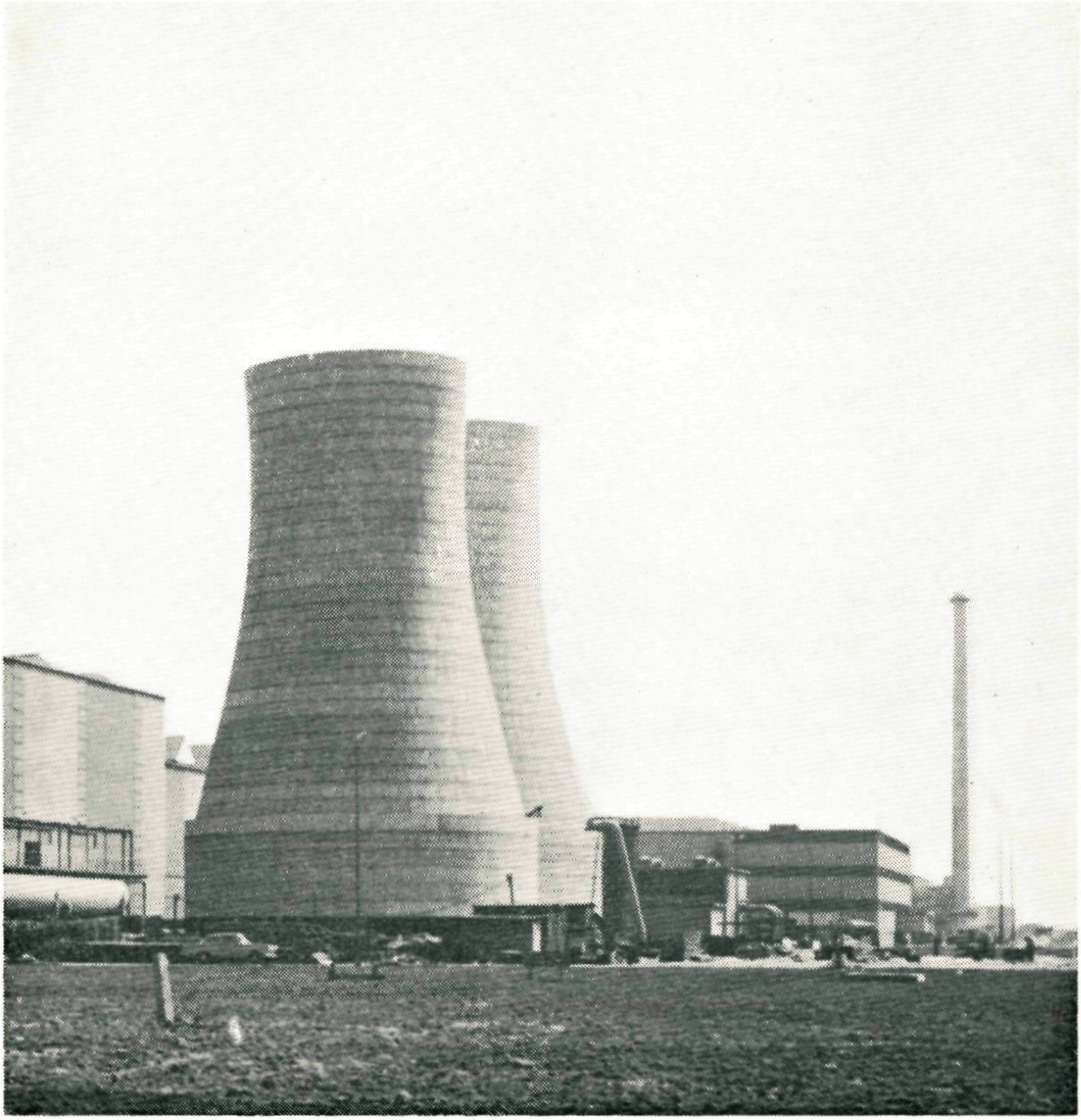
PYTHAGORAS

Wiskundetijdschrift
voor jongeren

6

Achtste jaargang
1968/1969



Koeltorens in de vorm van omwentelingshyperboloïden op het terrein van de Hoogovens te IJmuiden. Zie het artikel over regeloppervlakken op blz. 128 en volgenden.

pythagoras

jaargang 8 no 6

°Vierkante centimeters verdwijnen en komen uit het niet tevoorschijn!

Knip uit roosterpapier een vierkant van 8 × 8 en knip het langs de dikgetrokken lijnen in 4 stukken (figuur 1). Leg de stukken weer aan elkaar zoals in figuur 2. Het verwonderlijke is, dat de zo ontstane figuur een oppervlakte schijnt te hebben van 5 × 13 = 65. Waar is dat ene hokje vandaan gekomen?

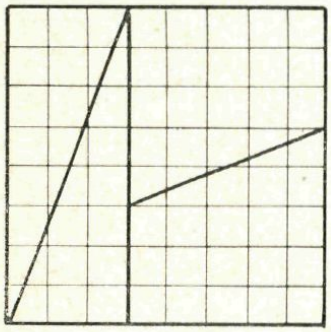


Fig. 1

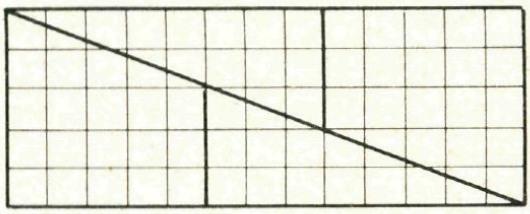


Fig. 2

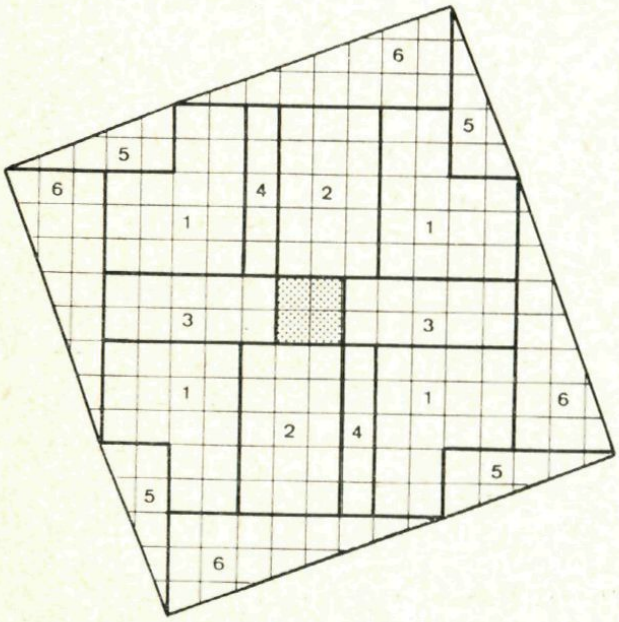


Fig. 3

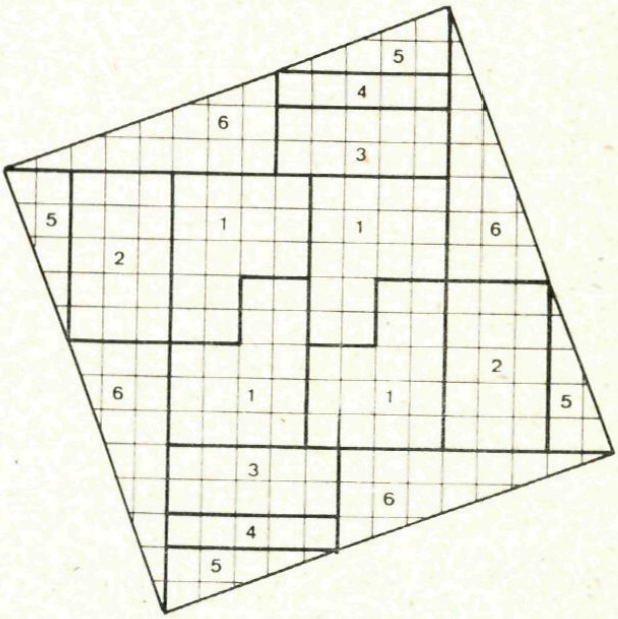


Fig. 4

Een wat ingewikkelder geval van dezelfde aard komt van Ir. P. Alting van Geusau. Figuur 3 en 4 zijn ook op ruitjespapier getekend. Ze zijn

beide uit precies dezelfde figuurtjes (genummerd van 1 tot en met 6) opgebouwd en ze worden begrensd door dezelfde figuurtjes, nl. steeds 5 en 6. Maar hoe is het nu mogelijk dat het gestippelde vierkant van figuur 3 (ter grootte van 4 hokjes!) in figuur 4 verdwenen is?
Oplossing op bladzijde 144.

In dit nummer . . .

vind je het slot van onze excursie naar de ruimte der differentiaalmeetkunde, regeloppervlakken genaamd. De mathemadics zijn blijkens het aantal reacties goed in de smaak gevallen, er zijn weer een aantal opgenomen. Ook andere inzendingen van lezers vormen onderwerpen van dit nummer, zoals de hokjespuzzel op bladzijde 137. Eigenlijk zou je Denkertje 48 eerst moeten maken, voor je het verhaal over de hokjespuzzel leest. Over Denkertjes gesproken: De oplossingen van de Denkertjes in dit nummer staan achterin, dus geen inzendingen. De lootprijs voor het derde nummer is gewonnen door P. Bakker uit Blaricum, die voor het vierde nummer door L. Taerwe uit Zevergem (België).
De eindstand van de ladderwedstrijd is

G. R. de Lavalette, Rotterdam (357)
J. Bergstra, Rotterdam (355)
F. Pach, Laren (N.H.) (348)
P. Bakker, Blaricum (346)
B. Arnold, Utrecht (346)
A. Hoekstra, Naarden (345)
H. Jansen, Zutphen (343)
H. Schumacher, Heemstede (336)
D. Hoekzema, Sliedrecht (327)
T. v. d. Berg, Beneden Leeuwen (316)
D. Reuven, Hoogerheide (N.B.) (304)

Tenslotte danken we de lezers die de redactie geschreven hebben gedurende deze jaargang voor hun medewerking. Helaas is het ons niet steeds mogelijk de briefschrijvers persoonlijk te beantwoorden, zodat we onze erkentelijkheid langs deze weg betuigen. Graag tot ziens in de volgende jaargang.

°Regeloppervlakken

In nummer 4 van deze jaargang hebben we enige kennis kunnen opdoen over oppervlakken („Hoe krom is een gekromd oppervlak?"). We herinneren nog even aan de drie soorten punten die op (niet te onregelmatige) oppervlakken worden aangetroffen, weergegeven in de figuren 5[a], 5[b] en 5[c]. Het karakter van het oppervlak, in de naaste omgeving van het betreffende punt, is ditmaal verduidelijkt door het oppervlak te doorsnijden met een aantal vlakken, op regelmatige afstanden, loodrecht op de normaal.
In figuur 5[a] (een punt van de eerste soort–de totale kromming is positief) ontstaan rond het punt ellipsachtige snijkrommen. Zo'n punt wordt ook een *elliptisch punt* genoemd.

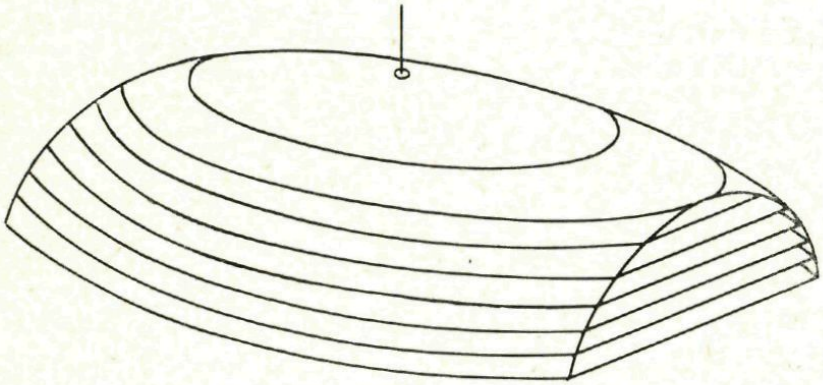


Fig. 5a

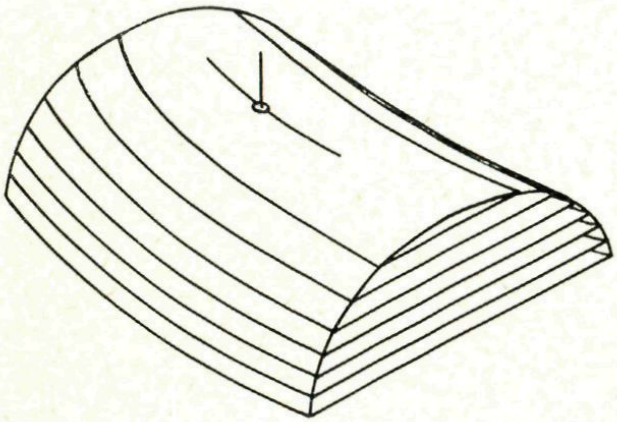


Fig. 5b

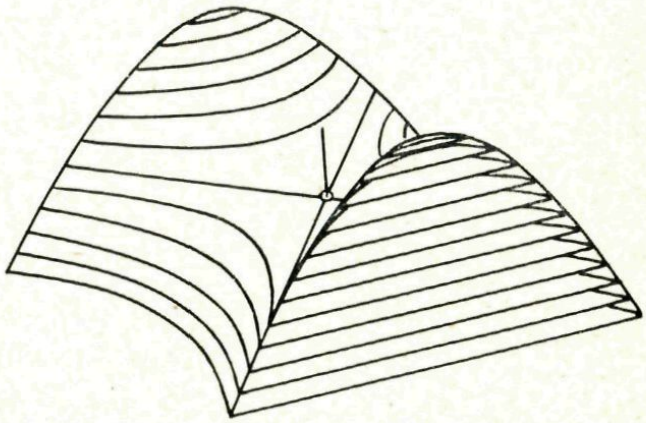


Fig. 5c

In figuur 5[c] (derde soort–totale kromming is negatief) ontstaan hyperboolachtige krommen. Zo'n *zadelpunt* wordt ook wel een *hyperbolisch punt* genoemd.
Tenslotte noemt men het punt in figuur 5[b] (tweede soort–totale kromming nul), om minder duidelijke redenen, ook wel een *parabolisch punt*.

Bepaalde gekromde oppervlakken kunnen gevormd worden uit rechte lijnen (regels). Ze worden *regeloppervlakken* genoemd. Enkele voorbeelden zien we in de figuren 6 tot en met 9.

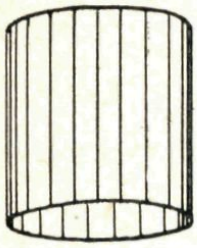


Fig. 6

Fig. 7

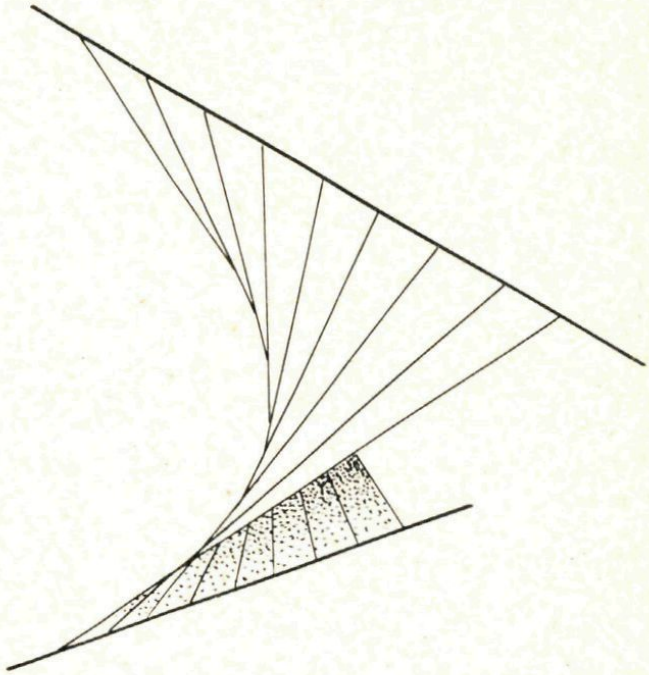


Fig. 8

Je herkent hierin het cilindervlak en het kegelvlak, verder een oppervlak gevormd door de lijnen, die twee kruisende rechten op regelmatige afstanden snijden en tenslotte een soort circustent. En de voorraad is hiermee nog lang niet uitgeput. Let wel, dat in deze figuren slechts lijnstukken getekend werden, waar we ons rechte lijnen moeten indenken. Eén van de regeloppervlakken, die we in het bijzonder willen bekijken, ontstaat als volgt. We gaan uit van het cilindervlak van figuur 6. We draaien nu de bovenste cirkel over een bepaalde hoek $< 180°$. Er ontstaat dan het regeloppervlak van figuur 10. Hetzelfde oppervlak kunnen we laten ontstaan door in figuur 6 de bovenste cirkel over dezelfde hoek de andere kant op te draaien (figuur 11). En dit is nu het verrassende: door elk punt van het oppervlak gaan nu twee rechten die in het oppervlak liggen (figuur 12).

Bekijken we nu een willekeurig punt C van het oppervlak (figuur 13) dan ontdekken we dat C een hyperbolisch punt (zadelpunt) is. Dit oppervlak bestaat dus uit louter zadelpunten!
Snijden we dit oppervlak met een vlak door de beide cirkelmiddelpunten, dan is de snijkromme een hyperbool. Omdat het oppervlak

ook kan ontstaan door deze hyperbool te wentelen om een lijn heet dit oppervlak een *omwentelings hyperboloïde*. In welk tijdschrift

Fig. 9

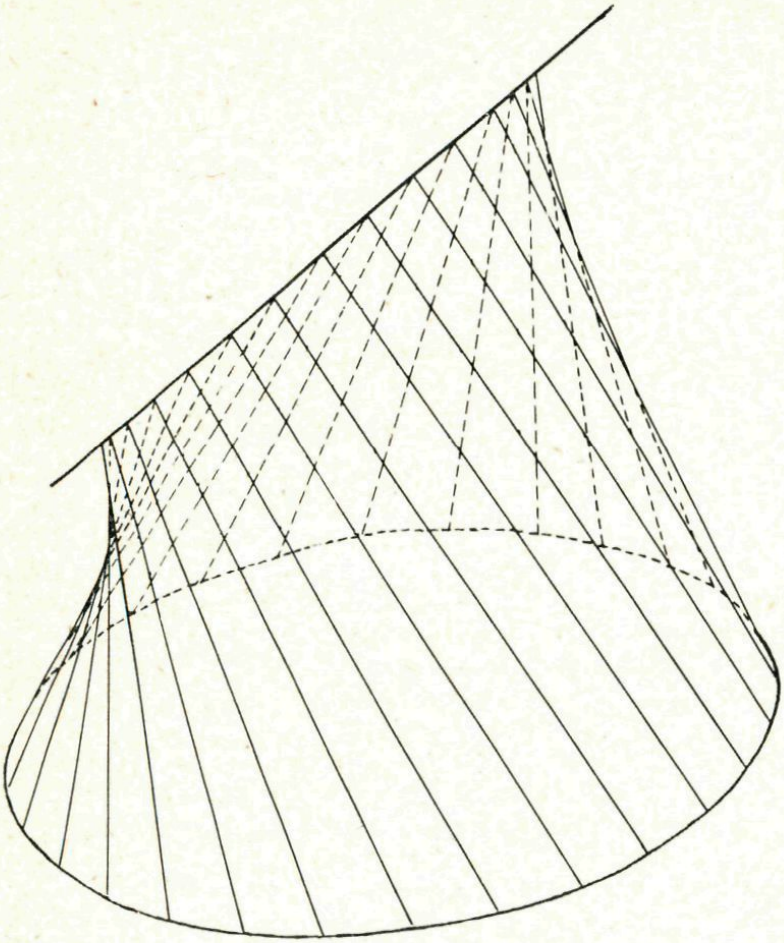
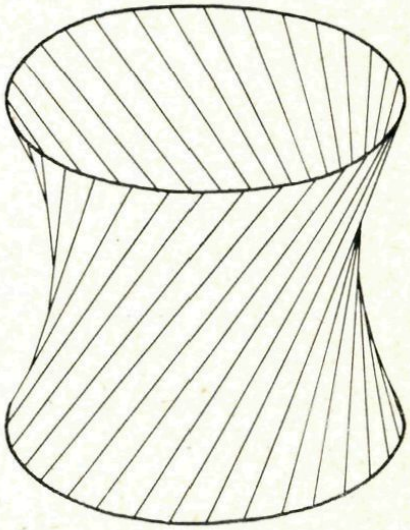


Fig. 10



vind je zoveel mooie woorden als in Pythagoras? De omslagfoto van nummer 4 van deze jaargang was er een van een krukje met een hyperboloïde vorm. De „regels" van dit regeloppervlak waren te herkennen in het zwarte vlechtwerk.

Fig. 11

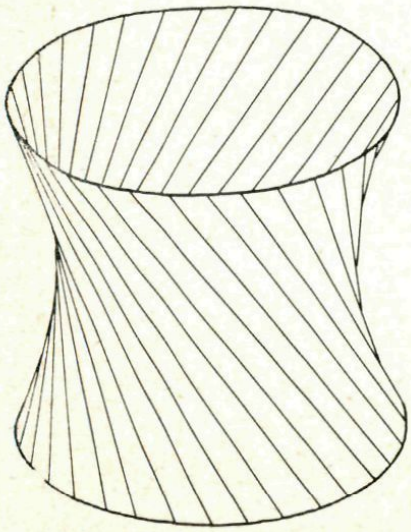


Fig. 12

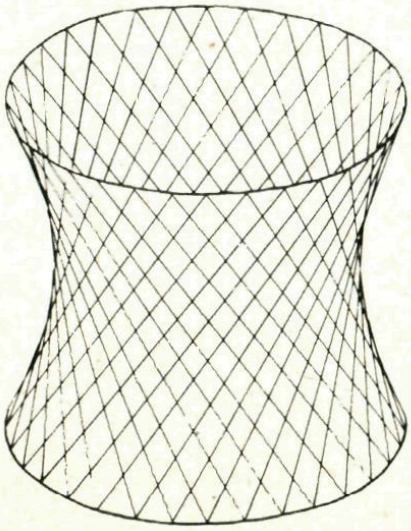
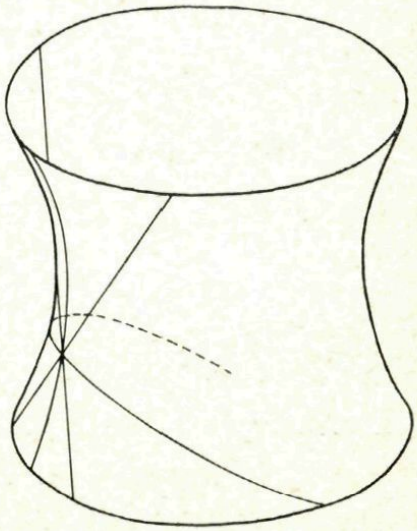


Fig. 13



In een wat slankere uitvoering komt de omwentelings hyperboloïde ook voor bij koeltorens, zoals we ze bijvoorbeeld bij de hoogovens vinden (zie foto binnenzijde omslag). Ook vind je de hyperboloïde in de tandwielen van figuur 14.

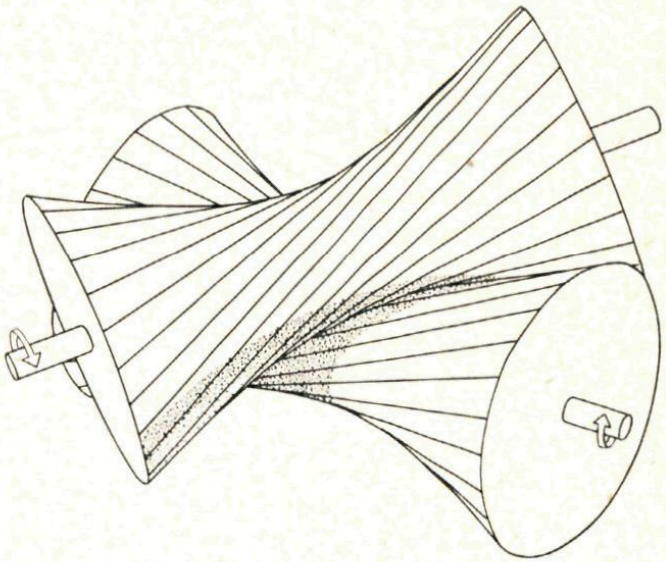


Fig. 14

Ontwikkelbare oppervlakken

We hebben kennis gemaakt met een regeloppervlak bestaande uit louter hyperbolische punten. Men kan bewijzen dat een oppervlak dat uit louter parabolische punten bestaat ook een regeloppervlak moet

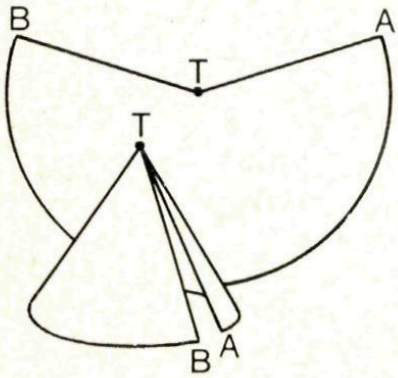


Fig. 15

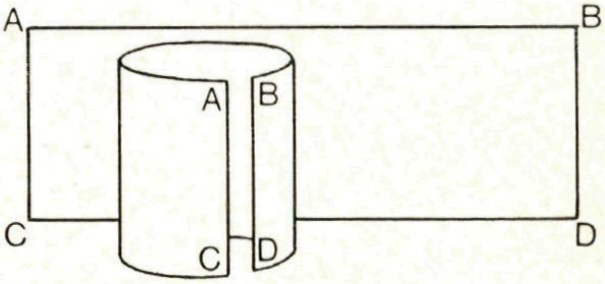


Fig. 16

zijn. Deze oppervlakken hebben bovendien nog de bijzonderheid dat ze vlak gestreken kunnen worden, zonder dat het oppervlak wordt uitgerekt of ingedrukt. Wel moet soms vooraf het oppervlak doorgesneden worden.

In figuur 15 en 16 is het bedoelde gedemonstreerd bij een kegel en een cilinder. Andersom kunnen we zeggen dat een kegel en een cilinder te fabriceren zijn uit een vlak stuk buigzaam materiaal en met een stukje plakband. Oppervlakken (zonder scherpe vouwen en dergelijke) waarbij dat mogelijk is, heten *ontwikkelbare* oppervlakken.
We vermelden de volgende stelling zonder bewijs.
Ontwikkelbare oppervlakken (oppervlakken waarvan elk punt parabolisch is) behoren tot één van de volgende drie soorten regeloppervlakken: kegels, cilinders, oppervlakken gevormd door de raaklijnen aan een kromme.
Een voorbeeld van de laatste soort zien we in figuur 17. Bij het ontwikkelen (vlak strijken) van dit oppervlak krijgen we een dubbelliggend plat vlak met een ronde opening, dat aan een losse kraag doet denken.

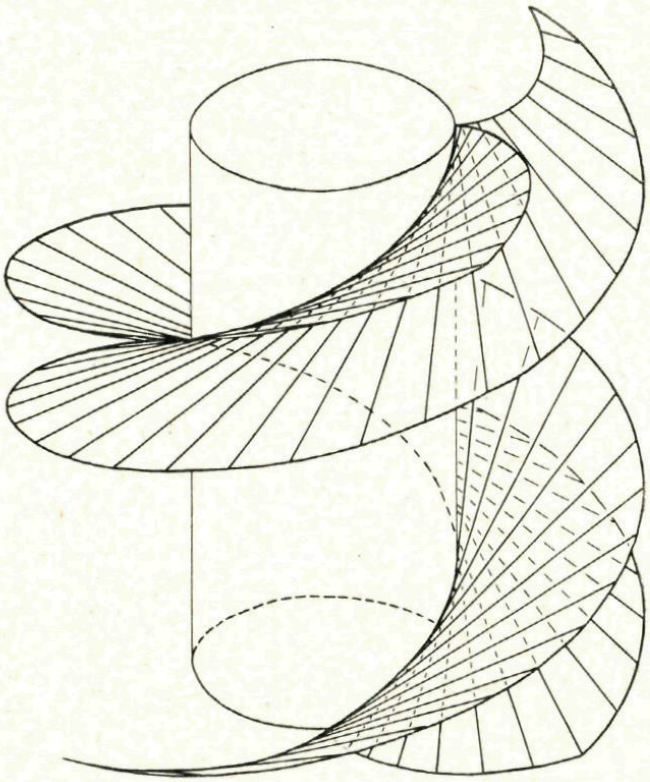


Fig. 17

Let er op, dat bovengenoemde stelling zegt dat *niet elk* regeloppervlak ontwikkelbaar is. Zo zullen we geen omwentelingshyperboloïde kunnen laten ontstaan uit een vlak stuk buigzaam materiaal, als dit niet tevens rekbaar is. En hiermee eindigt dan ons uitstapje in het gebied van de differentiaal meetkunde.

De Denkertjes uit dit nummer kun je niet inzenden, de oplossingen staan achterin. Ze zijn ten dele ontleend aan de proefronde van de Wiskunde-Olympiade van dit jaar.

41. Bepaal het gehele getal dat zo weinig mogelijk verschilt van $^2\log 23$.
42. De vergelijking $x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$ heeft drie wortels. Hoeveel wortels zijn groter dan nul?
43. Welke van de drie vergelijkingen $n^2 = m^2 + 60$, $n^2 = m^2 + 61$ en $n^2 = m^2 + 62$ bezit(ten) een oplossing voor n en m, als deze gehele getallen zijn?
44. Binnen een rechthoek ABCD ligt een punt P; PA = 4 BP = 3 en PC = 5, bereken PD.

°°Priemgetallen

door F. van der Blij

Alle natuurlijke getallen die alleen door zichzelf en 1 deelbaar zijn, heten *priemgetallen.* (Het getal 1 zelf noemen we geen priemgetal.)
In het vierde nummer van deze jaargang hebben we een paar problemen bekeken die met deze soort getallen samenhangen.
In de eerste plaats: Er zijn oneindig veel priemgetallen. Bijvoorbeeld 2, 3, 5, 7 zijn priemgetallen, nu bevat het getal 2.3.5.7 + 1 een deler die een ander priemgetal is. Zo kun je de rij priemgetallen onbeperkt uitbreiden.
Hieronder vind je een lijst van de priemgetallen onder de 5000.
In de tweede plaats hebben we bekeken hoeveel priemgetallen er voorkomen onder de 100, onder de 1000, 10.000, enz.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53
61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137
149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
239	241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331
347	349	353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547
563	569	571	577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647
659	661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751	757	761
773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881
887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997	1009
1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069	1087	1091	1093	1097	1103	1109
1123	1129	1151	1153	1163	1171	1181	1187	1193	1201	1213	1217	1223	1229	1231	1237
1259	1277	1279	1283	1289	1291	1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367	1373
1399	1409	1423	1427	1429	1433	1439	1447	1451	1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489
1499	1511	1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583	1597	1601	1607	1609
1619	1621	1627	1637	1657	1663	1667	1669	1693	1697	1699	1709	1721	1723	1733	1741
1753	1759	1777	1783	1787	1789	1801	1811	1823	1831	1847	1861	1867	1871	1873	1877
1889	1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979	1987	1993	1997	1999	2003	2011
2027	2029	2039	2053	2063	2069	2081	2083	2087	2089	2099	2111	2113	2129	2131	2137
2143	2153	2161	2179	2203	2207	2213	2221	2237	2239	2243	2251	2267	2269	2273	2281
2293	2297	2309	2311	2333	2339	2341	2347	2351	2357	2371	2377	2381	2383	2389	2393
2411	2417	2423	2437	2441	2447	2459	2467	2473	2477	2503	2521	2531	2539	2543	2549
2557	2579	2591	2593	2609	2617	2621	2633	2647	2657	2659	2663	2671	2677	2683	2687
2693	2699	2707	2711	2713	2719	2729	2731	2741	2749	2753	2767	2777	2789	2791	2797
2803	2819	2833	2837	2843	2851	2857	2861	2879	2887	2897	2903	2909	2917	2927	2939
2957	2963	2969	2971	2999	3001	3011	3019	3023	3037	3041	3049	3061	3067	3079	3083
3109	3119	3121	3137	3163	3167	3169	3181	3187	3191	3203	3209	3217	3221	3229	3251
3257	3259	3271	3299	3301	3307	3313	3319	3323	3329	3331	3343	3347	3359	3361	3371
3389	3391	3407	3413	3433	3449	3457	3461	3463	3467	3469	3491	3499	3511	3517	3527
3533	3539	3541	3547	3557	3559	3571	3581	3583	3593	3607	3613	3617	3623	3631	3637
3659	3671	3673	3677	3691	3697	3701	3709	3719	3727	3733	3739	3761	3767	3769	3779
3797	3803	3821	3823	3833	3847	3851	3853	3863	3877	3881	3889	3907	3911	3917	3919
3929	3931	3943	3947	3967	3989	4001	4003	4007	4013	4019	4021	4027	4049	4051	4057
4079	4091	4093	4099	4111	4127	4129	4133	4139	4153	4157	4159	4177	4201	4211	4217
4229	4231	4241	4243	4253	4259	4261	4271	4273	4283	4289	4297	4327	4337	4339	4349
4363	4373	4391	4397	4409	4421	4423	4441	4447	4451	4457	4463	4481	4483	4493	4507
4517	4519	4523	4547	4549	4561	4567	4583	4591	4597	4603	4621	4637	4639	4643	4649
4657	4663	4673	4679	4691	4703	4721	4723	4729	4733	4751	4759	4783	4787	4789	4793
4801	4813	4817	4831	4861	4871	4877	4889	4903	4909	4919	4931	4933	4937	4943	4951
4967	4969	4973	4987	4993	4999										

Priemgetallen in rijen

We gaan nog wat meer eigenschappen van priemgetallen bezien. Op één uitzondering na zijn alle priemgetallen oneven, alleen 2 is even. Twee opeénvolgende getallen zijn dus niet allebei priem, behalve 2 en 3. Zijn twee opeénvolgende oneven getallen wel eens allebei priem? Zulke paren noemen we priemtweelingen, voorbeelden zijn 3,5 en 5,7 en 11,13 enzovoorts. Ja, hoe gaat het eigenlijk verder? Zijn er oneindig veel van zulke paren? Dit is weer een onopgelost probleem over priemgetallen. We weten wel dat 10.006.427 en 10.006.429 allebei priem zijn, maar een algemene stelling is niet bewezen.

Aan de andere kant zijn er wel willekeurig lange rijen opeenvolgende getallen die geen van alle priem zijn. We geven een voorbeeld van een rij van ten minste 1000 getallen achter elkaar, waarvan er geen enkele priem is. Als afkorting schrijven we $n! = 1.2.3. \ldots n$.

Bezien we nu $1000! + 2$ dan is dit getal door 2 deelbaar, $1000! + 3$ is door 3 deelbaar $1000! + 4$ door 4 enzovoorts. Tot $1000! + 1000$, dit is door 1000 deelbaar. We hebben er nu al 999. Maar er gaat nog even door. Probeer zelf maar te bewijzen dat $1000! + 1001$ en $1000! + 1002$ niet priem zijn.

Het spreekt vanzelf dat 2 het enige even priemgetal is en 3 het enige drievoud dat priem is.

We kunnen de natuurlijke getallen verdelen in drie deelverzamelingen:

De verzameling D van de drievouden: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 . . .

De verzameling M van 3-vouden—1 : 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, . . .

De verzameling P van 3-vouden + 1 : 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, . . .

Priemgetallen hierin zijn: In D alleen 3

In M : 2, 5, 11, 17, 23, 29, . . .

In P : 7, 13, 19, 31, . . .

Zijn er zowel in P als in M oneindig veel priemgetallen?

Op eenzelfde manier als we in het eerste deel gebruikten om aan te tonen dat er oneindig veel priemgetallen zijn, kun je bewijzen dat M oneindig veel priemgetallen bevat. Ook P bevat oneindig veel priemgetallen. In zekere zin liggen in P en M „evenveel" priemgetallen.

Men kan bewijzen dat in iedere rij

$a, a + b, a + 2b, a + 3b, \ldots$ oneindig veel priemgetallen voorkomen, als a en b onderling ondeelbaar zijn.

Maar of in de rij $1^2 + 1, 2^2 + 1, 3^2 + 1, 4^2 + 1, 5^2 + 1, \ldots$ oneindig veel priemgetallen voorkomen is niet bekend.

In de rij $n^2 - 81\,n + 1681$ zijn de termen met $n = 1, 2, 3, \ldots, 80$

alle priem, maar voor $n = 81$ komt er een kink in de kabel, dan komt er namelijk $81^2 - 81.81 + 1681 = 1681 = 41^2$. Maar we weten niet of er in deze rij oneindig veel priemgetallen voorkomen.
Over priemgetallen zijn welhaast even veel onopgeloste problemen als opgeloste problemen te vermelden. Een in 1742 door Goldbach uitgesproken vermoeden dat ieder even getal (groter dan 2) de som van twee priemgetallen is, kon nog niet bewezen worden. Je ziet direct dat
$6 = 3 + 3$, $8 = 2 + 5$, $10 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$, $14 = 2 + 11$,
$16 = 3 + 13$, $18 = 5 + 13$, $20 = 3 + 17$, $22 = 3 + 19$, $24 = 5 + 19$ enz.
Wel bewees Vinogradov in 1937 dat ieder voldoend groot oneven getal te schrijven is als de som van drie priemgetallen.

Speciale priemgetallen
Bij verschillende klassieke problemen spelen priemgetallen een rol. Bijvoorbeeld: welke regelmatige veelhoeken zijn met passer en liniaal te construeren? Eenvoudig kan men inzien dat als een n-hoek te construeren is, dan ook een 2n-hoek. Als een n-hoek en een m-hoek te construeren zijn, kan men ook een nm-hoek construeren. (Probeer eens een regelmatige 15-hoek te construeren!) Een (moeilijke) stelling uit de algebra zegt dat een regelmatige p-hoek (met p een priemgetal) te construeren is als $p - 1$ een macht van 2 is. Dus
$p = 1 + 2^k$.
Is echter $2^k + 1$ een priemgetal?

Voor $k = 1$ vind je $2^1 + 1 = 3$
$k = 2$ $\quad 2^2 + 1 = 5$
$k = 3$ $\quad 2^3 + 1 = 9$, maar dit is geen priemgetal. Als k oneven is blijkt $2^k + 1$ steeds door 3 deelbaar te zijn. Dit is wel te begrijpen, want voor oneven k gaat de deling $(x^k + 1) : (x + 1)$ op. Maar ook $2^6 + 1$, $2^{10} + 1$ zijn geen priemgetallen. Wat blijft er dan nog over? Wel, het is te bewijzen dat $2^k + 1$ alleen maar priemgetal *kan* zijn als k een macht van 2 is, dus $k = 1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ We proberen:

$2^1 + 1 = 3$	priemgetal
$2^2 + 1 = 5$	,,
$2^4 + 1 = 17$	,,
$2^8 + 1 = 257$	,,
$2^{16} + 1 = 65537$	,,
$2^{32} + 1 = 4294967297$	geen priemgetal!

$4.294.967.297 = 641 \times 6700417$

Ook voor verschillende hogere machten van 2 blijken we geen priemgetallen te krijgen. Met moderne rekenmachines heeft men naar grotere priemgetallen van deze soort gezocht. Maar een algemene theorie bestaat nog niet. (Zie ook pag. 135 van de voorgaande jaargang.)
Je kunt ook zoeken naar priemgetallen van de vorm $2^k - 1$. Probeer maar eens te bewijzen dat k dan noodzakelijk zelf een priemgetal moet zijn. Voor $k = 2, 3, 5, 7, 13, 17$ is $2^k - 1$ inderdaad een priemgetal. Maar $2^{11} - 1 = 2047 = 23.89$. Ook hier dus weer een kink in de kabel. Er is nog veel te doen voor we alles van priemgetallen afweten. Het is een boeiend brok wiskunde omdat ze steeds weer weigeren zich in het keurslijf van een algemene theorie te laten persen.

°Groepen en groepjes

In het eerste nummer van deze jaargang stond een artikel over getallenlichamen. Het bleek dat een getallenverzameling aan veel eisen moet voldoen, wil het een *lichaam* vormen. Er moeten dan in de verzameling twee bewerkingen zijn gedefinieerd (optellen en vermenigvuldigen), die onbeperkt uitvoerbaar zijn, evenals hun inverse bewerkingen (aftrekken en delen). We kunnen ook minder veeleisend zijn en kijken naar verzamelingen met slechts één bewerking. We kunnen dan te maken hebben met een *groep*.

Spelen met een rechthoek
Er bestaat van dat prachtig glanzende „zilverpapier", aan de ene kant diep-rood, aan de andere kant gif-groen. Verkwistend als we zijn, knippen we midden uit een dergelijk vel een mooie grote rechthoek. Als we na deze schanddaad de rechthoek berouwvol weer in het ontstane gat willen terugleggen, op hoeveel manieren past hij dan in de opening? Als we de rode kant boven houden op twee manieren, als we kleurenblind zijn kan het ook nog op twee manieren met de groene kant boven.
Dit ligt niet aan de keuze van het materiaal of aan onze lichamelijke gebreken:
Iedere rechthoek past op vier verschillende manieren in zijn opening.
Meer dan dit feit interesseert het ons hoe je de verschillende standen uit elkaar kunt laten ontstaan. In figuur 19a is een rechthoek ABCD getekend, met zijn twee middenparallellen l_1 en l_2. Als we de rechthoek

wentelen om l_1 ontstaat de rechthoek BADC, figuur 19b, bij wenteling van ABCD om de as l_2 ontstaat de rechthoek DCBA van figuur 19c. Tenslotte kunnen we ook de rechthoek ABCD een halve slag draaien om het snijpunt van de diagonalen S. We krijgen dan rechthoek CDAB van figuur 19d.

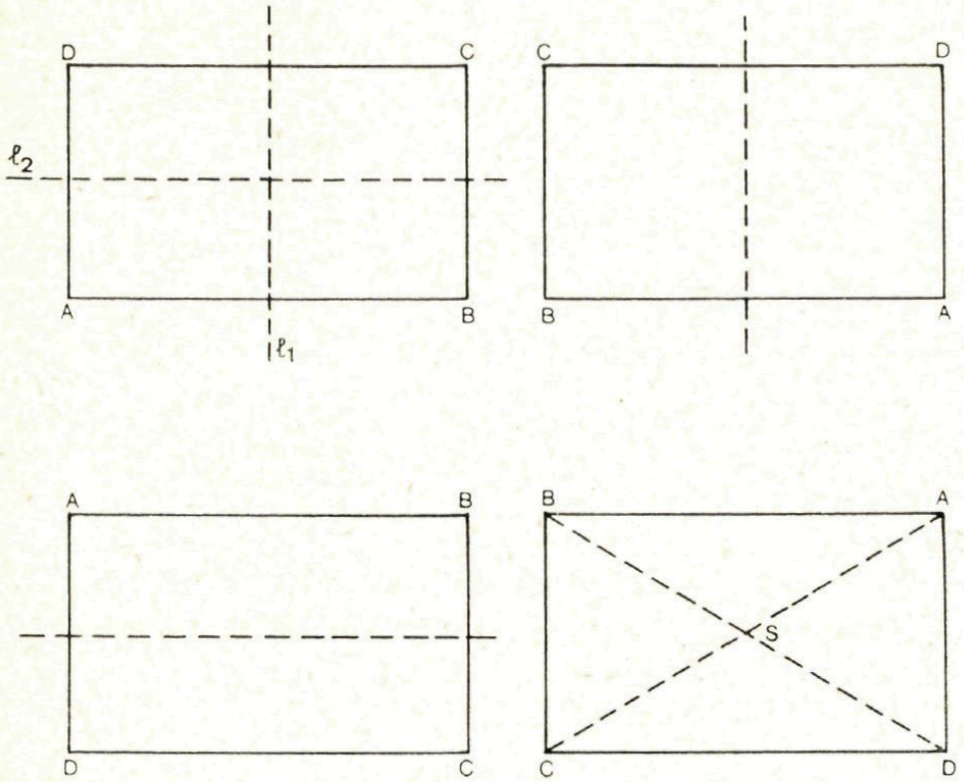


Fig. 19

Hiermee hebben we precies de vier mogelijke standen van de rechthoek gekregen.

Het overgaan van de ene stand van de rechthoek op de andere noemen we een *afbeelding of transformatie*. In plaats van wentelen om l_1 en l_2 spreken we daarbij liever over het spiegelen in deze lijnen, wat hetzelfde resultaat oplevert.

Je kunt opmerken:

1. Als je ABCD spiegelt in l_1, dan krijg je BADC. Als je deze weer spiegelt in l_1, dan krijg je ABCD weer terug. Hetzelfde geldt als je tweemaal achter elkaar spiegelt in l_2 of tweemaal achter elkaar een halve slag draait om S.
2. Als je ABCD eerst spiegelt in l_1 en daarna in l_2, dan krijg je de figuur CDAB, dwz. het resultaat is een draaiing. Hetzelfde geldt als je de spiegelingen in omgekeerde volgorde doet.
3. Als je eerst spiegelt in l_1 en daarna draait om S is het resultaat een spiegeling in l_2.

Uit deze voorbeelden blijkt dat als je twee transformaties van de recht-

hoek na elkaar uitvoert, het resultaat weer een transformatie is. We moeten daarbij dan wel afspreken dat de overgang van ABCD op zichzelf ook een transformatie is. We hebben dan een verzameling van vier transformaties die we zullen voorstellen door 0, 1, 2 en 3:

0 is de overgang van ABCD op ABCD, dus een draaiing over 0°, of 360°, of 720° enz.

1 is een draaiing van de rechthoek over 180° om S.

2 is een spiegeling van de rechthoek in l_1.

3 is een spiegeling van de rechthoek in l_2.

Het na elkaar uitvoeren van de transformaties noemen we een *bewerking* en duiden we aan met *. Met 3*2 bedoelen we: eerst transformatie 2 en daarna 3.

We hebben gezien dat $1 * 1 = 0$, $2 * 2 = 0$ en $3 * 3 = 0$. Ook dat $1 * 2 = 3$.

We kunnen dit samenvatten in de volgende tabel:

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Dit is de tabel van de zogenaamde *viergroep van Klein.*

Wat is een groep en wie was Klein?

Om een antwoord te geven op het eerste deel van de vraag kunnen we het beste kijken naar de gehele getallen. Deze vormen een verzameling waarin een bewerking bestaat (optellen), waarbij geldt:

1. De som van twee gehele getallen is weer een geheel getal.

2. De optelling is *associatief*, dat wil zeggen, voor alle gehele getallen geldt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

3. Er is een *neutraal element*, namelijk 0, waarvoor geldt:
$a + 0 = 0 + a = a$ voor ieder geheel getal a.

4. Elk geheel getal heeft een *invers element*, namelijk zijn tegengestelde, zodat $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Op grond van deze vier eigenschappen vormen de gehele getallen een *groep ten aanzien van de optelling*. Omdat de optelling ook commutatief is ($a + b = b + a$), spreekt men van een *commutatieve of abelse groep*. Het is niet zo moeilijk na te gaan dat de positieve rationale getallen (gehele getallen plus breuken) een groep vormen ten aanzien van de

vermenigvuldiging:

1. Het product van twee positieve getallen is weer een positief getal.
2. Het vermenigvuldigen is associatief.
3. Er is een neutraal element, namelijk 1.
4. Elk element a heeft een inverse, namelijk zijn omgekeerde, zodat $a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.a = 1$.

Uit deze twee voorbeelden van groepen blijkt dat zowel optellen als vermenigvuldigen als bewerking kan optreden. In beide voorbeelden gaat het om groepen met oneindig veel elementen. Een groep kan ook een beperkt aantal elementen hebben.

In de moderne wiskunde spelen groepen met de meest uiteenlopende soorten bewerkingen een rol. Ook in de meetkunde komen we ze tegen, om precies te zijn: we zijn er al één tegengekomen. Inderdaad: ons spel met de rechthoek leverde een groep op, met als bewerking: het samenstellen van transformaties. Het is een heel overzichtelijke groep met slechts 4 elementen. Wat is het neutrale element? Je kunt nagaan dat elk element zijn eigen inverse is. Ook de associativiteit kun je controleren.

We noemen dit een groep van de *orde* vier, omdat er slechts vier elementen zijn.

Er is nog één andere groeptabel van de orde vier mogelijk en wel die van de zogenaamde cyclische groep van de vierde orde. Je krijgt deze door de resten te beschouwen die ontstaan na deling van de natuurlijke getallen door 4. Die vormen een verzameling bestaande uit 0, 1, 2 en 3. De opteltabel hiervan ziet er zo uit:

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Hierbij is $3 + 1 = 0$ een $3 + 3 = 2$, omdat we automatisch weer delen door 4 en alleen de rest noteren. Op deze wijze blijven we binnen onze verzameling van vier elementen, waarmee voldaan is aan de eerste voorwaarde voor het vormen van een groep. Dat ook aan de andere eisen is voldaan kun je zelf controleren.

Tenslotte: Felix Klein was een Duits wiskundige (1849–1925) en Niels Henrik Abel een Noors (1802–1829).

45. Gegeven is de kubus ABCD-EFGH met ribbe 1; P is een punt op de ribbe CG. Bepaal het minimum van PA—PB.
46. De hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek liggen op de zijden van een vierkant met oppervlakte 1. Hoe groot is de maximale oppervlakte van de driehoek?
47. Op de zijden AB, BC, CD en DA van een vierkant ABCD liggen opvolgend de punten P, Q, R en S zo, dat AQ, BR, CS en DP een vierkant insluiten. Als AB = 1 en de oppervlakte van het ingesloten vierkant de helft is van het vierkant ABCD, bereken dan AP.

°°De stelling van Euler in het platte vlak

Men spreekt wel eens van de stelling van Pythagoras in de ruimte en bedoelt daarmee dat voor de lichaamsdiagonaal van een balk geldt $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
Je kunt dit zelf verifiëren aan de hand van figuur 20.

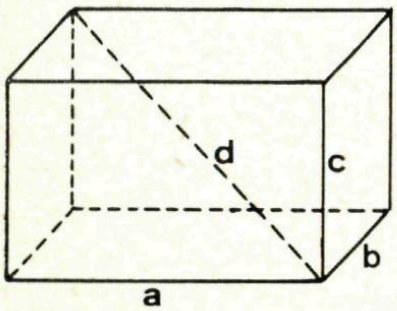


Fig. 20

Eigenlijk is de analogie tussen beide stellingen erg zwak. Waar in het platte vlak sprake is van zijden, zou in de ruimte sprake moeten zijn van oppervlakken, van zijvlakken van een ruimtefiguur. En wat zouden we in plaats van de rechthoekige driehoek krijgen? In ieder geval een ruimtelijke figuur. En zouden de kwadraten derde machten moeten worden? Er bestaat in ieder geval geen stelling die een zuiver analogon is van de stelling van Pythagoras.
Het is verrassend dat er wel een analogon in andere dimensies bestaat voor de bekende stelling van Euler (zie Pythagoras 8/2) die zegt dat

een voor een veelvlak geldt: $Z + H = R + 2$. Dat wil zeggen de som van het aantal zijvlakken en hoekpunten van een veelvlak is gelijk aan het aantal ribben plus 2. Controleer dit bij een kubus. We gaan de stelling van Euler eens anders schrijven. Het aantal hoekpunten noemen we A_0 (nulde dimensie) het aantal ribben A_1, (eerste dimensie), het aantal zijvlakken A_2. Dan krijgen we $A_0 - A_1 + A_2 = 2$.
Bedenken we bovendien nog dat door het veelvlak één ruimte wordt ingesloten, en noemen we het aantal ingesloten ruimten A_3, dan kan de stelling van Euler de volgende vorm krijgen:

$$A_0 - A_1 + A_2 - A_3 = 1$$

Nu vertelt Prof. Levy in één van de nummers van de New Scientist van 1967*) dat hij spelenderwijs de volgende stelling vond: Teken een kromme lijn met een begin en een eindpunt. Laat naar believen snijpunten ontstaan; dan ontstaan ook lijnstukjes en ingesloten vlakdeeltjes. Nu geldt de volgende stelling:

$$A_0 - A_1 + A_2 = 1$$

Tellen we in figuur 21 de punten, lijnstukjes en ingesloten vlakjes dan blijkt inderdaad: $8 - 13 + 6 = 1$.
Controleer dit ook voor figuur 22.

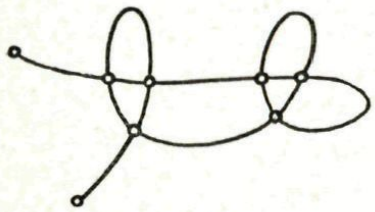


Fig. 21

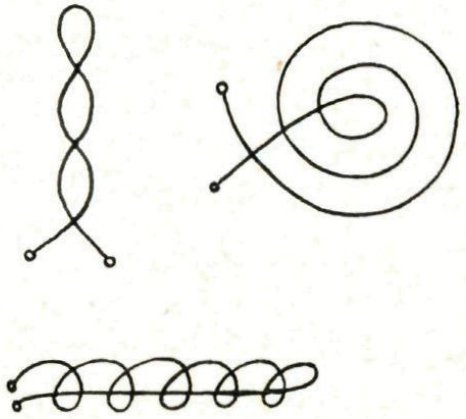


Fig. 22

Voor wie iets weet van de regelmatige 8-cel in de vierde dimensie, vermelden we dat deze stelling ook geldt voor vierdimensionale figuren:
$A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4 = 1$
Voor een regelmatige 8-cel krijgen we:
$16 - 32 + 24 - 8 + 1 = 1$

* Dank aan J. v. Stiphout uit Veldhoven, die ons hierop attent maakte. De genoemde stelling is van veel oudere datum dan 1967, in feite bijna zo oud als de stelling van Euler zelf.

°De hokjespuzzel (naar een inzending van Jan Westermann.)

Hoeveel vierkanten komen er in totaal voor in een vierkant van $n \times n$ hokjes?

We nemen eerst een vierkant van 1×1. Het aantal vierkantjes dat we kunnen tellen noemen we P_1. Het zal je niet moeilijk vallen te zien dat $P_1 = 1$. Nu een vierkant van 2×2. In deze figuur kun je in totaal 5 vierkantjes tellen, dus $P_2 = 5$.

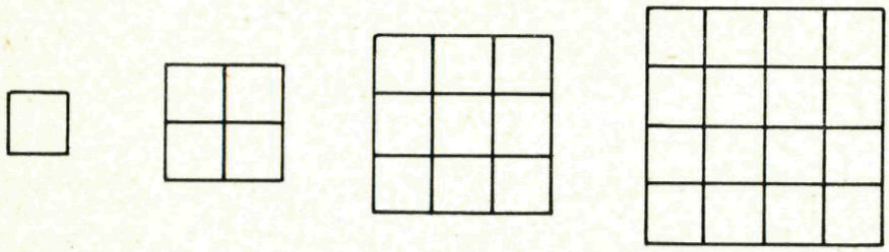


Fig. 23

Door te tellen vind je ook dat $P_3 = 14$ en $P_4 = 30$. Hoe gaat dit verder?
We maken een lijstje van de vierkanten

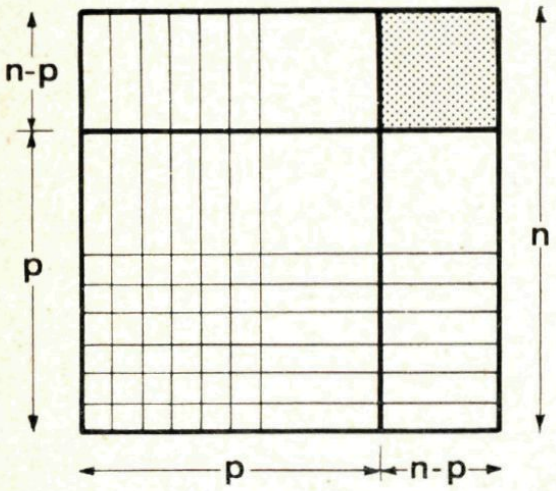
	aantal vierkanten van					
	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	
$n = 1$	1	0	0	0	0	$P_1 = 1$
$n = 2$	4	1	0	0	0	$P_2 = 5$
$n = 3$	9	4	1	0	0	$P_3 = 14$
$n = 4$	16	9	4	1	0	P_4 30
$n = 5$	25	16	9	4	1	$P_5 = 55$

Je ziet in het lijstje dat het aantal vierkantjes van een bepaalde grootte steeds een kwadraat is, zodat de rij $P_1, P_2, P_3, P_4 \ldots$ bestaat uit de som van een aantal kwadraten.

$$P_5 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

Hoeveel vierkanten van $p \times p$ gaan er in een vierkant van $n \times n$?
We zetten een vierkant van $p \times p$ linksonder in het vierkant van $n \times n$. Kijk nu eens naar het rechterbovenhoekpunt van het vierkant van $p \times p$. Welke roosterpunten in het grote vierkant komen in aanmerking om rechterbovenhoekpunt te zijn van een vierkant van $p \times p$?

Dit zijn de punten in het grijs gemaakte vierkant in de figuur. Dit vierkant heeft $n - p \times n - p$ hokjes, dus $(n - p + 1)^2$ roosterpunten.



(Een vierkant van 4×4 hokjes heeft 5×5 roosterpunten!) Het aantal vierkanten van 1×1 dat in een vierkant van $n \times n$ gaat is dus $(n - 1 + 1)^2 = n^2$, het aantal van 2×2 is $(n - 1)^2$ dat van 3×3 is $(n - 2)^2$, enz.

Totaal:

$$P_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2$$

Je kunt hiervoor schrijven

$$P_n = \frac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1)$$

maar deze formule is niet zo gemakkelijk af te leiden. Voorzover je op de hoogte bent met de bewijsmethode van volledige inductie, kun je de juistheid wel controleren.

---

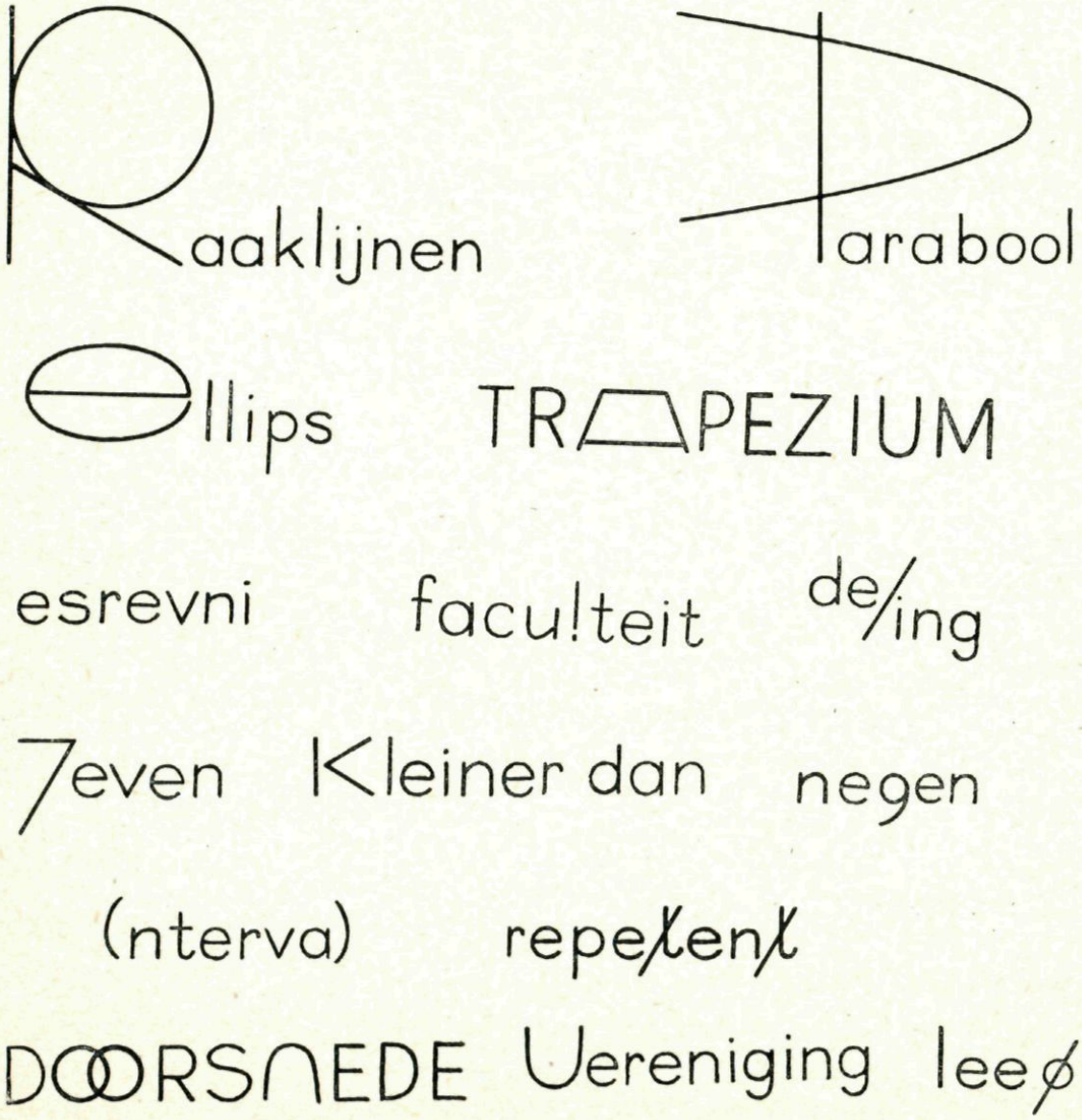
48. Hoeveel vierkanten kun je in totaal tellen op een dambord? (Naar een inzending van Jan Westermann).
49. Als je een tafel bedekt met centen, die tegen elkaar aan liggen hoeveel procent van het oppervlak wordt dan bedekt? (Eerst raden en dan uitrekenen, de randen mag je buiten beschouwing laten.)
50. Hoeveel procent van de nummerborden van auto's in Nederland bestaat uit vier verschillende cijfers? Ook weer eerst raden en dan uitrekenen. De laatste twee Denkertjes zijn ingezonden door J. H. M. Meurs.

Mathemadics

Welgeteld 112 voorbeelden kregen we van alle kanten toegezonden van meer of minder geslaagde mathemadics. Jaap Blom uit Bleiswijk deed zijn aandeel vergezeld gaan van het volgende fraaie epistel:

Aangestoken door Uw mathemadics stond ik gisteravond in vuur en vlam ervoor. Of het een koortsaanval ten gevolge van influenza maothematicis was? In elk geval, ik liep rond met verschillende mathematics. Vele voortbrengselen van mijn toestand van mathemeligheid verwerp ik nu, maar sommige zijn misschien het opsturen waard. I hope you'll get some mathemakicks out of them, but I'm mathemasick of it!"

Een bloemlezing uit de ideeën volgt hier:



°In de knoop

Wist je dat er iets komieks gebeurt wanneer je een knoop legt in een lint of in een strook niet al te zwak papier, tenminste wanneer je die knoop platdrukt tijdens het aantrekken?

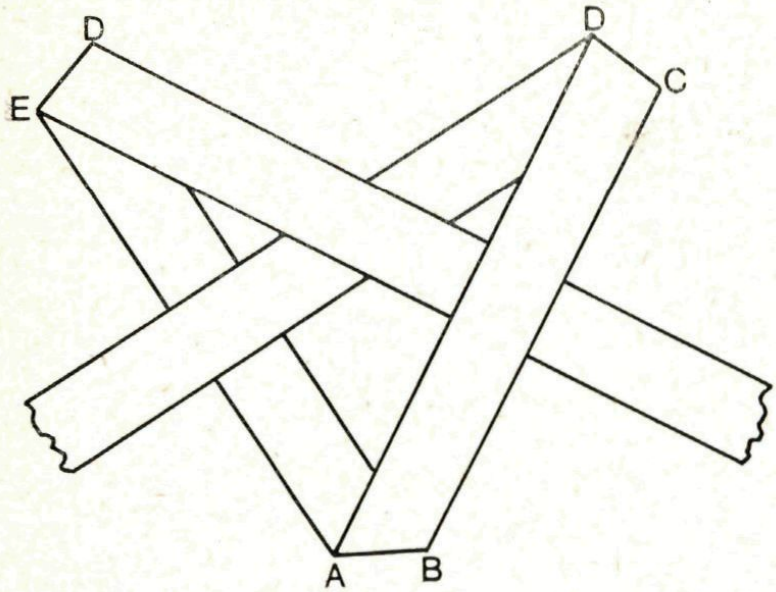


Fig. 26

In figuur 26 zie je de knoop voor hij aangetrokken is. Door het platdrukken zijn er drie vouwen in het lint ontstaan. Ze heten AB, CD en DE. De letter D is met opzet twee keer gebruikt. Bij het aantrekken van de knoop naderen de vouwen namelijk tot elkaar en daarbij gaan dan die twee punten D tenslotte samenvallen. In figuur 27 is het eindresultaat afgebeeld, lichtelijk vergroot.

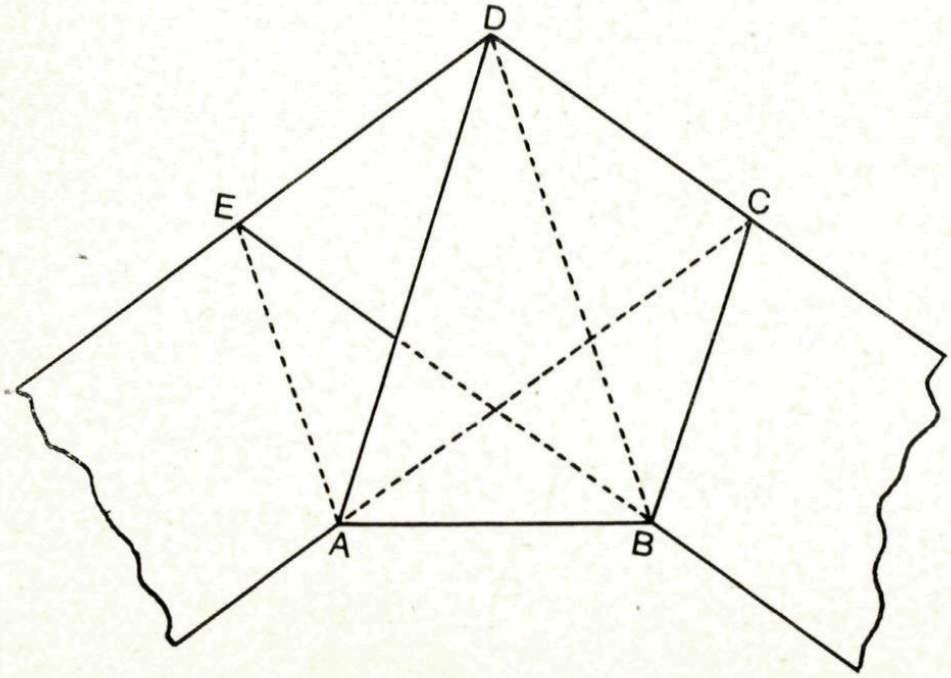


Fig. 27

Jawel, je hebt gelijk. De knoop krijgt „helemaal vanzelf" de vorm van een regelmatige vijfhoek, van een vijfhoek met vijf gelijke zijden en vijf gelijke hoeken (van 108° elk). En dat is dan die komieke gebeurtenis waar we op doelden.
Pak een lint en leg die knoop. Het kost geen enkele moeite om de regelmatige vijfhoek te doen ontstaan. Verrassend, nietwaar?
Of bezit je misschien een fikse dosis gezond wantrouwen, waardoor je onze beweringen niet zomaar onmiddellijk gelooft? Wel, probeer dan maar eens een meetkundig bewijs voor die beweringen te vinden. Zo verschikkelijk moeilijk is dat niet. Er is slechts één ding waar je voor moet oppassen . . . raak zelf niet in de knoop!

Oplossingen van Denkertjes uit nummer 4

31. In het eerste geval is de totale lengte van de twee snijlijnen gelijk aan $1\frac{2}{3}$ (waarbij de lengte van de zijde van het vierkant gelijk aan 1 is gesteld); zie figuur a.
In het geval van figuur b is de totale lengte van de drie snijlijnen gelijk aan $\frac{2}{3} - x + \sqrt{(1 + 16x^2)}$. Dit is minder dan $\frac{2}{3} - x + 1 + 8x^2$. Als x tussen 0 en $\frac{1}{8}$ ligt, is dit laatste bedrag minder dan $1\frac{2}{3}$.

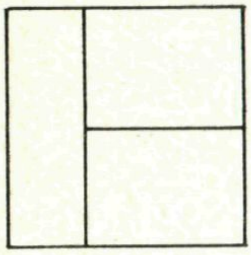


Fig. a

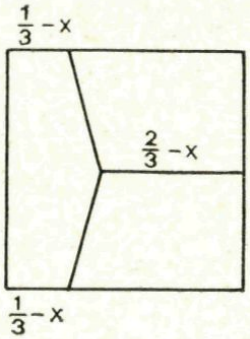


Fig. b

32. De gevraagde vergelijking is $5x^2 - 5x + 1$.
33. De eerste 25 priemgetallen (2 tot en met 97) hebben 1060 tot som, zodat het aantal termen minder dan 25 zal moeten zijn. Zou het getal 1000 als som van 24 priemgetallen geschreven kunnen worden, dan zouden dat oneven priemgetallen moeten zijn; de som van de eerste 24 oneven priemgetallen (3 tot en met 97) is echter al 1058, zodat we deze hoop opgeven. Een som met 23 termen is echter mogelijk: neem bijvoorbeeld alle priemgetallen van 2 tot en met 97, met uitzondering van 7 en 53.
34. Figuur c toont een oplossing van de eerste vraag. De tweede opdracht kan niet uitgevoerd worden. Kleur de velden zoals bij een schaakbord. Je zou nu 13 witte

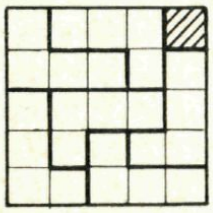


Fig. c

en 11 zwarte vakjes moeten bedekken. En dat terwijl elk legpuzzelstukje 2 witte en 2 zwarte bedekt.
35. Teken de grafieken van $P = a^2$, van $Q = 2a(1 - a)$ en van $R = (1 - a)^2$ in één figuur. Je leest daaruit af dat het grootste getal van het drietal P, Q, R elke waarde boven $4/9$ kan hebben.

36. Zie figuur d.

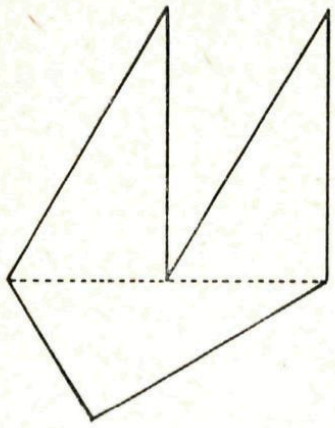


Fig. d

37. Zie figuur e.

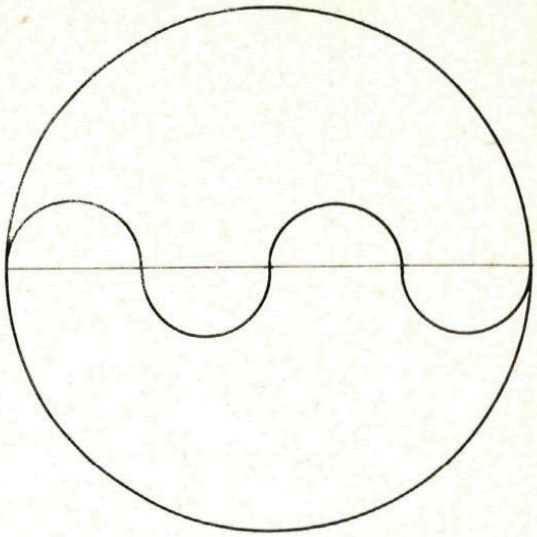


Fig. e

38. Cirkel (met straal r) en vierkant (met zijde a) hebben gelijke oppervlakte. Dus $a = r\sqrt{\pi}$.
39. Het getal 12617 is slechts op één manier in drie factoren te ontbinden: 11.31.37. Over een jaar is het produkt van de leeftijden dus 12.32.38 = 14592.

Oplossingen van de Denkertjes in dit nummer

41. Stel ${}^2\log 23 = p$, dan is $2^p = 23$, p ligt dus tussen 4 en 5. Nu is $2^9 = 512$ en dit is kleiner dan het kwadraat van 23. Hieruit volgt dat p groter is dan $4\frac{1}{2}$, zodat het gevraagde getal 5 is.
42. Als de vergelijking drie wortels heeft, dan is deze te schrijven als $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$, waarbij $-abc = 1$. Het product abc bevat dus een oneven aantal negatieve, dus een even aantal positieve factoren. Er zijn dus een even aantal positieve wortels. Daar $x = 0$ de waarde 1 voor het linkerlid geeft en $x = 1$ de waarde -2, is er minstens één positieve wortel, dus 2.
43. De eerste vergelijking geeft $n^2 - m^2 = (n - m)(n + m) = 60$
$60 = 6.10 = (8 - 2)(8 + 2) = 8^2 - 2^2$.
$61 = 61.1 = (31 - 30)(31 + 30) = 31^2 - 30^2$
62 is niet te schrijven als het verschil van twee kwadraten.
44. Uit de figuur f volgt: $x^2 + y^2 = 16$, $y^2 + z^2 = 9$, $z^2 + t^2 = 25$.
$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 16 + 25 = 41$
$y^2 + z^2 = 9$ Dus $x^2 + t^2 = 32$
$PD = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

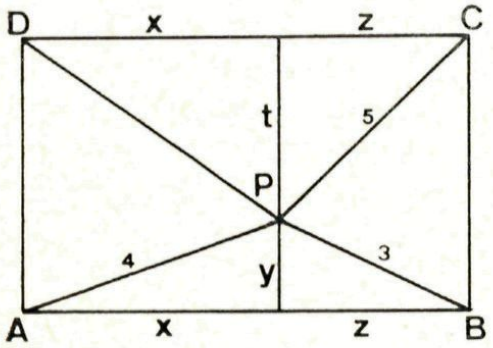


Fig. f

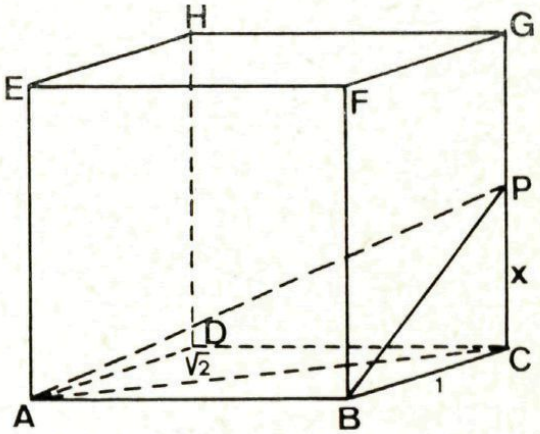


Fig. g

45. Zie figuur g. Stel PC = x. $PA = \sqrt{x^2 + 2}$, $PB = \sqrt{x^2 + 1}$. $PA - PB =$
$$\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 2) - (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}}$$
Dit is minimaal als x is maximaal, dus P = G.

46. Zie figuur h. De oppervlakte is maximaal als een hoekpunt van de driehoek in een hoekpunt van het vierkant ligt. De oppervlakte is dan $2\sqrt{3} - 3$.

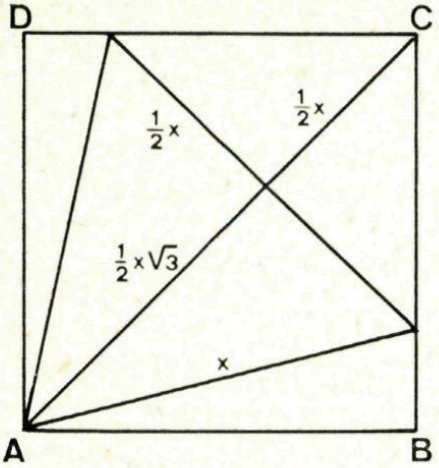


Fig. h

47. Zie figuur i. Opp. ABCD = opp. STUV + 4. opp. ABS. Hieruit volgt dat opp. $\triangle ABS = \frac{1}{8} = \frac{1}{2}x.(x + \frac{1}{2}\sqrt{2})$. Dit geeft $x = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, waaruit gemakkelijk te berekenen is dat $AP = 2 - \sqrt{3}$.

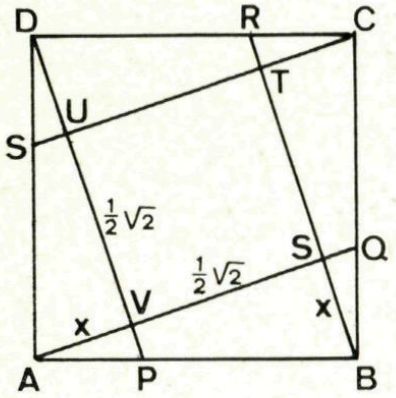


Fig. i

48. Op een dambord kun je 385 vierkanten tellen. Zie het artikel over de Hokjespuzzel.
49. Zie figuur j. Uitgaande van drie centen vinden we dat bedekt is het gearceerde deel. De oppervlakte hiervan is $3x^1/_6\pi r^2$. De oppervlakte van de driehoek is $rxr\sqrt{3}$. Het percentage dat bedekt is, $\frac{1}{2}\pi/\sqrt{3} \times 100\% = 90.688\%$.

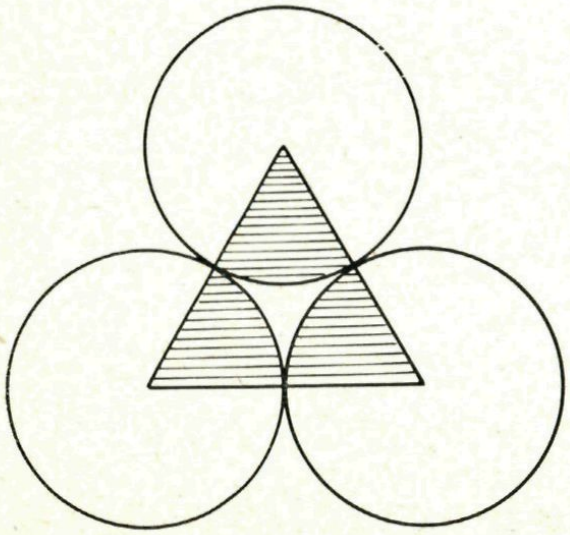


Fig. j

50. Rekenen we het nummerbord met vier nullen ook mee, dan zijn er 10.000 verschillende, hiervan hebben *10.9.8.7* = 5040 allemaal verschillende cijfers, dus ruim 50%.

Vierkante centimeters verdwijnen en komen uit het niet tevoorschijn.

Oplossingen:

1. Figuur 1 (hier nog eens weergegeven als figuur 28) is doodeerlijk. Maar in figuur 2 (figuur 29) is gesmokkeld. Het *lijkt* of we met een rechthoek te doen hebben, maar in werkelijkheid is ABC geen rechte lijn, hetgeen blijkt uit de verschillende verhoudingen die de rechthoekszijden van de rechthoekige driehoeken hebben, nl. 3/8 en 2/5. Daaruit volgt dat $\angle\alpha < \angle\beta$. Inplaats van de diagonaal AC komt er dus bij nauwkeurig tekenen een parallellogram tevoorschijn waarvan de oppervlakte precies gelijk is aan die van het „erbijgegoochelde" vierkantje.

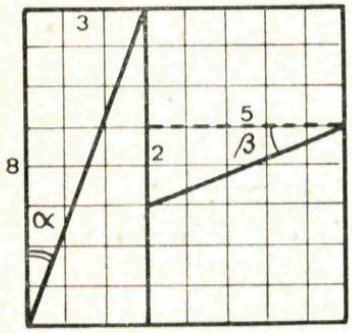


Fig. 28

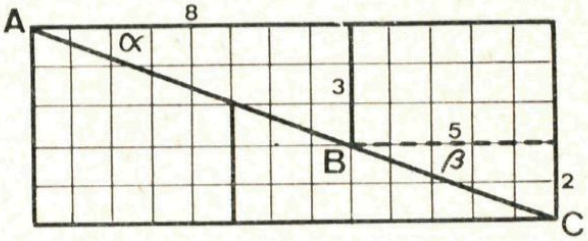


Fig. 29

Bekijken we de rij Fibonacci-getallen 1 1 2 3 5 8 13 21 34 . . . (het volgende getal is steeds de som van de twee voorafgaande, zie Pythagoras 8/1) dan is steeds het kwadraat van een der getallen één minder dan het product van de voorgaande en het volgende. Bv. bij 5, 8, 13 is $8^2 = 5 \times 13 - 1$. Kun je nu zelf een aantal variaties vinden op het bovenstaande grapje?

2. Hier zijn beide figuren niet helemaal juist getekend. Het zijn geen vierkanten, omdat ook hier $\angle\alpha < \angle\beta$. Daaruit volgt dat de zijden van de pseudo-vierkanten

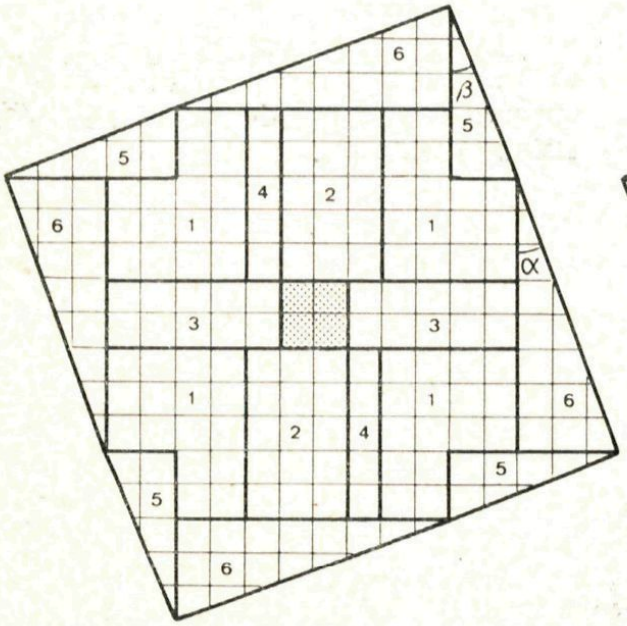


Fig. 30

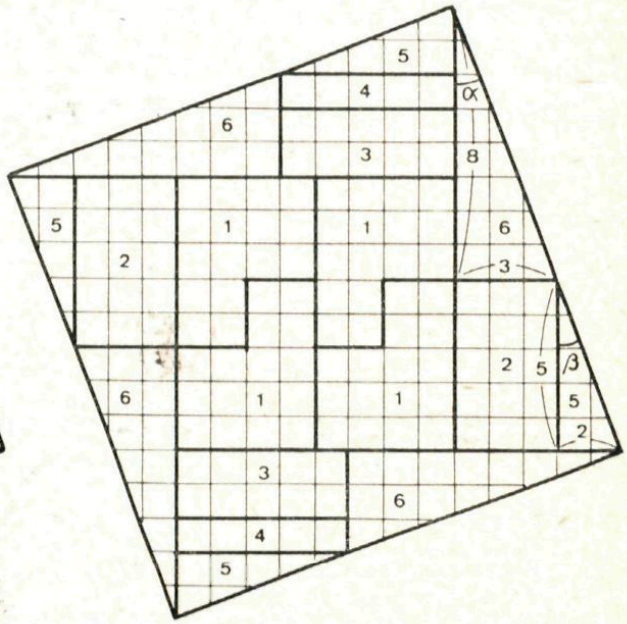


Fig. 31

uit gebroken lijnstukken bestaan en wel zo dat figuur 3 (30) „bol" staat en figuur 4 (31) „hol". Het is nu ook duidelijk waarom in figuur 3 (30) nog plaats was voor het zwarte vierkant in het midden.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

H. J. ENGELS, Muggenbroekerlaan 41, Roermond.
BRUNO ERNST, Daniël Marotstraat 184, Breda.
Drs. A. B. OOSTEN, Turftorenstraat 11A, Groningen.
A. F. VAN TOOREN, Nachtegaalplein 10, Den Haag.
G. A. VONK, Fahrenheitstraat 688, Den Haag.

Artikelen en problemen kunnen naar één van de redacteuren worden gestuurd.
Oplossingen van *Denkertjes* kunnen naar het eerste adres worden gezonden, oplossingen van andere problemen naar het vierde adres.
Vermeld bij alle inzendingen duidelijk naam, adres, school en leerjaar.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, *f* 2,50 per jaargang. Voor anderen *f* 4,—.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff N.V., Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient te worden gestort op girorekening 807707 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.