PYTHAGORAS

Wiskundetijdschrift
voor jongeren

1

negende jaargang
1969/1970

De in de mythologie voorkomende cycloop sloot zijn hol af met een rotsblok. Tegenwoordig gebruiken we voor dit doel deuren in vele soorten en maten. Vaak is de voor een deur beschikbare ruimte zo klein dat slimme oplossingen bedacht moeten worden. Meer hierover lees je in het nevenstaande artikel.

pythagoras

jaargang 9 no 1

°Van rotsblok naar scharnier en verder

door Ir. H. M. Mulder

In de verhalen van de Griekse dichter Homeros lees je hoe de cycloop zijn hol met een rotsblok afsloot. Wij doen dat iets minder inspannend met een deur, die door middel van een scharnier dichtdraait.
Tegenwoordig is men alweer op zoek naar nieuwe methoden. Je ziet wel garagedeuren die uit de vertikale stand omhooggedraaid worden naar een horizontale stand langs het plafond.
Een dergelijke schuifbeweging werkt aanzienlijk ruimtebesparend. Ook bij bussen en trams wordt dit toegepast. Speciaal was ik getroffen door de kromme, die daardoor op de vloer gekrast werd.
Wij zullen proberen de beweging te analyseren en de ruimtebesparing te berekenen.
We gaan uit van een deuropening met breedte a. Normaal is het één scharnierende deur aan te brengen met breedte a (figuur 1). Als we

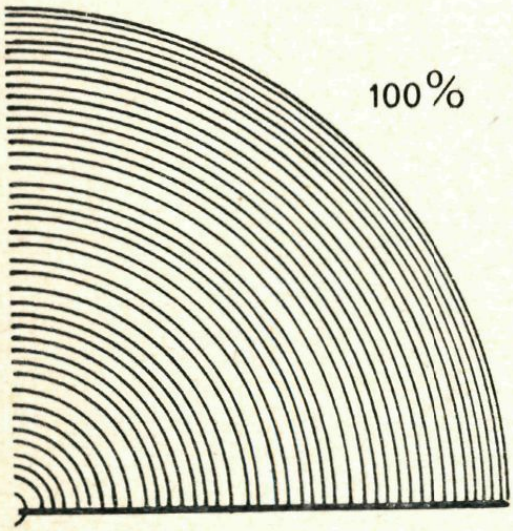


fig. 1

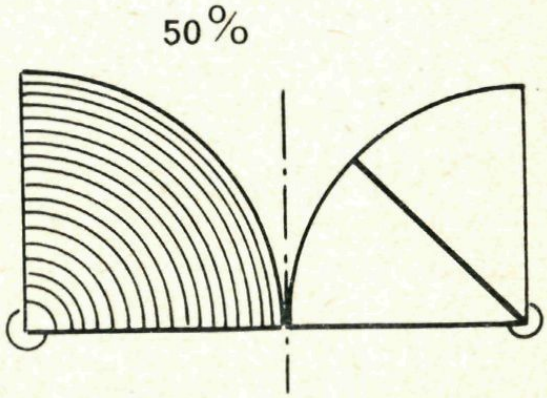


fig. 2

echter twee halve deuren met breedte $\frac{1}{2}$a nemen, hebben we al 50% ruimtebesparing (figuur 2).
Maar we gaan nog verder.

Denk de deur (lijnstuk a) in de stand OA langs de x-as (figuur 3). We verplaatsen nu de deur zo dat het ene einde A steeds over de x-as glijdt in de richting van O en het andere eind vanaf O over de y-as naar B. In figuur 3 zie je de deur getekend in 7 standen. Het zal je opvallen dat er een interessante kromme ontstaat, die de „omhullende" is van al deze deurstanden. Een dergelijke kromme heeft de eigenschap dat elk van de getekende lijnstukken aan deze kromme raakt.

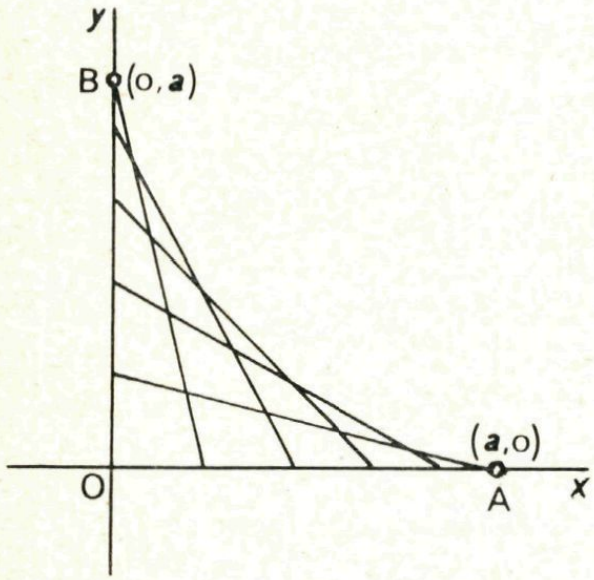


fig. 3

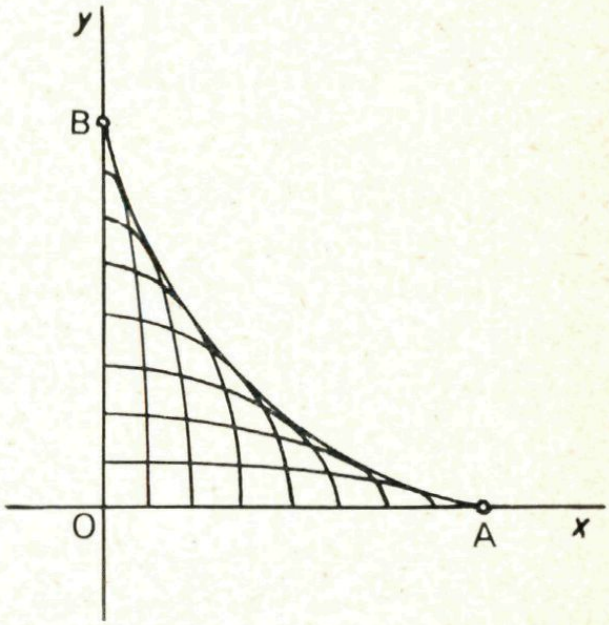


fig. 4

Het was deze kromme, die ik in de vloer van een Haagse tram gekrast zag.

°°°Het kost nogal wat wiskundige arbeid om deze kromme te identificeren. Dit wordt de uitkomst:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

Als je de geloofwaardigheid wilt testen, kun je bedenken:

1. de kromme gaat door (a, 0) en 0, a)
2. de kromme gaat door $(\frac{1}{4}a\sqrt{2}, \frac{1}{4}a\sqrt{2})$ ....
3. de kromme heeft de bissectrice van het eerste kwadraat als symmetrieas (x en y zijn verwisselbaar)
4. punten, waarvoor geldt: $|x| > a$ of $|y| > a$, behoren niet tot de kromme.

Deze kromme heeft identieke takken in de andere drie kwadranten (voor ons nu minder interessant).

Welke baan beschrijft elk punt van de deur, terwijl deze openschuift?

Als je voldoende ver in de analytische meetkunde gevorderd bent, kun je bewijzen dat deze banen kwart delen van ellipsen worden. In figuur 4 zijn er enkele getekend. Gemakkelijker is te bewijzen dat het midden van de deur een kwart cirkel beschrijft met straal $\frac{1}{2}a$. Een cirkel is een ellips met gelijke assen. Er zijn zelfs twee ellipsen

waarbij een as de lengte nul heeft. Kun je die vinden?
De bovengenoemde omhullende raakt ook aan al deze ellipsen.

We willen nu nog nagaan hoeveel ruimtewinst we met deze deur (nieuwe stijl) bereikt hebben. Daartoe moeten we de oppervlakte van de kwartcirkel OAB vergelijken met de oppervlakte van het stuk begrensd door de omhullende en de beide assen. Zie figuur 5.

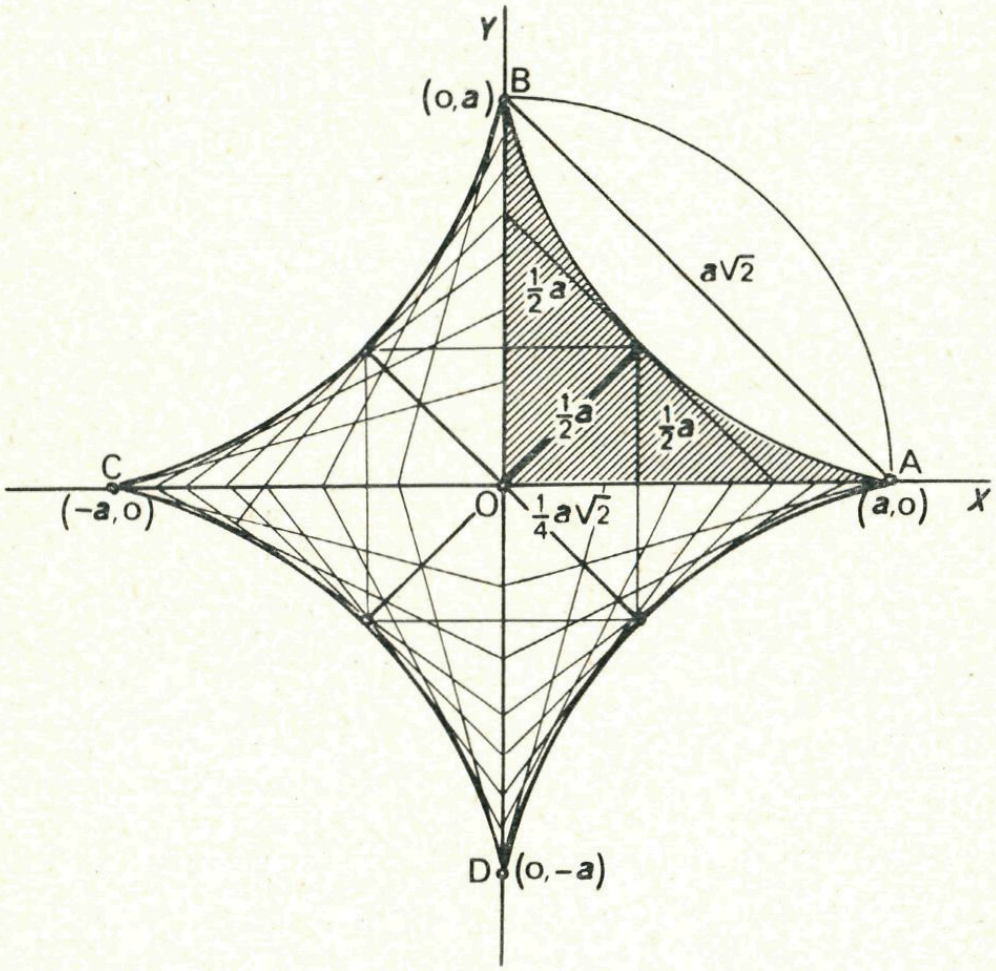


fig. 5

De uitkomst voor de kwart cirkel wordt $\frac{1}{4}\pi a^2$ ofwel $\frac{8}{32}\pi a^2$
De uitkomst voor de andere oppervlakte is te vinden door een vrij moeilijke integratie, waarbij de uitkomst wordt $\frac{3}{32}\pi a^2$.
Als we letten op de verhouding, zien we dat dit laatste $\frac{3}{8}$ deel is van de kwart cirkel, zodat er $\frac{5}{8}$ deel van de ruimte met deze nieuwe methode bespaard wordt of $62\frac{1}{2}\%$ winst.
Je ziet dat is niet gek.
Ze hadden het overigens bij die tram nog handiger ingericht.
Let maar eens op de laatste serie tekeningen.

In figuur 1 is één draaideur geplaatst in een opening met breedte a. De bestreken vloeroppervlakte wordt gesteld op 100% (kwartcirkel).
In figuur 2 nemen we twee halve draaideuren met breedte $\frac{1}{2}$a (twee kwartcirkels).
De bestreken oppervlakte wordt nu de helft (50%).
In figuur 6 volgen we met deze beide halve deuren de nieuwe schuifmethode en vinden een oppervlakte die $\frac{3}{8}$ deel van de laatste uitkomst is, dus 18,7% van de oorspronkelijke kwartcirkel.
In de onderste tekening van figuur 7 vind je tenslotte de werkelijke uitvoering bij de bedoelde tram. De halve deuren zijn daar weer in twee gelijke delen verdeeld, die scharnierend met elkaar verbonden zijn. Ze schuiven achter elkaar langs een half zo grote kromme met een oppervlakte die weer 4 × kleiner is ofwel 4,7% van de kwart cirkel. Dit betekent ongeveer 1/20 deel van de eerste oppervlakte. Voorwaar in afgeladen trams een voortreffelijk idee!

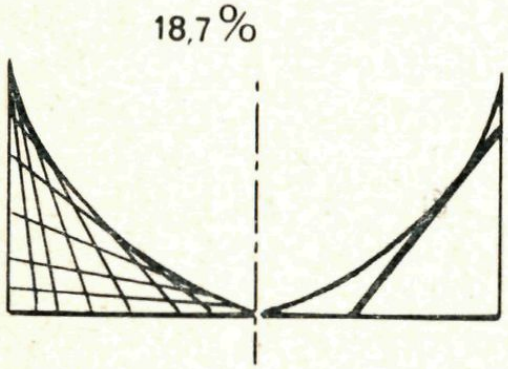


fig. 6

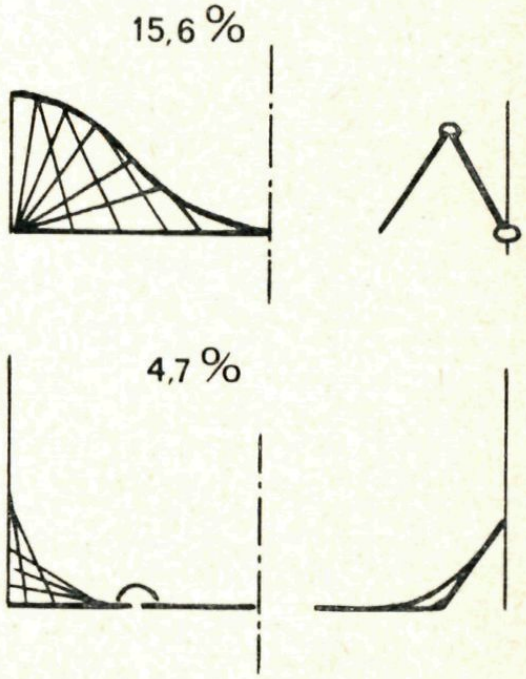


fig. 7

In de bovenste tekening van figuur 7 vind je nog een methode, toegepast in sommige bussen: tweemaal twee halve deurtjes scharnierend verbonden. De winst is daar echter niet zo groot als in de tram die ons inspireerde tot dit artikel.

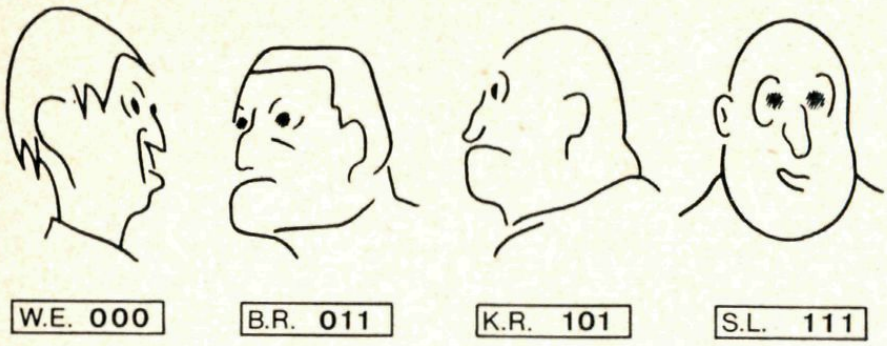
Oplossingen kunnen tot 15 november 1969 worden ingezonden naar het redactiesecretariaat: Kamperfoelieweg 44, Eelde. Onder de inzenders van één of meerdere uiste oplossingen wordt een boekenbon verloot.

1. Hoeveel kwadraten van natuurlijke getallen bestaan uit zeven cijfers, waarvan zowel het eerste als het laatste een 6 is?
2. Met 'het afsnijden van een hoekpunt A van een gegeven veelvlak' bedoelen we het aanbrengen van een snijvalk door de middens van de ribben, die in A samenkomen; het veelvlak wordt daardoor in twee stukken verdeeld en daarvan beschouwen we datgene waar A geen hoekpunt van is.
   a. Van een kubus worden alle hoekpunten afgesneden en daarna snijden we van het zo gevormde veelvlak ook weer alle hoekpunten af. Hoeveel zijvlakken, hoekpunten en ribben heeft het dan gevormde veelvlak?
   b. Lever kritiek op de definitie aan het begin van dit vraagstuk en ook op de volgende bewering: bij onbeperkt herhalen van de behandeling (in deel a) gaat het gevormde veelvlak steeds meer op een bol lijken.
3. Bepaal alle vierkantsvergelijkingen in x waarvan de coëfficient van x en de bekende term de twee wortels zijn.

---

de cycloop

°Lessen in logica voor detectives



OF. In Kraakstad is een inbraak gepleegd in een huis midden in een straat. Getuige A, die recht tegenover de plaats des onheils woont, heeft om 2 uur 's nachts één persoon op verdachte wijze het huis zien verlaten, maar kan geen nader signalement geven. Getuige B heeft om één minuut over twee een manspersoon met een kaal hoofd uit de straat zien komen. Getuige C heeft vrijwel tegelijkertijd een man aan de andere zijde de straat zien verlaten van wie hij alleen heeft opgemerkt dat hij staalblauwe ogen had. Bij de recherche in Kraakstad gaat men nu *logisch* redeneren en zegt: de dader (volgens A was het er maar één) heeft
een kaal hoofd OF blauwe ogen.
Wat bedoelt men precies met het woordje „of"? We demonstreren dit aan een tabel van vier bekende zware jongens uit het crimineel archief van Kraakstad.

	kaal?	blauwe ogen?	mogelijke dader?
W. Erkschuw	0	0	0
B. Reekijzer	0	1	1
K. Raker	1	0	1
S. Luiper	1	1	1

Hierin is „nee" door 0 en „ja" door 1 weergegeven. Het bijzondere van dit voorbeeld is, dat Luiper best de dader kan zijn terwijl hij kaal is en ook blauwe ogen heeft. Dit woord „of" betekent dus: of kaal, of blauwe ogen, of beide. In de logica en (dus) in de wiskunde wordt „of" altijd in deze betekenis gebruikt. Men geeft dit woord „of" met het logische symbool $\vee$ aan, om verwarring te voorkomen met de betekenis van

het woord waarin we het meestal gebruiken. Als je moeder zegt: „neem een glas melk of een glas limonade", dan krijg je moeilijkheden als je beide zou nemen!

De tabel luidt voor dit geval:

l	m	i
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

l = een glas limonade
m = een glas melk
i = met instemming van moeder

of limonade of melk.

EN. Niet lang daarna werd in Kraakstad weer een inbraak gepleegd achterin een doodlopende straat. Bij het verlaten van zijn werkterrein ontmoette onze onverlaat echter getuige D, die later verklaarde dat de dief blauwe ogen had en een pet droeg. Onze insluiper versnelde na deze ontmoeting zijn aftocht en verloor daarbij halverwege de straat zijn pet. Bij het verlaten van de straat werd hij ook nog gezien door getuige E, die pertinent verklaarde dat hij een kale man de betreffende straat uit had zien sprinten. De recherche stelde vast, dat de inbreker moest hebben:

een kaal hoofd EN blauwe ogen.

In tabelvorm:

	k	b	d
W.E.	0	0	0
B.R.	0	1	0
K.R.	1	0	0
S.L.	1	1	1

k = kaal
b = blauwe ogen
d = mogelijke dader.

In de logica wordt het woord „en" aangegeven door $\wedge$.

NIET. De volgende duistere praktijk in Kraakstad die we zullen belichten is een inbraak, waarbij de dader zich toegang had verschaft door middel van een raampje in het kleinste kamertje van het betreffende perceel. Getuigen hebben zich niet gemeld. De recherche concludeerde uit de afmetingen van het niet nader te omschrijven raampje, dat de dader

NIET gezet kan zijn.

Deze ontkenning, uitgedrukt in het woord „niet", wordt aangegeven door het symbool $\neg$.

De tabel:

	gezet?	mogelijke dader?
	g	¬ g
W.E.	0	1
B.R.	1	0
K.R.	1	0
S.L.	1	0

We onthouden nu de volgende tabellen, waarin k, b en g de *variabelen* genoemd worden. Het is hierbij niet noodzakelijk te weten dat deze letters „kaal, blauwe ogen en gezet" betekenen. De logica is een eigen leven gaan leiden.

I.

k	b	$k \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

II.

k	b	$k \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

III.

g	¬g
0	1
1	0

Nu een wat ingewikkelder voorbeeld.
Na een inbraak is van de dader bekend, dat hij een groot gat moest hakken om zich toegang te verschaffen (gezet!). *En* verder dat hij kaal is *of* blauwe ogen heeft (eerste voorbeeld). Nadat acht verdachte lieden gearresteerd zijn, vraagt hoofdcommissaris S. Hooms zich af, wie hij weer vrij kan laten. In formule: $\neg\{g \wedge (k \vee b)\}$, namelijk *niet* diegenen, die gezet *en* kaal *of* voorzien van blauwe ogen zijn. Men onderzoekt dit aan de hand van de volgende tabel.

verdachten				mogelijke daders	onschuldigen	
k	b	g	$k \vee b$	$g \wedge (k \vee b)$	$\neg\{g \wedge (k \vee b)\}$	
0	0	0	0	0	1	
0	0	1	0	0	1	vijf van de acht verdachten kunnen onmiddelijk op vrije voeten worden gesteld.
0	1	0	1	0	1	
0	1	1	1	1	0	
1	0	0	1	0	1	
1	0	1	1	1	0	
1	1	0	1	0	1	
1	1	1	1	1	0	

$\wedge$ ↑ ¬ ↑

Eén regel uit deze tabel zullen we, voor beter begrip, nader bekijken.

	k	b	g	$k \vee b$	$g \wedge (k \vee b)$	$\neg\{g \wedge (k \vee b)\}$
regel 6	1	0	1	1	1	0

1 0 1 in de eerste drie kolommen wil zeggen een verdachte die kaal is, geen blauwe ogen heeft maar wel gezet is, bijvoorbeeld K. Raker.
De vierde kolom wordt afgeleid uit de kolommen k en b door tabel I te consulteren: 1 en 0 geeft in tabel I een 1.
De vijfde kolom wordt gemaakt uit de kolommen g en $k \vee b$ en tabel II.
De zesde kolom ontstaat uit de vijfde, door verwisseling van nullen en enen (tabel III).
Het laatste voorbeeld. We bedanken hoofdcommissaris Sjurlok Hooms voor zijn wijze lessen en proberen eens een geval dat niet uit Kraakstad afkomstig is. Kunnen we ook met onze drie logische symbolen schrijven wat moeder bedoelde met „een glas limonade of een glas melk"? De bedoeling was: limonade of ($\vee$) melk, maar ($\wedge$) niet ($\neg$) limonade en tegelijk ($\wedge$) melk.
Kortom: $(l \vee m) \wedge \{\neg(l \wedge m)\}$.
We controleren deze uitdrukking aan de hand van de tabel.

l	m	$l \vee m$	$l \wedge m$	$(l \wedge m)$	$(l \vee m) \wedge \{\neg(l \wedge m)\}$
0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0

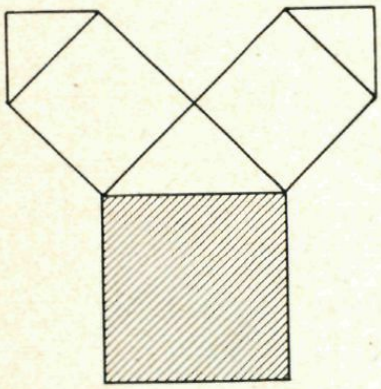
De laatste kolom geeft inderdaad weer, wat moeder wilde.

Pythagoras

Zoals gebruikelijk beginnen we de nieuwe jaargang met een welkom aan de nieuwe lezers. Bij het doorbladeren van dit nummer zul je bemerken dat de inhoud nogal uiteenlopend is, zowel naar onderwerp als naar graad van moeilijkheid. Misschien ben je zomaar ergens begonnen te lezen en heb je al iets gevonden wat je kon boeien. In dat geval heeft dit nummer wat jou betreft zijn doel al bereikt. Wanneer je namelijk in elk nummer *iets* van je gading kunt vinden, dan menen we dat je tevreden kunt zijn.
De eenvoudigste artikelen zijn aangeduid met °, iets moeilijker bijdragen met °° en de lastigste met °°°.
In elk nummer staan 10 Denkertjes. De oplossingen hiervan kun je sturen naar het redactiesecretariaat: Kamperfoelieweg 44, Eelde.
De oplossingen van de Denkertjes in het eerste nummer worden vermeld in het derde nummer. Onder de goede inzenders wordt een boekenbon verloot. Bovendien wordt een ladderwedstrijd gehouden tussen de inzenders van de Denkertjes uit de eerste vier nummers. De winnaars van deze ladderwedstrijd krijgen eveneens een boekenbon.
Behalve Pythagoras lezen kun je er ook in schrijven, zoals bijvoorbeeld Hans Schumacher in dit nummer met een verhaal over hogere driehoeken van Pascal.

De boom van Pythagoras
De figuur op ons omslag is een weergave van de stelling van Pythagoras: De oppervlakte van het grootste vierkant is gelijk aan de som van de oppervlakten van de twee kleinere vierkanten.
Geïnspireerd door deze figuur heeft Ir. A. Bosman in de oorlog de zogenaamde *boom van Pythagoras* getekend, in de tijd die hij eigenlijk geacht werd te besteden aan het ontwerp van een duitse oorlogsboot. De tekening is als volgt opgebouwd: Teken eerst een vierkant (de dikke stam) en hierop een gelijkbenige, rechthoekige driehoek. Zie de figuur op de pagina's 12 en 13. Op de beide rechthoekszijden weer vierkanten tekenen, daarop weer rechthoekige driehoeken, enzovoort. Ir. Bosman schrijft zelf over de figuur: 'Hoe de tekening zal worden is niet te voorzien. Willen we het weten dan zullen we hem verder moeten construeren'. Het oppervlak van het grootste vierkant is gelijk aan de som van de twee kleinere daaropvolgende, ook gelijk aan de vier

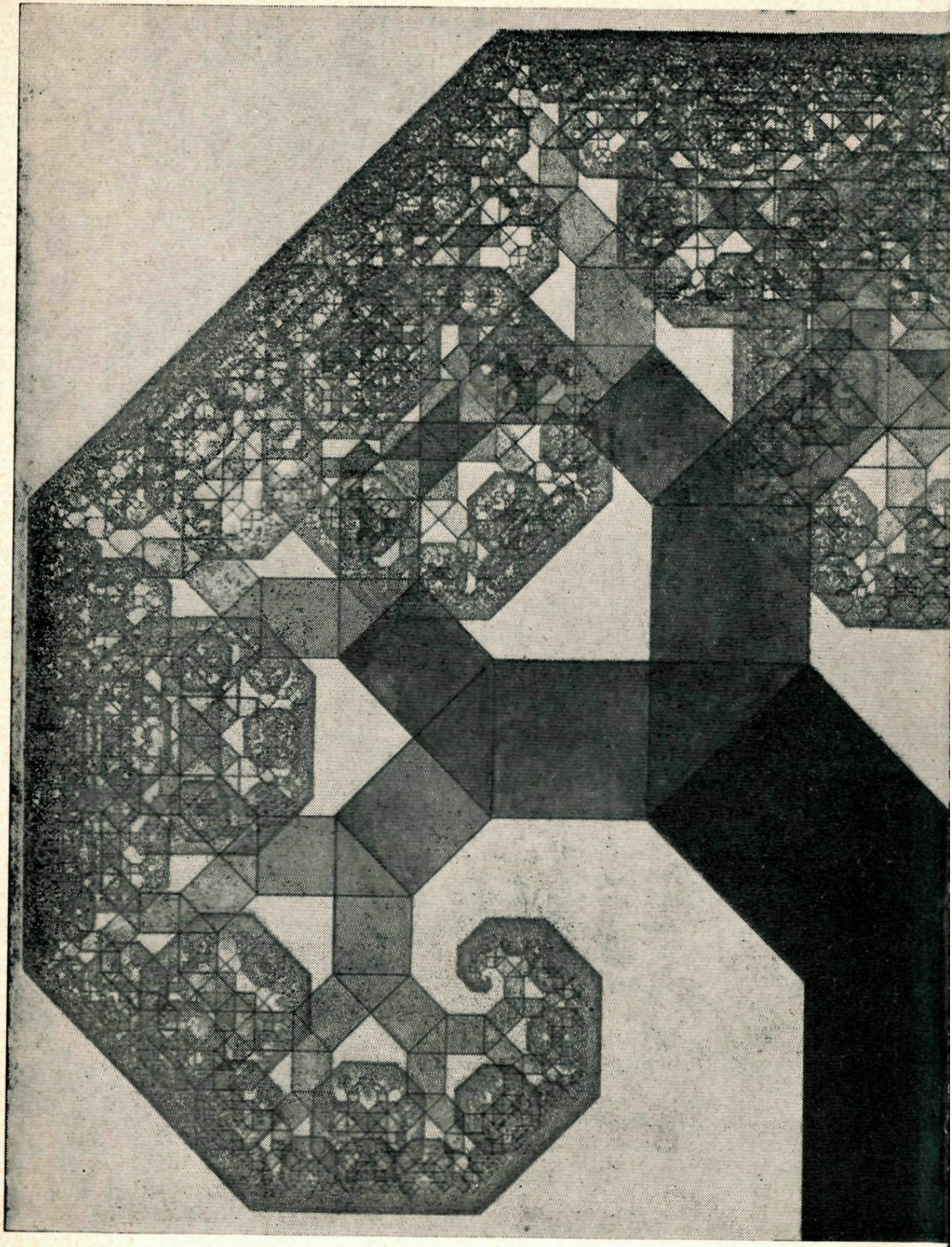
daaropvolgende, enzovoort. Het aantal vierkanten met gezamenlijk gelijk oppervlak groeit: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, . . . tot een wonderlijk bouwsel van de pythagoreïsche boom met scherpe limietlijnen en fijn kantwerk. Elk vierkant ervan kan beschouwd worden als het oorspronkelijk vierkant, waaruit de boom zich ontwikkelde, zodat deze bestaat uit een ineenvoeging van gelijkvormige steeds kleiner wordende bomen.

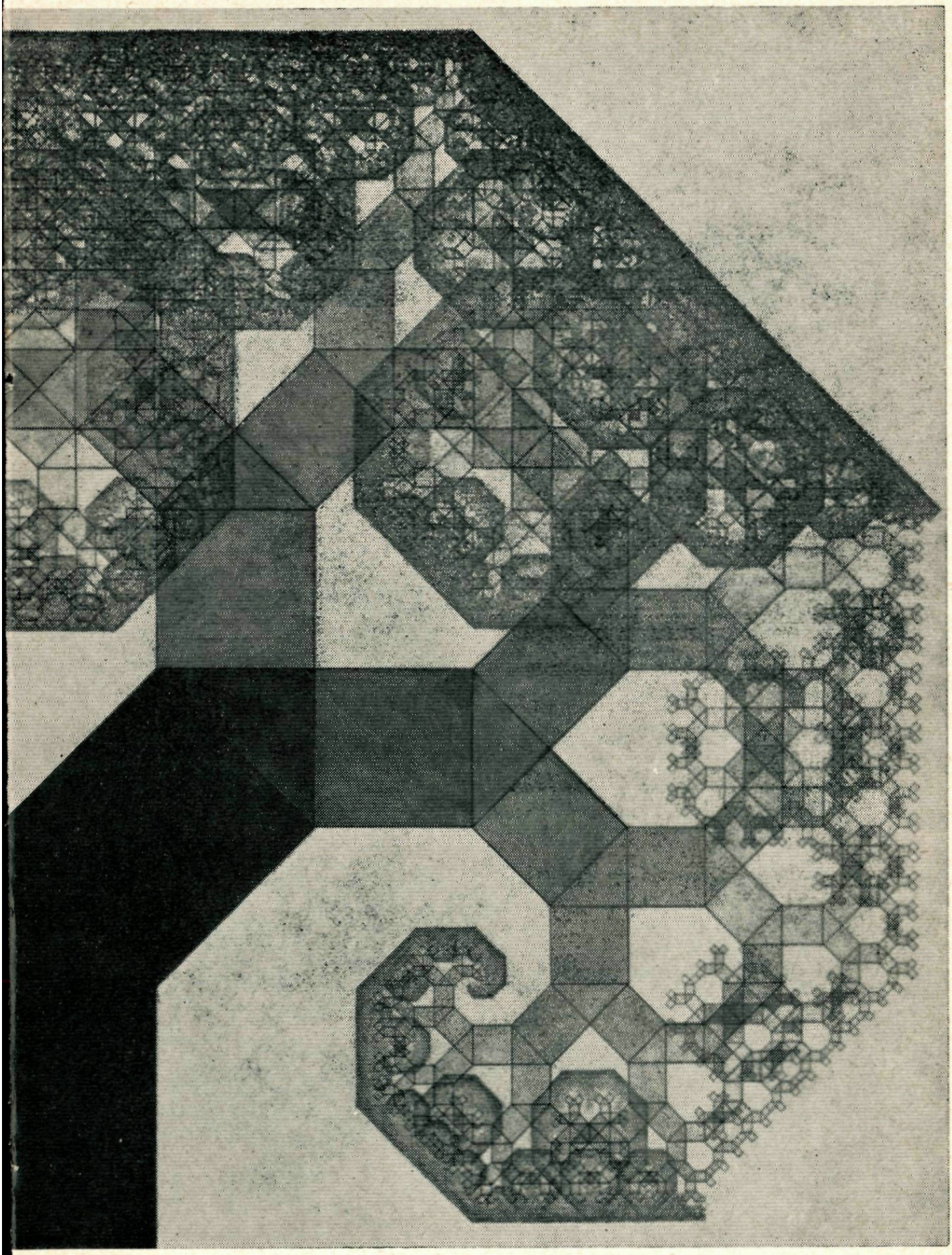


Na veel moeite zijn we er in geslaagd de originele tekening in vierkleurendruk te reproduceren.
Voor de abonnees van ons blad stelt de uitgever de plaat beschikbaar voor *f* 1,90 zijnde voornamelijk de verpakkings en verzendkosten.
De afmetingen van de plaat zijn ongeveer 50 × 70 cm. Bestelling en aflevering van de platen via de school. Met betaling kan worden gewacht tot een nota is ontvangen. Voor niet-abonnees bedraagt de prijs van de plaat *f* 9,—. Zie ook de inliggende bestelkaart.

---

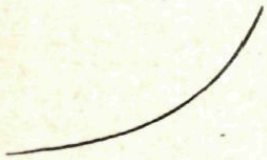
4. Bepaal alle rechthoekige driehoeken waarvan alle zijden een geheel aantal centimeters lang zijn en in het bijzonder een rechthoekzijde 80 cm lang is.
5. Teken op roosterpapier de figuur F_1, bestaande uit de punten (-6, 0), (-6, 6), (0, 6) en (0, 0) en de figuur F_2, bestaande uit de punten (-4, 0), (0, 4), (4, 0) en (0, -4). Teken daarna de verzameling van de punten, die gelijke afstanden tot F_1 en F_2 hebben. (Onder de afstand van een punt P tot een figuur F verstaan we de lengte van de kortste verbindingslijn van P met een punt van F).
6. Onder de afstand van twee velden van een schaakbord verstaan we het kleinste aantal zetten waarmee je een paard, dat op het ene veld staat, naar het andere veld kunt brengen. Laat zien dat de afstand van twee diametraal tegenover elkaar gelegen velden 6 bedraagt. Bereken het aantal manieren waarop je een paard in 6 sprongen van het ene veld naar het andere kunt laten springen.



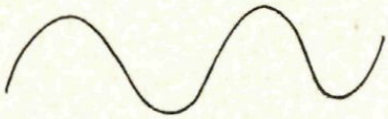


Mathemadics

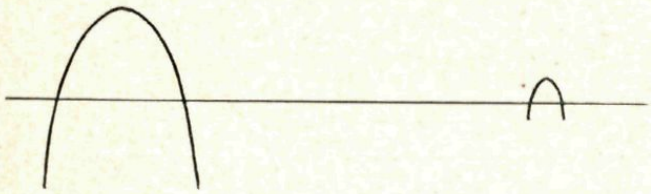
In de vorige jaargang hebben we een aantal wiskundige termen op een zodanige manier geschreven dat in de schrijfwijze het begrip zelf tot uitdrukking kwam, als iemand begrijpt wat we bedoelen. We noemden dit met een goed Nederlandse term 'mathemadics'. De reactie hierop was zo groot dat het de moeite waard lijkt er mee door te gaan. Bovendien kunnen we de zaak wat uitbreiden en allerlei wiskundige rariteiten onder deze titel verenigen. Wat zeg je van de volgende bedenksels van Michel Bel uit Bunnik?



stijgende functie

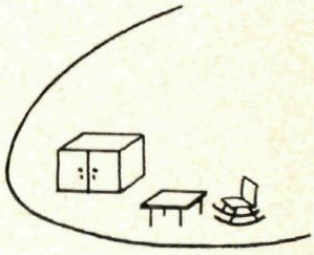


steigerende functie

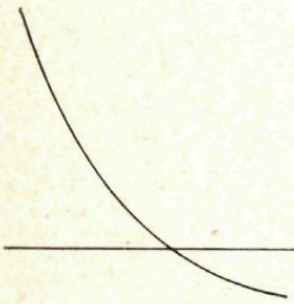


bergparabool

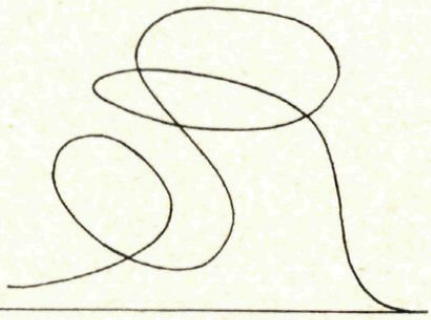
dwergparabool



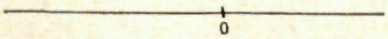
opbergparabool



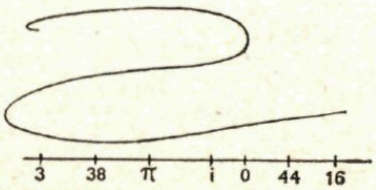
dalende functie



dolende functie



buiten functie



in de verste verte geen functie

maak een boek van uw tijdschrift

De meest praktische manier om uw tijdschriften te bewaren:

in onze **naaldbanden** liggen ze open als een boek zonder te worden beschadigd of zoek te raken.

Zo kunt u bestellen:

U hoeft slechts f 3,40 per naaldband over te maken op gironr. 1308949 ten name van

Wolters-Noordhoff n.v. Groningen.

S.v.p. op het girobiljet vermelden:
..... ex. naaldband

Pythagoras

Wolters-Noordhoff n.v.

°Een kwestie van centen en dubbeltjes

Wat is wiskunde uiteindelijk anders dan het oplossen van puzzeltjes? Wie niet van puzzelen houdt mag het woord 'puzzeltjes 'in de eerste zin vervangen door 'problemen' en kan zich de moeite van verder lezen besparen. Wie toch verder leest wordt direct geconfronteerd met het puzzeltje dat we hebben ontleend aan het tijdschrift 'Mathematics Teaching'.

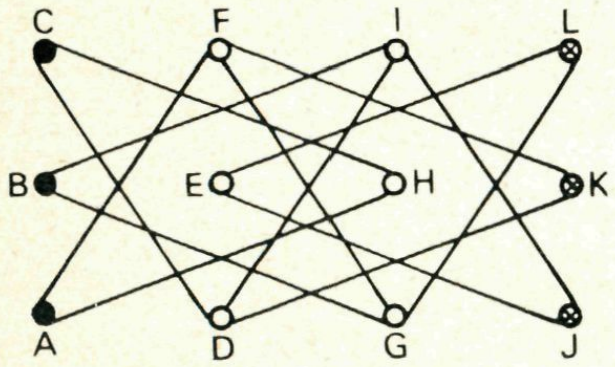
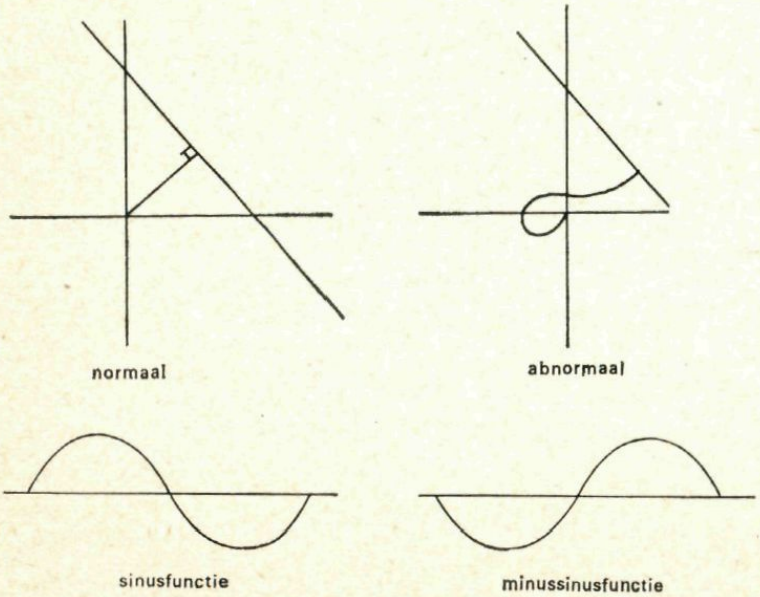


fig. 8

In het bovenstaande figuurtje liggen op de plaatsen A, B, en C centen, op de plaatsen J, K en L liggen dubbeltjes. De opdracht luidt:
Zorg in een minimum aantal zetten dat de centen op de plaatsen van de dubbeltjes komen en omgekeerd. Een zet is hierbij en verschuiving langs één van de aangegeven lijnen tussen twee van de twaalf aangegeven punten. Er mogen zich geen twee geldstukken op hetzelfde punt bevinden.
De oplossing bevindt zich niet helemaal op bladzijde 22 en volgenden.



°'Passediezende boeren'

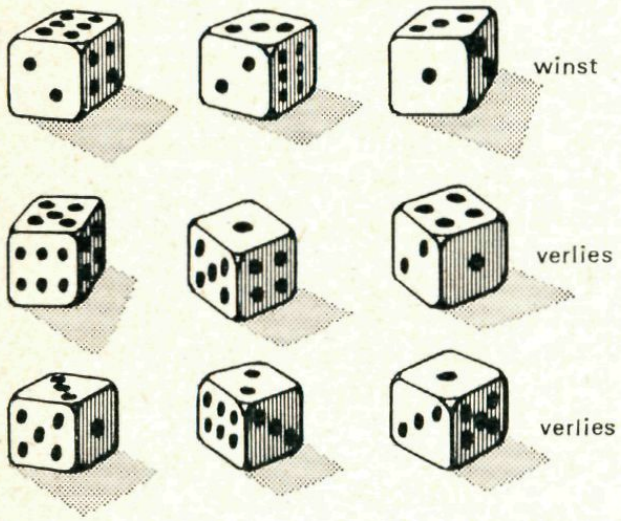
door Ir. H. M. Mulder

In de 'camera obscura' van Nicolaas Beets wordt gesproken over 'passediezende boeren'.
Ook in de werken van de Vlaamse schrijver Felix Timmermans komen we een spel tegen, dat daar 'passedijzen' heet.
Passedijzen of passediezen is een vernederlandsing van het franse 'passer dix', hetgeen betekent: 'de tien overschrijden'.
Het is een dobbelspel met de volgende regels: gooi met drie dobbelstenen; als het aantal ogen meer dan tien bedraagt heb je gewonnen, bij minder dan tien of precies tien verloren. Dit is alles.
Passediezen blijkt een zuiver gokspel te zijn.
Een spel waarbij de kans om te winnen even groot is als de kans om te verliezen noemen we een zuiver gokspel. Deze beide kansen zijn zodoende even groot en ieder 50%.
Laten we een ander gokspel nemen.
Stel je het volgende voor: je werpt met één dobbelsteen; krijg je een worp met een even aantal ogen dan zeggen we 'je hebt gewonnen'; bij een oneven aantal 'je hebt verloren'.
Dit is een zuiver gokspel want de winstkans is even groot als de verlieskans en wel 50%.
Immers van de 6 mogelijke worpen zijn er 3 even en 3 oneven. Het aantal winstworpen is even groot als het aantal verliesworpen.
Als je een andere afspraak maakt, bijvoorbeeld: 'winst bij een door 3 deelbaar getal' zou de kans op winst tweemaal zo klein zijn als de kans op verlies (tel zelf maar na).

We keren nu terug naar het spel 'passedijzen'.
Daar was winst als het totaal aantal ogen op 3 dobbelstenen de 10 overschreed, verlies bij een aantal kleiner of gelijk aan 10.
Interessante vragen hierbij zijn:
waarom kiest men het getal 10
en waarom stelt men 'gelijk aan 10' als verlies?
(men had dit ook als winst kunnen afspreken).
Laten we beginnen met te tellen hoeveel mogelijke worpen hier zijn.
De eerste steen kan op 6 manieren geworpen worden, evenzo de tweede, evenzo de derde.

Zodoende is het aantal mogelijke worpen $6 \times 6 \times 6 = 216$.
Hoeveel van deze worpen zijn gunstig?
Je zou dit kunnen onderzoeken door ze allemaal uit te schrijven en de winstworpen te onderstrepen. We zullen een begin maken:

111	121	131	141	151	161	211	221	231	241	enz.
112	122	132	142	152	162	212	222	232	242	
113	123	133	143	153	163	213	223			
114	124	134	144	154	*164*	214	224			
115	125	135	145	*155*	*165*	215	225			
116	126	136	*146*	*156*	*166*	216				



126 betekent: met de eerste dobbelsteen een 1, met de tweede een 2 en met de derde een 6.
Het is eenvoudiger door een redenering aan te tonen dat het aantal winstworpen precies de helft van het totale aantal is, dus 108.
Het is mogelijk telkens twee worpen samen te nemen waarbij de ene winst, de andere verlies betekent, aldus: neem de worp 153 (verlies) naast 624 (winst); 216 (verlies) naast 561 (winst)
in het algemeen worp a, b, c naast (7-a), (7-b), (7-c).
We combineren dus de eerste 111 met de laatste 666 de tweede 112 met de voorlaatste 665 enz.
We zouden dit complementaire worpen kunnen noemen. We kunnen

nu in het algemeen bewijzen:
als worp a, b, c bestaat, dan ook (7-a), (7-b), (7-c) en als $a + b + c \leqslant 10$ (verlies)
dan $(7\text{-}a) + (7\text{-}b) + (7\text{-}c) > 10$ (winst).
Immers $(7\text{-}a) + (7\text{-}b) + (7\text{-}c) = 21 - (a + b + c)$
hetgeen > 10 wordt als tenminste $(a + b + c) \leqslant 10$.
Zo bestaat dus naast elke verliesworp een winstworp en is het aantal verliesworpen gelijk aan het aantal winstworpen.

°Aantrekkelijke problemen

De wiskundeboeken die je op school gebruikt staan vol opgaven. Het doel ervan is duidelijk: het overgrote deel van de studenten overziet niet meteen alle consequenties van de behandelde definities en stellingen. Het maken van de opgaven is een hulpmiddel om in de stof thuis te raken.
De problemen die in deze opgaven ter sprake komen zijn soms interessant, soms ook niet.
Zo herinner ik me het eerste meetkundeprobleempje dat me aantrok: Trek door het snijpunt van de deellijnen van $\angle A$ en $\angle B$ van $\triangle ABC$ een lijn evenwijdig aan de basis. Deze lijn snijdt de opstaande zijden in D en E. Bewijs: $DE = AD + BE$.
Het is eenvoudig te bewijzen, maar het is op de één of andere manier verrassend.
Er zijn ook verzamelingen van aantrekkelijke problemen uit vele gebieden van de wiskunde. Je vindt ze bijeen in boeken of in wiskundetijdschriften. Onze DENKERTJES rangschikken we ook graag onder de aantrekkelijke problemen. Er zijn bijzonder moeilijke bij, maar ook uiterst eenvoudige.
Waarin bestaat nu eigenlijk het interessante van een probleem?
Eerstens moet een beoordeling wel erg subjectief zijn. Verder schijnt de probleemstelling doorzichtig te moeten zijn: een ingewikkeld verhaal met veel punten en lijnen doet het al bij voorbaat niet.

Een belangrijk element is ook, dat het voorgestelde aanvankelijk een beetje ongeloofwaardig moet lijken. De oplossing moet wel eenvoudig zijn, maar niet zo doorzichtig, dat die al duidelijk is bij het lezen van de opgave.
Je merkt wel, dat de genoemde voorwaarden voor iedereen een andere inhoud hebben.
Kijk eens of je het met de volgende beoordeling eens bent. Hier volgen vier opgaven uit "Problems and Solutions in Euclidean Geometry" van Aref and Wernick. De eerste twee zijn interessant ,de laatste twee niet.
1. Op de schuine zijde van een rechthoekige driehoek is een vierkant getekend. Het snijpunt van de diagonalen van het vierkant is M. Als we vanuit M loodlijnen MR en MS op de rechthoekzijden neerlaten is ARMS ook een vierkant (figuur 9).
2. O ligt binnen een gelijkzijdige $\triangle ABC$. O wordt verbonden met de hoekpunten. Op OB wordt een gelijkzijdige driehoek OBD getekend. Bewijs dat CD = OA (figuur 10).

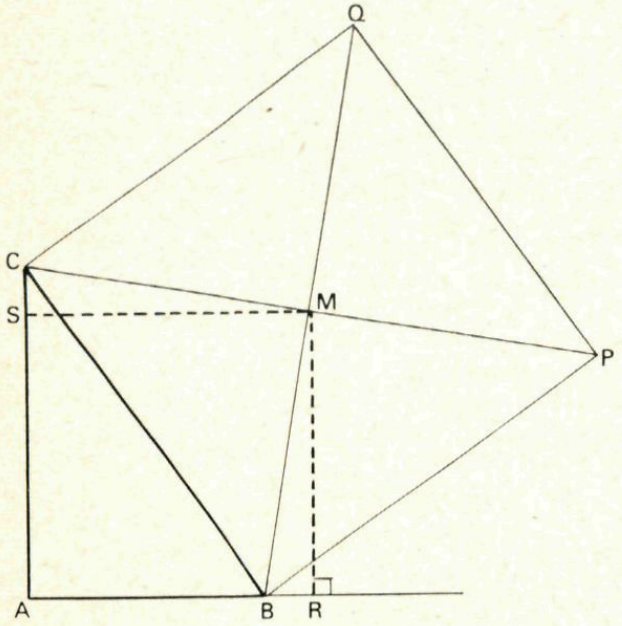


fig. 9

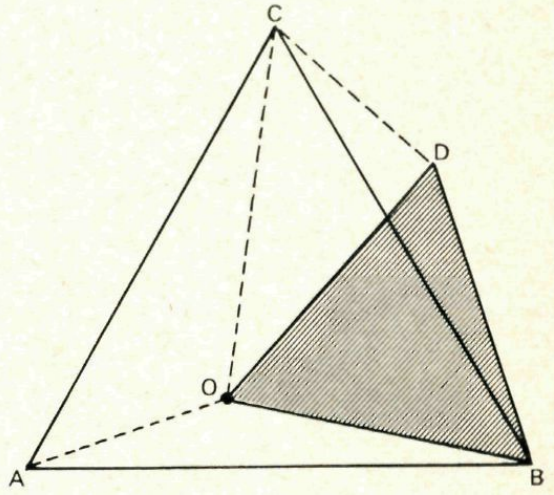


fig. 10

3. Construeer een vierhoek als de zijden gegeven zijn en ook één van de lijnstukken die de middens van de overstaande zijden verbinden.
4. Een rechte snijdt twee cirkels in vier punten. Bewijs dat de raaklijnen in deze punten elkaar in vier punten snijden waarvan er twee liggen op een cirkel waarvan het middelpunt ligt op de verbindingslijn van de middelpunten van de gegeven cirkels.

°Driehoeken van Pascal van hogere soort

door Hans Schumacher

De bekende driehoek van Pascal ziet er zo uit:

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
.		.		.		.		.		.

Elk getal ongelijk aan 1 is de som van de twee getallen die er boven staan. De driehoek kan zo onbeperkt worden voortgezet.
Een hoger soort driehoeken kan worden verkregen door in het optelvoorschrift niet twee maar de drie bovenstaande getallen te zetten:

					1					
				1	1	1				
			1	2	3	2	1			
		1	3	6	7	6	3	1		
	1	4	10	16	19	16	10	4	1	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

We noemen dit een driehoek van het soort 3. Zo kun je ook driehoeken van soort 4, enz. maken.
De zo gevormde driehoeken blijken allerlei eigenschappen te bezitten, analoog aan de „gewone" soort 2. Zo is de som van de getallen in de rijen bij soort 3 achtereenvolgens 1, 3, 9, 27, enz.
Bij driehoeken van soort p is de som van de getallen in de n^e rij gelijk aan p^n.
Soort 2 geeft de ontwikkeling van de coëfficiënten van $(x + y)^n$, soort 3 van $(x^2 + xy + y^2)^n$, soort 4 van $(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)^n$, enz.
Een driehoek van soort 1 bestaat uit allemaal enen onder elkaar. Dit zijn de coëfficiënten van x^n. De n^e rij van de driehoek van Pascal geeft de kansverdeling bij het werpen met een munt (zie de zevende jaargang blz. 109 en volgenden). Het soort 3 geeft de kansverdeling bij het werpen met een „dobbelsteen" met 3 getallen, het soort 6 de kansverdeling bij een gewone dobbelsteen:

1

1 1 1 1 1 1

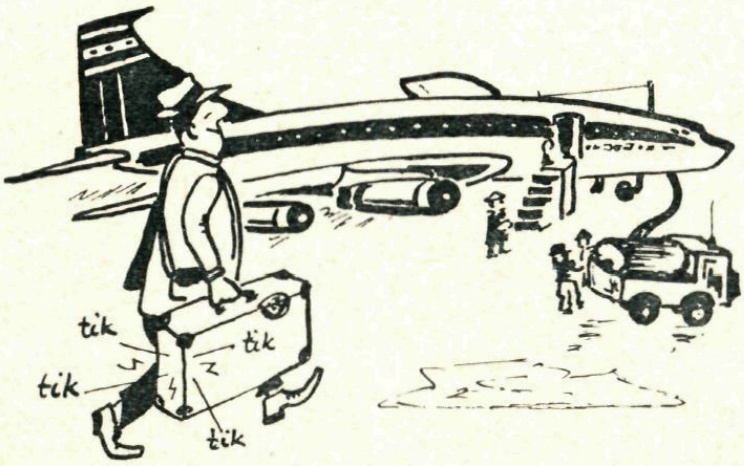
1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1

1 3 6 10 15 21 25 27 27 25 21 15 10 6 3 1

1 4 10 20 35 56 80 104 125 140 146 140 125 104 80 56 35 20 10 4 1

Bij vier worpen met een dobbelsteen (of één worp met vier dobbelstenen) is de kans dat je in totaal 4 gooit $\frac{1}{1296}$, de kans dat je 14 gooit is $\frac{146}{1296}$.

Misschien kan dit een inspiratie zijn voor de lezers van Pythagoras om ook zelf enig onderzoek te verrichten. Er is nog genoeg te doen: nog meer analogieën ontdekken in de genoemde driehoeken, of nog andere driehoeken te vormen, waarbij je niet met 1 maar met meerdere en/of verschillende getallen begint, of waarbij je andere figuren dan driehoeken probeert te vormen. Ook kunnen de lezers natuurlijk proberen de door mij opgesomde eigenschappen netjes te bewijzen, want ikzelf heb de wel menselijke, maar wiskundig gezien verkeerde zorgeloosheid gehad, die eigenschappen voor bewezen te houden, als enkele berekeningsvoorbeelden goed uitkwamen.

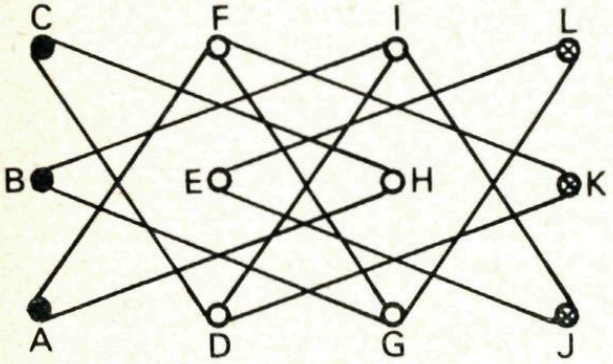


De kans dat iemand in een vliegtuig een bom bij zich heeft is zeer klein. De kans dat twee mensen tegelijkertijd in hetzelfde vliegtuig onafhankelijk van elkaar een bom bij zich hebben, is vrijwel gelijk aan nul te stellen. Als ik een veilige vliegreis wil maken moet ik dus altijd een bom meenemen.

7. In een vlak zijn vier halve rechten met gemeenschappelijk eindpunt gegeven. Aan welke voorwaarde(n) moeten de door dit viertal bepaalde hoeken voldoen opdat de vier halve rechten op de deellijnen van de hoeken van eenzelfde vierhoek liggen?
8. Binnen een vierkant, waarvan de zijden de lengte 1 hebben, ligt een punt dat tot elk van de vier hoekpunten een rationale afstand heeft. Bewijs dat dat punt ook rationale afstanden heeft tot de zijden van het vierkant.
9. Verdeel een gegeven vierkant in tien vierkante stukken.
10. Een rij getallen t_1k t_2, t_3, . . . wordt als volgt bepaald:
    (1) $t_1 = 1$
    (2) voor elk natuurlijk getal $n \geqslant 2$ geldt $t_n = t_{n-1} + n^2$

Voor welke waarden van n is t_n een drievoud? (Bewijs ook de juistheid van je antwoord).

Een kwestie van centen en dubbeltjes



Het meest opvallende in de figuur van de puzzel is de onoverzichtelijkheid van de wirwar van lijnen. Het is alleszins de moeite waard te trachten hierin wat verbetering aan te brengen. Kijk eens naar punt H. Het enige wat voor dit punt van belang is, is dat het verbinding heeft met A en C. Dat het keurig tussen I en G ligt en tussen E en K doet niet ter zake. Laten we het punt H eens opnemen en naar buiten verplaatsen, hetzelfde doen we met E.

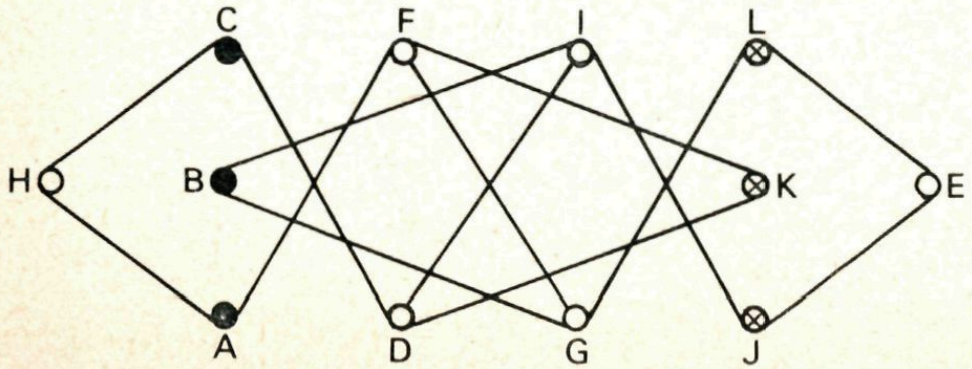


fig. 11

We hebben hiermee het aantal snijpunten van de lijnen in de figuur behoorlijk verminderd. Maar we zien ook dat we er nog niet zijn en door moeten gaan op deze weg. Zo is B alleen verbonden met I en G, dus zetten we B tussen die twee punten. Iets dergelijks doen we met K:

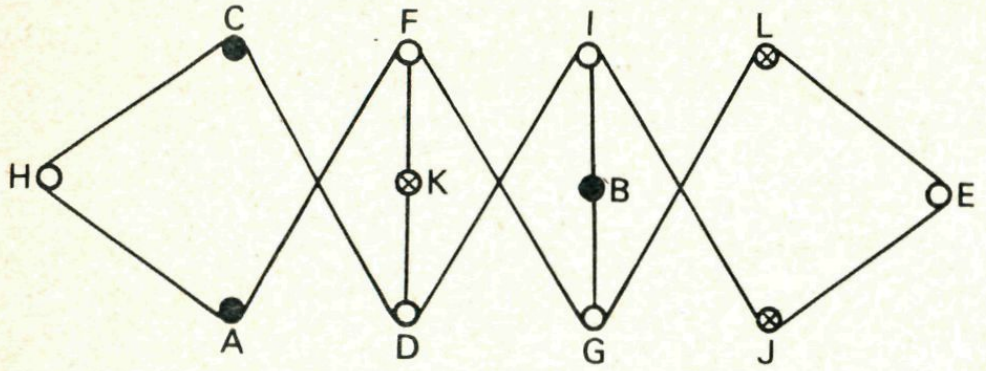


fig. 12

Nu zien we dat we D en F moeten ruilen van plaats, maar dan ook L en J:

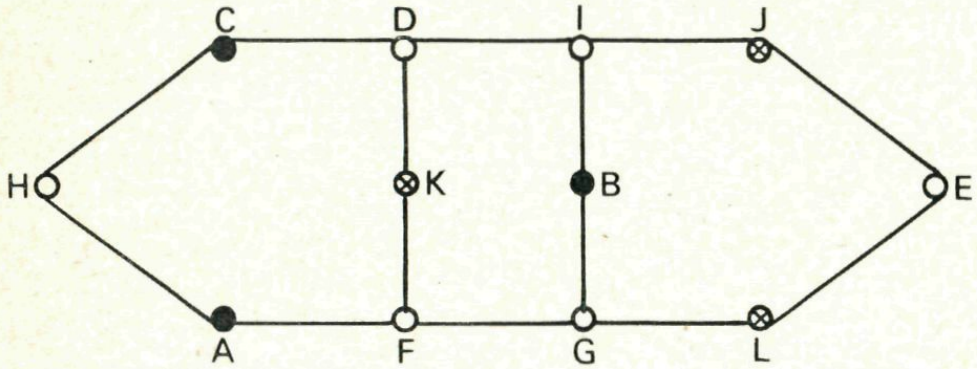


fig. 13

Zo komen we dan tenslotte tot de volgende figuur:

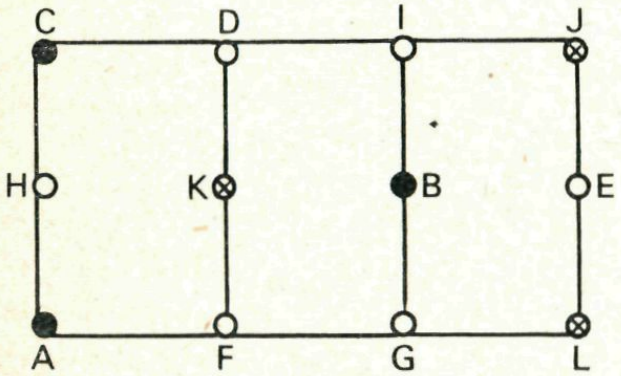


fig. 14

Uit de wirwar van lijnen van de figuur in de opgave is dit eenvoudige beeld overgebleven. Dezelfde punten zijn nog steeds met elkaar verbonden, zodat je net zo goed het spelletje met deze laatste figuur kunt spelen.

Na deze uiteenrafeling van de figuur kunnen we dan eens beginnen met

de oplossing van het probleem zelf. Hoeveel zetten zijn er nodig om van A naar K te gaan? En van A naar L? En van B naar L?
In het volgende tabelletje kun je deze aantallen aflezen:

	J	K	L
A	5	2	3
B	2	3	2
C	3	2	5

fig. 15

Hieruit is te zien dat er in ieder geval zeven zetten nodig zijn om A, B en C op de plaatsen J, K en L te brengen. Hiervoor bestaan twee mogelijkheden:

	J	K	L
A	5	(2)	3
B	2	3	(2)
C	(3)	2	5

of

	J	K	L
A	5	2	(3)
B	(2)	3	2
C	3	(2)	5

fig. 16

Omgekeerd zal het ook minstens zeven zetten kosten om J, K en L naar A, B en C te brengen.
In minder dan veertien zetten is de opdracht dus niet uit te voeren. Maar kan het ook werkelijk in veertien zetten, dat wil zeggen, hoef je geen extra zetten te doen omdat de munten elkaar in de weg liggen?
Niet voor niets hebben we gesteld dat de oplossing niet helemaal op bladzijde 22 zou staan, want met dit probleem laten we de puzzelaar zitten.
De eerlijkheid gebied te zeggen dat we zelf niet lager dan zestien zetten konden komen, maar wat zegt dat?

Cycloop Uit het Grieks, *cyclops = rondogig*. Mythologische figuur, voorgesteld als reus met één oog midden in het voorhoofd.

Logica Uit het Grieks, *logos = woord of reden*. Wetenschap die zich bezig houdt met redeneervormen.

Oplossingen van Denkertjes voor 15 november inzenden naar het redactiesecretariaat.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.
BRUNO ERNST, Scherpenzeel (Gld.).
C. VAN DER LINDEN, Barendrecht.
A. F. VAN TOOREN, 's-Gravenhage.
R. H. PLUGGE, Amstelveen.
G. A. VONK, 's-Gravenhage.

REDACTIESECRETARIAAT:

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Eelde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, *f* 2,60 per jaargang. Voor anderen *f* 4,16.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff N.V., Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 807707 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.