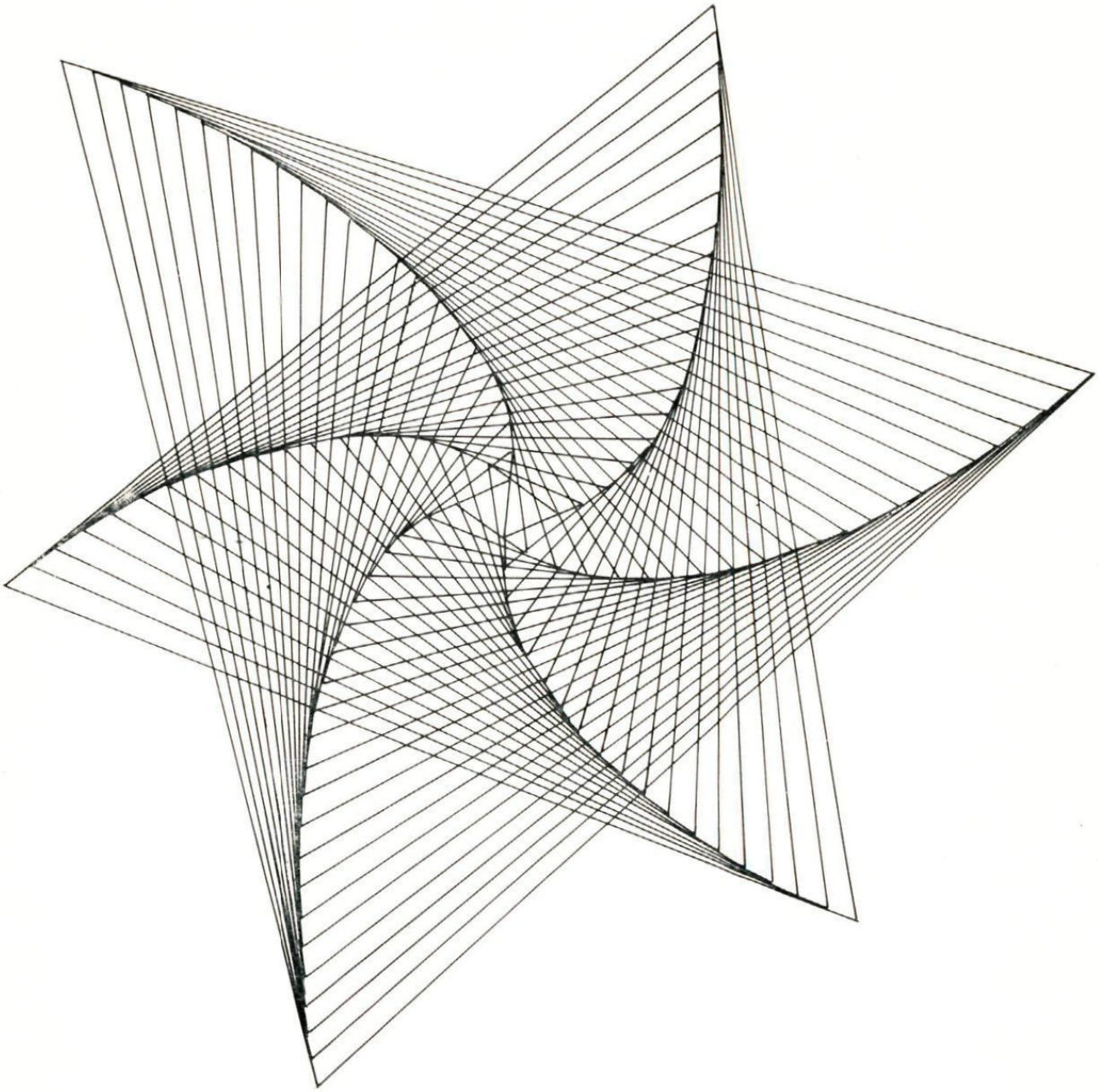
PYTHAGORAS

Wiskundetijdschrift
voor jongeren

2

negende jaargang
1969/1970



Eén van de vele mooie figuren die kunnen ontstaan door het verlengen of verkorten van de zijden van een veelhoek. Meer hierover lees je in het artikel dat op bladzijde 25 begint.

pythagoras

jaargang 9 no 2

°Van saai tot fraai

„Saaie sommen zijn als kale cactussen: bij de juiste verzorging tonen ze een verrassende schoonheid".

In vroegere nummers, onder andere in de derde jaargang, is al eens gewezen op de figuren die ontstaan kunnen uit ogenschijnlijk weinig betekenende, vaak met „saai" betitelde vraagstukken. We willen nu een aantal figuren bekijken die ontstaan door het verlengen of verkorten van de zijden van een gegeven figuur.
Als voorbeeld nemen we het vraagstuk:
„Van een gelijkzijdige driehoek ABC verlengen we de zijden AB, BC en CA met gelijke stukken BD, CE en AF. Bewijs dat de driehoek DEF weer gelijkzijdig is". (figuur 1).

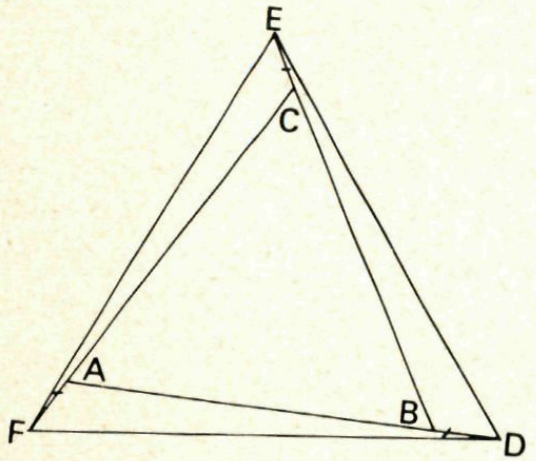


fig. 1

Met behulp van congruentie is het gevraagde bewijs gemakkelijk te geven. Dit gedaan hebbende kun je natuurlijk een „zucht van verlichting slaken", omdat alweer een vraagstuk opgelost is.
De creatieve kant ervan, in dit geval de meest plezierige, blijft daarbij verborgen.
Let nog eens op het eerste deel van de opgave, waarin opdracht wordt gegeven tot het verlengen van de zijden van de driehoek. Omdat de tweede driehoek, △ DEF, weer gelijkzijdig is, kan hierop dezelfde

behandeling worden toegepast. Daarna volgt de derde driehoek, de vierde enz. Zo voortgaande ondergaat elke laatstgeboren driehoek dezelfde operatie met figuur 2 als resultaat.

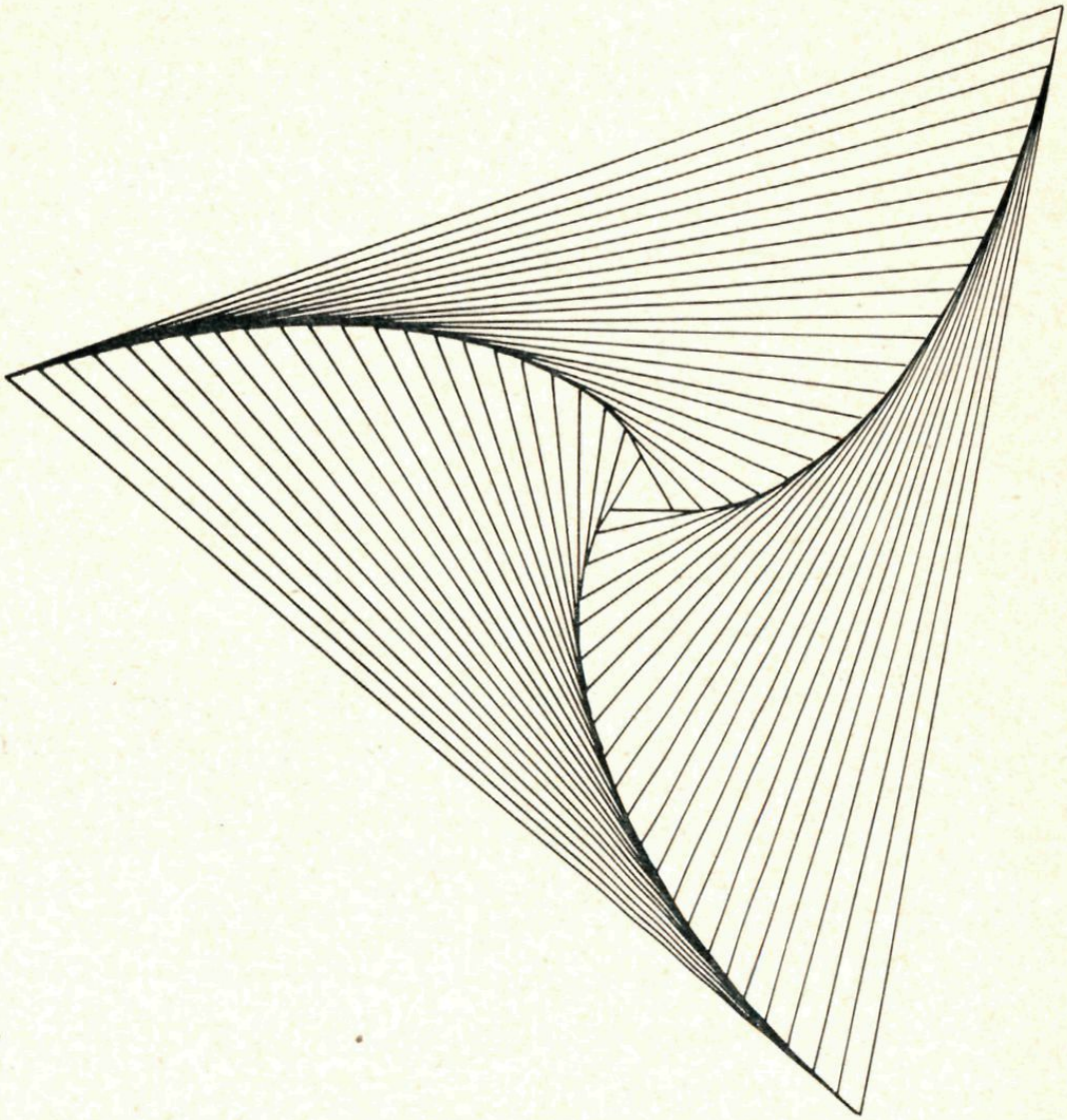


fig. 2

Slechts de grootte van het tekenpapier dwingt tot stopzetting en herinnert ons aan onze menselijke beperktheid. In gedachten echter ontstaat een keten van een oneindig aantal gelijkzijdige driehoeken.
Het ligt voor de hand allerlei variaties aan te brengen. Enkele zijn:

1. Beginnen met een grote gelijkzijdige driehoek en telkens met eenzelfde stukje verkorten.
2. Beginnen met een klein vierkant en verlengen met gelijke stukken.
3. Beginnen met een groot parallellogram en verkorten met gelijke stukken.
4. Beginnen met een kleine ruit en verlengen met gelijke stukken.

De diverse figuren zijn hier niet alle weergegeven in verband met de plaatsruimte. Opgemerkt moet nog worden, dat werkelijk goede

tekeningen slechts ontstaan, als de verlengstukjes kort worden genomen, bijv. maximaal een halve centimeter.
Goed tekenpapier, een wat zacht tekenpotlood en een volhardende preciesheid zijn de voorwaarden voor fraaie scheppingen, die de moeite waard zijn. Zeer geslaagde exemplaren zijn zelfs een sieraad aan de muur van de kamer.
Figuur 3 ontstaat uit een grote ruit, waarin herhaalde verkorting is toegepast.

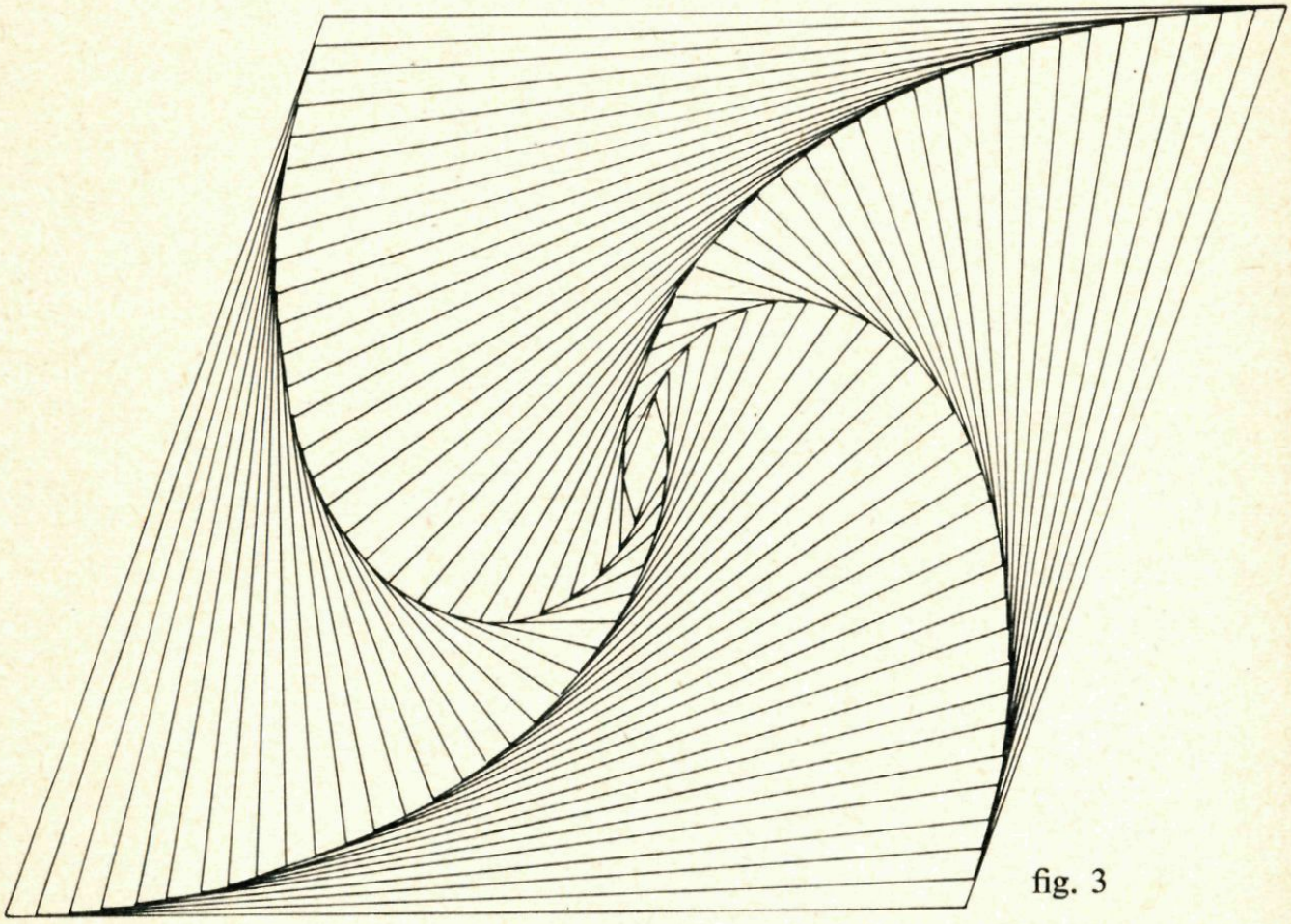


fig. 3

De mogelijkheden van het zo eenvoudige vraagstuk zijn nog niet uitgeput. Het loont de moeite nog verder op onderzoek uit te gaan.
Het verlengen wordt in het vervolg aangeduid met $O(l)$ (operatie langer) het verkorten met $O(k)$. In figuur 4 is $O(k)$ uitgevoerd in de richting tegen de wijzers van de klok in, dus de positieve draairichting. We duiden deze aan met $O(k^+)$.
Op figuur 5 is $O(k^-)$ toegepast.
Figuur 6 toont een ruit met een scherpe hoek van 60°, dus bestaande uit twee gelijkzijdige driehoeken. Op de ene helft wordt nu toegepast $O(k^+)$ en op de andere helft $O(k^-)$. Dit voortgezet geeft als resultaat figuur 7.

Positief en negatief laten zich koppelen op vier manieren, nl. (+, +), (+, —), (—, +) en (—, —).

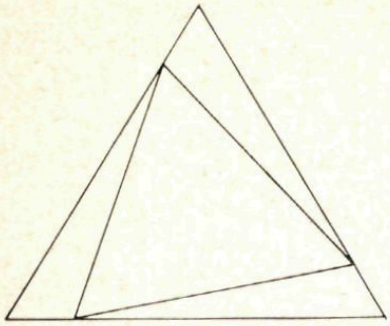


fig. 4

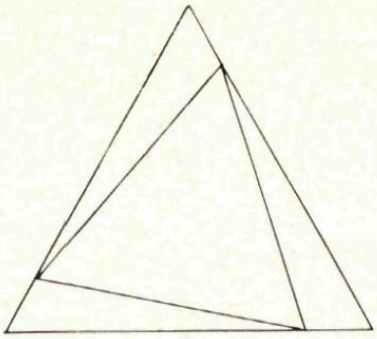


fig. 5

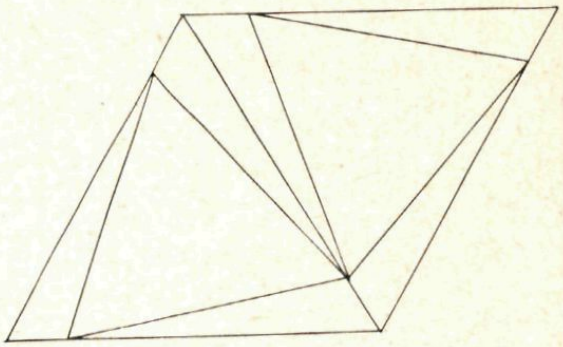


fig. 6

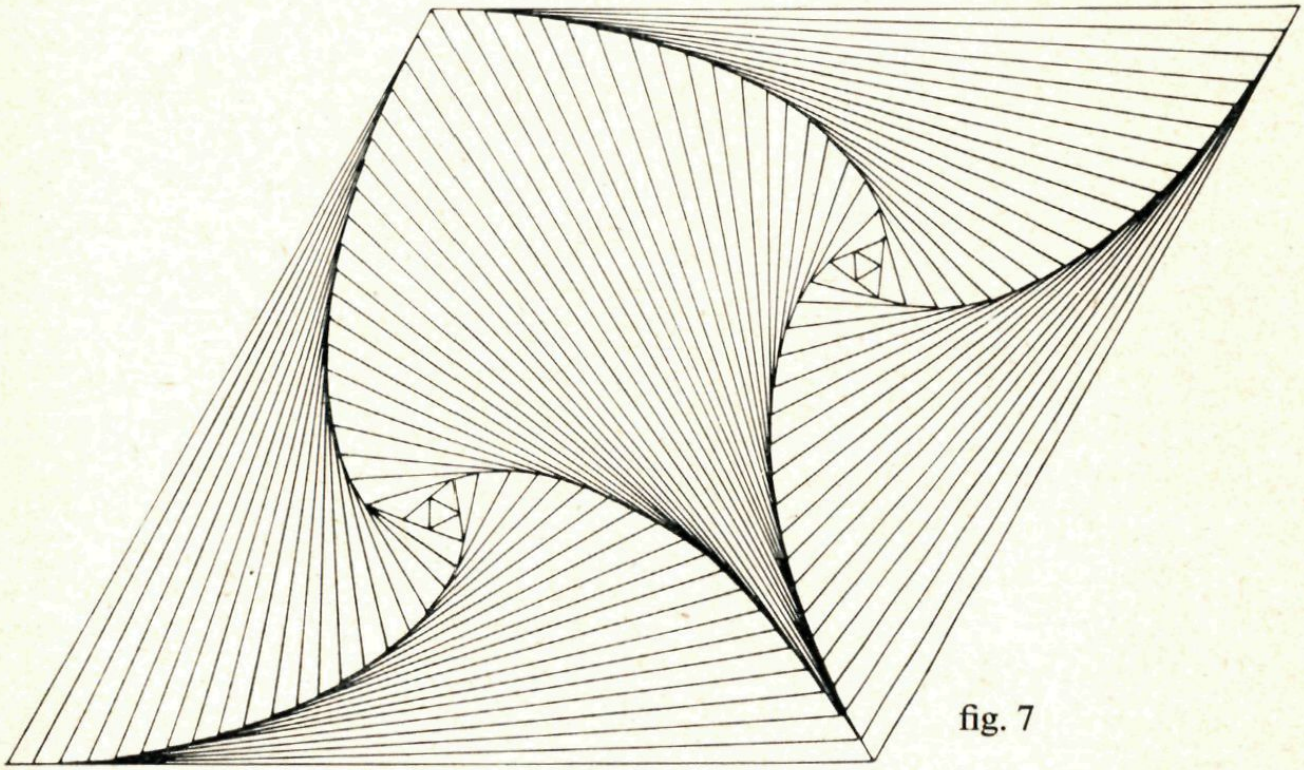


fig. 7

Deze vier koppels toegepast in de driehoeken van de ruit leveren echter slechts drie verschillende figuren op. Immers (+, —) en (—, +) kunnen door rotatie in elkaar overgaan. De figuren, die ontstaan uit (+, +) en (—, —) lijken op elkaar, maar blijven onderscheiden door de tegengestelde draairichting.
In figuur 8 zijn nog eens de drie mogelijkheden getekend.
Vanzelfsprekend vraagt *O(l)* nog onze aandacht. In bovenstaande beschouwingen kan eenvoudig *O(k)* vervangen worden door *O(e)*.

Er zijn dus opnieuw drie veelbelovende mogelijkheden. Figuur 9 toont het eerste begin van $O(l^{+,+})$
Bij voortzetting van de operatie dwingt het veelvuldig snijden van de lijnen tot uiterste nauwkeurigheid. Dat is evenwel nog een extra pluspunt. Wie begint en volhardt, verkrijgt tenslotte de figuur op de binnenzijde van het omslag als beloning.

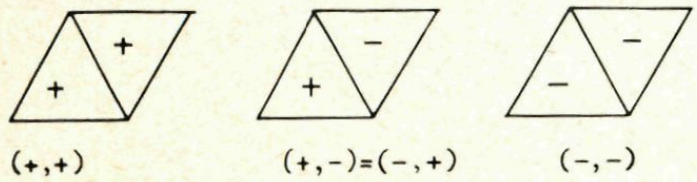


fig. 8

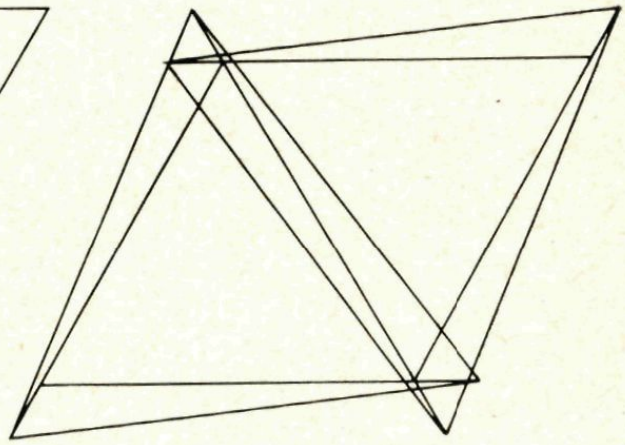


fig. 9

We eindigen met een vraag: Als je het verkorten of verlengen van de zijden toepast op vierkanten, parallellogrammen, ruiten, krijg je dan steeds nieuwe vierkanten, parallellogrammen of ruiten?

Oplossingen van Denkertjes, voorzien van naam, adres, leeftijd en leerjaar, voor 15 december insturen naar het redactiesecretariaat.

11. Een leraar heeft een aantal proefwerkvragen op het bord geschreven. Achter elke vraag schrijft hij de nummers van de leerlingen die die vraag moeten beantwoorden. Hij doet dat zo dat elk van de 29 leerlingen twee vragen moet beantwoorden en dat alle leerlingen verschillende paren vragen krijgen. Hoeveel vragen staan er tenminste op het bord?
12. In dit denkertje hebben we alleen belangstelling voor rechthoekige driehoeken, waarvan de ene rechthoekzijde tweemaal zo lang is als de andere. Het zal je niet moeilijk vallen een gegeven vierkant in vier dergelijke driehoeken te verdelen. Maar zou het ook mogelijk zijn een gegeven vierkant in 17 dergelijke driehoeken te verdelen?
13. Is $\sqrt{(3 - \sqrt{6})} + \sqrt{(3 + \sqrt{6})}$ groter dan, kleiner dan of gelijk aan $\sqrt{(6 + 2\sqrt{3})}$?

°°Paradoxen in de wiskunde

Paradoxen spelen in de wiskunde een rol die niet zo gemakkelijk te omschrijven is. Je kent het woord waarschijnlijk van *paradoxaal*: schijnbaar tegenstrijdig. In het volgende geven we een aantal voorbeelden die de rol van de paradox in de wiskunde enigszins illustreren.

De paradox van Russell, ofwel de geschiedenis van de dorpskapper.
We geven deze man de volgende opdracht: U moet alleen die dorpelingen scheren die zichzelf niet scheren!
Wat kunnen we op die opdracht tegen hebben?
Er is inderdaad geen vuiltje aan de lucht als de barbier niet tot de dorpelingen behoort.
Maar is dit wel het geval, dan raken we in de knoop.
Stel maar de volgende vraag: Moet de barbier zichzelf scheren of niet?
Neem eerst aan dat het antwoord bevestigend luidt. Hij behoort dan tot de verzameling dorpelingen die zichzelf scheren. Maar . . . degenen die tot deze groep behoren mag hij juist niet scheren.
Luidt het antwoord daarentegen ontkennend en zeggen we: Neen, de barbier moet zichzelf niet scheren, dan lopen we ook vast. Immers, de dorpelingen die zichzelf niet scheren, moet hij juist wel scheren.
Je ziet het: hoe we de vraag ook beantwoorden, we lopen altijd vast en dat is nu de paradox!
Deze variant van de paradox werd in 1919 gepubliceerd door de bekende Engelse filosoof en wiskundige Bertrand Russell. Al veel eerder was hij op de paradox gestuit en hij had toen de paradox op een meer wetenschappelijke manier beschreven. Zie bijvoorbeeld deel 1 van de Torus-reeks *Verzamelingen*, van de hand van dr. P. G. J. Vredenduin.
Na de publicatie door Russell zijn er tal van variaties op dit thema gegeven. Ook bleek dat deze paradox nauw verwant is met enkele paradoxen uit de Oudheid.
Er leefde in de vierde eeuw voor Christus een wijsgeer die de volgende uitspraak deed:
Deze bewering die ik nu doe, is onjuist.
Neem nu even de moeite na te gaan of deze uitspraak waar of vals is; je zult dan zien dat we weer – net als in het voorbeeld van de barbier – in de knoop raken.
Nog ouder is de uitspraak van een zekere Epimenides die op Kreta woonde. Hij beweerde – misschien wel door een grote mate van

zelfkennis –: Alle Kretenzers zijn leugenaars! Deze uitspraak van een Kretenzer, die ook in de Bijbel wordt geciteerd, is met zichzelf in tegenspraak.
Alle paradoxen die aan de orde kwamen houden verband met de leer der *verzamelingen*.
De verzameling dorpelingen die zichzelf niet scheren, zouden we kunnen aanduiden met het woord *kapper*. De vraag was dan of de kapper zelf element was van de verzameling *kapper*. Wiskundig omzeilen we nu de moeilijkheid door te stellen: Een verzameling kan geen element van zichzelf zijn.

De paradoxen van Zeno

Een andere groep paradoxen ligt op een heel ander terrein. Ze houden alle verband met het oneindigheidsbegrip. Ongeveer 450 v. C. leefde in Griekenland de filosoof *Zeno*. Zijn wijsgerige beschouwingen hadden ook wiskundige betekenis. Ieder die iets met wiskunde te maken heeft, weet wel dat het begrip *oneindig* in de wiskunde een belangrijke rol speelt. Met name in de analyse – de zogenaamde differentiaalrekening en integraalrekening – is dit begrip van fundamentele betekenis.
Er heersten op dit gebied twee opvattingen. Sommige wiskundigen leerden, dat een grootheid tot in het oneindige kon worden verdeeld. Anderen leerden dat dit niet zo was: elke grootheid zou bestaan uit een groot aantal ondeelbare deeltjes. Vanzelfsprekend hielden al deze opvattingen verband met de natuurkunde.
Wie bijvoorbeeld even nadenkt over de laatste opvatting ziet direct het verband met de atoomtheorie.
In zijn beschouwingen over het oneindige werkte Zeno met paradoxen. Eén ervan is heel bekend onder de naam: Achilles en de schildpad. Achilles, een mythologische figuur die zeer snel kon lopen, zou een schildpad, die een zekere voorsprong heeft, nooit kunnen inhalen.
Neem voor het gemak even aan dat de schildpad begint met een voorsprong van honderd meter en dat Achilles tien maal zo snel loopt als de schildpad. Als A. de honderd meter voorsprong heeft afgelegd is s. inmiddels weer tien meter verder. Heeft A. ook deze tien meter afgelegd, dan is s. weer één meter verder. Natuurlijk kunnen we zo door redeneren en blijft de schildpad een voorsprong behouden.
Conclusie: Achilles haalt de schildpad nooit in!
Degene die wel eens van limieten gehoord hebben en van de limiet

van de som van een oneindige meetkundige rij, zien wel in dat de paradox van Zeno hiermee verband houdt. Wie beweert dat de schildpad nooit wordt ingehaald, zal waarschijnlijk ook beweren, dat de rij

$$100,\ 10,\ 1,\ 0{,}1,\ \ldots$$

een som heeft die bij onbegrensde toename van het aantal termen, oneindig groot wordt (om het maar eens populair en niet erg wiskundig te zeggen). Maar wie de theorie gehad heeft van de convergente meetkundige rijen, weet wel beter. De limiet van de som is immers gelijk aan

$$\frac{100}{1 - 0{,}1} = 111\frac{1}{9}$$

Geen wonder dat professor dr D. J. Struik in zijn „Geschiedenis der Wiskunde" (Aula pocket) sprak over een steen, die Zeno in de filosofische poel wierp!

Tot slot nog een andersoortige paradox en weer één op het gebied der verzamelingen.

Wie zou beweren dat het mogelijk is dat een deel *even groot* is als het geheel, zal waarschijnlijk met een ongelovig gezicht worden aangestaard. Toch is dit inderdaad mogelijk. Het hangt er maar van af wat we verstaan onder *even groot*, *deel* en *geheel*. Je weet dat de natuurlijke getallen een *deel* vormen van de verzameling der rationale getallen.

Welnu: Er zijn *evenveel natuurlijke* getallen als *rationale* getallen!

Hoe paradoxaal dit ook mag klinken, de grondlegger van de verzamelingenleer, Georg Cantor, heeft dit bewezen. Beter gezegd: Hij heeft bewezen dat je de verzameling der natuurlijke getallen en die der rationale getallen één-éénduidig op elkaar kunt afbeelden. Dit bewijs is eveneens te vinden in het genoemde nummer Verzamelingen uit de Torusreeks. Iets eenvoudiger is:

Er zijn *evenveel even* getallen als *natuurlijke* getallen. Je kunt deze twee verzamelingen immers als volgt op elkaar afbeelden:

E:	2	4	6	8	10	12	14
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
N:	1	2	3	4	5	6	7

Wat zegt echter in deze gevallen de term evenveel, er zijn immers oneindig veel natuurlijke, even of rationale getallen?

°°Logica in elektronica

(vervolg op Lessen in Logica)

In het artikel „Lessen in logica" hebben we de begrippen „of" ($\vee$), „en" ($\wedge$) en „niet" ($\neg$) gedefinieerd met behulp van de volgende tabellen.

p q	$p \vee q$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

p q	$p \wedge q$
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

p	$\neg p$
0	1
1	0

In de elektronica komen deze tabellen ook voor. Je hoeft, om verder te lezen, echt niet alles van elektriciteit te weten. Voorlopig is het voldoende je elektrische stroom voor te stellen als een beweging van uiterst kleine deeltjes (elektronen) in een koperdraad. Is er stroom in een draad, zodat we daarmee een lampje kunnen laten branden, dan geven we die toestand aan met 1. Geen stroom wordt natuurlijk dan aangegeven door 0. Een aantal elektronische onderdelen verbonden door koperdraadjes heet een *schakeling*. Pythagoras is niet het tijdschrift om de bouw van schakelingen in te behandelen, we zullen volstaan met te zeggen waartoe ze in staat zijn.
De eerste schakeling zal zijn de zogenaamde *OF-poort*. Deze schakeling zullen we symbolisch voorstellen door een halve cirkelschijf. Er gaan een aantal draadjes in en er komt één draadje uit. De werking van de OF-poort blijkt uit onderstaande figuur.

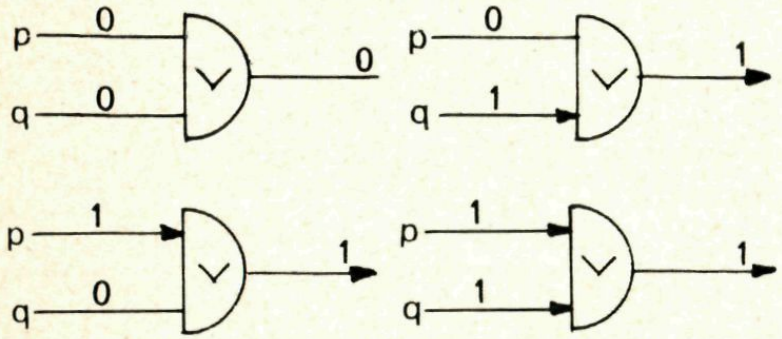
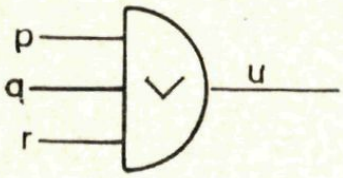


fig. 10

Vergelijking met de „$\vee$-tabel" doet ons begrijpen waarom deze schakeling een OF-poort heet. De uitgang van de poort levert stroom als aan ingang p $\vee$ aan ingang q stroom wordt aangeboden. Men is

ook in staat om een OF-poort te bouwen met meer dan twee ingangen. Hiervan een voorbeeld met tabel.



p	q	r	u
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Merk op dat de uitgang soms met een nieuwe letter wordt aangegeven (hier een u) en dat de schakeling een $\vee$-teken draagt. Dit laatste om niet in de war te komen met . . . de *EN-poort*.

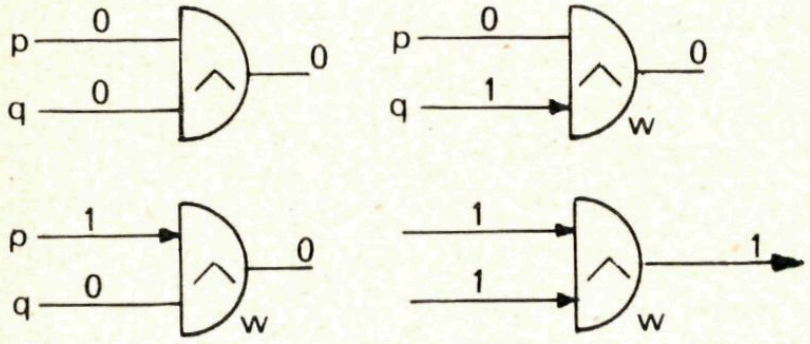


fig. 11

De werking komt volledig overeen met onze $\wedge$-tabel. Ook van EN-poorten bestaan uitvoeringen met meer dan twee ingangen. Uit een EN-poort komt alleen dan stroom, als aan alle ingangen stroom wordt aangeboden.

De *Invertor*.

fig. 12

Uit de invertor komt stroom, als aan de ingang geen stroom wordt aangeboden. We zullen ons niet afvragen waar hij die stroom vandaan haalt. De schakeling is in staat om te inverteren, dit wil zeggen 0 te vervangen door 1 en andersom. Met de drie behandelde *logische schakelingen* kunnen we grotere toestellen bouwen, die voor ons nuttige werkzaamheden kunnen verrichten.

Eerste voorbeeld.

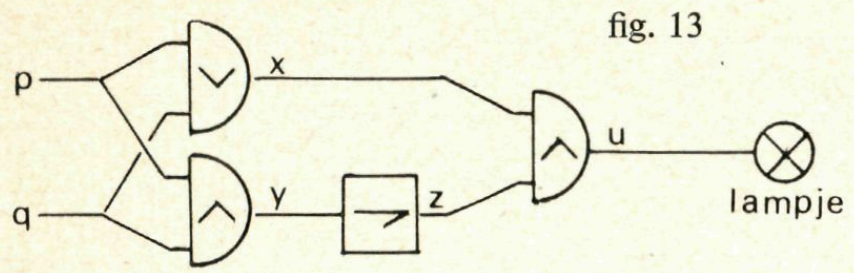


fig. 13

p	q	x	y	z	u
0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0

De tabel geeft de werking van het toestel aan. Als bij uitgang u een lampje wordt aangesloten, gaat dit branden, als bij p of bij q, maar niet bij beide tegelijk, stroom wordt aangeboden. Vergelijk dit eens met de limonade-melktabel!

Tweede voorbeeld.
In het behandelde toestel sluiten we nog een lampje aan op de uitgang y. Als dit lampje brandt wordt het cijfer 2 zichtbaar, terwijl het andere lampje dient om het cijfer 1 zichtbaar te maken. Bij de ingangen p en q zijn drukknopjes getekend. Het indrukken van zo'n knop betekent stroom leveren aan de betreffende ingang.

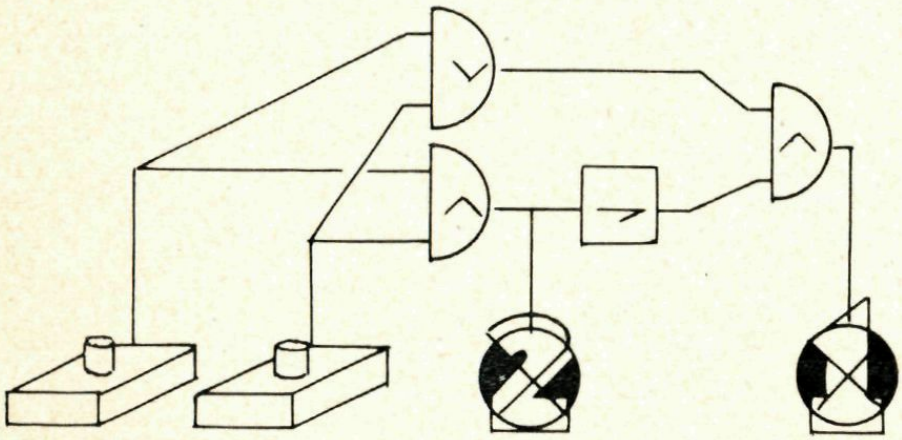


fig. 14

p	q	y	u
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Uit de tabel van het eerste voorbeeld lichten we alleen de voor ons belangrijke kolommen.

Zet nu eens tussen de kolommen p en q plustekens en je ziet dat ons toestel kan optellen in het tweetallig stelsel.

In dit stelsel worden de natuurlijke getallen geschreven met slechts twee symbolen: 0 en 1. Bijvoorbeeld bij gebruik van vijf cijfers:

één = 00001	zes = 00110	elf = 01011	zestien = 10000
twee = 00010	zeven = 00111	twaalf = 01100	enz.
drie = 00011	acht = 01000	dertien = 01101	
vier = 00100	negen = 01001	veertien = 01110	
vijf = 00101	tien = 01010	vijftien = 01111	

Derde voorbeeld.

We gaan ons nieuwsgierig afvragen of we ook een toestel kunnen bouwen dat telt, hoeveel er van *drie* drukknoppen zijn ingedrukt. Dat kan, maar de schakeling wordt moeilijker.

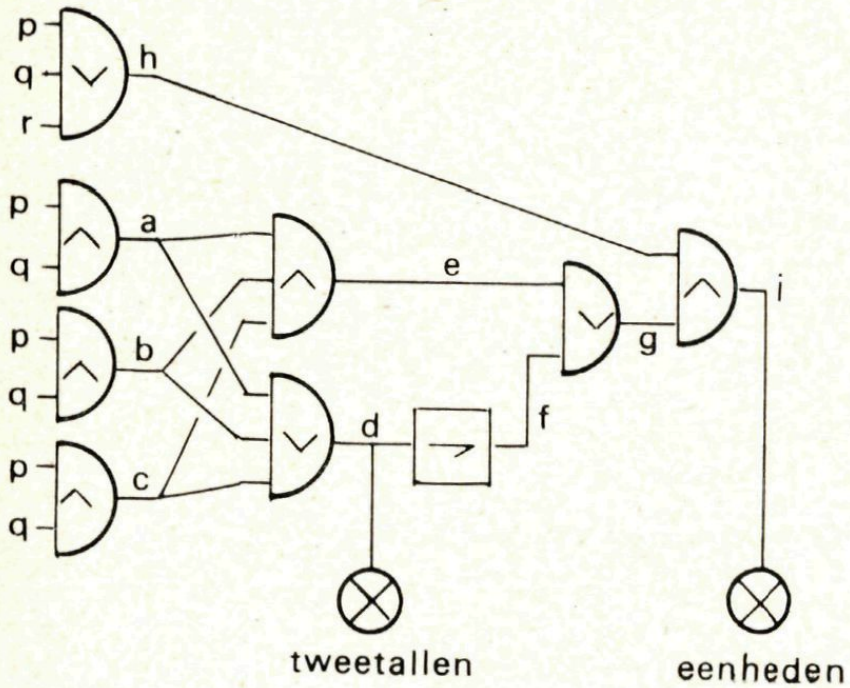


fig. 15

Om de tekening niet nog ingewikkelder te maken dan hij al is, zijn de toevoerdraden niet getekend. Het is de bedoeling dat alle met p gemerkte ingangen verbonden zijn met dezelfde drukknop. Evenzo voor de q- en de r-ingangen. De kolommen d en i geven in binaire vorm het aantal aan dat van de drukknoppen p, q en r is ingedrukt.

p q r	a b c d e f g h i
0 0 0	0 0 0 0 0 1 1 0 0
0 0 1	0 0 0 0 0 1 1 1 1
0 1 0	0 0 0 0 0 1 1 1 1
0 1 1	0 0 1 1 0 0 0 1 0
1 0 0	0 0 0 0 0 1 1 1 1
1 0 1	0 1 0 1 0 0 0 1 0
1 1 0	1 0 0 1 0 0 0 1 0
1 1 1	1 1 1 1 1 0 1 1 1

p q r	d i
0 0 0	0 0
0 0 1	0 1
0 1 0	0 1
0 1 1	1 0
1 0 0	0 1
1 0 1	1 0
1 1 0	1 0
1 1 1	1 1

°Esthetica en mathematica

In het denken van de mens over zijn kunstproducten wordt de wiskunde nogal eens betrokken. Heel sterk vinden we dit in de klassieke Griekse muziekleer en de eerste Romeinse verhandelingen over architectuur.
Ook later duiken telkens weer verhandelingen op die het schone willen begrijpen en vangen in mathematische wetten. In de vorige eeuw, in het tijdperk van de romantiek, moest men plots daarvan niets meer hebben: elke kunstuiting was autonoom, in hoge mate persoonlijk en op geen enkele wijze vatbaar voor wiskundige analyse.
In de laatste jaren zien we echter een hernieuwde belangstelling voor het thema: esthetica en mathematica. Nu komt deze van de kant van de wiskundigen en de belangstelling is ook anders gericht.
Een kunstwerk beoogt altijd op de een of andere manier overdracht van informatie: de kunstenaar produceert niet alleen zijn kunstwerk, maar brengt daarin ook iets van zichzelf, van zijn eigen bewustzijn of onderbewustzijn over en hij gebruikt daarvoor een bepaalde code. De beschouwer van het kunstwerk moet het product kunnen decoderen om door te kunnen dringen in de „boodschap" van de kunstenaar. Als hem dat lukt zal in zijn bewustzijn iets opleven van wat eerst in het bewustzijn van de kunstenaar aanwezig was. Dit is in figuur 16 sche-

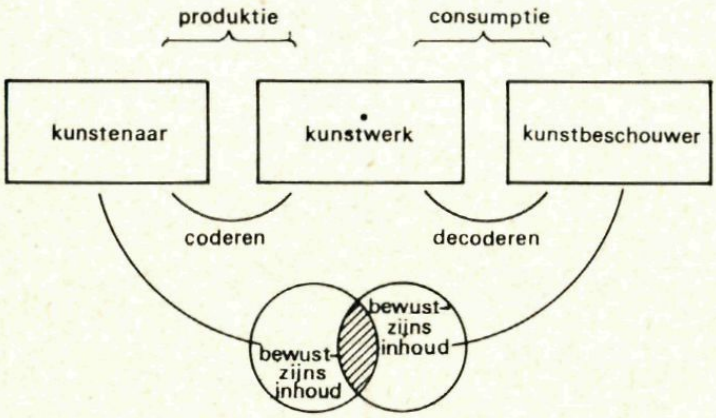


fig. 16

matisch voorgesteld. Nu is informatie-overdracht iets dat volop in de belangstelling staat en het is dan ook niet verwonderlijk dat men (met min of meer succes) moderne begrippen uit de communicatietheorie op de esthetica gaat toepassen.
Het volgende eenvoudige voorbeeld laat één van de manieren zien

waarop men daarbij te werk gaat. Het gaat er hierbij niet zozeer om een esthetisch *waarde*oordeel in getallen en formules te vangen (dit was in alle voorafgaande eeuwen wel het geval) maar om het esthetischete kunnen beschrijven in maat en getal.
In figuur 17 zijn 9 rozetten getekend en daarbij zijn alleen cirkels en cirkelbogen gebruikt.
We letten eerst eens op het aantal cirkels of cirkelbogen en noemen dit de complexiteit. Door gewoon te tellen vinden we de getallen die bij 17a t/m i staan. a bestaat uit 4 cirkels, b uit 5 cirkels enz.
Nu gaan we eens kijken welke orde, O, welke harmonie met deze ele-

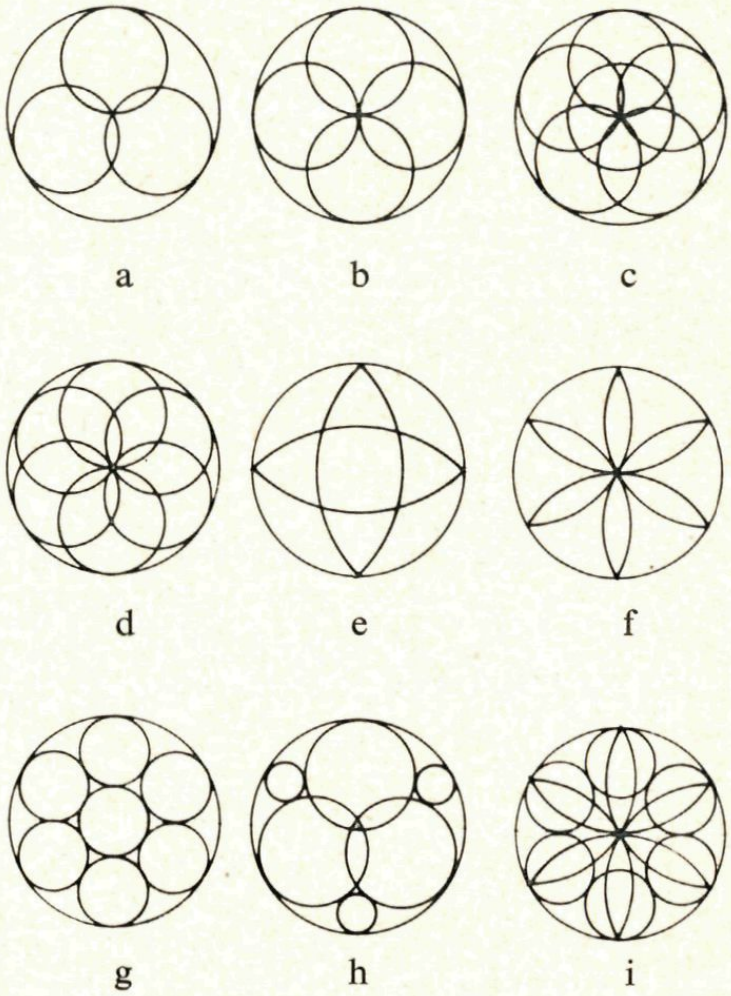


fig. 17

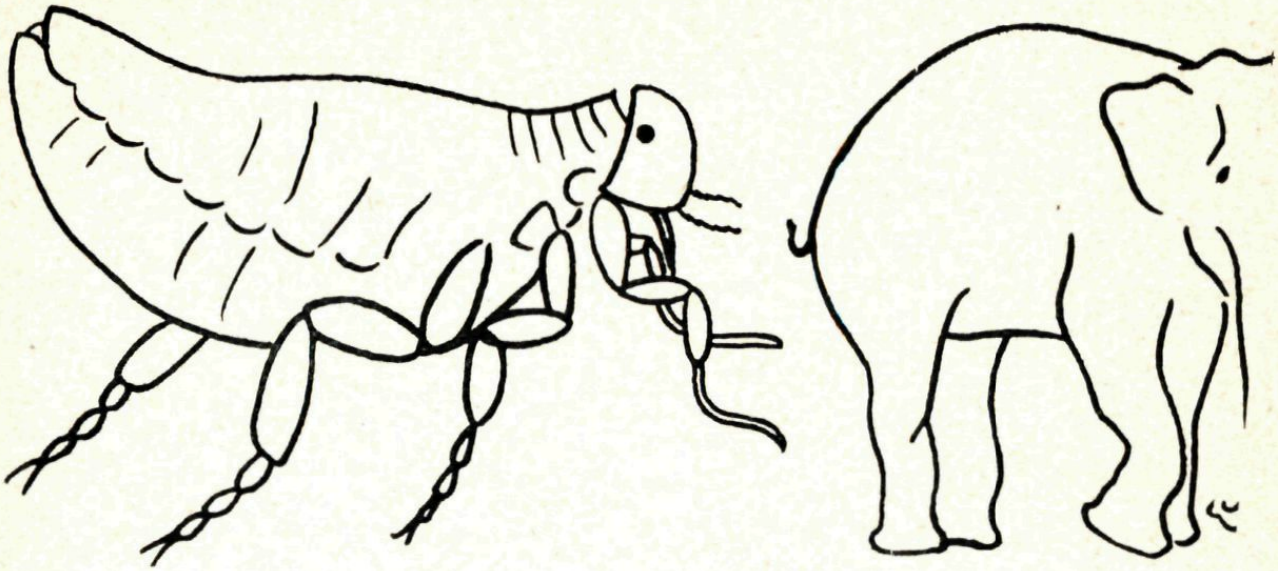
menten bereikt is. We vragen ons af: is er een vertikale symmetrie-as? Is er een horizontale? In welke mate is er rotatiesymmetrie? Hebben alle cirkelbogen dezelfde straal of niet? Hoeveel spitse vormen ontstaan er en hoeveel ronde? enz. Het zal wel duidelijk zijn dat de keuze van deze criteria erg subjectief is. Maar heeft men ze eenmaal vastgesteld dan kan men er ook een getal aan toekennen, dat dan de maat van orde van de rozet weergeeft.

Nu voert men een nieuw begrip in: de macro-esthetische maat M. Dit is de bereikte harmonie gedeeld door de complexiteit: $M = \frac{O}{C}$.
We zouden kunnen zeggen: M is een maat voor de bereikte harmonie per gebruikt element: waar een hoge mate van harmonie is bereikt met een minimum aan middelen, is M het grootst.
Ook heeft men het begrip vormvastheid ingevoerd en men verstaat eronder het aantal verplaatsingen dat nodig is om de hele vorm uiteen te laten vallen in zijn afzonderlijke delen, ofwel om van de orde weer tot de chaos te komen.
In de onderstaande tabel* vind je een toepassing van deze begrippen op de rozetten van figuur 12.
Het is een grote vraag of men iets bereikt met dit soort analyses en het is wel duidelijk dat men nog eindeloos ver verwijderd is van een wiskundige analyse van de Nachtwacht van Rembrandt of van Zadkines monument in Rotterdam.

Rozet	Complexiteit	Orde	M	Vormvastheid
a	4	$4\frac{1}{3}$	1,083	5
b	5	$5\frac{1}{2}$	1,100	6
c	6	$5\frac{14}{15}$	0,989	7
d	7	7	1,000	8
e	5	$4\frac{1}{2}$	0,900	5
f	7	$4\frac{5}{6}$	0,690	5
g	8	$5\frac{29}{42}$	0,711	6
h	7	$5\frac{14}{15}$	0,848	7
i	13	$6\frac{2}{3}$	0,513	7

* Evenals de figuren is deze ontleend aan „Entwicklung der numerischen „Ästhetik" van S. Maser in UMSCHAU, 3 juli 1969.

°Maak van een vlo geen olifant



We luisterden het volgende gesprek af tussen Jan en Piet:

Jan 'Als een vlo zo groot was als een olifant, zou hij een sprong van $1\frac{1}{2}$ km kunnen maken.'

Piet 'O, ja?'

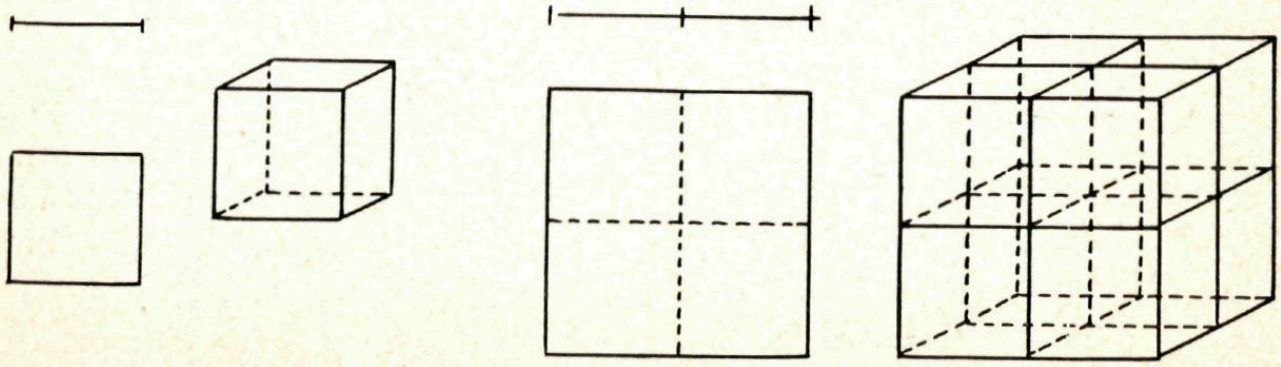
J. 'Een vlo is 2 mm lang en een olifant minstens 3 meter, dus 1500 maal zo lang. Een vlo kan een meter springen. Wordt hij 1500 maal zo lang, dan kan hij 1500 m springen, dus $1\frac{1}{2}$ km.'

P. 'Als zo'n vlo per ongeluk op je dak springt stort je hele huis in elkaar.'

J. 'Welnee. Jouw huis blijft wel staan. Want een vlo weegt hooguit één miligram. Een vlo van 3 meter dus 1500 mg = $1\frac{1}{2}$ gram. En daarvan stort je huis niet in.'

P. 'Een beest zo groot als een olifant, dat nog geen twee gram weegt! Dat is toch wel erg onwaarschijnlijk.'

Geloof je het verhaal van Jan? Of deel je de twijfel van Piet?
Wel, de fout die Jan maakt is, dat wanneer de lengte met 1500 wordt



vermenigvuldigd, hij ook de spierkracht en het gewicht 1500 maal zo groot neemt. De onjuistheid zal blijken uit het volgende.
Wanneer we, zoals in bovenstaande figuur, van een vierkant en een kubus de lengtematen met twee vermenigvuldigen, dan wordt de oppervlakte met 4 ($= 2^2$) en de inhoud met 8 ($= 2^3$) vermenigvuldigd. Maken we een voorwerp driemaal zo groot (in al zijn lengtematen), dan wordt zijn oppervlakte 3^2- en zijn inhoud 3^3-maal zo groot. Wat heeft dit met de vlo van Jan te maken?
Eerst de *spierkracht*. De kracht van een spier is evenredig met de oppervlakte van de dwarsdoorsnede.

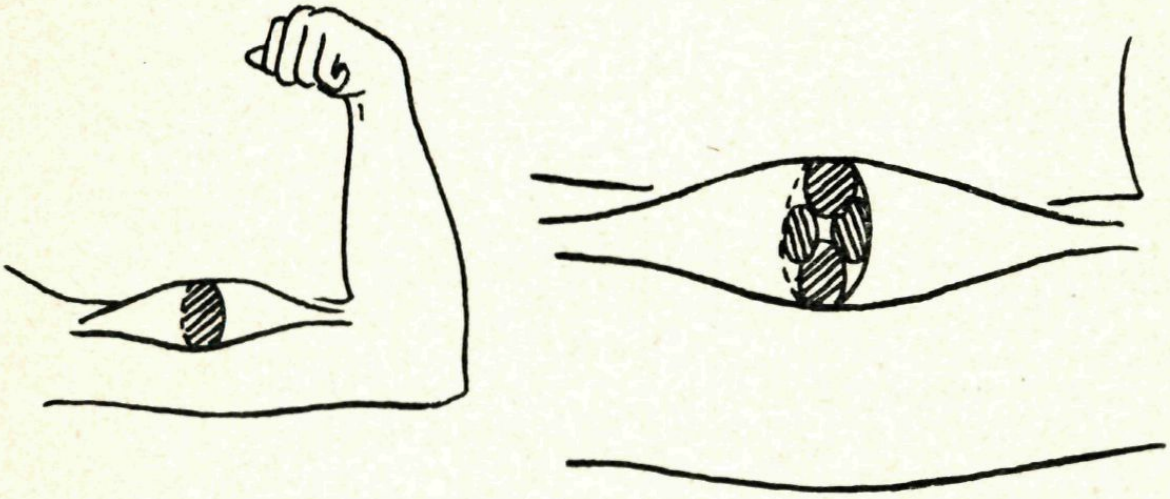


fig. 18

Een in alle richtingen tweemaal zo grote spier is viermaal zo sterk. Dat klinkt veelbelovend voor onze vlo op olifantformaat, want hij is niet 1500-maal maar 1500^2-maal zo sterk als een gewone vlo. Maar nu een tegenvaller: zijn *gewicht*. Het gewicht hangt immers samen met de inhoud. En de inhoud van de olifantige-vlo is 1500^3-maal zo groot geworden. Zijn gewicht wordt dus ongeveer $1500^3 \times 1$ mg $= 3375$ kg.
Wat is het gevolg? Onze 'vlolifant' is 2.250.000-maal zo sterk maar 3.375.000.000-maal zo zwaar geworden. Dit is zo ongunstig, dat hij geen poot meer kan verzetten, sterker nog:
de vlolifant is niet levensvatbaar.
a. De vlolifant zou stikken.
Bij het kubus -voorbeeld hebben we gezien dat, bij vergroting, de inhoud sterker toeneemt (derde macht) dan de oppervlakte (tweede macht). De inhoud van de vlolifant en daarmee de behoefte aan zuurstof is veel sterker toegenomen dan de longoppervlakte door welke de zuurstof moet worden opgenomen. Eigenlijk kun je bij een vlo niet van

longen spreken. Een vlo heeft voor zijn ademhaling door zijn lichaam een buizenstelsel. De lichaamsbewegingen van de vlo zijn voldoende om verse lucht door deze buisjes te spoelen. Onze vlolifant heeft aan dit buizensysteem bij lange na niet voldoende en stikt.
Men kan bij landdieren dan ook constateren dat het longoppervlak onevenredig toeneemt met de grootte. Dit wordt bereikt door een sponsachtige structuur van de longen. Het longoppervlak van de mens bedraagt ongeveer 60 m^2, dat van een olifant ongeveer 2500 m^2. Het vermogen van het bloed om de opgenomen zuurstof te vervoeren hangt af van de totale oppervlakte van de rode bloedlichaampjes, dat bij de mens zo'n $\frac{1}{4}$ ha bedraagt. In verband hiermee zijn grotere dieren ook bloedrijker (walvis).
Hetzelfde principe van oppervlakte-vergroting treffen we aan bij de organen voor het opnemen van voedsel en afscheiden van afvalstoffen. Een eencellig diertje heeft voldoende aan zijn lichaamsoppervlak voor het opnemen en afscheiden van stoffen. Bij de mens is de darmwand sterk geplooid ter vergroting van de oppervlakte. De gezamelijke lengte van de nierbuisjes bij de mens is 50 km.
b. De vlolifant zou instorten.
De sterkte van een bot is afhankelijk van de oppervlakte van de dwarsdoorsnede. De sterkte van het skelet is dus een oppervlaktekwestie en het gewicht is weer evenredig met de inhoud. Het draagvermogen van het skelet kan het gewicht niet bijhouden en de vlolifant bezwijkt onder zijn eigen gewicht.
Hoe groter een landdier is, hoe groter deel het skelet van het lichaam inneemt. Grotere landdieren worden daarom plomper. Vergelijk maar eens de poten van de vlo en die van de olifant. Er zijn echter heel grote zoogdieren, die toch niet een in verhouding zwaar skelet hebben, maar deze leven dan ook in het water. De walvissen hebben weinig last van hun eigen gewicht, zolang ze onder water blijven. Spoelt een walvis om een of andere reden op het strand, dan blijkt meestal zijn skelet niet bestand tegen zoveel gewicht en hij breekt zijn ribben. Het heeft weinig zin om, zoals men wel eens geprobeerd heeft, zo'n walvis weer naar diep water te slepen. Hij is, met onze vlolifant, het slachtoffer geworden van dezelfde ijzeren wiskundewet.

°Elfde Internationale Wiskunde Olympiade, 1969

In Roemenië ontstond jaren geleden het plan, een jaarlijks weerkerende internationale wiskunde-olympiade te organiseren. Dit land organiseerde dan ook de eerste twee van die krachtmetingen, in 1959 en in 1960. Daarna kwamen achtereenvolgens aan de beurt Hongarije, Tsjechoslowakije, Polen, Rusland, Oostduitsland, Bulgarije, Joegoslavië, Rusland. En afgelopen zomer was dan Roemenië weer gastheer van ruim honderd jongelui met wiskundeknobbels en hun begeleiders. Aan de voorgaande opsomming zie je wel dat deze olympiade voornamelijk een aangelegenheid is van de landen van het oostblok. Maar sinds een paar jaren zenden Engeland, Frankrijk en Zweden afvaardigingen. En dit jaar waren ook Nederland en België vertegenwoordigd.

De Nederlandse ploeg bestond uit de acht jongelui, die in het voorjaar van 1969 de beste resultaten hadden in de eerste ronde van de Nederlandse olympiade. Zij vertrokken begin juli op Schiphol naar Boekarest, in het vooruitzicht een week in die stad te blijven en daarna een week per bus door Roemenië te reizen. En daar tussendoor zouden ze ook nog in totaal zes vraagstukken proberen op te lossen, gedurende twee maal vier uren.

Veel verwachtingen van dat laatste onderdeel van het programma hadden ze niet. Ze wisten namelijk, dat al die deelnemers uit de communistische landen een grondige selectie gepasseerd zijn en een intensieve training hebben gehad. En zij vertrokken volkomen onvoorbereid . . . Het eindresultaat van de olympiade geeft die situatie dan ook duidelijk weer: een laatste plaats voor „ons", met 52 punten van de maximaal te behalen 320. Onze Belgische buren hadden 53 punten en dus hebben zij hun „Benelux-overwinning" op een warme avond in Boekarest uitbundig gevierd.

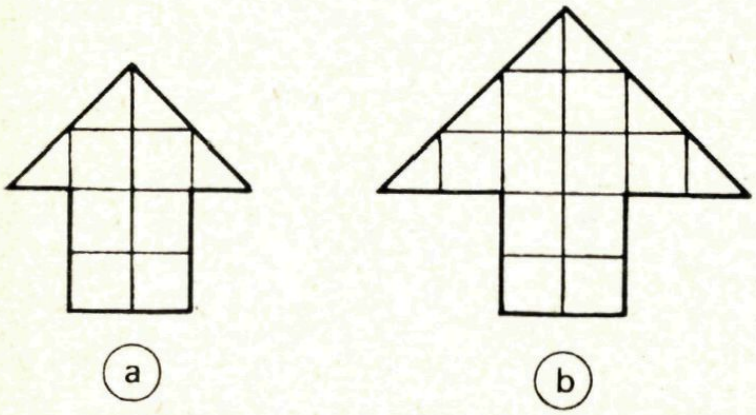
Wij durven niet te beoordelen of deze ervaring een verrijking betekende voor onze vertegenwoordigers of niet. Maar al die andere ervaringen betekenden dat vast en zeker wel. Hun oordeel over het leven in een staatsvorm, die zo veel van de onze afwijkt, berust nu op vele gesprekken met jongeren en op het kijken met wijd open ogen. En dat is veel waard.

14. In een oud planimetrieboek, dat omstreeks 1930 in de eerste klas van de HBS werd gebruikt, lees ik de volgende opgave: bewijs dat de som van de zwaartelijnen van een driehoek kleiner is dan de som van de zijden van die driehoek. Te moeilijk voor een derdeklasser van 1969?
15. Bepaal alle oplossingen in natuurlijke getallen a, b, c, d van de vergelijking

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$$

waarvoor geldt $a < b < c < d$.

16. Is het mogelijk een vlak aansluitend te betegelen met pijlvormige tegels zoals in figuur 1a? Kan het met de tegels van figuur 1b?



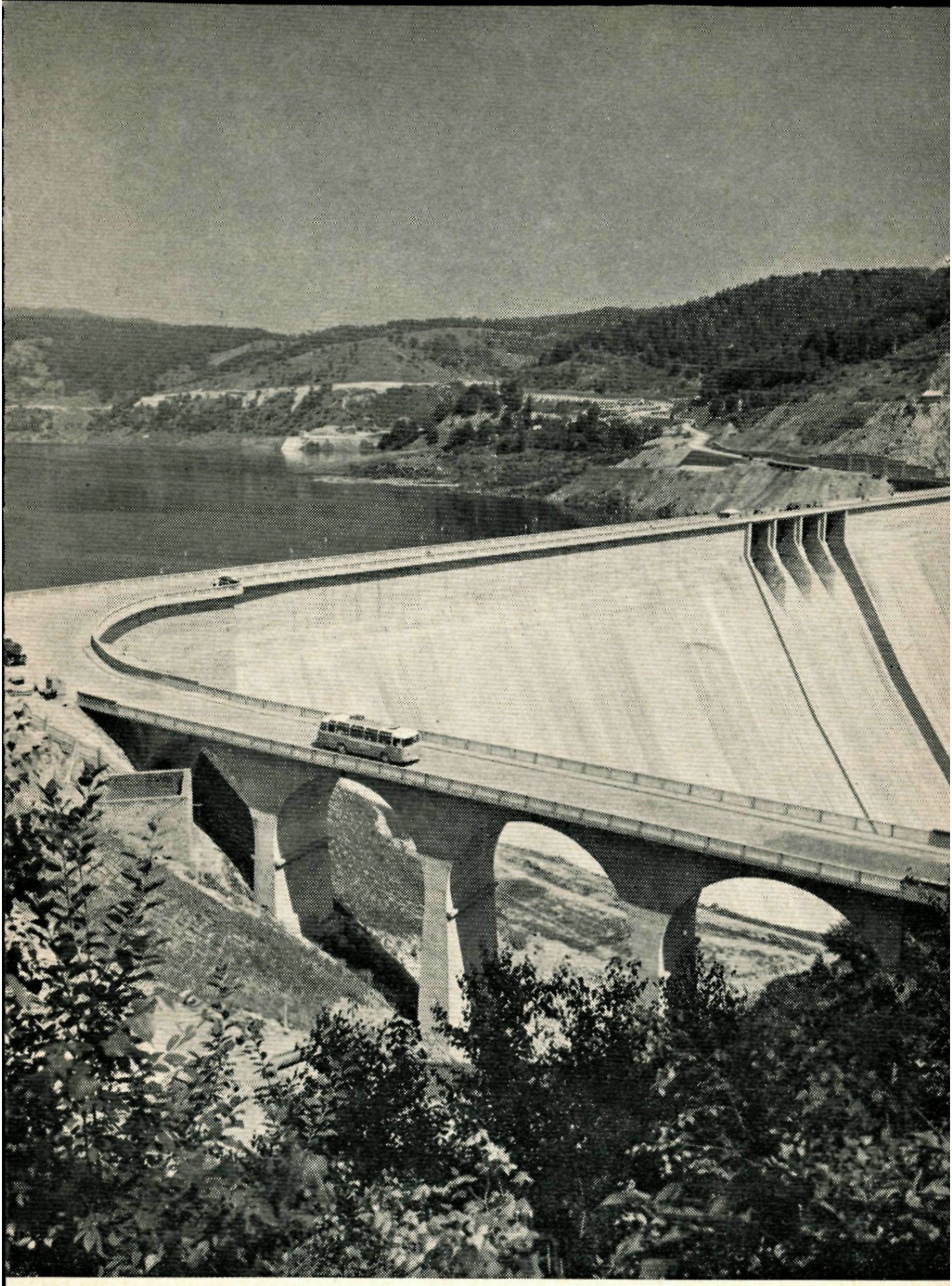
17. Laat zo eenvoudig mogelijk zien dat het onderstaande stelsel vergelijkingen strijdig is:

$$\begin{aligned} 13x + 65y - 93z &= 613 \\ 48x - 83y + 37z &= -258 \\ -61x + 18y + 56z &= -354 \end{aligned}$$

°°°Hieronder delen we nu de zes opgaven mee. Het redactiesecretariaat van *Pythagoras* kan aan een beperkt aantal verzoeken om modeloplossingen voldoen.

Opgave 1, 5 punten
Bewijs dat er oneindig veel natuurlijke getallen a bestaan met de volgende eigenschap: het getal $z = n^4 + a$ is voor elk natuurlijk getal n een deelbaar getal.

Tijdens de rondreis door Roemenië bezochten de deelnemers aan de elfde Internationale Wiskunde-olympiade ook het stuwmeer bij Bicaz.



Opgave 2, 6 punten

We beschouwen de functie f, die gedefinieerd wordt door

$f(x) = \cos(a_1 + x) + 2^{-1}\cos(a_2 + x) + 2^{-2}\cos(a_3 + x) + \ldots + 2^{-n+1}\cos(a_n + x)$,

waarin $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ constanten voorstellen. Bewijs dat uit $f(x_1) = f(x_2) = 0$ volgt, dat $x_1 - x_2$ in de vorm $m\pi$ is te schrijven, waarin m een geheel getal is.

Opmerking: f(x) bestaat uit n termen, die allemaal gebouwd zijn volgens het schema

$2^{-k+1}\cos(a_k + x)$

Hierin moet k vervangen worden door een geheel positief getal, dat niet groter is dan n.

Opgave 3, 8 punten

Bepaal de nodige en voldoende voorwaarden waaraan een positief getal a moet voldoen opdat er een viervlak bestaat, waarvan k ribben de lengte a hebben en de 6-k overige ribben de lengte 1 hebben; voor k neme men achtereenvolgens elk van de getallen 1, 2, 3, 4, 5.

Opgave 4, 6 punten

Een halve cirkelomtrek γ heeft AB tot middellijn, C is een van A en B verschillend punt van γ, D is het voetpunt van de loodlijn uit C op AB. Men beschouwt drie cirkels $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ waarvan AB gemeenschappelijke raaklijn is: γ_1 is de ingeschreven cirkel van driehoek ABC, γ_2 en γ_3 raken aan het lijnstuk CD en aan de halve cirkelomtrek γ.

Bewijs dat $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ nog een tweede gemeenschappelijke raaklijn bezitten.

Opgave 5, 7 punten

In een vlak zijn n punten gegeven ($n > 4$) en wel zodanig dat er geen drietal van die punten op een zelfde rechte liggen.

Bewijs dat er niet minder dan

C^2_{n-3} of wel $\binom{n-3}{2}$ of wel $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$

convexe vierhoeken bestaan, waarvan de hoekpunten tot de verzameling van de gegeven punten behoren.

Opgave 6, 8 punten

Gegeven is dat x_1 en x_2 en $x_1y_1 - z^2_1$ en $x^2y^2 - z^2_2$ positieve getallen zijn.

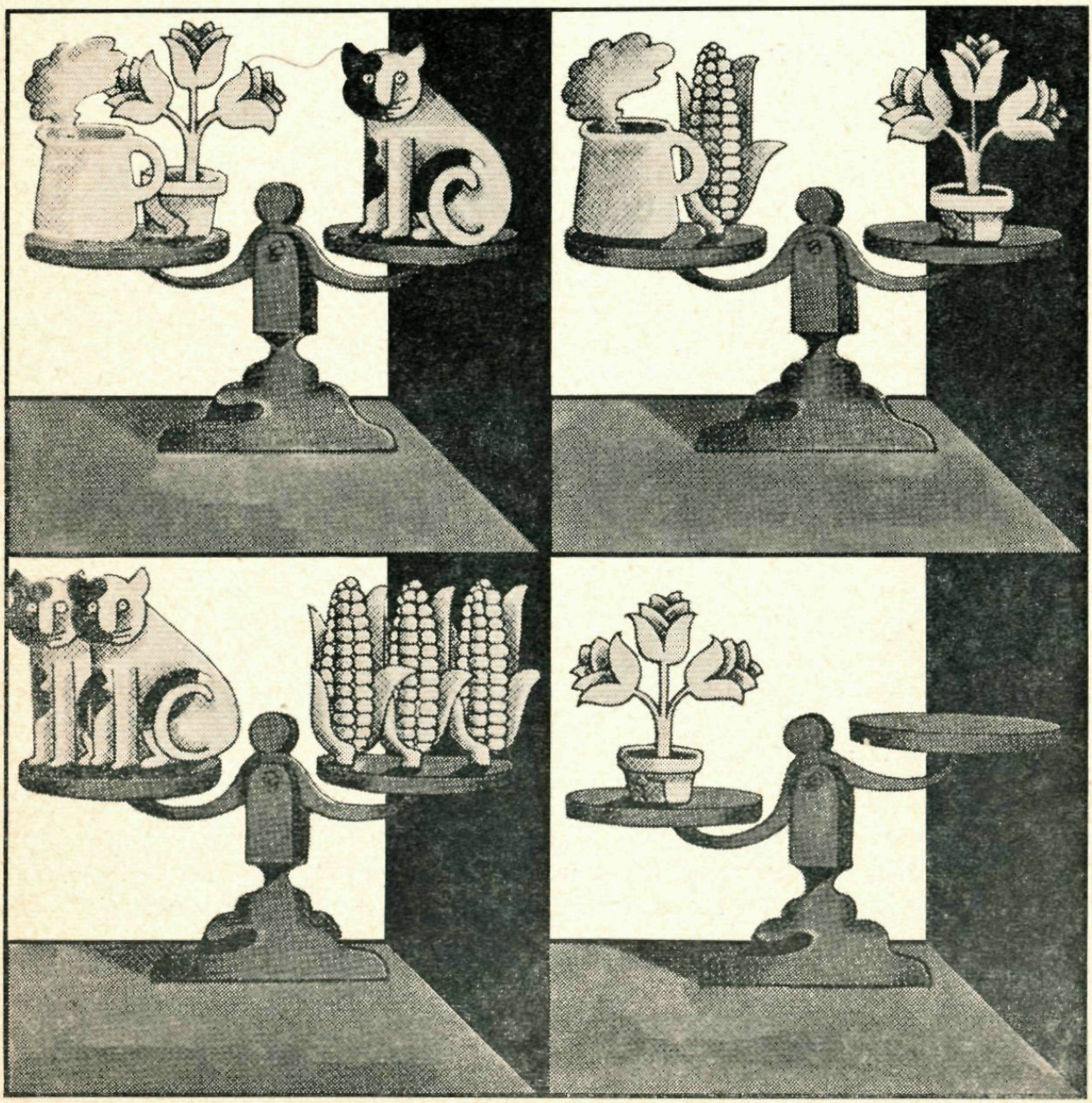
Bewijs nu de juistheid van de volgende bewering:

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leqslant \frac{1}{x_1 y_1 - z^2{}_1} + \frac{1}{x_2 y_2 - z^2{}_2}$$

Aan welke nodige en voldoende voorwaarden moeten x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 voldoen opdat het gelijkteken geldt?

Katten, kroezen, bloempotten en maiskolven

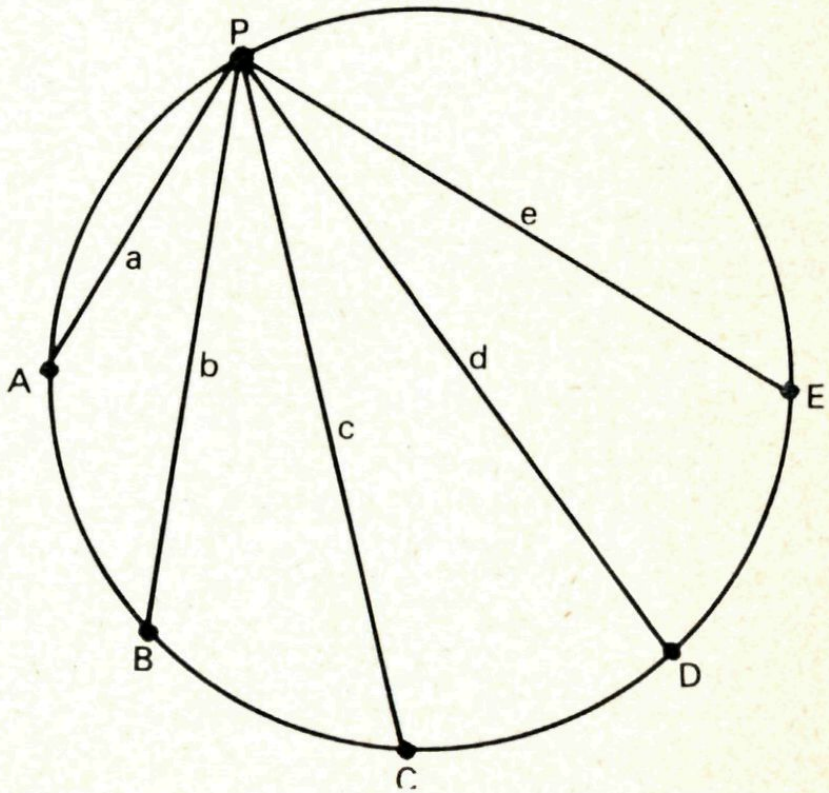
Hoeveel kroezen moeten we op de rechterschaal van de laatste weegschaal zetten om aan beide kanten hetzelfde gewicht te krijgen?
Oplossing op blz. 48.



Katten, kroezen, bloempotten en maiskolven, oplossing;
Op de schaal moeten 5 kroezen worden gezet.

---

18. In figuur 2 zijn de cirkel en de daarop gelegen punten A, B, C, D, E gegeven; A en E liggen diametraal tegenover elkaar en B, C, D verdelen de onderste halve cirkel in vier gelijke bogen. Het punt P is variabel op de bovenste halve cirkel AE; de afstanden van P tot A, B, C, D, E worden opvolgend a, b, c, d, e genoemd.



Bij welke plaats van P behoort een maximale waarde van het produkt $abcde$?

19. Verdeel een gegeven vierkant op twee verschillende manieren in vier congruente stukken door binnen dat vierkant cirkelbogen te trekken, waarvan de totale lengte gelijk is aan de omtrek van de ingeschreven cirkel van het vierkant.

20. Met $[x]$ wordt bedoeld het grootste gehele getal, dat niet groter dan x is.
Als voorbeeld van het gebruik van dit symbool geven we het volgende: voor elk geheel en positief getal n stelt $1 + [\log n]$ voor het aantal cijfers, waarmee n geschreven wordt.
Maak nu zelf twee uitdrukkingen, die opvolgend voorstellen het laatste cijfer van n (het eenhedencijfer) en het eerste cijfer van n.

asymptoot Uit het Grieks. Letterlijk: *niet ontmoetend.* Lijn ten opzichte waarvan een kromme de eigenschap heeft dat de afstand van een veranderlijk punt op die kromme tot de lijn tot nul nadert. De lijn hoeft niet recht te zijn.

analyse Uit het Grieks, *analysis = het oplossen.* Het woord wordt gebruikt voor dat deel van de wiskunde waarin limietprocessen een voorname rol spelen, bijvoorbeeld de differentiaal- en integraalrekening.

hyperbool Uit het Grieks, *hyperballein = overschieten.* Kromme die kan ontstaan als snijfiguur van een vlak met een kegel.

invertor Uit het Latijn, *invertere = omkeren.*

paradox Uit het Grieks, *para = er bij langs, doxa = verwachting.*

Oplossingen van Denkertjes uit dit nummer voor 15 december 1969 inzenden naar het redactie secretariaat.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.
BRUNO ERNST, Scherpenzeel (Gld.).
C. VAN DER LINDEN, Barendrecht.
A. F. VAN TOOREN, Den Haag.
R. H. PLUGGE, Amstelveen.
G. A. VONK, Den Haag.

REDACTIESECRETARIAAT:

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Eelde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, *f* 2,60 per jaargang. Voor anderen *f* 4,16.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff N.V., Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 807707 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.