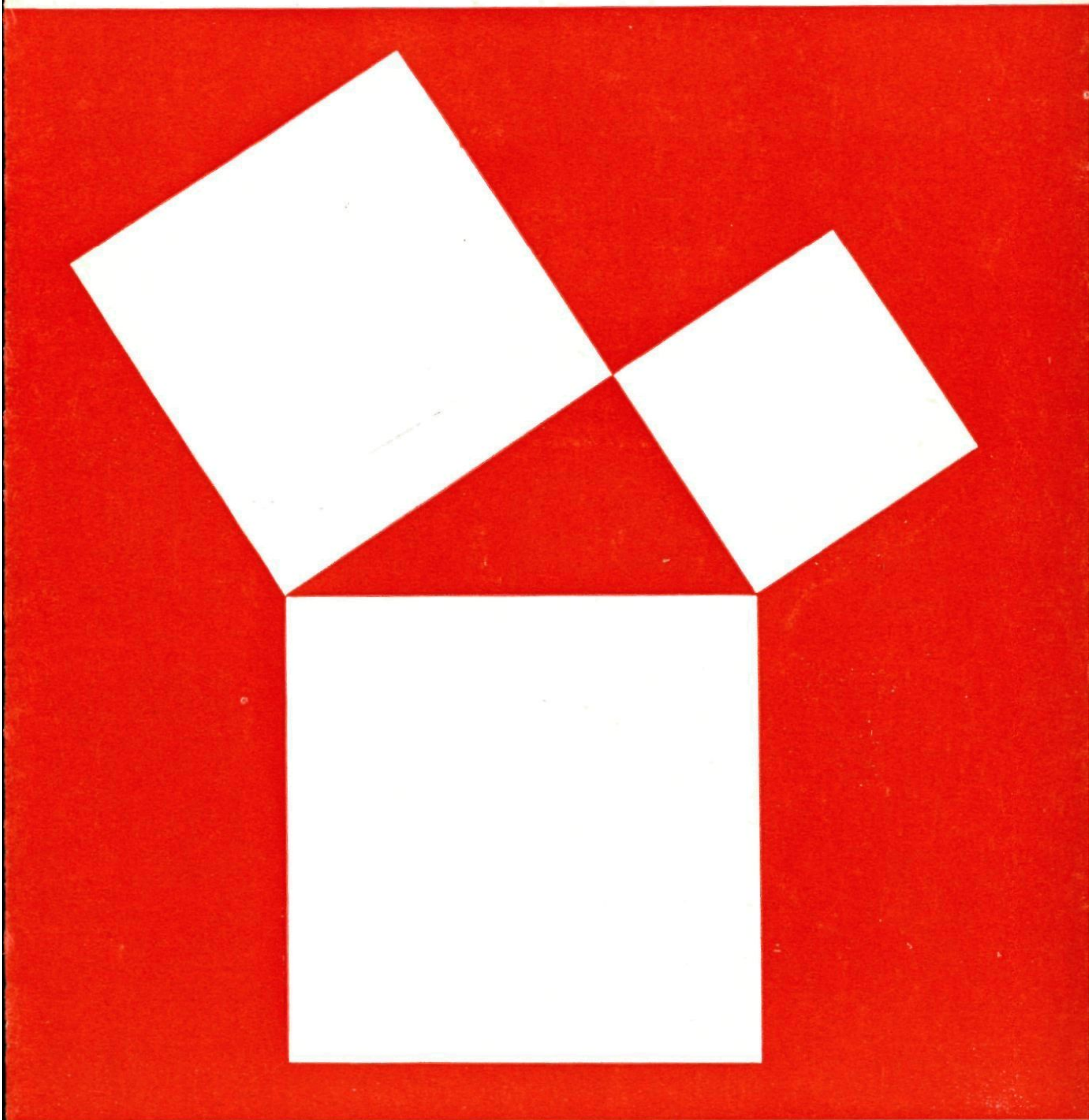
PYTHAGORAS

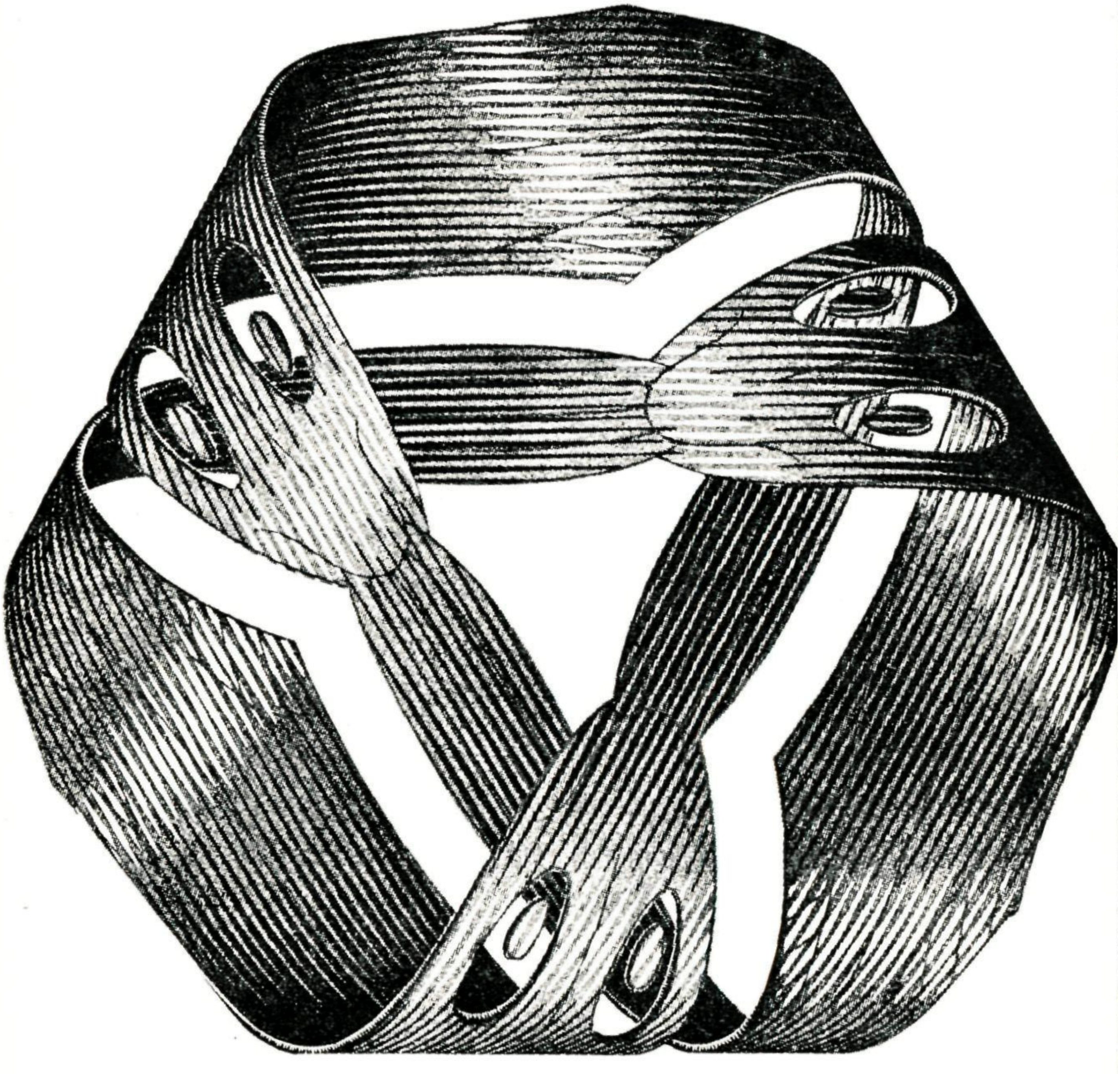


Wiskundetijdschrift voor jongeren

4

negende jaargang

1969/1970



Band van Möbius, houtgravure van M. C. Escher. Zie ook het artikel op bladzijde 80.

pythagoras

jaargang 9 *no 4*

°Problemen uit zustertijdschriften

In een aantal landen verschijnen soortgelijke tijdschriften als *Pythagoras* in Nederland. Uit een drietal hiervan laten we een daarin opgenomen probleem volgen, waarmee we niet willen zeggen dat het weergegevene karakteristiek voor dat tijdschrift zou zijn.

The Mathematics Student Journal

1. *The Mathematics Student Journal* verschijnt vijfmaal per jaar in de Verenigde Staten. In het nummer van november 1969 komt in de rubriek „Fun with mathematics" het volgende probleem voor:

Drie mannen waren eens op reis van Grand Rapids naar Duluth. Het werd laat; ze stopten dus voor de nacht bij een hotel in Hibbing. De kamer kostte hen ieder 10 dollar. Later op de avond kwam de hotelier terug van een reis. Hij keek in het gastenboek en herkende één van de namen als die van één van zijn beste vrienden. Hij gaf daarom de piccolo opdracht 5 dollar aan de mannen terug te geven. Op weg naar de kamer bedacht de piccolo dat drie mannen 5 dollar niet gelijkelijk kunnen verdelen; hij stak dus 2 dollar in eigen zak en gaf de mannen 3 dollar. Dit bracht de kosten voor de kamer terug tot 9 dollar per persoon. En de piccolo had 2 dollar. Maar $9 + 9 + 9 + 2 = 29$. Wat gebeurde er met de „missing dollar"?
(Oplossing: niets. De bewering dat de kamer 9 dollar per persoon kost lijkt waar, maar dat is het niet. De kosten bedragen, na teruggave van de 3 dollar, in totaal 28 dollar en $28 + 2 = 30$)

Uit hetzelfde nummer: Als $^1/_8$ van 20 gelijk is aan 3, hoeveel is dan $^1/_6$ van 10?

R 20078 F

Archimedes

Anregungen und Aufgaben für Lehrer, Schüler und Freunde der Mathematik

2. *Archimedes*, Anregungen und Aufgaben für Lehrer, Schüler und Freunde der Mathematik, verschijnt al voor het 21e jaar in West-Duitsland. In het nummer van september 1968 van dit (overigens erg moeilijke) tijdschrift komt de volgende deling voor:

```
LHLHC : LMA = LIE*
LMA
---
 EMH
 ELJ
 ---
  SRC
  SAC
  ---
   LD
```

*LIE was een belangrijk meetkundige uit de vorige eeuw.
LMA = Leer met Archimedes.

De tien letters nemen de plaatsen in van de tien cijfers.
Wat betekent nu: 1334 6789253034 ! ?

3. *Alpha* verschijnt voor het derde jaar in Oost-Duitsland. In het vierde nummer van 1968 komt de volgende opgave van Professor Frieder Kuhner voor:
Van plaats *A* naar plaats *B* moet 10.000 kg van een bepaald produkt met vliegtuigen van type *F* en type *H* worden overgebracht. Een vliegtuig van type *F* kan 1.000 kg van het produkt vervoeren en heeft daarvoor 3 bemanningsleden en 100 eenheden brandstof nodig, terwijl een vliegtuig van type *H* 500 kg kan vervoeren, waarbij 2 bemanningsleden en 30 eenheden brandstof nodig zijn. In totaal zijn niet meer dan 900 eenheden brandstof en 35 bemanningsleden beschikbaar. De kosten per vlucht bedragen voor een vliegtuig van type *F* 800 mark, voor een vliegtuig van type *H* slechts 500 mark.

Welk aantal moet van beide typen vliegtuigen worden ingezet, opdat de totale kosten minimaal zijn?

Een bespreking van de problemen vind je op bladzijde 91.

In dit nummer . . .

lees je nu dat de lootprijs voor Denkertjes uit het eerste nummer van deze jaargang is gewonnen door J. de Geus, Abbenbroek, voor die uit het tweede nummer door T. van den Berg, Beneden Leeuwen.

De stand van de ladder na de eerste twee ronden is:

A. Hoekstra, Naarden (197), M. M. Tilanus, Hilversum (191), C. Jacobs, Amsterdam (191), R. Brand, Den Haag (186), R. Oudhof, Amsterdam (182), H. Cornelis, Schijndel (181), J. Sijbrand, Zaandam (180).

Oplossingen van de Denkertjes voor 15 maart 1970 inzenden naar het redactie secretariaat.

Denkertjes

31. Bereken het getal
$$(200^2 + 199^2 + 198^2 + \ldots + 101^2) -$$
$$(100^2 + 99^2 + 98^2 + \ldots + 1^2)$$
32. Van een lange plank (20 cm breed, 3 cm dik) wil iemand drie stukken zagen. Hij is van plan die te gebruiken als zijwanden van een 20 cm hoge bak, waarvan het grondvlak een zo groot mogelijke gelijkzijdige driehoek moet worden. Hij slaagt er in de zijden van die driehoek (buitenwerks) elk 1 m lang te maken. Hoe lang was de plank?
33. Hoe groot is de som van alle getallen van drie cijfers, waarvan elk cijfer òf een 1 òf een 3 is?
34. Om een driehoekige vijver staat een hek, dat overal 10 meter van de rand van de vijver verwijderd is. De door dat hek omsloten grond heeft een oppervlakte van 1314 m^2. Hoe lang is de omheining?

Verbetering: Tot onze spijt is in figuur 13 van nummer 2 van deze jaargang, in nummer 3 herhaald als figuur 15, een fout geslopen. De ingangen moeten van boven naar beneden met de letters p, q, r; p, q; p, r *en* q, r *worden aangegeven.*

Moderne Wiskunde

Op 1 augustus 1968 is in Nederland de Wet op het voortgezet Onderwijs, beter bekend als de Mammoetwet, in werking getreden.
Het is genoegzaam bekend dat de komst en de uitvoering van deze wet niet overal met gejuich gepaard gaan.
In kritische beschouwingen die de laatste maanden veelvuldig in allerlei bladen te lezen zijn geweest komt regelmatig de wiskunde naar voren als één van de vakken die een bijdrage leveren aan de moeilijkheden.

Inderdaad is het wiskunde-onderwijs nogal ingrijpend gewijzigd bij de invoering van de Mammoetwet en blijkbaar wordt dit niet door iedereen als een vooruitgang beschouwd. Althans niet door de bezorgde moeder die een ingezonden stuk plaatste in het augustusnummer van het maandblad Resonans, waarin onder meer voorkomt:

We werden heden zeer verblijd
met een boek vol zwarigheid
'k voelde prompt: 'k Ben uit de tijd
Kroost van mij, dat wordt een strijd

. . .

Element, Venndiagram
Variabele Rimram,
De mammoet dat geweldig dier
wordt fluks geveld, met veel plezier.

. . .

Onderzoekt men hier misschien
Of hij 't lekker *niet* kan zien?
Is dit misschien alleen voor knappen,
die al die tekens zo maar snappen?

. . .

Als poging in te laten zien
dat je met elf of twaalf jaar
maar een Hannes bent of Trien
dan is de zaak volkomen klaar
U bent geslaagd, Proficiat
Het was een koud, een ijskoud bad.

De toon van het gedicht is zodanig dat het ons niet waarschijnlijk lijkt dat deze moeder een fervent lezeres van Pythagoras is. Toch willen we proberen een paar misverstanden op te helderen, al was het alleen maar omdat de inzendster wel niet de enige zal zijn die wat moeite heeft met de ontwikkelingen. Ook is het zo dat het gros van de lezers zijn carrière op een school voor voortgezet onderwijs zal zijn begonnen voor het in werking treden van de mammoetwet. De kans is dus groot dat familieleden of buren wel worden ingewijd in de geheimen der „moderne wiskunde”, terwijl dit voor jezelf niet is weggelegd. Een reden te meer om er in Pythagoras eens aandacht aan te besteden.

Allereerst dit: *De mammoetwet en de moderne wiskunde hebben eigenlijk niets met elkaar te maken.*

De modernisering van het wiskundeonderwijs is een internationaal verschijnsel. In de Verenigde Staten is deze ontwikkeling op gang gekomen na de lancering van de eerste Russische kunstsatelliet in 1957. De toen aan het licht tredende achterstand van de V.S. veroorzaakte

een soort schrikreactie, die een drastische herziening van het onderwijs ten gevolge had. Men noemt dit wel het „Spoetnikeffect”.
In Europa heeft vooral een conferentie in 1959 van de O.E.E.S (Organisatie voor Europese Economische Samenwerking) een stimulans gegeven aan de modernisering.

Onder meer door de steeds groter wordende achterstand van de schoolwiskunde op de wetenschappelijke ontwikkeling van de exacte vakken kunnen we zeggen dat verandering inderdaad echt nodig was. De invoering van de mammoetwet bood in Nederland een goede gelegenhiervoor, maar de verandering zou zonder mammoetwet evenzeer zijn gekomen.

Wat houdt nu de „moderne wiskunde” in?
Het voorafgaande zou de indruk kunnen wekken dat het aanpassen aan de vooruitgang van de wetenschap inhoudt dat het allemaal verschrikkelijk moeilijk geworden is. Zou dit zo zijn dan zou het een averechts effect zijn. Eén van de overwegingen bij de invoering van het nieuwe programma is namelijk geweest dat de wiskunde nu eens af moet van het stempel dat het een moeilijk vak is. Niet alleen voor het „image”, maar ook omdat in de toekomst steeds meer mensen nodig zullen zijn met een goede wiskundige ondergrond. We hopen in het volgende ook een beetje te laten zien dat het allemaal wat meevalt, dat het niet alleen is „voor de knappen, die al die tekens zo maar snappen”.

De schoolwiskunde bestond voor de lagere klassen altijd uit „algebra” en „meetkunde”. Twee vakken die wel wat verband met elkaar hielden, maar die toch een eigen bestaan leidden. De inhoud van beide vakken was honderden, zo geen duizenden jaren oud. Speciaal de vlakke meetkunde was eigenlijk rechtstreeks afkomstig van Euclides, die ongeveer 300 v. C. leefde. De ontwikkeling van de verzamelingenleer, op gang gebracht door de Duitse wiskundige Georg Cantor, ongeveer honderd jaar geleden, is echter zo belangrijk dat opname in de schoolwiskunde niet uit kon blijven.

Het begrip verzameling is zo elementair dat iedereen het kent en er dagelijks mee omgaat. Bijvoorbeeld een lijn is een verzameling van punten en een elftal een verzameling voetballers (of handballers).

Dingen die tot een verzameling behoren heten elementen van die verzameling. Een verzameling wordt schematisch wel weergegeven in een figuur die Venn-diagram wordt genoemd. Bij voorbeeld: P is de verzameling getallen 1, 3, 5, 7 en 9. (notatie: P = {1, 3, 5, 7, 9})

Venn-diagram: *P*

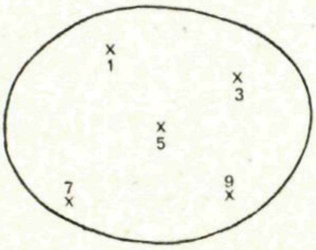


fig. 1

Gewoon een gesloten kromme lijn, met daarin op willekeurige plaatsen de vijf getallen weergegeven in de vorm van een kruisje.
Verzamelingen vormen zo ongeveer het cement waarmee allerlei onderdelen van de wiskunde aan elkaar worden gemetseld.
Hierbij kan men vaak gebruik maken van voorbeelden uit het dagelijks leven: Neem $P = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ en $Q = \{$Anno, Enno, Ibo, Otto, Ubbo$\}$ (de vijf zonen van de heer en mevrouw Halenga). Tussen Q en P bestaat de *relatie*: . . . *heeft als leeftijd in jaren* . . .
Op de eerste open plaats kan een element van Q worden ingevuld, op de tweede een element van P. Dus Anno heeft als leeftijd in jaren 1 (of 3, 5, 7 of 9). We tekenen dit zo

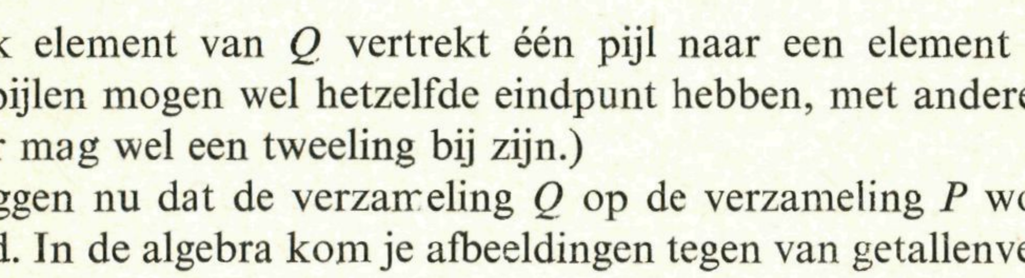


fig. 2

Uit elk element van Q vertrekt één pijl naar een element van P. (twee pijlen mogen wel hetzelfde eindpunt hebben, met andere woorden: er mag wel een tweeling bij zijn.)
We zeggen nu dat de verzameling Q op de verzameling P wordt afgebeeld. In de algebra kom je afbeeldingen tegen van getallenverzamelingen op elkaar, we noemen het dan functies.
In de meetkunde kun je werken met afbeeldingen van puntverzamelingen op elkaar, zoals bij spiegelen, draaien en verschuiven het geval is.
In vrijwel alle oudere meetkundeboekjes komt een definitie voor zoals: *Twee figuren zijn congruent als ze na verplaatsing kunnen samenvallen.*

Met verplaatsing werd dan bedoeld: spiegeling, verschuiving of draaiing, of een combinatie hiervan. Deze *transformaties* werden op zichzelf niet bekeken, in tegendeel er werden snel een vier- of vijftal congruentiekenmerken voor driehoeken opgespoord, waaraan de zaak verder werd opgehangen. In de meeste moderne boeken wordt de meetkunde niet meer opgebouwd via de congruentiegevallen, maar via de transformaties.

Het na elkaar uitvoeren van spiegelingen, draaiingen en verschuivingen kun je een *bewerking* noemen binnen de verzameling van transformaties. Het blijkt dan dat deze bewerking aan de bekende eigenschappen voldoet, waaraan ook bewerkingen in getallenverzamelingen voldoen.

In de verzameling Z van de gehele getallen geldt bijvoorbeeld voor de optelling:

1. Bij elk tweetal elementen a en b bestaat een element c, zodat $a + b = c$.
2. Voor elk tweetal elementen a en b geldt $a + b = b + a$.
3. Voor elk drietal elementen a, b en c geldt $a + (b + c) = (a + b) + c$.
4. Er bestaat een neutraal element, 0, zodat voor elke a geldt $a + 0 = 0 + a = a$.
5. Bij elk element a bestaat een element a', zodat $a + a' = a' + a = 0$ (We schrijven $a' = -a$.)

Op grond van deze eigenschappen heet de verzameling van gehele getallen een *groep* ten aanzien van de optelling (zelfs een *commutatieve* groep).

Ook het samenstellen van transformaties in de meetkunde leidt tot dit begrip groep. Een voorbeeld hiervan hebben we gegeven in het laatste nummer van de vorige jaargang van Pythagoras, terwijl ook het vijfde nummer van de zesde jaargang hieraan was gewijd.

Behalve het begrip verzameling, dat de mogelijkheid geeft meer eenheid in de presentatie van de verschillende onderdelen van de wiskunde te brengen, staan er andere nieuwe onderwerpen op het programma, zoals statistiek, waarschijnlijkheidsrekening en vectoren, terwijl de opname van computerkunde nog wordt overwogen.

Aan al deze onderwerpen is in de loop der jaren meer dan eens aandacht besteed in Pythagoras.

De trouwe lezer van ons blad mag zich dan ook met een gerust hart „modern" noemen.

°Banden van Möbius

Ter gelegenheid van het 25 jarig bestaan van de Benelux is een herdenkingspostzegel uitgegeven (figuur 3) waarop de vlaggen van de drie betrokken landen als een aaneengesloten band zijn weergegeven. De vorm van de band vertoont bijzonderheden, waarop we in het volgende willen ingaan.

fig. 3

Door een strook papier te nemen van b.v. 25 cm lang en 2,5 cm breed kun je zelf een band van de vorm op de postzegel maken, zoals in figuur 4 is weergegeven. Het is goed voordat de strook in de gewenste vorm wordt gevouwen de beide kanten verschillend te kleuren of één kant te arceren.

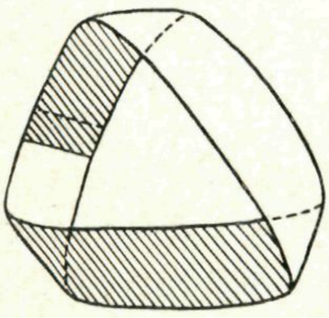


fig. 4

Je ziet dan bij het aan elkaar lijmen van de uiteinden dat er een draaiing in de strook heeft plaatsgevonden.

Aan de oorspronkelijke strook zijn duidelijk twee kanten te onderscheiden, hetgeen al bleek doordat je ze verschillend kunt kleuren. Ook heeft de strook twee *randen* in de lengterichting. Dit blijft het geval wanneer je de uiteinden aan elkaar plakt, zoals in figuur 5 getekend is.

Anders wordt het wanneer je voor het vast plakken een halve slag in de band legt, zoals in figuur 6 getekend is.

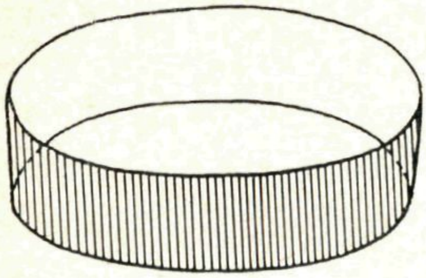


fig. 5

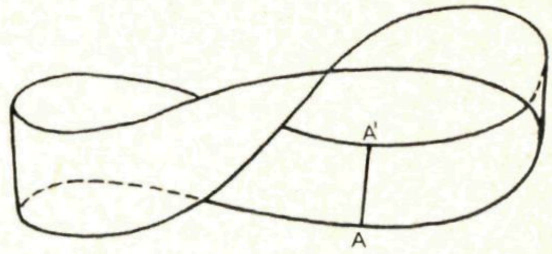


fig. 6

Als je nu met je vinger de rand volgt beginnend in het punt A, dan blijkt dat je ook het punt A' passeert, terwijl je daarna terugkomt in A. Verder heeft de band slechts één zijde, wat blijkt als je een streep trekt in het midden van de breedte in de lengterichting. Ook nu kom je na verloop van tijd terug op het beginpunt, waarbij je elk punt op het midden van de breedte bent gepasseerd. (figuur 7)

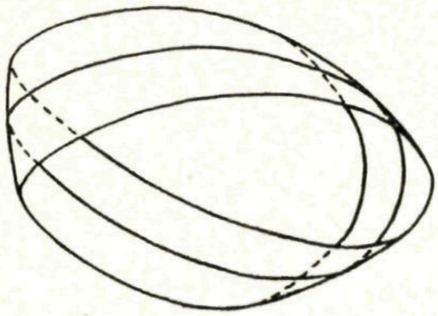


fig. 7

Als je de band nu langs de getekende streep doorknipt, zal het resultaat je verrassen.

De band van figuur 6 is genoemd naar de Duitse wis- en sterrekundige August Ferdinand Möbius (1790–1868) en speelt een rol in de *topologie*, een onderdeel van de wiskunde, waarin wordt onderzocht welke eigenschappen van b.v. oppervlakten *invariant* (onveranderlijk) zijn, wanneer die oppervlakten op allerlei manieren worden vervormd (zonder te scheuren).
Het begrip *omgeving* is hierbij van fundamenteel belang.
Immers, hoe men rekt of buigt, punten die bij elkaar „in de buurt" liggen, blijven dat ook bij vervorming.

Zijn de banden van figuur 4 en figuur 6 gelijk?

Je kunt gemakkelijk zien dat dit niet het geval is; om de band van figuur 4 te krijgen moeten de uiteinden van de strook niet één, maar drie halve slagen ten opzichte van elkaar worden gedraaid. Bij het

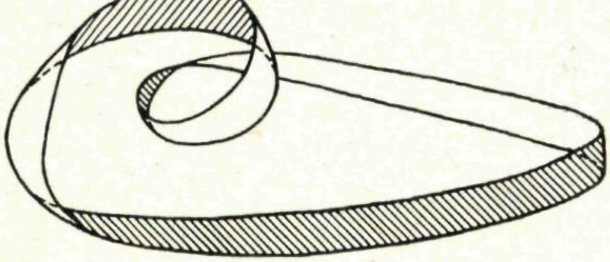


fig. 8

doorknippen van de band van figuur 7 langs de getrokken streep, heb je een band gekregen met twee halve slagen er in (figuur 8).

De bijzondere vorm van de band op de postzegel heeft de graficus M. C. Escher geïnspireerd tot de figuur op de binnenzijde van het omslag Hierin is een oeroud symbool voor de eeuwigheid verwerkt, namelijk een slang die zichzelf in de staart bijt.
Door de band op een bijzondere manier door te knippen zijn drie slangenfiguren ontstaan, die niet in hun eigen, maar in elkanders staart bijten.

54
297
378
486
108
16038

35. Bepaal alle oplossingen in gehele positieve getallen x, y, z van $x^2 + y^2 + z^2 = 1001$, $x < y < z$.

36. Welke driehoeken hebben de volgende eigenschap:
het is niet mogelijk die driehoek zodanig in twee kleinere driehoeken te verdelen (door een verbindingslijnstuk te trekken van een hoekpunt naar diens overstaande zijde), dat de omgeschreven cirkel van één van die deeldriehoeken even groot is als die van de gehele driehoek.

37. Vul in $54 \times 2.7 = \ldots.8$ op elke stip een cijfer in zo, dat tenslotte een ware bewering ontstaat waarin elk van de tien cijfers 0 t/m 9 voorkomt.

°°°Liniaalconstructies

Construeren is meetkunde bedrijven met passer en liniaal (en natuurlijk met potlood en papier!). Andere instrumenten, zoals een gradenboog of de rechte hoek van een tekendriehoek, mogen daarbij niet gebruikt worden omdat, een beetje slordig gezegd, niet de nauwkeurigheid van de figuur maar de fantasie en de vindingrijkheid van de constructeur op de voorgrond moeten staan. Door *Poncelet* en *Steiner* is omstreeks 1850 aangetoond, dat elke met passer en liniaal uitvoerbare constructie alleen met de liniaal is te doen, mits ergens in het vlak van tekening één cirkel mét zijn middelpunt is gegeven. Van deze bijna zuivere „*Liniaalmeetkunde*" een paar voorbeelden.
Uitgangspunt van de voorbeelden is een cirkel, die in ligging en grootte op het tekenpapier is gegeven en die we de *Fundamentaalcirkel* (afgekort tot F.C.) zullen noemen; m is steeds een willekeurige rechte lijn door het middelpunt M van F.C.
(Om de figuren niet te overladen met lijnen zijn bij gebruik van een vorige constructie de te gebruiken hulplijnen niet aangegeven.
Door bij de hulplijnen een nummer te zetten, kun je de constructie volgorde gemakkelijk volgen).

I. Constructie van de loodlijn l op m door een gegeven punt P.

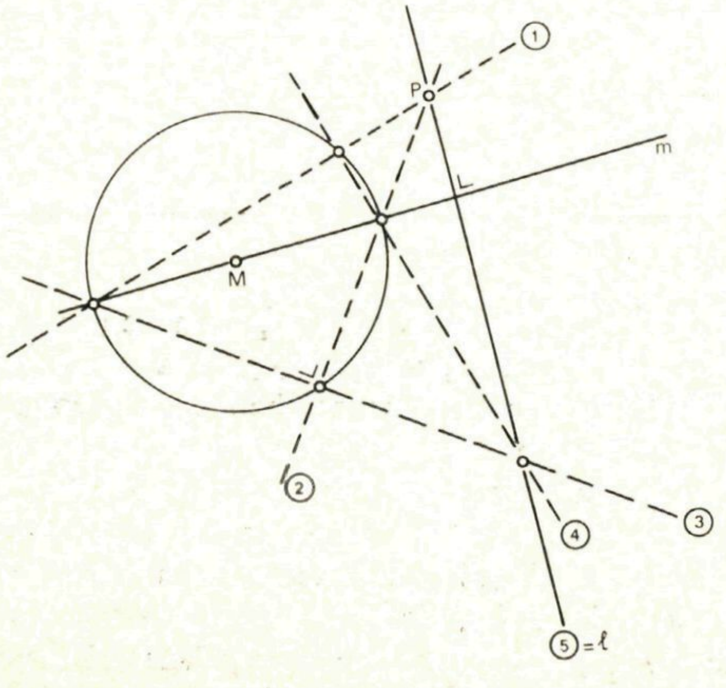


fig. 8

Je kunt zelf deze loodlijn construeren als P binnen F.C. ligt.

II. Constructie van de loodlijn l door M op m. Zie figuur 10.
Toelichting bij II: construeer eerst de loodlijn l' door een willekeurig punt W binnen F.C. volgens I.

III. Constructie van een lijn door M evenwijdig aan een gegeven lijn l. Zie figuur 11.
Toelichting op III: neem op l twee punten A en B.
$\angle AMB \neq 90°$, construeer volgens I de loodlijnen uit A en B resp. op MB en MA, trek de lijn door M en het snijpunt H van deze twee loodlijnen, richt in M volgens II de loodlijn m op, dit is de gezochte lijn.

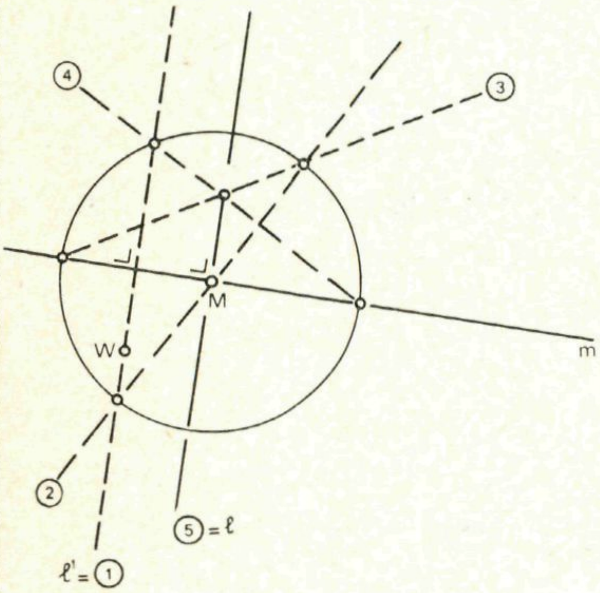


fig. 10

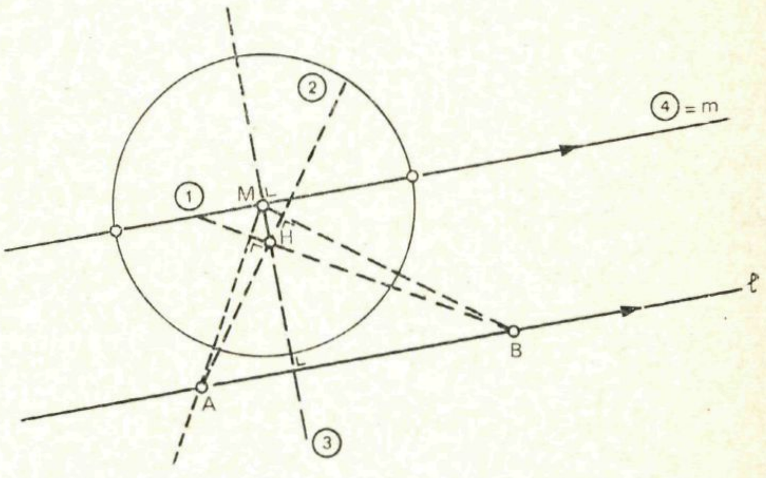


fig. 11

IV. Een gegeven lijnstuk AB verdubbelen. Figuur 12.

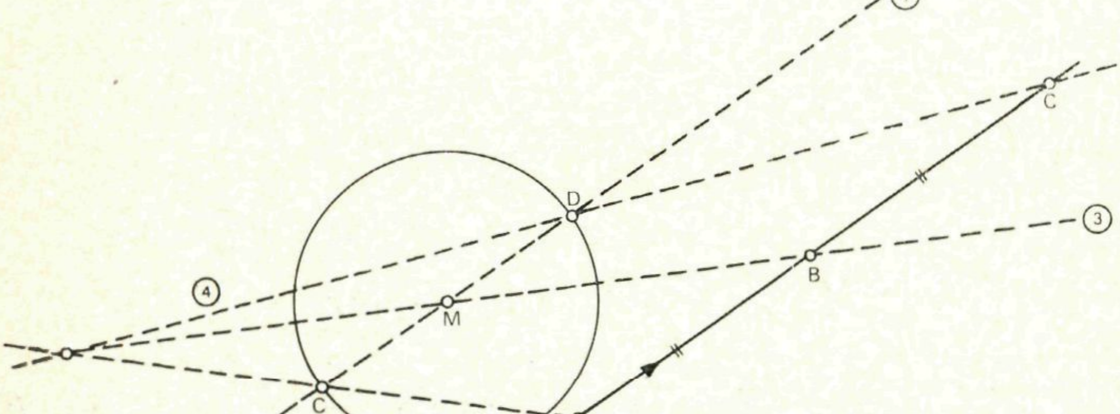


fig. 12

Toelichting op IV: construeer volgens III de middellijn $CD // AB$.

V. Constructie van het spiegelbeeld P' van een gegeven punt P t.o.v. een gegeven spiegelas s.

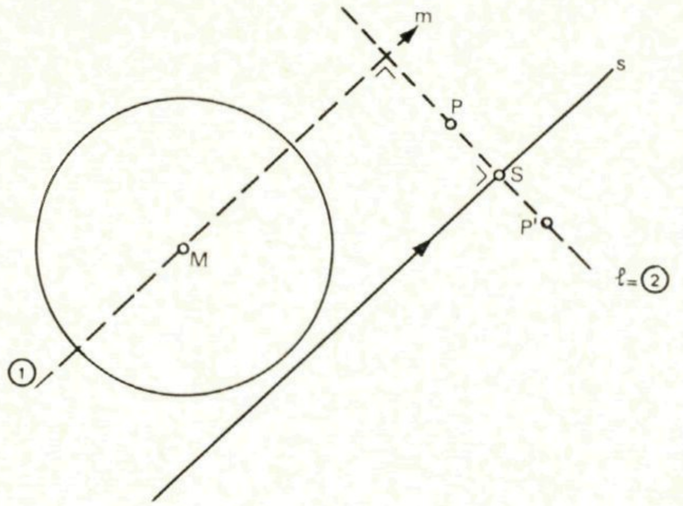


fig. 13

Toelichting op V: construeer volgens III de lijn m door $M//s$, daarna de loodlijn l op m die door P gaat, het snijpunt van l en m is S, verdubbel het lijnstuk PS volgens IV.

VI. Constructie van het spiegelbeeld AB van een gegeven lijnstuk AB t.o.v. een gegeven spiegelas s.

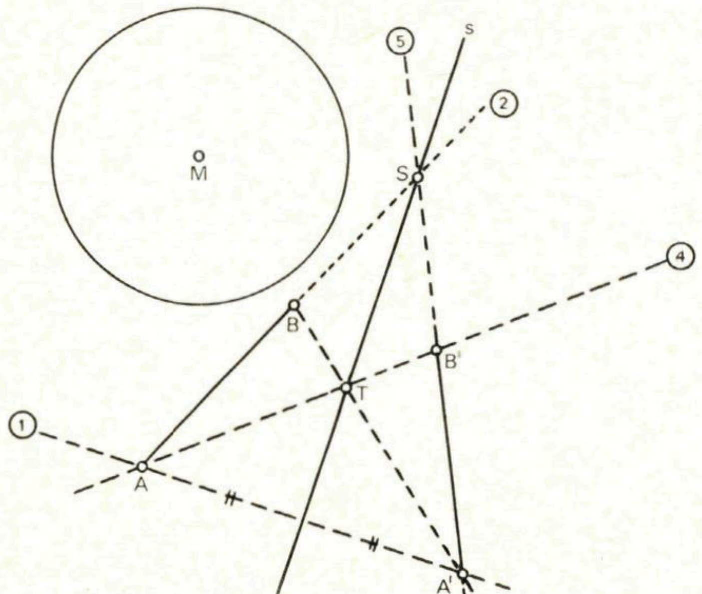


fig. 14

Toelichting op VI: construeer A' volgens V, bepaal het snijpunt van de lijn door A en B en s, bepaal het snijpunt T van de lijn door B en A' en s, B' is het snijpunt van de lijnen AT en $A'S$.
Construeer met behulp van de zes bovenstaande *Steiner*-constructies eens de bissectrice van een gegeven hoek.

°Legproblemen

Het is tegenwoordig „in" de kamervloer te beleggen met tegels die kant en klaar gekocht kunnen worden. Wie zich wel eens gevoegd heeft bij het gilde van de Doe-het-zelvers weet echter dat lukraak neerleggen onbevredigende resultaten kan geven. Zelfs bij de gewone vierkanten – steeds weer aangeprezen op het T.V. scherm – is het raadzaam zich eerst van de juiste legwijze op de hoogte te stellen. De plaats van beginnen op de vloer is namelijk zeer belangrijk.
Hout geeft meer mogelijkheden dan textiel wat de vorm betreft. In een parketvloer kunnen daardoor meer figuren worden gemaakt. Zeer bekend is het visgraatpatroon gelegd met rechthoeken. Zie figuur 15.
In figuur 16 zijn de rechthoeken eenvoudig aaneengepast op dezelfde manier als de bakstenen in het metselwerk van een muur.

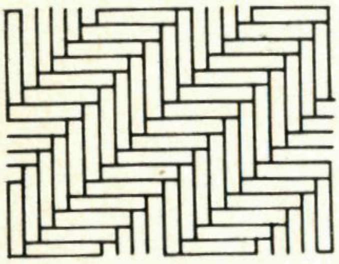


fig. 15

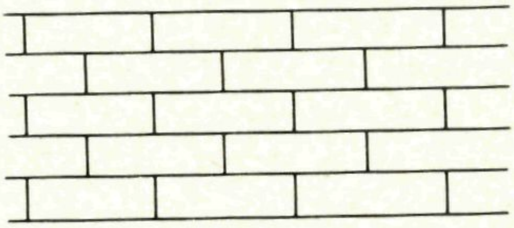


fig. 16

Behalve bekende meetkundige figuren kunnen we ook willekeurige stukken nemen, deze aaneenpassen en vervolgens bevestigen op het te bekleden vlak. Deze methode vindt bijvoorbeeld toepassing bij het maken van schoorstenen, die met natuursteen belegd heel wat huiskamers sieren.
Voor ons interessanter is een onderzoek naar de mogelijkheden van een vlakvulling door middel van regelmatige veelhoeken. Knappe bouwmeesters in dit opzicht zijn de bijen, die een honingraat constru-

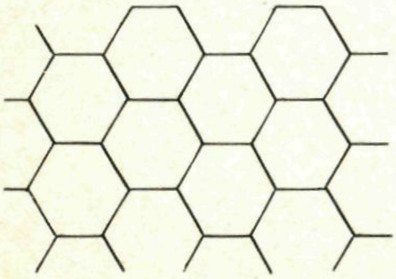


fig. 17

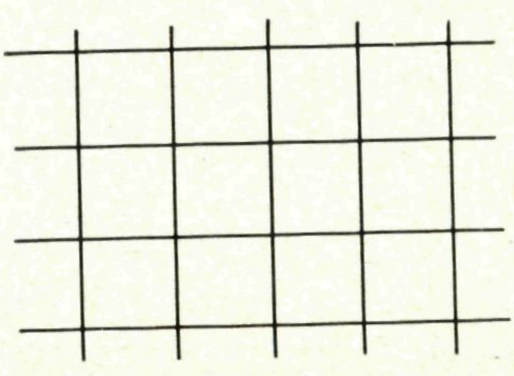


fig. 18

eren. Hun regelmatige zeshoeken zijn welbekend. Zie figuur 17. Daarnaast kunnen als eenvoudigste vlakvullingen de vierkanten en gelijkzijdige driehoeken genoemd worden. Zie de figuren 18 en 19.

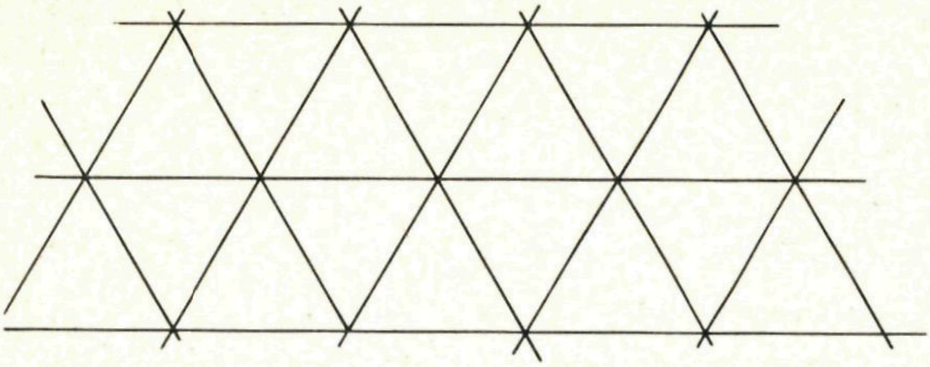


fig. 19

Alle tot nu toe gegeven voorbeelden komen in het dagelijks leven veelvuldig voor.
Er zijn ook legpatronen, die niet zo voor de hand liggen.
Wij stellen onszelf de opgave:
„Zoek een vlakvulling met regelmatige veelhoeken, zó dat in één hoekpunt drie van die veelhoeken samenkomen."
Zie figuur 20.

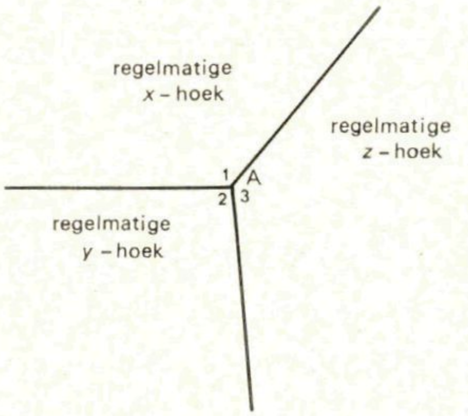


fig. 20

Onderstel dat in punt A samenkomen een regelmatige x-hoek, een regelmatige y-hoek en een regelmatige z-hoek.
Je kent waarschijnlijk wel uit de gewone schoolwiskunde de formule voor de hoek van een regelmatige n-hoek:

$$\frac{(n-2) \,.\, 180^\circ}{n}$$

Met deze formule vinden we : $\angle A_1 = \dfrac{(x-2) \,.\, 180^\circ}{x}$

$$\angle A_2 = \frac{(y-2) \,.\, 180^\circ}{y} \quad \text{en} \quad \angle A_3 = \frac{(z-2) \,.\, 180^\circ}{z}$$

De som van de hoeken is 360° en daarom:

$$\frac{(x-2)\,.\,180°}{x}+\frac{(y-2)\,.\,180°}{y}+\frac{(z-2)\,.\,180°}{z}=360°$$

of:

$$\frac{x-2}{x}+\frac{y-2}{y}+\frac{z-2}{z}=2$$

$$1-\frac{2}{x}+1-\frac{2}{y}+1-\frac{2}{z}=2$$

tenslotte:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$$

In deze onbepaalde vergelijking zijn x, y en z positief en geheel. Hier volgen onmiddellijk de waarden voor x, y en z, die voldoen aan

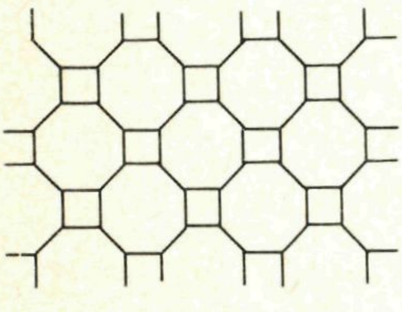


fig. 21

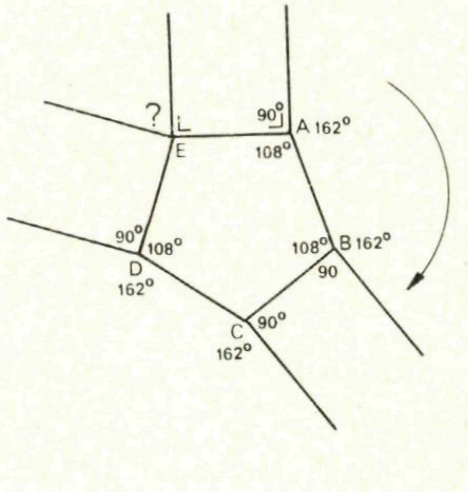


fig. 22

de vergelijking. Ze zijn geschreven in een moderne notatie, die van geordende drietallen.

$(x, y, z) = (6, 6, 6)$ $= (5, 5, 10)$
$= (4, 8, 8)$ $= (4, 6, 12)$
$= (4, 5, 20)$ $= (3, 12, 12)$
$= (3, 10, 15)$ $= (3, 9, 18)$
$= (3, 8, 24)$ $= (3, 7, 42)$

Het drietal (8, 4, 8) is ook een oplossing van de vergelijking, maar geeft straks als legpatroon hetzelfde als (4, 8, 8). We kunnen daarom met de bovenstaande drietallen volstaan.

Hoe wordt nu het beoogde patroon?

We onderzoeken allereerst (6, 6, 6). Er ontstaan uitsluitend regelmatige zeshoeken en in punt *A* zijn alle hoeken dus 120°. We vinden de honingraat van figuur 17 terug.
Het drietal (4, 8, 8) levert bij punt *A* hoeken van 90°, 135° en 135°. In *A* ontmoeten elkaar een vierkant en twee regelmatige achthoeken. Wie zijn vloer hiermee wil bedekken zal dagelijks tegen figuur 21 moeten aankijken.

Het derde drietal (4, 5, 20) veroorzaakt onoverkomelijke moeilijkheden. In punt *A* zullen een vierkant, een regelmatige vijfhoek en een regelmatige twintighoek het met elkaar moeten vinden. De hoekverdeling is 90°, 108° en 162°.
Let echter eens op figuur 22.
Allereerst is de regelmatige vijfhoek getekend en in de hoekpunten *A*, *B*, *C*, *D* en *E* moeten de veelhoeken elkaar begrenzen. Bij de eerste vier hoekpunten gaat het goed, maar bij *E* loopt het spaak. De gewenste vlakvulling is niet aan te brengen.
Bij gelijksoortig nader onderzoek blijken ook de drietallen (3, 10, 15), (3, 8, 24), (5, 5, 10), (3, 9, 18) en (3, 7, 42) verstek te laten gaan.
Een vloerbedekking wordt alleen nog verschaft door de drietallen (3, 12, 12) en (4, 6, 12).

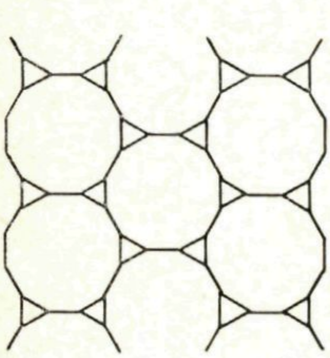


fig. 23

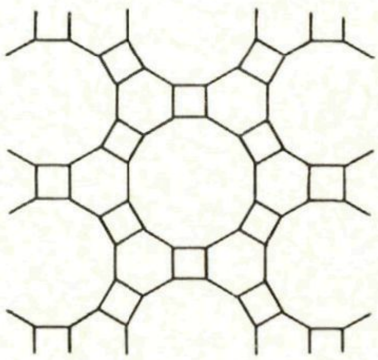


fig. 24

De figuren 23 en 24 laten de resultaten zien.

Denkertjes

38. Los het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 1 \end{aligned}$$

(0,0,1), enz.

39. Ik bezit twee stukken triplex. Het ene is vierkant en het andere heeft de vorm van een cirkelsector. De twee stukken hebben gelijke omtrek en gelijke oppervlakte. Bereken de middelpuntshoek van de sector.

40. Een jochie moet twee rijtjes van de vier gehele getallen opstellen. Elk van die getallen bestaat uit twee cijfers. De getallen van het tweede rijtje ontstaan uit die van het eerste rijtje door verwisseling van de cijfers. De som van het tweede blijkt het dubbele te zijn van die van het eerste rijtje. Hoe groot zijn die twee sommen?

99, 198.

Nogmaals de problemen uit zustertijdschriften

1. Het eerste geval uit de Mathematics Student Journal is een oeroud grapje, waarvan vele varianten bekend zijn. Het omstandige verhaal dient alleen maar om de zaak zo ingewikkeld mogelijk te maken. Het meest verbazingwekkend is echter de oplossing die er bij staat. Het lijkt ons dat de mannen uiteindelijk 27 dollar hebben betaald, waarvan 25 aan de hotelier en 2 aan de piccolo!

Het tweede probleempje :
Als $^1/_8$ van 20 gelijk aan 3 is, is $^1/_3$ van 20 gelijk aan 8, $^1/_3$ van 10 is dan 4 en $^1/_3$ van 10 is gelijk aan 2.
Maar, zul je opmerken, $^1/_8$ van 20 is geen 3.
Je bedoelt daarmee: in het tientallig stelsel is $^1/_8 \times 20 \neq 3$.
Stel dat we in een ander stelsel werken, het b-tallig waarin wel geldt $^1/_8 \times 20 = 3$.
In dit stelsel stelt de schrijfwijze 20 (spreek uit: twee-nul) voor $2 \times b$ (zoals in het tientallig stelsel $20 = 2 \times 10$). Dus $2 \times b$ heeft de waarde vierentwintig, of wel b heeft de waarde twaalf. In het twaalftallig

stelsel heb je twaalf cijfers nodig, laten we zeggen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *a* en *b*. Hoe tel je hier mee?

0	// 𝍸 = 7	//// 𝍸 𝍸 = 12
/ = 1	/// 𝍸 = 8	𝍸 𝍸 𝍸 = 13
// = 2	//// 𝍸 = 9	/ 𝍸 𝍸 𝍸 = 14
/// = 3	𝍸 𝍸 = a	// 𝍸 𝍸 𝍸 = 15
//// = 4	/ 𝍸 𝍸 = b	/// 𝍸 𝍸 𝍸 = 16
𝍸 = 5	// 𝍸 𝍸 = 10	//// 𝍸 𝍸 𝍸 = 17
/ 𝍸 = 6	/// 𝍸 𝍸 = 11	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 = 18

Je ziet dat in dit stelsel inderdaad geldt $2 \times 6 = 10$!

2. De deling uit Archimedes:

Je ziet aan de laatste aftrekking dat $C - C = D \rightarrow D = 0$.

De eerste vermenigvuldiging:
$$\begin{array}{r} LMA \\ L \\ \hline LMA \end{array} \quad \rightarrow L = 1$$

De eerste aftrekking
$$\begin{array}{l} HL \\ A\ - \\ \hline M \end{array}$$
daar $L = 1$ moet $A + M = 11$ zijn.

De tweede vermenigvuldiging:
$$\begin{array}{r} LMA \\ I\ \times \\ \hline ELI \end{array}$$

Voor A en I zijn nu de volgende combinaties mogelijk.

1. $I = 2$ en $A = 6 \rightarrow M = 5$
2. $I = 4$ ne $A = 6 \rightarrow M = 5$
3. $I = 5$ en $A = 3 \rightarrow M = 8$
4. $I = 5$ en $A = 7 \rightarrow M = 4$
5. $I = 5$ en $A = 9 \rightarrow M = 2$

Door proberen zie je gemakkelijk dat alleen de eerste mogelijkheid tot een oplossing leidt, je vindt dan $E = 3$, $H = 9$, $S = 4$, $R = 7$, $C = 8$

dus: 156 / 19198 / 123
$$\begin{array}{r} 156 \\ \hline 359 \\ 312 \\ \hline 478 \\ 468 \\ \hline 10 \end{array}$$

1334	6789253034!
LEES	ARCHIMEDES!

3. Het probleem uit Alpha.
Het geheel ziet er moeilijker uit dan het is.
Je zou het vervoer kunnen doen plaatsvinden met 10 vliegtuigen van het type *F*. Helaas, hiervoor is onvoldoende brandstof aanwezig. Voor 20 vliegtuigen van het type *H* is onvoldoende personeel aanwezig. Laten we eens terugtellen vanaf 10 vliegtuigen van het type *F*.
We kunnen dan de volgende tabel maken:

Aantal vliegtuigen	bemanning	brandstof	kosten
10 F	30	1000	niet mogelijk
9 F + 2 H	31	960	niet mogelijk
8 F + 4 H	32	920	niet mogelijk
7 F + 6 H	33	880	8600 mark
6 F + 8 H	34	840	8800 mark
5 F + 10 H	35	800	9000 mark
4 F + 12 H	36	niet mogelijk	

Er zijn dus maar drie mogelijkheden en daarvan brengt de oplossing met 7 vliegtuigen van het type *F* en 6 van het type *H* de laagste kosten met zich mee.

Oplossingen van Denkertjes uit het tweede nummer

11. Er staan ten minste 9 vragen op het bord. Met 8 vragen kun je $\frac{1}{2}.7.8 = 28$ paren vormen en dat is te weinig. Met 9 vragen kun je echter $\frac{1}{2}.8.9$ paren vormen en dat is ruimschoots genoeg.
12. Dit is mogelijk. Begin met een verdeling in vier driehoeken te maken. Kies dan een van die vier driehoeken uit en trek daarin de hoogtelijn op de schuine zijde; hij wordt daardoor verdeeld in twee rechthoekige driehoeken van de gewenste vorm zodat je nu het vierkant al in vijf dergelijke driehoeken verdeeld hebt. Kies een van die vijf driehoeken uit en trek daarin weer de hoogtelijn op de schuine zijde. En zo voorts en zo verder. Zie figuur a.

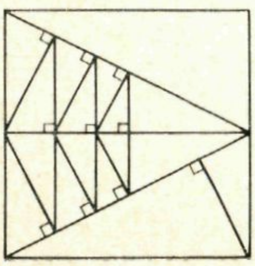


fig. a

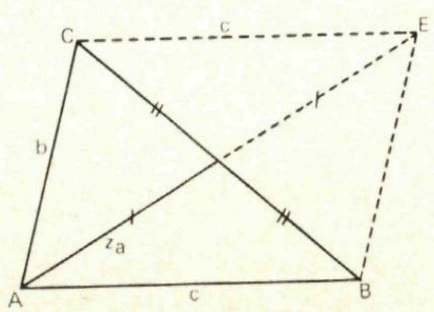


fig. b

13. Het kwadraat van het positieve getal $\sqrt{(3 - \sqrt{6})} + \sqrt{(3 + \sqrt{6})}$ is $3 - \sqrt{6} + 2\sqrt{(3 - \sqrt{6})}\sqrt{(3 + \sqrt{6})} + 3 + \sqrt{6} = 6 + 2\sqrt{3}$ en het kwadraat van $\sqrt{(6 + 2\sqrt{3})}$ is ook gelijk aan $6 + 2\sqrt{3}$. De twee getallen zijn dus gelijk.
Je hebt toch geen tijd besteed aan het fabriceren van decimale benaderingen?

14. Uit figuur b lees je af $AE = 2z_a < b + c = AC + CE$. Zo kun je ook bewijzen dat $2z_b < a + c$ en dat $2z_c < a + b$. Tel deze drie resultaten op.

15. In geen enkele oplossing is $a = 1$, want in dat geval is immers $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ groter dan 1. Als $a = 2$, dan is dat linkerlid ten hoogste gelijk aan $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60}$ en dat ziet er hoopvol uit. Als $a = 3$, dan is het linkerlid ten hoogste gelijk aan $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{57}{60}$ en dat is beslist te klein; voor $a > 3$ geldt dat in nog sterkere mate.
We concluderen dus tot $a = 2$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{2}$, $b \geqslant 3$. Als $b = 3$, dan is $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ ten hoogste gelijk aan $\frac{47}{60}$ en we wisten al dat dat hoopvol was. Als $b = 4$ dan is het linkerlid ten hoogste gelijk aan $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$, en dat is ook nog hoopvol. Bij $b = 5$ berekenen we $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{107}{210}$ en dat is ook nog groter dan $\frac{1}{2}$. Maar bij $b = 6$ begint de ellende, want $\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{73}{168} < \frac{1}{2}$.
Er blijken dus nog drie mogelijkheden verder onderzocht te moeten worden:

$b = 3$ met $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{6}$ en $c \geqslant 4$

$b = 4$ met $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{2}$ en $c \geqslant 5$

$b = 5$ met $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{3}{10}$ en $c \geqslant 6$

Dat nadere onderzoek schenken we je, want je hebt inmiddels wel begrepen hoe je verder moet gaan. Er blijken tenslotte zes oplossingen te zijn, namelijk (2, 3, 7, 42), (2, 3, 8, 24), (2, 3, 9, 18), (2, 3, 10, 15), (2, 4, 5, 20) en (2, 4, 6, 12).

16. Beide soorten tegels zijn bruikbaar. Zie de figuren c en d.

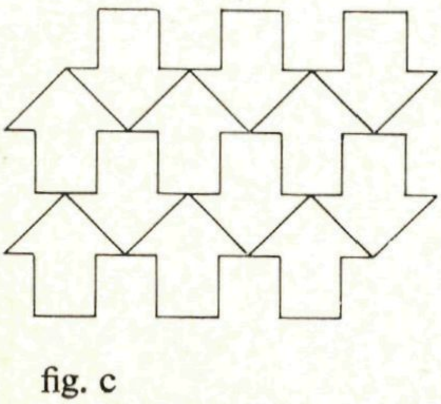


fig. c

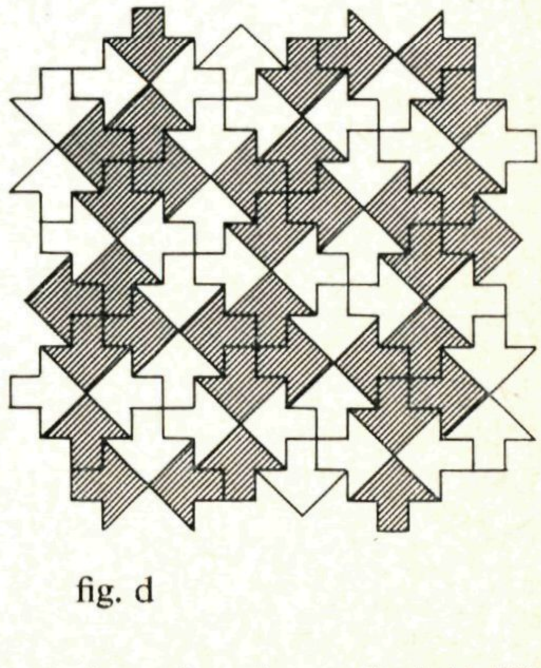


fig. d

17. Tel de vergelijkingen op. Er komt $0.x + 0.y + 0.z = 1$ en dat maakt duidelijk, dat er geen oplossing van het stelsel bestaat.

18. Elk van de driehoeken *APE*, *BPD* heeft een vaste basis en een constante tophoek. De produkten *ae* en *bd* zijn dus opvolgend evenredig met de oppervlakten van die twee driehoeken (vanwege die constante tophoek) en dus ook evenredig met de

afstanden van P tot AE en BD (vanwege die vaste basis). Die twee afstanden zijn tegelijk maximaal, namelijk als P het midden van de bovenste halve cirkel AE is. Ook c is dan maximaal. Dus in dat geval is $ae.bd.c$ maximaal.

19. Zie de figuren e en f.

fig. e

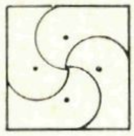


fig. f

20. Het laatste cijfer van n wordt voorgesteld door

$$n - 10.\left[\frac{n}{10}\right]$$

en het eerste cijfer door

$$[n \,.\, 10^{-[\log n]}]$$

Oplossingen van Denkertjes uit het derde nummer

21. Zie figuur g. De moeilijkheid bestond uit het vinden van de derde manier.

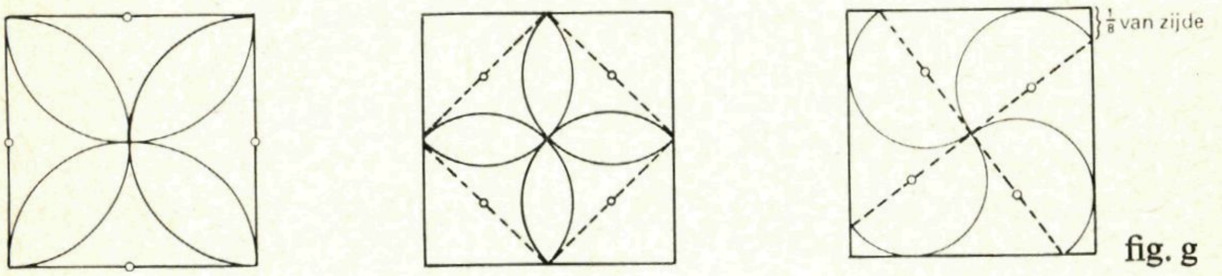


fig. g

22. Als het eerste viertal gelijk was aan het laatste viertal, dan zou door het bijschrijven van een nul of een één een rij ontstaan, waarbij het eerste vijftal gelijk was aan het laatste vijftal.

23. Als je begint met aan te nemen dat het bedoelde punt op één van de twee evenwijdige zijden van het trapezium ligt, dan is er geen kunst meer aan. We tonen hier dus alleen maar aan dat dat punt niet op een van de benen van het trapezium kan liggen. Teken trapezium $ABCD$ met evenwijdige zijden AB en CD (AB langer dan CD) en neem punt P op AD. Trek PB en PC. Trek een hulplijn door P evenwijdig met AB en CD; deze snijdt BC in Q. Nu is de oppervlakte van driehoek CDP kleiner dan die van driehoek PQC, dus zeker kleiner dan die van driehoek BPC.

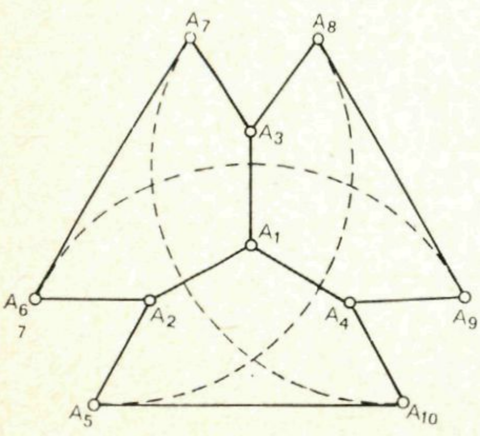


fig. h

24. Kies een van de steden uit en noem die A_1. Neem aan dat in A_1 het maximale aantal

van drie luchtlijnen samenkomt, namelijk uit de steden A_2, A_3, A_4. Neem aan dat ook in A_2, A_3 en A_4 het maximale aantal luchtlijnen samenkomen. Daarbij zijn dan ten hoogste nog zes steden A_5 tot en met A_{10} voor nodig (A_2 was al met A_1 verbonden en wordt nu ook nog met A_5 en A_6 verbonden). Nu kunnen we geen nieuwe steden meer gebruiken zonder de regel te schenden dat A_1 van zulk een nieuwe stad uit bereikbaar moet zijn met ten hoogste één keer overstappen.
Meer dan 10 kan het aantal steden in het net dus niet zijn. Figuur h toont aan dat het maximum van 10 steden inderdaad haalbaar is.

25. Ze kunnen niet alle drie tegelijk waar zijn. Bij het bewijs daarvan maken we gebruik van $(a + b)^2 \geqslant 4ab$.
Neem aan dat de drie ongelijkheden waar zijn.
Uit de eerste zou volgen $(a + b)^2 < (a + b)(c + d)$; gecombineerd met de tweede levert dit $(a + b)^2 < ab + cd$ en dus $4ab < ab + cd$ of $3ab < cd$.
Uit de derde zou volgen $(a + b)^2 cd < ab(a + b)(c + d)$ of $4abcd < ab(a + b)(c + d)$ of $4cd < (a + b)(c + d)$; gedombineerd met de tweede levert dit $4cd < ab + cd$ of $3cd < ab$.
De twee resultaten zijn met elkaar in strijd, dus de veronderstelling dat alle drie de ongelijkheden waar zijn was fout.

26. De eerste speler moet -1 kiezen als coëfficient van x en hij moet dan zijn laatste keuze tegengesteld maken aan die van zijn tegenstander. Er ontstaat dan een vergelijking van de vorm
$x^3 - ax^2 - x + a = 0$ (a geheel)
en de ontbinding
$(x^2 - 1)(x - a) = 0$
laat zien dat alle wortels van deze vergelijking geheel zijn.

27. Elke driehoek kan bedekt worden door twee cirkels, die twee van zijn zijden tot middellijnen hebben (die cirkels snijden elkaar dan in het voetpunt van de hoogtelijn op de derde zijde). Bovendien wordt een stomphoekige driehoek zelfs bedekt door die ene cirkel, die zijn langste zijde tot middellijn heeft.
Trek je nu in je vierhoek een diagonaal, dan wordt hij daardoor in twee driehoeken verdeeld. En volgens het bovenstaande worden beide driehoeken geheel bedekt door „hun" cirkels.

28. Als t_k positief is, dan is t_{k+1} dat ook volgens (c). Omdat t_1 positief is (volgens (a)), zijn dus alle termen positief.
De noemer in (c) is duidelijk groter dan 1 en dit betekent dat t_{k+1} kleiner is dan t_k. Dit houdt in dat de rij dalend is.
De noemer in (c) is zelfs groter dan 2. Dit betekent dat t_{k+1} kleiner is dan de helft van t_k. De getallen van de rij zijn dus kleiner dan de overeenkomstige getallen van de meetkundige rij, die t_1 als eerste term heeft en $\frac{1}{2}$ als reden. Diens som is kleiner dan $2t_1$.

29. Zie figuur i. Elk van de tien hoeken met een boogje er in is stomp.

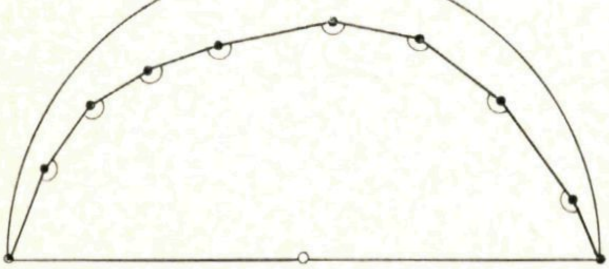


fig. i

30. Denk aan de (dal)parabool die grafiek is van de door
$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$
gedefinieerde functie.
Deze moet de x-as snijden: $b^2 - 4ac$ moet positief zijn. De top moet een getal tussen 0 en 1 als x-coördinaat hebben: b moet tussen $-2a$ en 0 liggen. De punten waarvan de x-coördinaat 0 of 1 is moeten boven de x-as liggen: c en $a + b + c$ moeten positief zijn.
Deze drie voorwaarden zijn niet alleen nodig, maar samen ook voldoende.
Als $a = 1$, dan $-2 < b < 0$ en dus $b = -1$. Nu kan de discriminant voor gehele c niet meer positief zijn. Als $a = 2$, dan $-4 < b < 0$ en dus moet b een van de getallen -3, -2, -1 zijn. Alleen met $b = -3$ en $c = 1$ kan een positieve discriminant ontstaan, maar helaas is dan $a + b + c$ niet positief.
Op dezelfde manier worden $a = 3$ en $a = 4$ uitgeschakeld. Bij $a = -5$ voldoen alleen $b = -5$, $c = 1$ aan de eisen.

Woordenboek

Fundamentaal Uit het Latijn, *fundamentum = grondslag.* Wordt gebruikt in speciale samenstellingen: fundamentaalstelling, fundamentaalrij, fundamentaalcirkel, enz.

Invariant Uit het Latijn, *variare = veranderen.* Invariant t.o.v. een transformatie = bij die transformatie niet veranderend.

Topologie Uit het Grieks, *topos = plaats, logos = leer.* Theorie van eigenschappen van puntverzamelingen, die invariant zijn voor omkeerbaar eenduidige en omkeerbaar continue afbeeldingen.

Transformatie Uit het Latijn, *transformare = van gedaante doen veranderen.* Het Nederlandse woord is *afbeelding.*

Beredeneerde oplossingen van de Denkertjes in dit nummer kunnen, voorzien van naam, adres, leeftijd en leerjaar, tot 15 maart 1970 worden ingezonden naar het redactiesecretariaat.

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIESECRETARIAAT:

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Eelde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, *f* 2,60 per jaargang. Voor anderen *f* 4,16.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff N.V., Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 807707 van Wolters-Noordhoff.