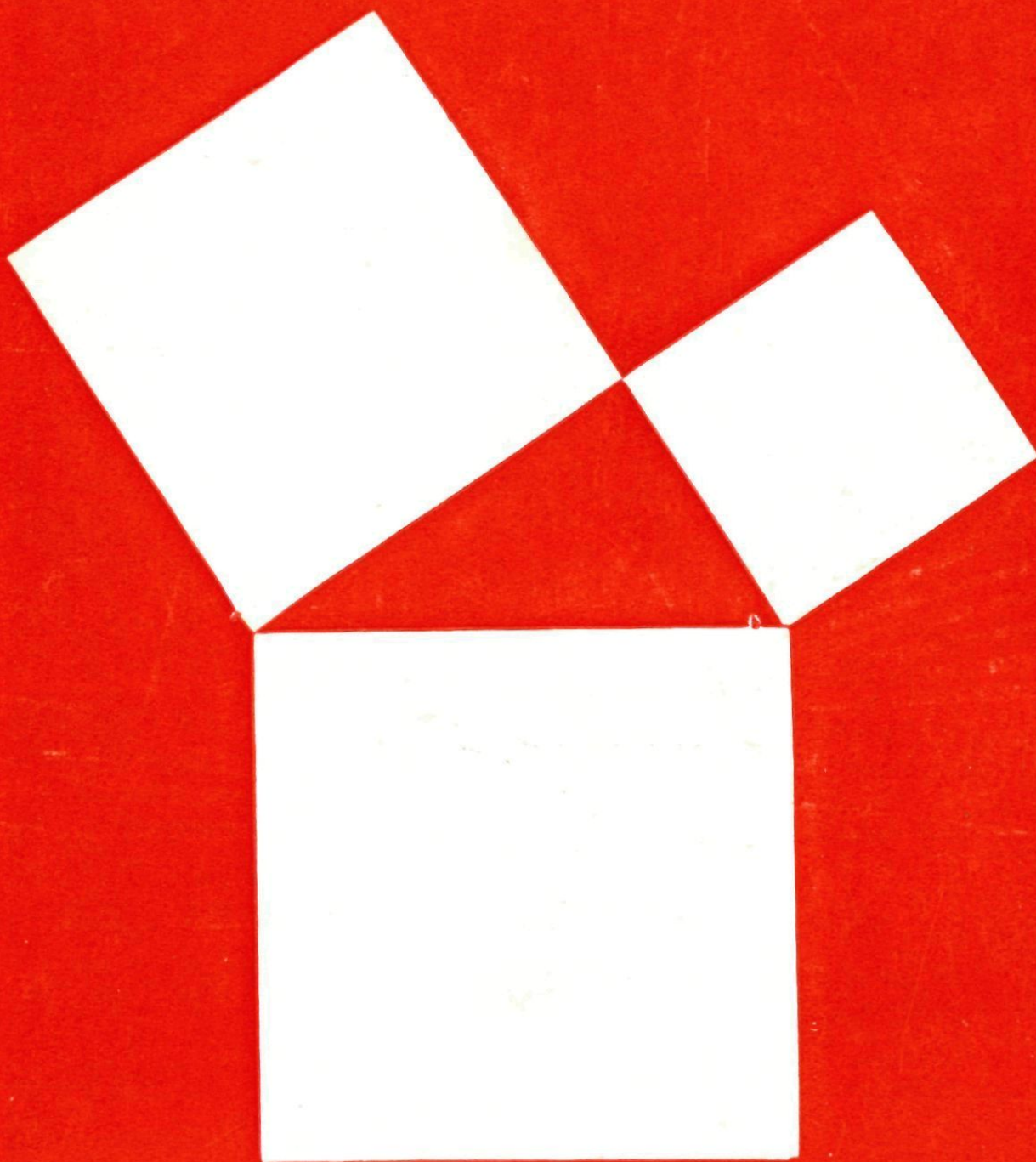


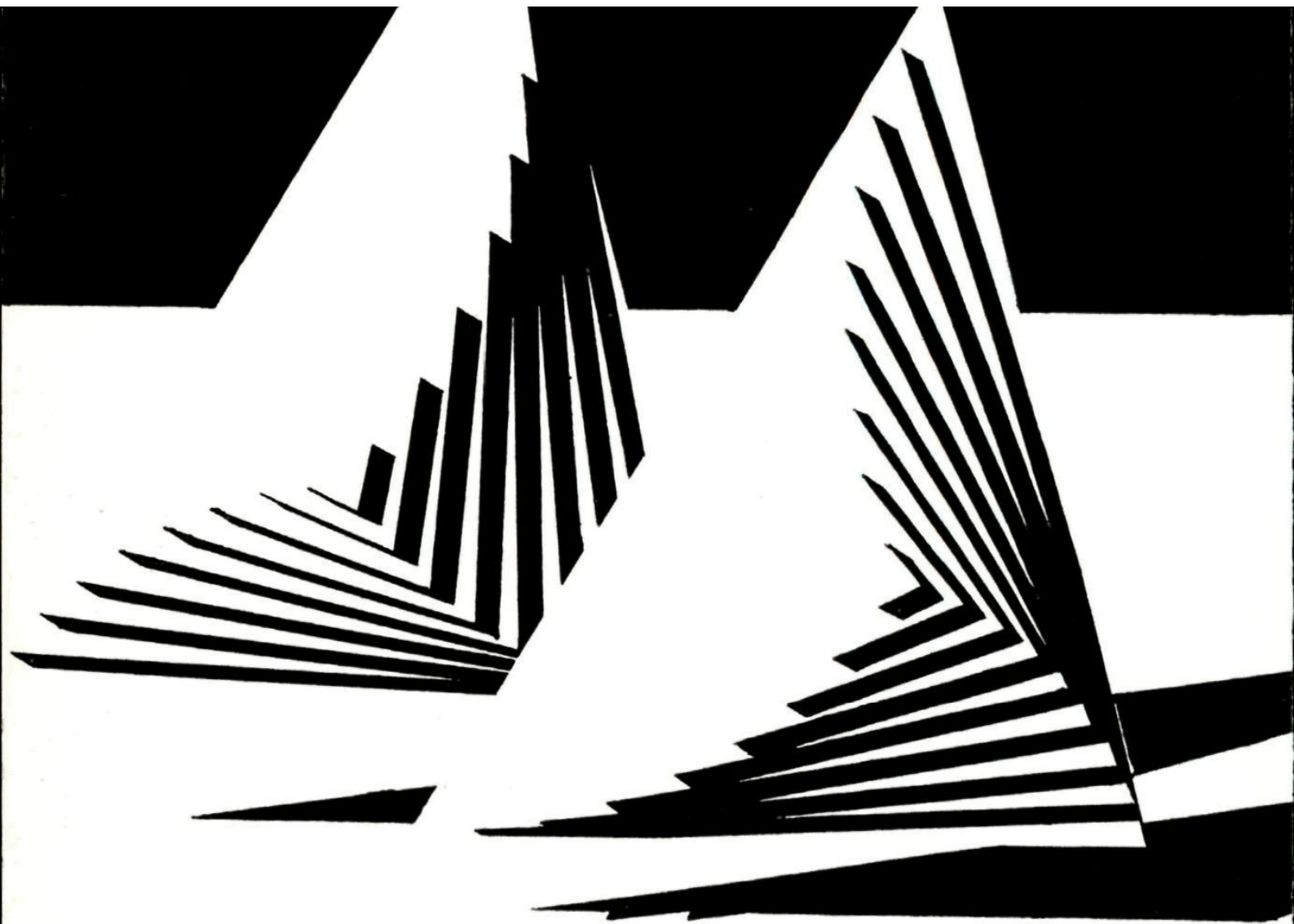
# PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift  
voor jongeren

5

*negende jaargang*  
1969/1970



*In het land van de driehoek vindt men talrijke bezienswaardigheden. Wat te denken van deze twee figuren, die zich in het landschap verheffen, als waren het „piramiden van Brocard”? Dit speciale nummer, geheel gewijd aan de driehoek, geeft uitsluitsel.*



## Ontdekkingsreizen in de driehoek

### 1. Inleiding

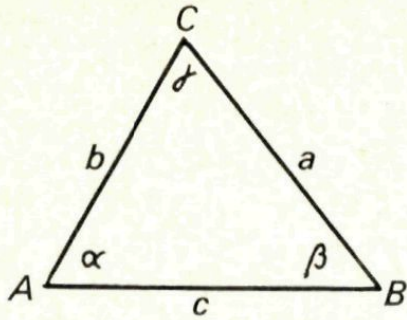
Misschien heb je wel eens een oud meetkundeboekje doorgebladerd en gezien dat er vroeger meer werd gedaan aan het bestuderen van allerlei bijzonderheden van de driehoek. We hoeven tegenwoordig veel minder van de driehoek te leren en de meeste mensen zijn daar alleen maar gelukkig mee. Veel van wat vroeger werd onderwezen, werd in de praktijk weinig gebruikt en is daarom nu van ons leerplan geschrapt. Toch was daarbij veel interessants, zeker voor degenen met belangstelling voor wiskunde. We rekenen jou, als lezer van Pythagoras, toch zeker tot die belangstellenden. Daarom wagen we een heel nummer aan merkwaardige punten, lijnen en cirkels in de driehoek, onder de titel: *ontdekkingsreizen in de driehoek*.

Veel grote wiskundigen hebben, vaak naast hun „gewone” werk en uit liefhebberij, speurtochten gemaakt in de driehoek. Van hun „reisverslagen” nemen we niet alles over. Moeilijkheden die zij op hun reis ondervonden, d.w.z. moeilijke bewijzen en uitzonderingsgevallen, zullen we eruit weglaten. De gemakkelijke bewijzen zijn wel overgenomen, maar ook als je die zou overslaan is er aan resultaten nog genoeg te bewonderen. Soms zul je even alleen op verkenning kunnen gaan in de denkertjes. Om je niet te laten verdwalen zijn er soms wat aanwijzingen toegevoegd. Bovendien kun je onder punt 8 de oplossingen vinden. De ontdekkingsreizigers die ons zijn voorgegaan, hebben in de wiskunde bekende namen. Omdat je ze waarschijnlijk toch niet allemaal zult kennen is er van elk een korte levensbeschrijving toegevoegd.

Voordat we op reis gaan kijken we onze uitrusting nog na. Tot de bagage moeten enkele stellingen uit de vlakke meetkunde behoren, die je waarschijnlijk wel kent. Zo niet, onder punt 7 kun je je voorraad aanvullen met stellingen en het nummer waaronder ze in de bewijzen ge-



bruikt worden. Natuurlijk ken je de gebruikelijke notaties in de driehoek, zoals hieronder staat aangegeven.

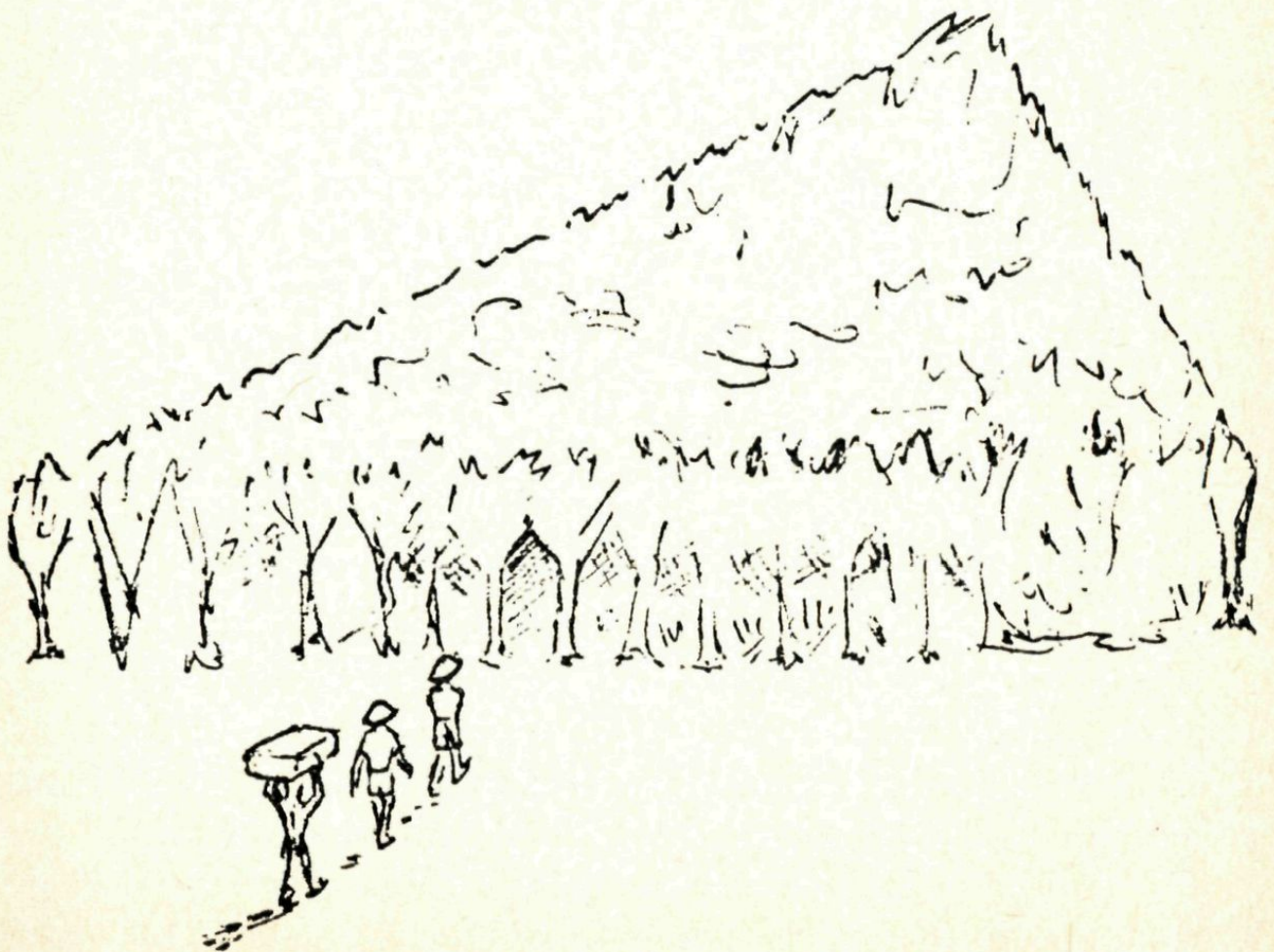


$$\text{De halve omtrek} = s = \frac{a+b+c}{2}$$

Tenslotte dit:

*ter vereenvoudiging van veel betogen wordt alleen gesproken over scherphoekige driehoeken. Uitzonderingen in verband met recht- of stomphoekigheid worden buiten beschouwing gelaten.*

De bagage ingepakt? Dan treden we nu de driehoek binnen. Wilt u de gids maar volgen?





## 2. Herkenningspunten in de driehoek

Het terrein dat we nu betreden vertoont een groot aantal bijzonderheden. We zoeken eerst naar markante punten. Wanneer zullen we het de moeite waard vinden om een punt op onze landkaart van de driehoek aan te tekenen? Zeker in het geval dat zo'n punt een snijpunt van wegen is, om precies te zijn: een snijpunt van drie bepaalde rechte lijnen is. Op de landkaart in figuur 1 zijn er een aantal van dit soort aangegeven. Je herkent, hopen we, het snijpunt  $Z$  van de drie zwaartelijnen.  $Z$  heet het zwaartepunt van  $\triangle ABC$ . Verder het hoogtepunt  $H$ , het snijpunt van de hoogtelijnen en het punt  $M$ , het snijpunt van de middelloodlijnen van de drie zijden van de driehoek.  $M$  is ook het middelpunt van de omgeschreven cirkel (de cirkel door de hoekpunten  $A$ ,  $B$  en  $C$ ). Ook de punten  $I$ ,  $G$  en  $N$  blijken van die driesprongen te zijn. We zullen ze hierna met een bezoek vereren.

De punten  $T$ ,  $P_1$  en  $P_2$  blijken van een ander soort bijzonderheid te zijn. Ze worden in punt 4 aan een onderzoek onderworpen.

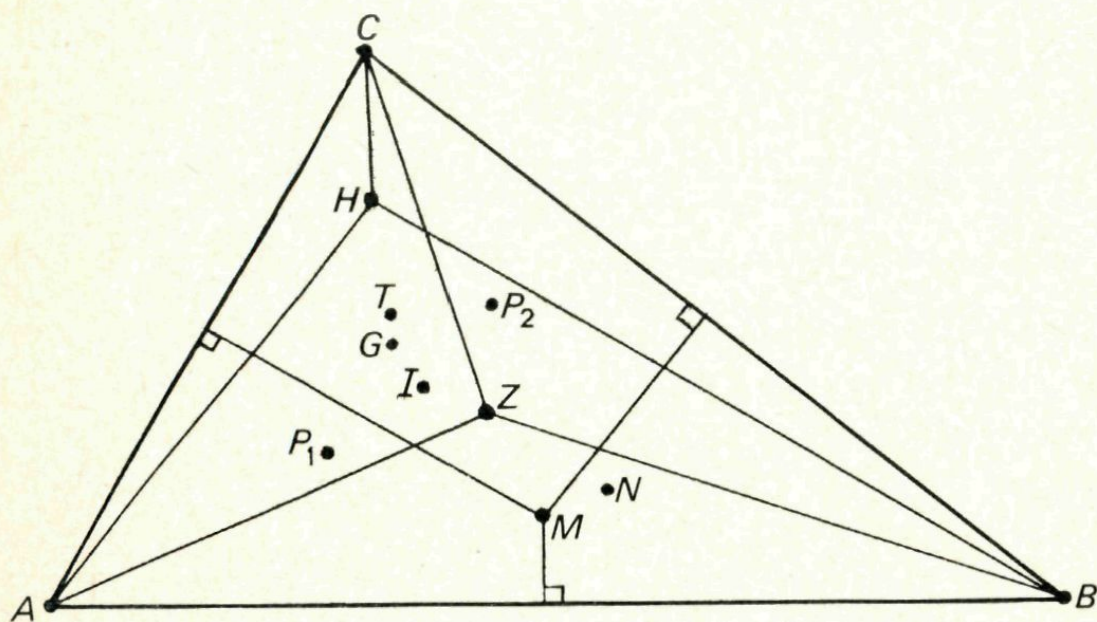


Fig. 1

### Het punt $I$

De bissectrices van de hoeken van een driehoek gaan door één punt  $I$  (figuur 2).

Het bewijs hiervan kun je wel in een leerboekje vinden. Ook weet je waarschijnlijk wel dat  $I$  het middelpunt is van de cirkel die raakt aan de zijden van de driehoek, de ingeschreven cirkel (figuur 3). Wat misschien



minder bekend is, is dat de ligging van de raakpunten op de zijden eenvoudig berekend kan worden. Volgens stelling 2 geldt

$$\begin{array}{rcl}
 AS & = & AQ \\
 BP & = & BS \\
 CP & = & CQ \\
 \hline
 AS + BP + CP & = & AQ + BS + CQ \\
 AS + BP + CP + AQ + BS + CQ & = & \text{omtrek } \triangle ABC = 2s \\
 \Rightarrow AS + BP + CP & = & s \Rightarrow AS + a = s \Rightarrow AS = s - a
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} AS & = & AQ \\ BP & = & BS \\ CP & = & CQ \end{array}} \right\} \Rightarrow$$

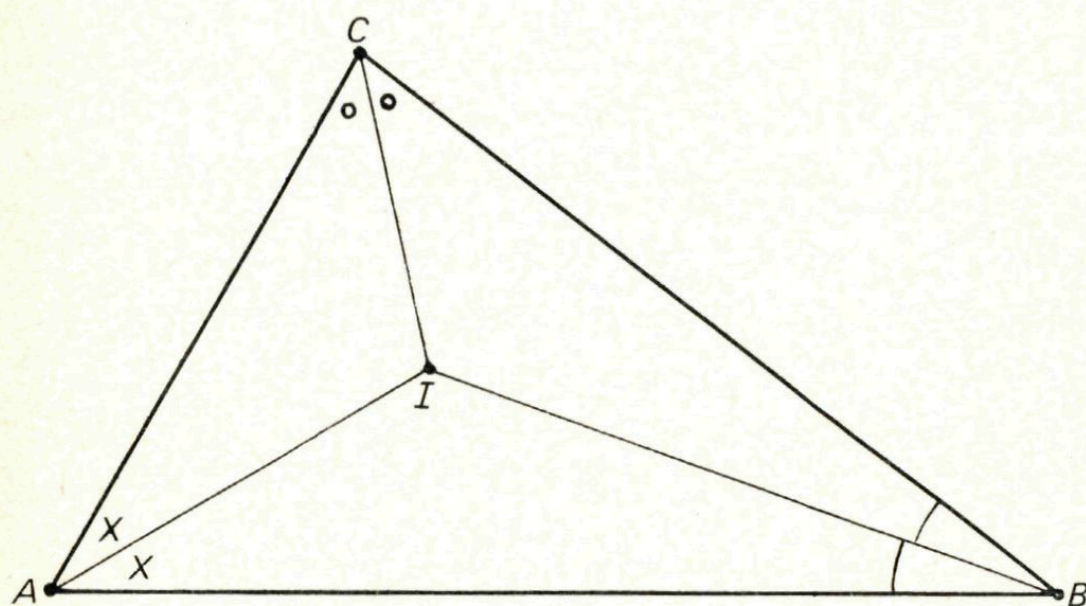


Fig. 2

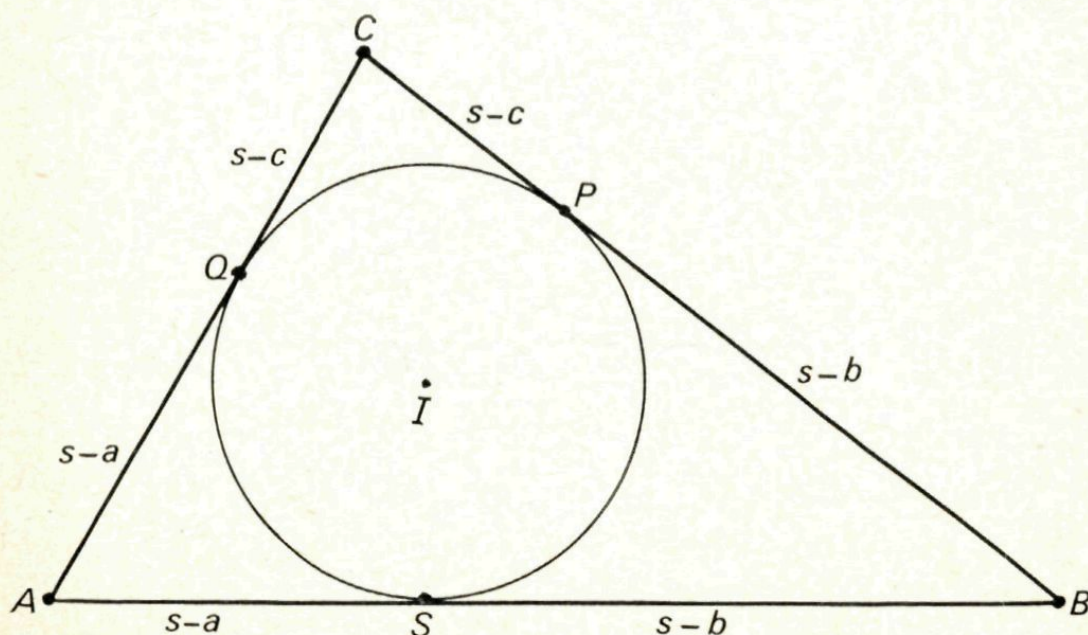


Fig. 3

Op dezelfde manier kunnen we de plaats van de andere raakpunten uitrekenen (figuur 3).



## Het punt van Gergonne

*Joseph Diaz Gergonne*, Frans wiskundige, 1771–1859. Hij was aanvankelijk artillerie-officier, werd in 1795 docent in de wiskunde te Nîmes en in 1816 hoogleraar te Montpellier. Hij stichtte een Frans tijdschrift voor zuivere en toegepaste wiskunde en was daarvan van 1810 tot 1831 hoofdredacteur. Hij is de (mede)ontdekker van de dualiteit in de meetkunde, dit wil zeggen het principe volgens welk sommige stellingen juist blijven wanneer daarin de begrippen punt en lijn verwisseld worden.

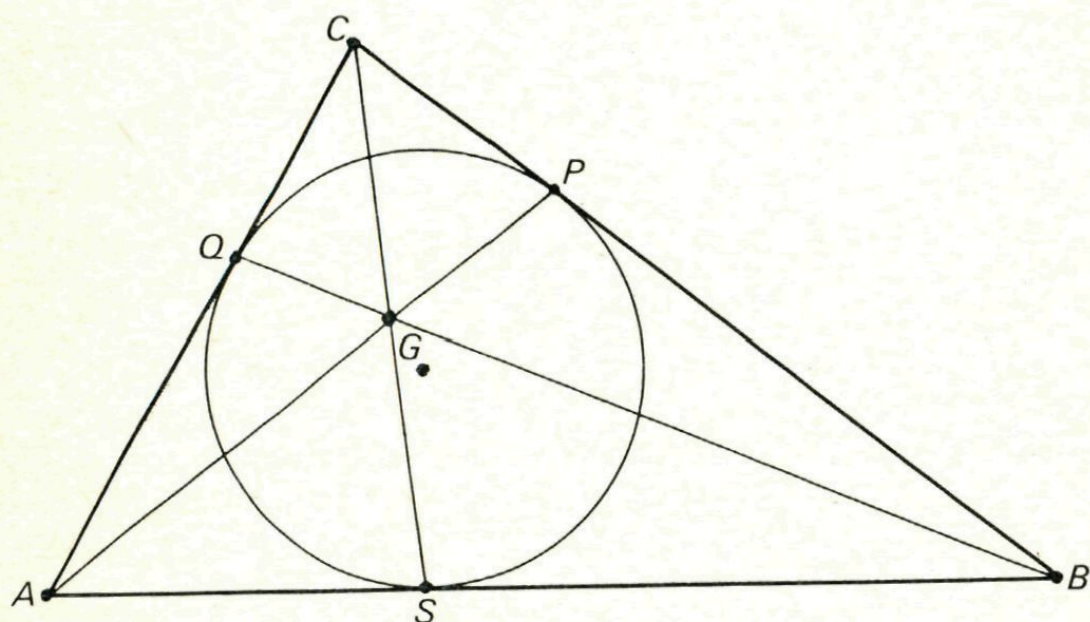


Fig. 4

Als  $P$ ,  $Q$  en  $S$  de punten zijn waarin de ingeschreven cirkel de zijden  $a$ ,  $b$  en  $c$  raakt, (figuur 4) dan gaan  $AP$ ,  $BQ$  en  $CS$  door één punt  $G$ . Dit punt wordt het punt van Gergonne genoemd. Let er op dat  $AP$  en  $BQ$  en  $CS$  in het algemeen niet de bissectrices zijn van de hoeken en dat punt  $G$  niet samenvalt met  $I$ . In denkertje 3 zul je worden uitgenodigd om het bestaan van het punt  $G$  te bewijzen.

### De punten $I_a$ , $I_b$ en $I_c$

Ook de bissectrice van een hoek en de buitenbissectrices van de twee andere hoeken van een driehoek gaan door één punt. Men kan op deze wijze drie punten laten ontstaan, de middelpunten van de zogenaamde *aangeschreven cirkels* (figuur 5). Op dezelfde wijze als bij de ingeschre-



ven cirkel kan de plaats van elk raakpunt van de aangeschreven cirkels berekend worden (Denkertje 4). De resultaten hiervan zijn in figuur 5 terug te vinden.

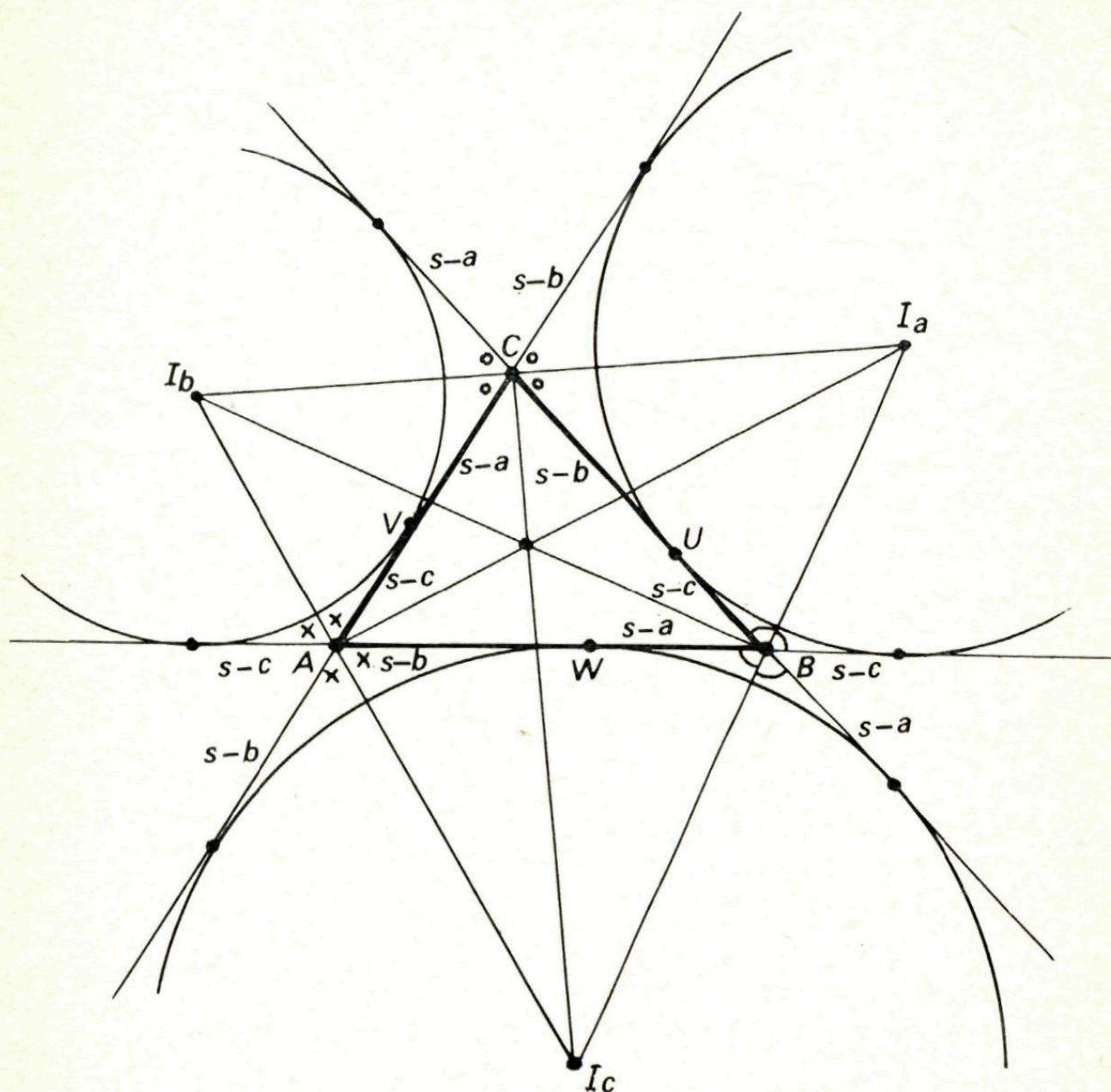


Fig. 5

### *Het punt van Nagel*

*Christian Heinrich Nagel*, Duits wiskundige, 1803–1882. Hij studeerde theologie maar werd in 1827 docent in wiskunde aan het lyceum te Tübingen en later in Ulm, waar hij van 1844 tot 1872 rector was van de Realschule. Het nu te bespreken punt van Nagel is eigenlijk ten onrechte naar hem genoemd, want Ceva onderzocht en publiceerde al veel eerder over dit punt.

Als  $U$ ,  $V$  en  $W$  de punten zijn waarin de aangeschreven cirkels de zijden  $a$ ,  $b$  en  $c$  raken (figuur 6), dan gaan  $AU$ ,  $BV$  en  $CW$  door één punt  $N$ .



Dit punt wordt het punt van Nagel genoemd. Let er op dat  $N$  in het algemeen niet samenvalt met  $I$  of  $G$ . Zie ook Denkertje 5.

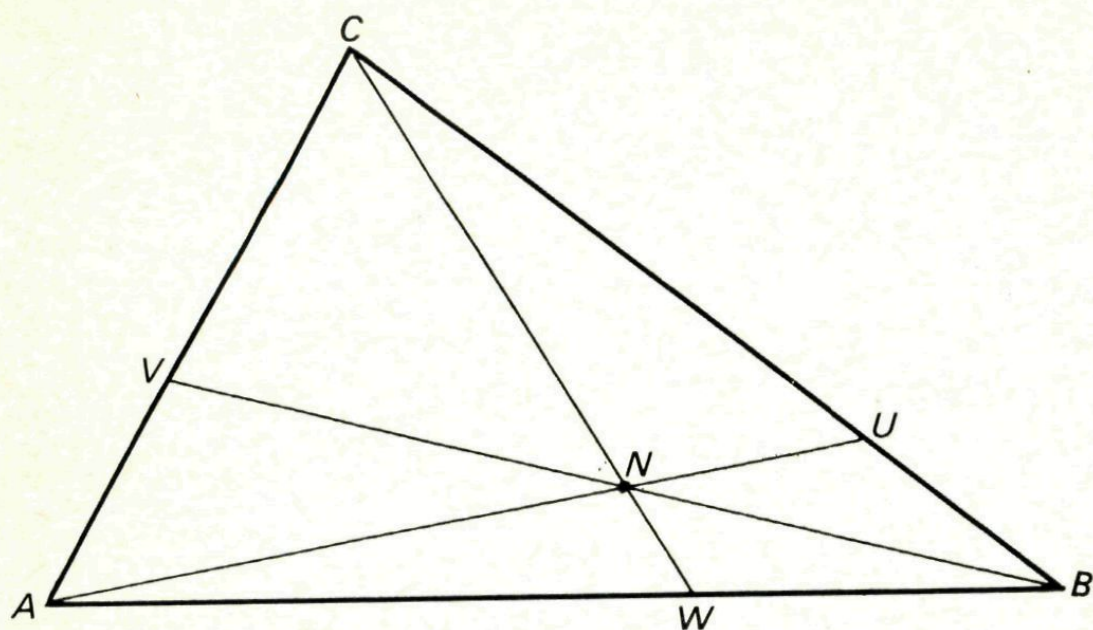


Fig. 6

### 3. De stellingen van Ceva

*Giovanni Ceva*, Italiaans wis- en waterbouwkundige, 1648–1734. De hierna volgende stelling van Ceva komt voor in zijn werk *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* (1678) en wordt daarin bewezen met behulp van beschouwingen over zwaartekracht. Ook over wiskundige economie schreef hij een boek: *De re nummaria* (1711). Zie ook nog een opmerking bij het punt van Nagel.

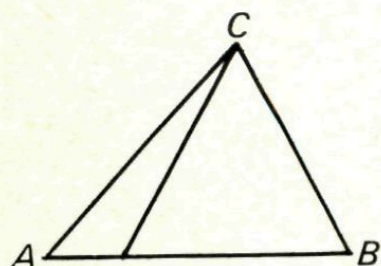


Fig. 7

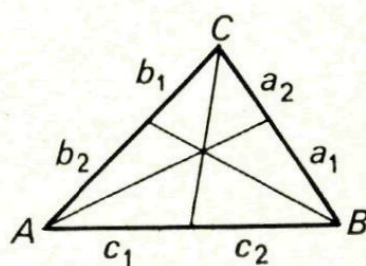


Fig. 8

In figuur 7 is door een hoekpunt van een driehoek een willekeurige lijn getekend, die de overstaande zijde snijdt. Zo'n lijn heet een *hoektransversaal*. Voorbeelden van hoektransversalen zijn hoogtelijnen en zwaartelijnen. In figuur 8 zijn drie in één punt snijdende hoektransversalen aangegeven. Over deze figuur handelt de volgende stelling.



## De stelling van Ceva

Als de hoektransversalen door één punt gaan, geldt  $\frac{a_1 \times b_1 \times c_1}{a_2 \times b_2 \times c_2} = 1$ .

Ook de *omgekeerde stelling van Ceva* blijkt juist te zijn:

als (bij de naamgeving van figuur 8)  $\frac{a_1 \times b_1 \times c_1}{a_2 \times b_2 \times c_2} = 1$ , dan gaan de drie hoektransversalen door één punt.

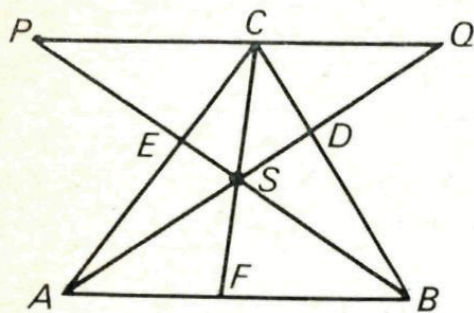


Fig.9

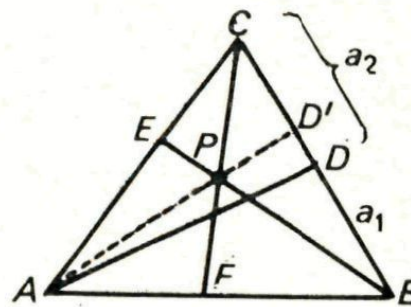


Fig.10

Ben je benieuwd naar de bewijzen van deze wat minder bekende stellingen?

Hier volgen ze voor de volledigheid.

Bewijs van de stelling van Ceva. In figuur 9 is  $PQ \parallel AB$ , waaruit volgt:

$$\triangle BDA \sim \triangle CDQ \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{CQ}$$

$$\triangle PEC \sim \triangle BEA \Rightarrow \frac{CE}{AE} = \frac{PC}{AB}$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle BFS \sim \triangle PCS \Rightarrow \frac{FB}{PC} = \frac{FS}{CS} \\ \triangle FAS \sim \triangle CQS \Rightarrow \frac{AF}{CQ} = \frac{FS}{CS} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AF}{CQ} = \frac{FB}{PC} \Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{CQ}{PC} \times$$

$$\frac{BD \cdot CE \cdot AF}{CD \cdot AE \cdot FB} = \frac{AB \cdot PC \cdot CQ}{CQ \cdot AB \cdot PC} = 1$$



Bewijs van de omgekeerde stelling van Ceva.

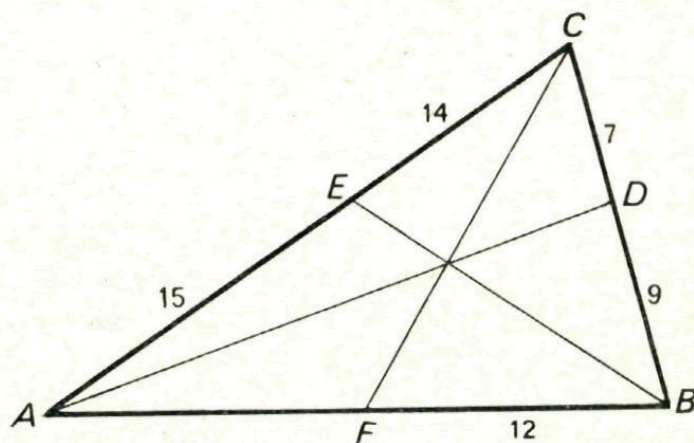
Stel dat in figuur 10 geldt dat  $\frac{a_1 \times b_1 \times c_1}{a_2 \times b_2 \times c_2} = 1$  en dat  $BE$  en  $CF$  elkaar

snijden in  $P$ . Als het verlengde van  $AP$  de zijde  $BC$  in  $D'$  snijdt dan is

volgens de stelling van Ceva:  $\frac{BD' \times b_1 \times c_1}{CD' \times b_2 \times c_2} = 1$ , zodat  $\frac{a_1 \times b_1 \times c_1}{a_2 \times b_2 \times c_2}$

$= \frac{BD' \times b_1 \times c_1}{CD' \times b_2 \times c_2}$ , waaruit volgt dat  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{BD'}{CD'}$ . Nu moet  $D$  op de zijde

$BC$  samenvallen met  $D'$  en dus  $AD$  samenvallen met  $AD'$ . Dan gaat  $AD$  ook door  $P$ .



1. Bereken uit bovenstaande figuur het lijnstuk  $AF$ .
2. Bewijs met behulp van de omgekeerde stelling van Ceva dat de zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan.
3. Bewijs op dezelfde wijze dat in figuur 4 de rechten  $AP$ ,  $BQ$  en  $CS$  door één punt gaan.
4. Bereken de plaats van enkele raakpunten op de zijden of verlengde zijden van de aangeschreven cirkels. De antwoorden zijn in figuur 5 terug te vinden.
5. Bewijs dat in figuur 6  $AU$ ,  $BV$  en  $CW$  door één punt gaan.



#### 4. Andere merkwaardige punten in de driehoek

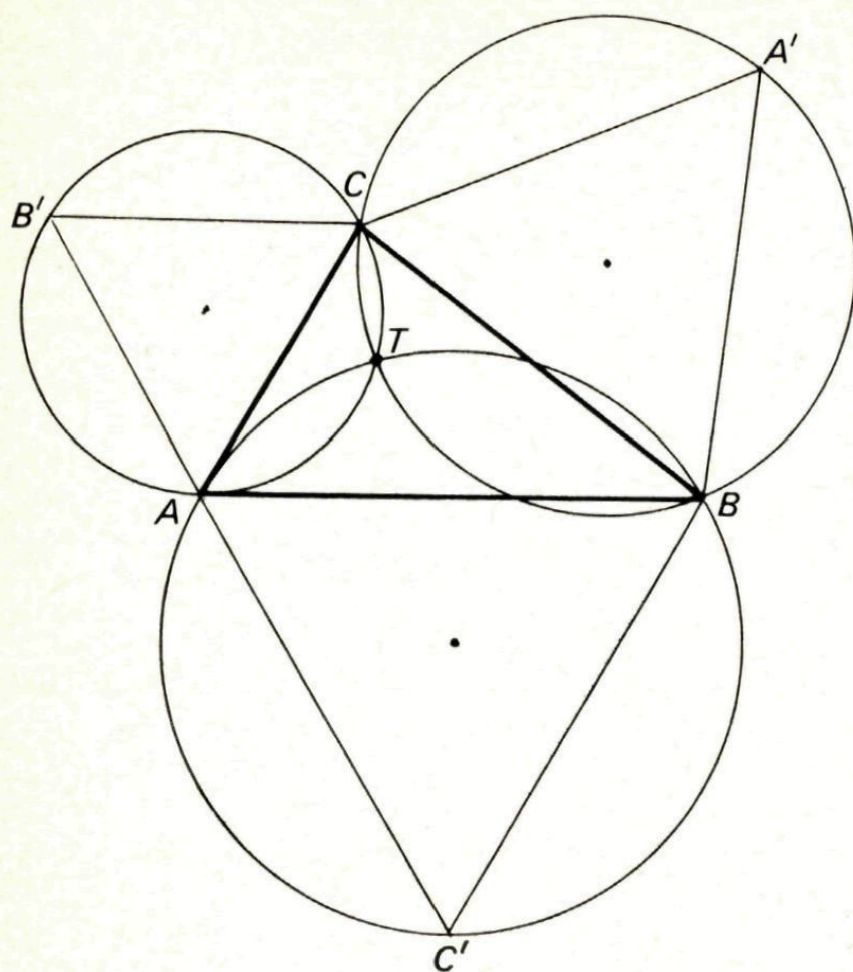


Fig. 11

#### *Het punt van Torricelli*

*Evangelista Torricelli*, Italiaans wis- en natuurkundige, 1608–1647. Hij was assistent van Galilei in diens laatste levensjaren en volgde hem op als wiskundige van de groot-hertog van Toscane. Het meest is hij bekend geworden door zijn meting van de luchtdruk (buis van Torricelli). Op wiskundig gebied breidde hij de onderzoeken van Archimedes uit, terwijl hij ook onderwerpen behandelde waaruit later de differentiaal- en integraalrekening zou voortkomen. In een werk dat na zijn dood is uitgegeven komt het nu te behandelen punt voor en dit punt is daarom naar hem genoemd.

In figuur 11 zijn buiten op de zijden van de driehoek gelijkzijdige driehoeken beschreven. De omgeschreven cirkels van deze driehoeken gaan door één punt  $T$ , het zogenaamde punt van Torricelli.

Dit kan bewezen worden met de achterin genoemde stellingen 4 en 5 over de koordenvierhoek. We nemen aan dat de omgeschreven cirkels van



$\triangle ACB'$  en  $\triangle ABC'$  elkaar snijden in  $T \Rightarrow$

$ATCB'$  is een koordenvierhoek  $\Rightarrow \angle ATC = 180^\circ - \angle B' =$   
 $= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$BTAC'$  is een koordenvierhoek  $\Rightarrow \angle BTA = 180^\circ - \angle C =$   
 $= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\Rightarrow$  er resteert voor  $\angle CTB$  ook  $120^\circ \Rightarrow \angle CTB + \angle A' = 180^\circ \Rightarrow$   
 (st. 5)  $CTBA'$  is een koordenvierhoek  $\Rightarrow$

De cirkel door  $B, C$  en  $A'$  gaat ook door  $T$ .

Men kan verder bewijzen (denkertje 6) dat de rechten  $AA', BB'$  en  $CC'$  in figuur 11 elkaar in het punt  $T$  snijden.

*Het probleem van Fermat* (zie ook Pythagoras 2 van jaargang 7)

*Pierre de Fermat*, Frans wiskundige en jurist, 1601–1665. Vanaf 1631 raadsheer aan het hof te Toulouse. Een der grootste wiskundigen van alle tijden, van belang voor het ontstaan van de waarschijnlijkheidsrekening en de analytische meetkunde en voor de voorbereiding van de infinitesimaalrekening, maar vooral voor de getallentheorie. Het nu volgende probleem werd door Fermat voorgelegd aan Torricelli en door deze laatste opgelost.

Wat is het punt binnen de driehoek, waarvan de som van de afstanden tot de drie hoekpunten zo klein mogelijk is? Met andere woorden (figuur 12): voor welk punt  $P$  is  $PA + PB + PC$  minimaal?

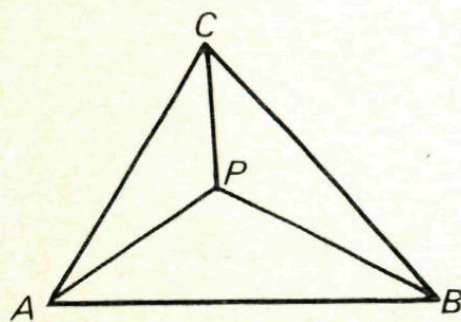


Fig. 12

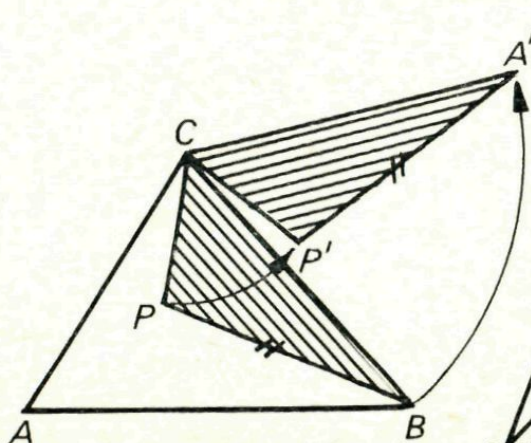


Fig. 13

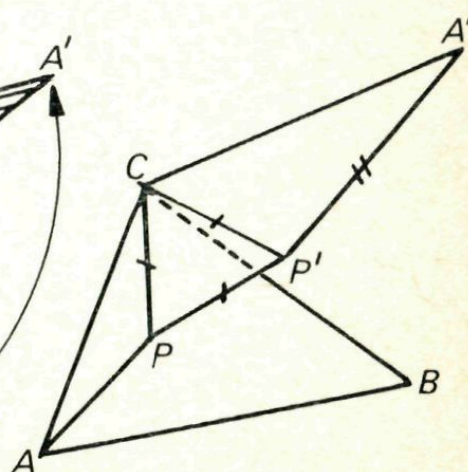
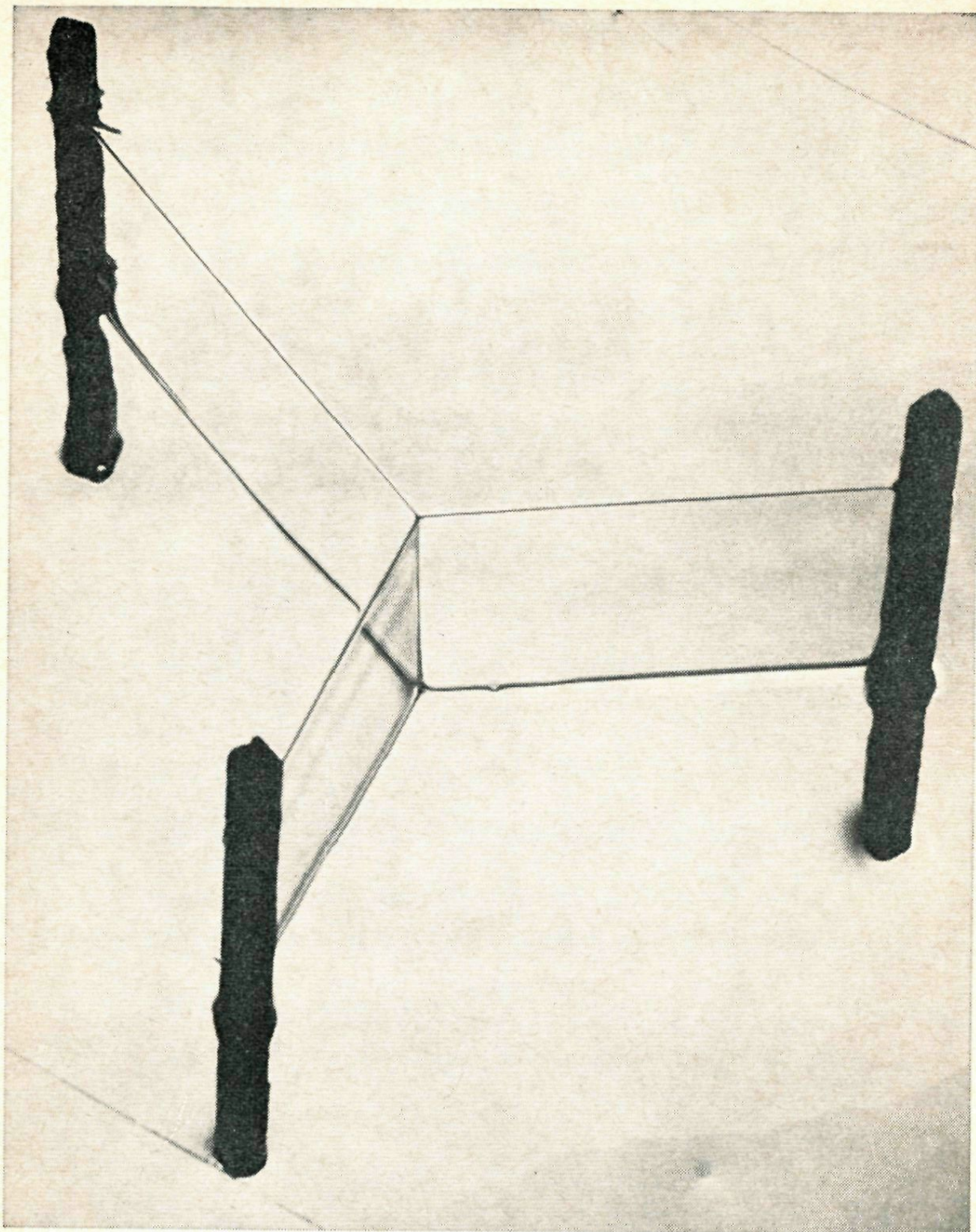


Fig. 14





Oplossing. We draaien  $\triangle BPC$  over  $60^\circ$  om  $C$ , met als resultaat  $\triangle A'P'C$  (figuur 13). Merk op dat nu  $\triangle BA'C$  gelijkzijdig is, zodat het punt  $A'$  overeenkomt met dat van figuur 11. Ook

$\triangle PP'C$  is gelijkzijdig  $\Rightarrow PP' = PC$  (figuur 14)

$$P'A' = PB$$

$$AP = PA$$

$$\overbrace{AP + PP' + P'A'}^+ = PA + PB + PC$$



Wil het rechter lid zo klein mogelijk zijn, dan moet het linker lid dat ook zijn  $\Rightarrow A, P, P'$  en  $A'$  moeten op één lijn liggen, kortom:  $P$  ligt op  $AA'$ . Analoog kan worden aangetoond dat  $P$  op  $BB'$  en op  $CC'$  uit figuur 11 ligt.

Als oplossingspunt  $P$  van het probleem van Fermat verschijnt het punt  $T$  van Torricelli.

Je kunt voor jezelf de oplossing van dit probleem van Fermat voortoveren, wanneer je kans ziet om tussen twee evenwijdige platen van glas of dik plastic drie staafjes te bevestigen. Dompel het geheel in een zeepoplossing (met wat glycerine er door gaat het nog beter) en haal het er langzaam uit. Er vormen zich vliezen die loodrecht op de glasplaten staan. Zeepvliezen trachten steeds een zo klein mogelijk oppervlak te vormen en je ziet dan ook dat ze elkaar ontmoeten in een lijn, zo, dat ze hoeken van  $120^\circ$  met elkaar maken.

Op blz. 108 zie je een foto van deze proef.

Het punt van Torricelli ontstond als snijpunt van drie cirkels. Ook de volgende stelling handelt over drie cirkels die elkaar in één punt snijden, ook al zijn deze cirkels meer willekeurig.

### *De stelling van Miquel*

Als op de zijden  $a, b$  en  $c$  de punten  $P, Q$  en  $S$  willekeurig liggen, dan gaan de cirkel door  $A, Q$  en  $S$ , de cirkel door  $P, Q$  en  $C$  en de cirkel door  $B, S$  en  $P$  door één punt (figuur 15). Zie Denkertje 7.

Fig. 15

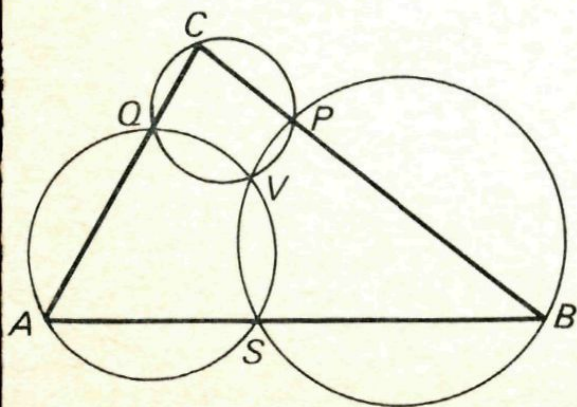
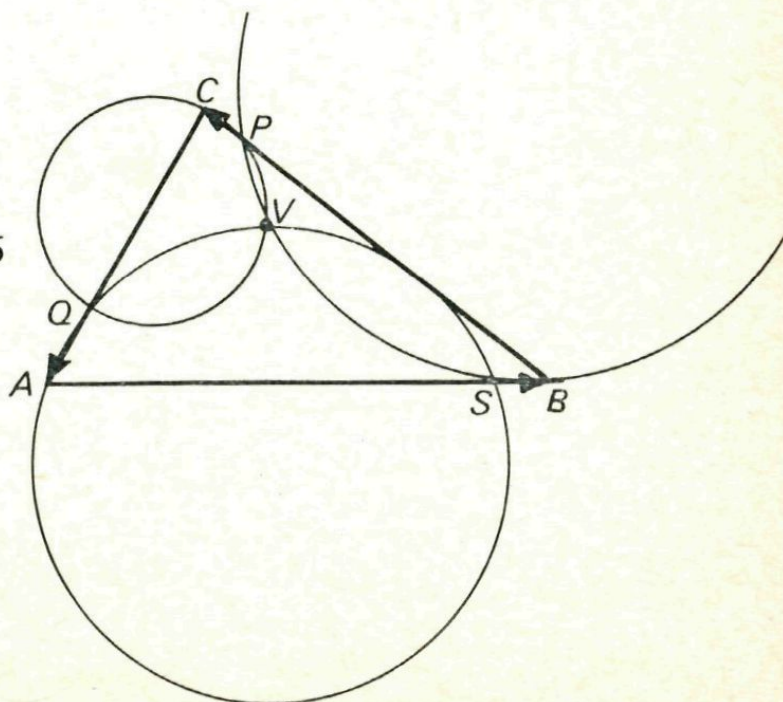


Fig. 16





Een bijzonder geval van de stelling van Miquel leidt ons onderzoek naar

### *de punten van Brocard*

*Henri Pierre Jean Baptiste Brocard*, Frans Wiskundige, 1845–1922. Was eerst genie-officier, werd in 1874 directeur van het meteorologisch instituut te Algiers. Hij schreef verhandelingen over wiskunde, astronomie en meteorologie.

Als we in de stelling van Miquel de punten  $P$ ,  $Q$  en  $S$  laten naderen tot de hoekpunten  $C$ ,  $A$  en  $B$  dan gaat de situatie van figuur 16 over in die van figuur 17:

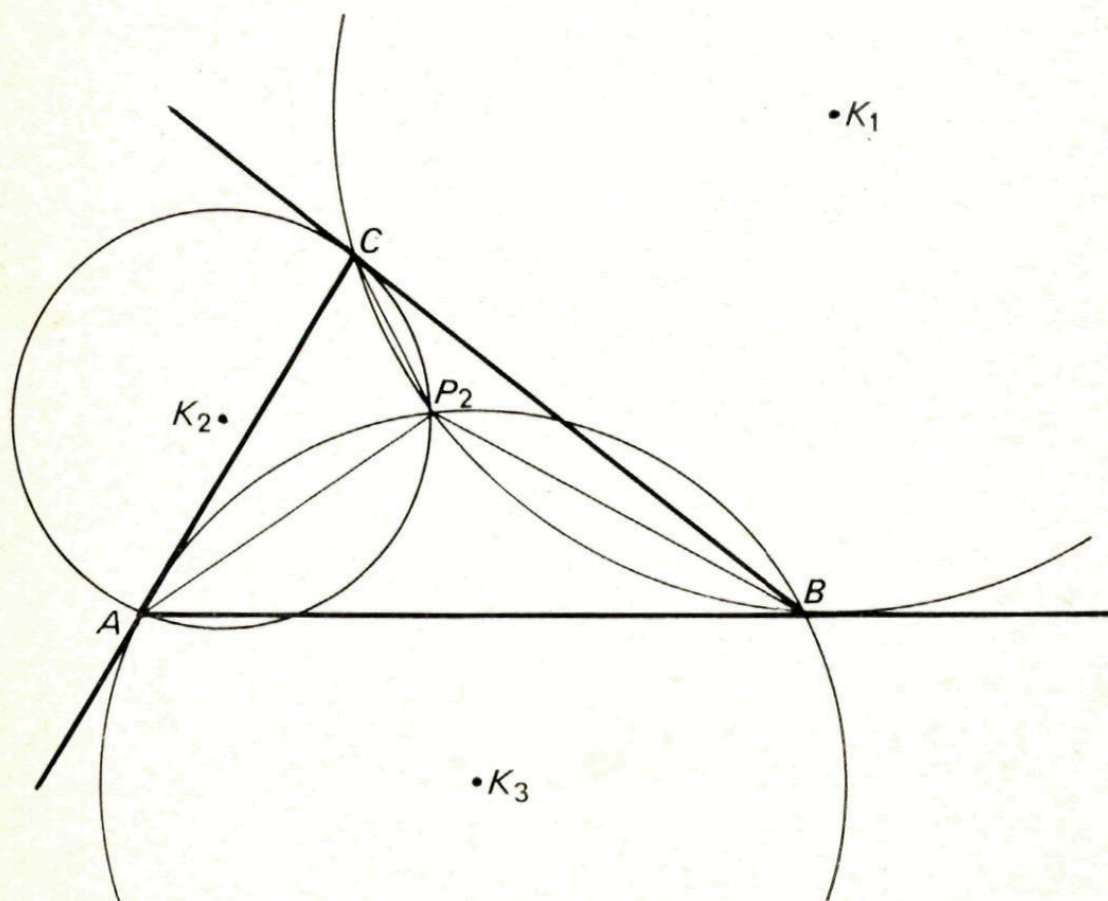


Fig. 17

de cirkel  $K_1$  raakt  $c$  in  $B$  en gaat door  $C$ ,  
 de cirkel  $K_2$  raakt  $a$  in  $C$  en gaat door  $A$  en  
 de cirkel  $K_3$  raakt  $b$  in  $A$  en gaat door  $B$ .  
 De drie cirkels snijden nog steeds in één punt  $P_2$ .  
 In cirkel  $K_2$  geldt volgens stelling 3:

$$\angle P_2AC = \frac{1}{2} \text{ bg } P_2C = \angle P_2CB$$



en in cirkel  $K_1$  geldt:

$$\angle P_2CB = \frac{1}{2} \text{ bg } P_2B = \angle P_2BA. \text{ Zie figuur 18.}$$

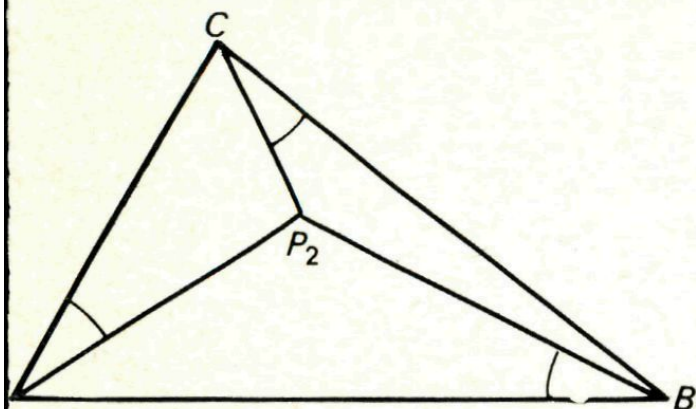


Fig. 18

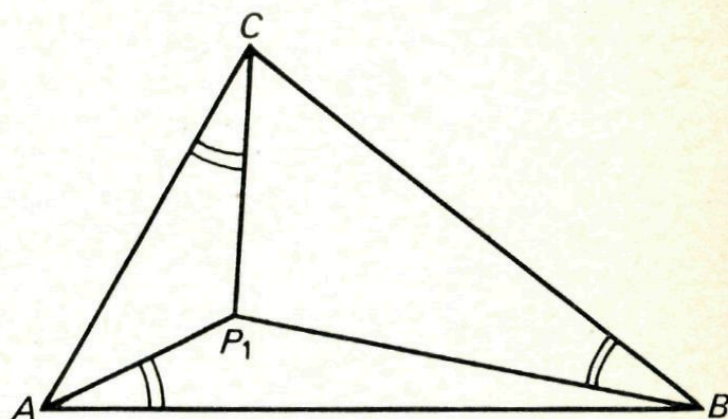


Fig. 19

Op een dergelijke wijze kan een punt  $P_1$  gevonden worden dat voldoet aan figuur 19. Wat we hier niet bewijzen is, dat  $P_1$  en  $P_2$  de enige punten zijn die aan de situaties van figuur 18 en 19 beantwoorden.

$P_1$  en  $P_2$  worden de punten van Brocard genoemd.

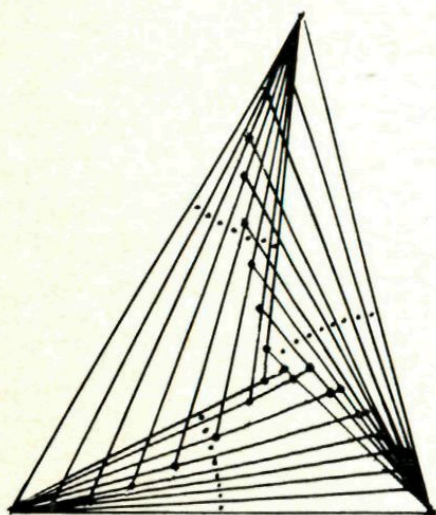


Fig. 20

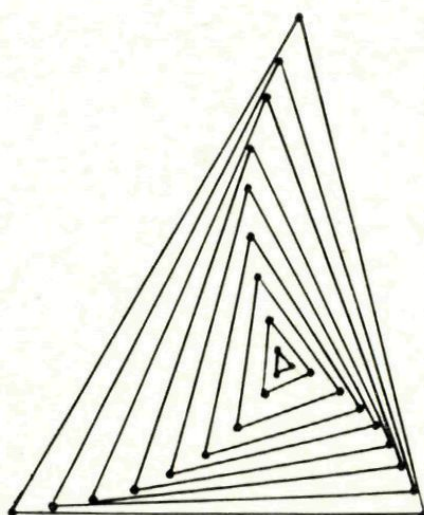


Fig. 21

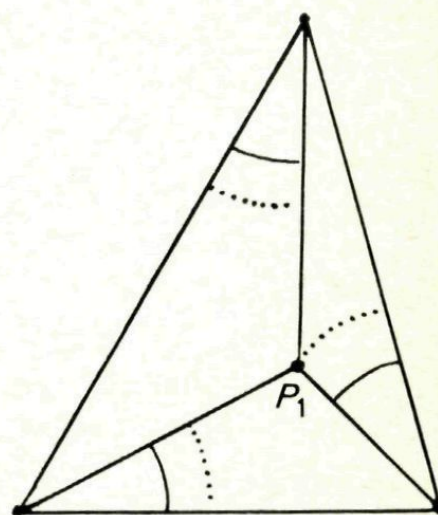


Fig. 22

Als de tekening aan de binnenzijde van het omslag een naam zou moeten hebben, zou dat „de punten van Brocard” kunnen zijn. Hoe is die tekening namelijk ontstaan? We beperken ons even tot de rechter driehoek. In elk hoekpunt zijn vanaf een zijde gelijke hoekjes afgepast (figuur 20). Zo ontstaat een verzameling gelijkvormige driehoekjes (figuur 21). Ze krimpen naar het punt  $P_1$  (figuur 22). Zo krimpen de driehoekjes in de linker driehoek naar het punt  $P_2$ .



6. Bewijs dat  $AA'$  in figuur 11 door  $T$  gaat, door aan te tonen dat  $\angle ATB + \angle BTA' = 180^\circ$
7. Bewijs de stelling van Miquel (figuur 15). Neem aan dat de cirkels die door  $Q$  gaan ook nog in  $V$  snijden. Bewijs met behulp van stelling 5 dat  $VSBP$  een koordenvierhoek is.
8. Wat kan men van een driehoek bewijzen als de punten van Brocard samenvallen?
9. Bewijs dat de met  $B$  overeenkomende hoekpunten van de gelijkvormige driehoeken in figuur 21 op één cirkel liggen.

### 5. Merkwaardige lijnen in de driehoek

In het voorgaande hebben we de belangrijkste punten in het terrein verkend. Maar wat mogelijk nog belangrijker is, is de aanwezigheid van verbindingswegen. We raadplegen nu de uitgebreide kaart in figuur 23. Hierin staan twee rechtlijnige wegen aangegeven, namelijk de lijn door  $H$ ,  $Z$  en  $M$  en die door  $I$ ,  $Z$  en  $N$ . Verder zien we een rondweg door o.a. de voetpunten van de hoogtelijnen en de middens van de zijden. Deze laatste zal in punt 6 aan de orde komen bij de merkwaardige cirkels in de driehoek. Wat de rechte lijnen betreft, eerst zal een lijn worden onderzocht die niet op de kaart staat aangegeven. Van deze rechte zijn namelijk te veel standen mogelijk om ze hierin te kunnen karteren.

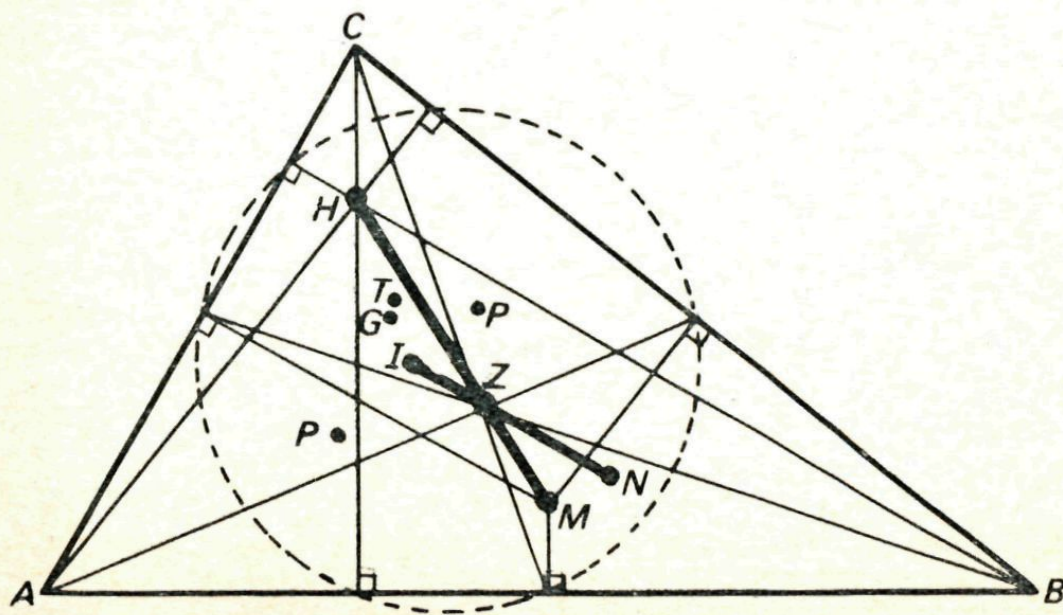


Fig. 23



## De rechte van Wallace

*William Wallace*, Engels wiskundige, 1768–1843. Hij was eerst boekdrukker en van 1819 tot 1838 hoogleraar in wiskunde te Edinburgh. Hij schreef over logaritme, trigonometrie en landmeetkunde. Zijn voornaamste wiskundige werk betrof de oppervlakteberekening van vlakdelen begrensd door hyperbolen.

(Figuur 24) Laat men vanuit een punt  $P$  van de omgeschreven cirkel van  $\triangle ABC$  loodlijnen neer op de, (zonodig verlengde) zijden van die driehoek, dan liggen de voetpunten op één rechte (de bij  $P$  behorende rechte van Wallace, ook wel rechte van Simson).

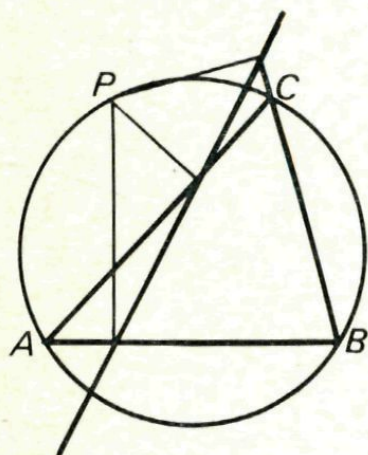


Fig. 24

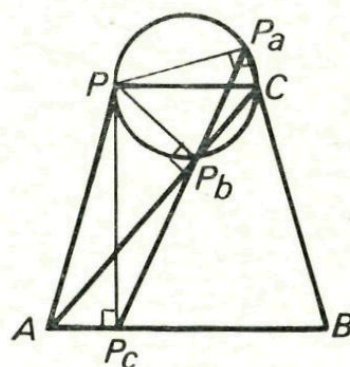


Fig. 25

Bewijs: Volgens stelling 5 is  $PP_bCP_a$  een koordenvierhoek met omgeschreven cirkel  $K_2$  en volgens stelling 6 is ook  $AP_cP_bP$  een koordenvierhoek. We bewijzen nu dat  $P_bP_c$  en  $P_bP_a$  in elkaars verlengde liggen (figuur 25).

$$\left. \begin{aligned} \angle PP_bP_a &= \frac{1}{2} \text{ bg } PP_a(K_2) = \angle PCP_a = 180^\circ - \angle PCB \\ \text{koordenvierhoek } ABCP &\stackrel{\text{st 4}}{\Rightarrow} \angle PAP_c = 180^\circ - \angle PCB \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\left. \begin{aligned} \angle PP_bP_a &= \angle PAP_c \\ \text{koordenvierhoek } AP_cP_bP &\stackrel{\text{st 4}}{\Rightarrow} \angle PAP_c + \angle P_cP_bP = 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ &\angle PP_bP_a + \angle P_cP_bP = 180^\circ \text{ of } \angle P_cP_bP_a = 180^\circ \end{aligned}$$



In figuur 26 is van een verzameling van vijftien punten op de omgeschreven cirkel de rechten van Wallace getekend. Let op de corresponderende nummering.

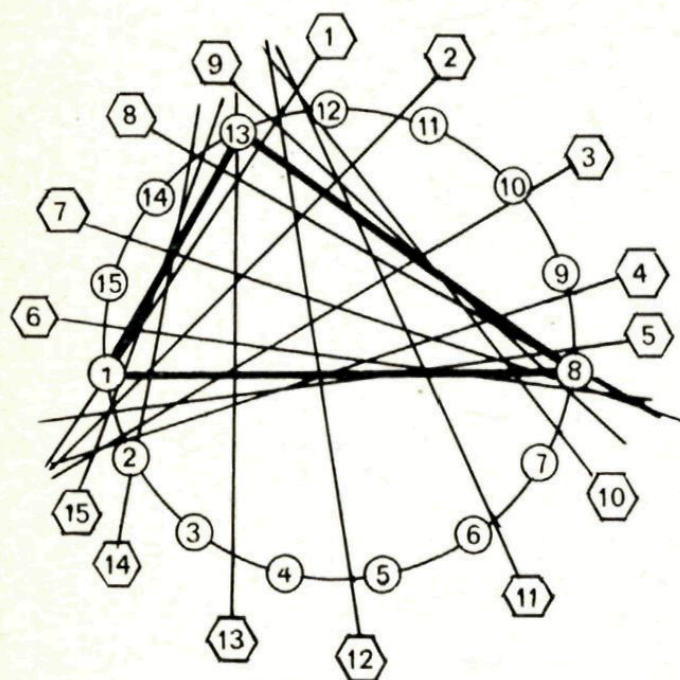


Fig. 26

### *De rechte van Euler*

*Leonhard Euler*, Zwitsers wiskundige, 1707–1783. Hij studeerde in Basel en was van 1727 tot 1741 hoogleraar in de natuurkunde aan de door tsaar Peter de Grote gestichte Academie in Petersburg. In 1744 werd hij directeur van de wiskundige afdeling van de Berlijnse Academie. In 1766 keerde hij voorgoed terug naar Petersburg. Hij werd op 65-jarige leeftijd blind, maar dit weerhield hem er niet van nog 11 jaar zijn wiskundige ontdekkingsreizen voort te zetten. Hij produceerde in het totaal meer dan 800 verhandelingen. Euler is de voornaamste wiskundige van de 18e eeuw en een van de grootste van alle tijden. Hij heeft alle takken van de wiskunde, in het bijzonder algebra, analytische meetkunde, infinitesimaalrekening en mechanica sterk vooruit gebracht.

De punten *H*, *Z* en *M* liggen op één rechte. Deze lijn wordt de rechte van Euler genoemd (figuur 23).



Hulpstelling.  $MC_2 = \frac{1}{2} HC$  (figuur 27)

Fig. 27

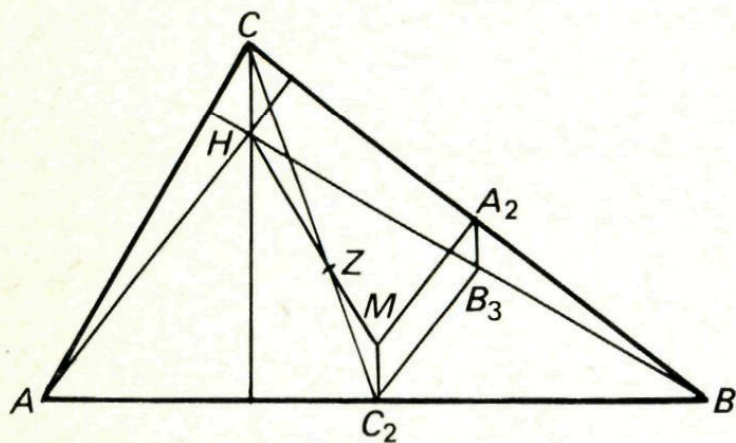
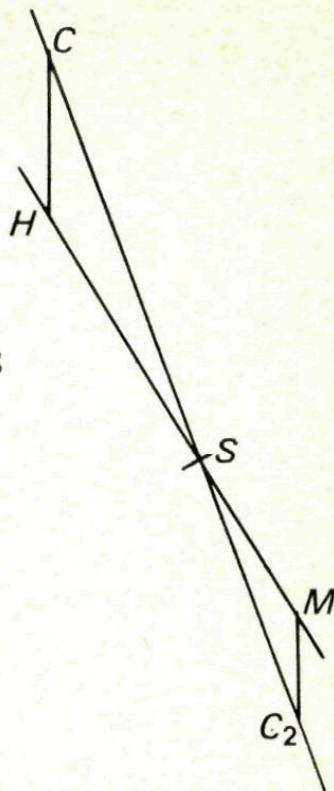


Fig. 28



**Bewijs:** Neem  $C_2$ ,  $A_2$  en  $B_3$  als middens van  $AB$ ,  $BC$  en  $HB$  ( $MC_2$  en  $MA_2$  zijn dus middelloodlijnen)  $\Rightarrow A_2B_3$  is middenparallel in  $\triangle HCB$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_2B_3 = \frac{1}{2} HC \\ A_2B_3 \parallel HC \\ HC \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A_2B_3 \perp AB \\ MC_2 \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow A_2B_3 \parallel MC_2$$

$C_2B_3$  is middenparallel in

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AHB \Rightarrow C_2B_3 \parallel AH \\ MA_2 \perp BC \\ AH \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow MA_2 \parallel AH$$

$\Rightarrow MC_2 = A_2B_3$

$$\left. \begin{array}{l} MC_2 = A_2B_3 \\ A_2B_3 = \frac{1}{2} HC \end{array} \right\} \Rightarrow MC_2 = \frac{1}{2} HC$$

$C_2B_3A_2M$  is een parallelogram

### Bewijs van de rechte van Euler.

Laat nu  $HM$  en  $CC_2$  snijden in  $S$  (figuur 28).

$$\left. \begin{array}{l} HC \perp AB \\ C_2M \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow HC \parallel C_2M \Rightarrow \triangle HSC \simeq \triangle MSC_2 \Rightarrow CS : SC_2 = CH : MC_2 = (\text{hulpst}) 2 : 1.$$

Nu is  $CC_2$  een zwaartelij, door  $S$  verdeeld in  $2 : 1$ , dus moet  $S$  het zwaartepunt  $Z$  zijn  $\Rightarrow H, Z$  en  $M$  op één rechte.

*De rechte door I, Z en N.*

Ook de punten  $I$ ,  $Z$  en  $N$  blijken op één rechte lijn te liggen. Het bewijs is weliswaar niet moeilijker dan het voorgaande maar toch te lang om hier op te nemen. We hopen dat je het zonder bewijs, maar met figuur 23, wilt geloven.



## 6. Een zeer merkwaardige cirkel

Behalve de al genoemde in- en omgeschreven cirkel en aangeschreven cirkels, kent de driehoek nog enkele interessante cirkels, waarvan we er één zullen bekijken. Ter voorbereiding eerst iets over het begrip

*antiparallel*

De rechte  $DE$  in figuur 29 heet in  $\triangle ABC$  antiparallel met zijde  $AB$  als  $\angle CDE = \beta$  (en dus  $\angle CED = \alpha$ ).

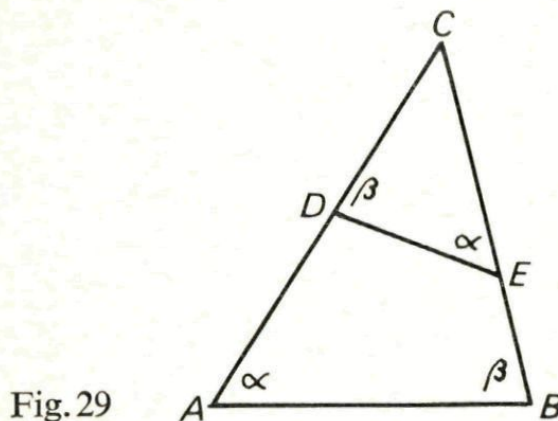


Fig. 29

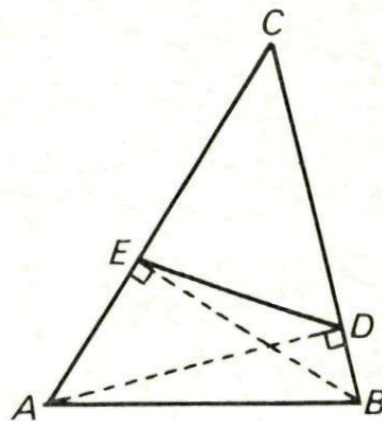


Fig. 30

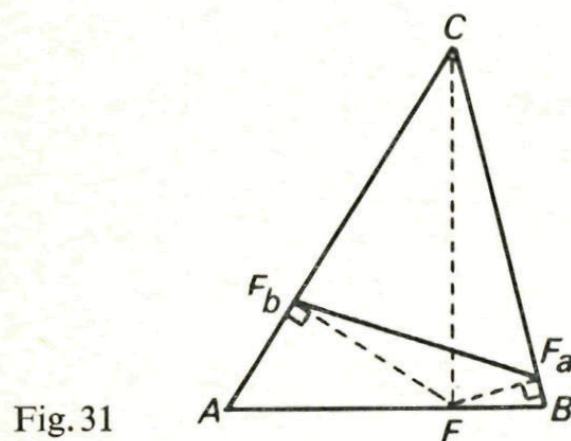


Fig. 31

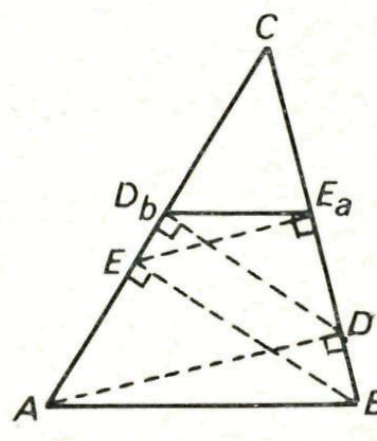


Fig. 32



**Denkertjes**

10. Bewijs dat  $ED$  in figuur 30 antiparallel is met  $AB$ , als  $AD$  en  $BE$  hoogtelijnen zijn. (Gebruik stelling 4 en stelling 6 in  $ABDE$ ).
11. In figuur 31 is  $CF$  een hoogtelijn en zijn  $F_a$  en  $F_b$  de projecties van  $F$  op de zijden  $a$  en  $b$ . Bewijs dat  $F_bF_a$  antiparallel is met  $AB$ . ( $F_bFF_aC$  heeft een omschreven cirkel. Bewijs achtereenvolgens  $\angle CF_bF_a = \angle CFF_a$  en  $\angle CFF_a = \beta$ ).
12. Bewijs dat in figuur 32  $D_bE_a \parallel AB$ .
13. Als gegeven is dat een punt op de omschreven cirkel van een driehoek ligt op zijn eigen rechte van Wallace, wat is dan bekend over dit punt en wat over zijn rechte van Wallace?
14. Wat is bekend over de ligging op de omgeschreven cirkel van de punten waarvan de rechte van Wallace samenvalt met een zijde van de driehoek?



## De negenpuntscirkel van Feuerbach

Karl Wilhelm Feuerbach, Duits wiskundige, 1800–1834. Hij was docent aan het gymnasium te Erlangen. Over de nu te bespreken cirkel en nog enkele feiten over de driehoek publiceerde hij in 1822 een boekje.

De nu volgende rondweg verbindt negen markante punten met elkaar, vandaar dat men vaak over de negenpuntscirkel spreekt. Over welke negen punten gaat het dan? De voetpunten van de hoogtelijnen, de middens van de zijden en de middens van  $HA$ ,  $HB$  en  $HC$  van de driehoek (figuur 33) liggen op één cirkel, de zogenaamde cirkel van Feuerbach.

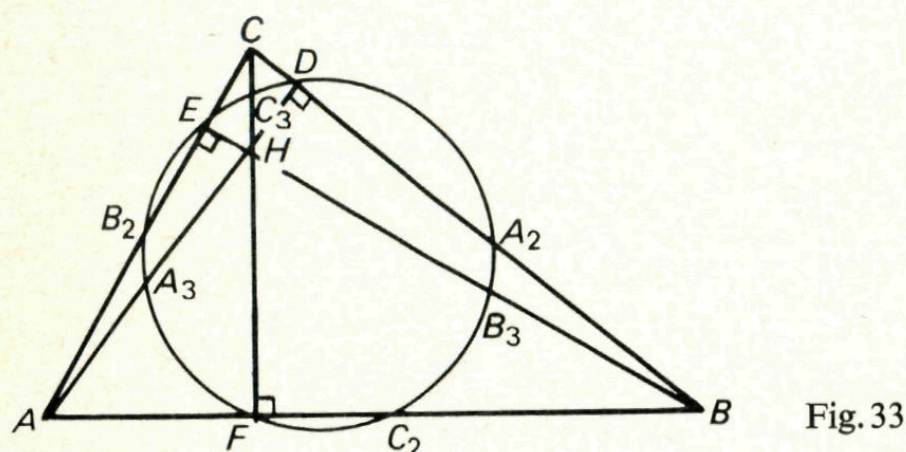


Fig. 33

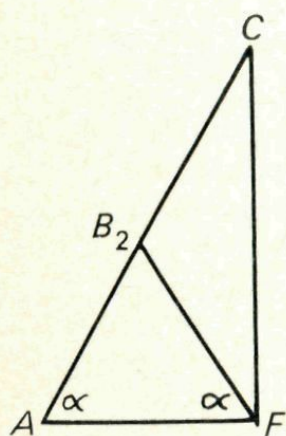


Fig. 34

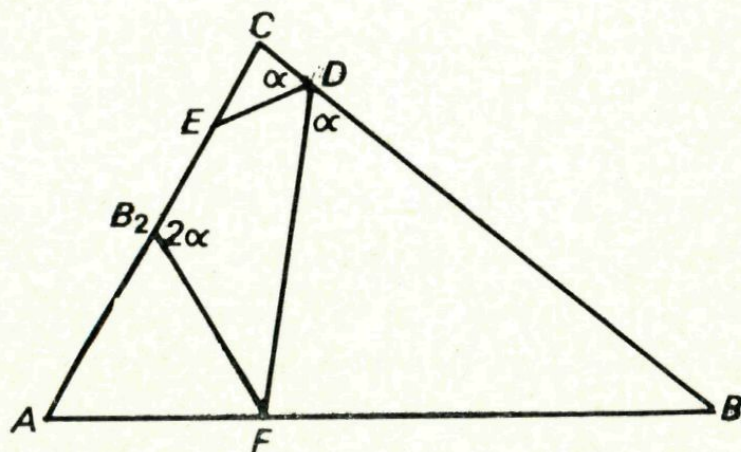


Fig. 35

Bewijs: In rechthoekige  $\triangle AFC$  (figuur 34) is  $FB_2$  de zwaartelijs naar de schuine zijde  $\Rightarrow FB_2 = \frac{1}{2} AC = AB_2 \Rightarrow \angle AFB_2 = \alpha \Rightarrow \angle CB_2F = \alpha + \angle AFB_2 = 2\alpha$ . Volgens denkertje 10 zijn  $DE$  en  $DF$  antiparallellen (figuur 35), zodat  $\angle EDF = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \angle EB_2F \Rightarrow FDEB_2$  is een koordenvierhoek (stelling 5)  $\Rightarrow B_2$  ligt op de cirkel door  $E, F$  en  $D$ . Op dezelfde wijze kan bewezen worden dat  $A_2$  en  $C_2$  op deze cirkel liggen.



Volgens stelling 5 is  $AFHE$  een koordenvierhoek (figuur 36). De omgeschreven cirkel heeft  $A_3$  als middelpunt  $\Rightarrow \angle EA_3F = \text{bg } EF = 2\alpha$  (volgens stelling 3 is  $\frac{1}{2} \text{ bg } EF = \alpha$ ). Nu geldt  $\angle EA_3F + \angle FDE = 180^\circ \Rightarrow$  is een koordenvierhoek  $\Rightarrow A_3$  ligt op de cirkel door  $D, E$  en  $F$ . Op dezelfde wijze kan bewezen worden dat  $B_3$  en  $C_3$  op deze cirkel liggen, waarna het bewijs compleet is.

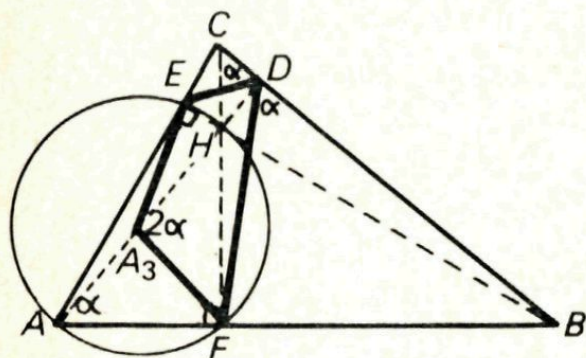


Fig. 36

Onze kennis van de negenpuntscirkel is nog lang niet compleet. Zonder bewijs vermelden we nog drie merkwaardigheden.

*Het middelpunt van de negenpuntscirkel ligt op de rechte van Euler en wel in het midden van  $HM$ .*

*De straal van de negenpuntscirkel is gelijk aan de helft van die van de omgeschreven cirkel van  $\triangle ABC$ .*

*De negenpuntscirkel raakt aan de ingeschreven cirkel, zowel als aan de aangeschreven cirkels.*

De bezienswaardigheden in het land van de driehoek zijn nog lang niet alle met een bezoek vereerd. We moeten onze reis hier echter beëindigen, hopend dat je de tocht met genoeg hebt meegemaakt.



## 7. De gebruikte stellingen

Stelling 1. De zwaartelijnen in een driehoek verdelen elkaar in de verhouding 1 : 2. (figuur 37)

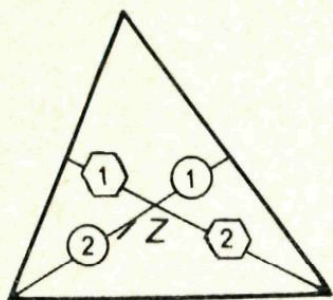


Fig. 37

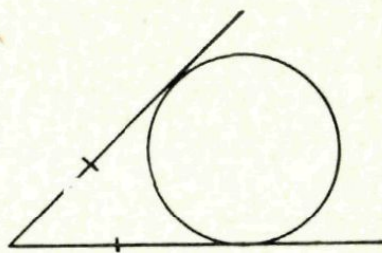


Fig. 38

Stelling 2. Trekt men vanuit een punt buiten een cirkel twee raaklijnen aan die cirkel, dan zijn de raaklijnstukken gelijk. (figuur 38)

Definitie. Onder een omtrekshoek van een cirkel verstaat men de hoek gevormd door twee koorden met een gemeenschappelijk eindpunt of gevormd door een raaklijn en een koorde die het raakpunt als een eindpunt heeft. (figuur 39 en 40)

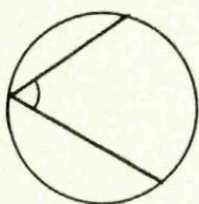


Fig. 39

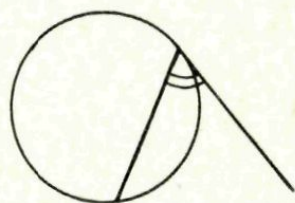


Fig. 40

Stelling 3. Denkt men de cirkel verdeeld in 360 gelijke booggraden, dan is de omtrekshoek gelijk aan de helft van de boog die zich binnen de hoek bevindt.

Definitie. Een koordenvierhoek is een vierhoek, waarvan de vier hoekpunten op één cirkel liggen.

Stelling 4. In een koordenvierhoek is de som van de overstaande hoeken  $180^\circ$ .

Stelling 5. Als in een vierhoek de som van een paar overstaande hoeken  $180^\circ$  is, is die vierhoek een koordenvierhoek.

Stelling 6. Als in een vierhoek  $ABCD$  geldt  $\angle ADB = \angle ACB$ , dan is  $ABCD$  een koordenvierhoek (figuur 41).

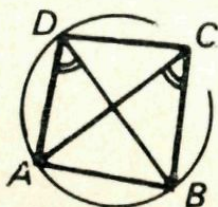


Fig. 41



## 8. Oplossingen van de denkertjes

$$1. \frac{9 \times 14 \times AF}{7 \times 15 \times 12} = 1 \Rightarrow AF = 10$$

$$2. \frac{\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b \times \frac{1}{2}c}{\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b \times \frac{1}{2}c} = 1 \Rightarrow \text{de zwaartelijnen gaan door één punt.}$$

$$3. \frac{PC \times QA \times SB}{PB \times QC \times SA} = \frac{(s-c)(s-a)(s-b)}{(s-b)(s-c)(s-a)} = 1 \Rightarrow AP, BQ \text{ en } CS \text{ gaan door één punt.}$$

$$5. \frac{(s-c)(s-a)(s-b)}{(s-b)(s-c)(s-a)} = 1 \Rightarrow AU, BV \text{ en } CW \text{ gaan door één punt.}$$

$$6. \angle BTA' = \frac{1}{2} \text{ bg } BA' = \angle BCA' = 60^\circ \text{ en } \angle ATB = 180^\circ - \angle AC'B = 120^\circ \Rightarrow \angle ATA' = 180^\circ$$

$$7. \begin{aligned} ASVQ \text{ is een koordenvierh} &\Rightarrow \angle SVQ = 180^\circ - \alpha \\ QVPC \text{ is een koordenvierh} &\Rightarrow \angle QVP = 180^\circ - \gamma \end{aligned} \Rightarrow \angle SVP = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \gamma) = \alpha + \gamma = 180^\circ - \beta \Rightarrow \angle SVP + \beta = 180^\circ \Rightarrow SBPV \text{ is een koordenvierhoek} \Rightarrow \text{De cirkel door } S, B \text{ en } P \text{ gaat ook door } V.$$

8. Uit  $P_1 = P_2$  volgt dat  $\alpha = \gamma = \beta \Rightarrow$  de driehoek is gelijkzijdig (figuur 42).

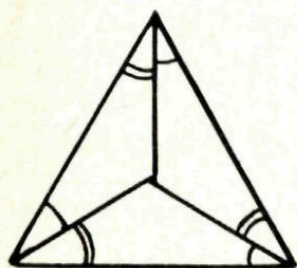


Fig. 42

9. Zo'n hoekpunt vormt, verbonden met  $A$  en  $B$ , een driehoek met constante tophoek  $(180^\circ - \beta)$  en basis  $AB$ . Een stelling zegt dat de toppen op een cirkelboog door  $A$  en  $B$  liggen.

$$10. \angle AEB = \angle ADB \Rightarrow ABDE \text{ is een koordenvierhoek} \Rightarrow \angle AED = 180^\circ - \beta \Rightarrow \angle CED = 180^\circ - \angle AED = 180^\circ - (180^\circ - \beta) = \beta \Rightarrow ED \text{ is antiparallel met } AB$$

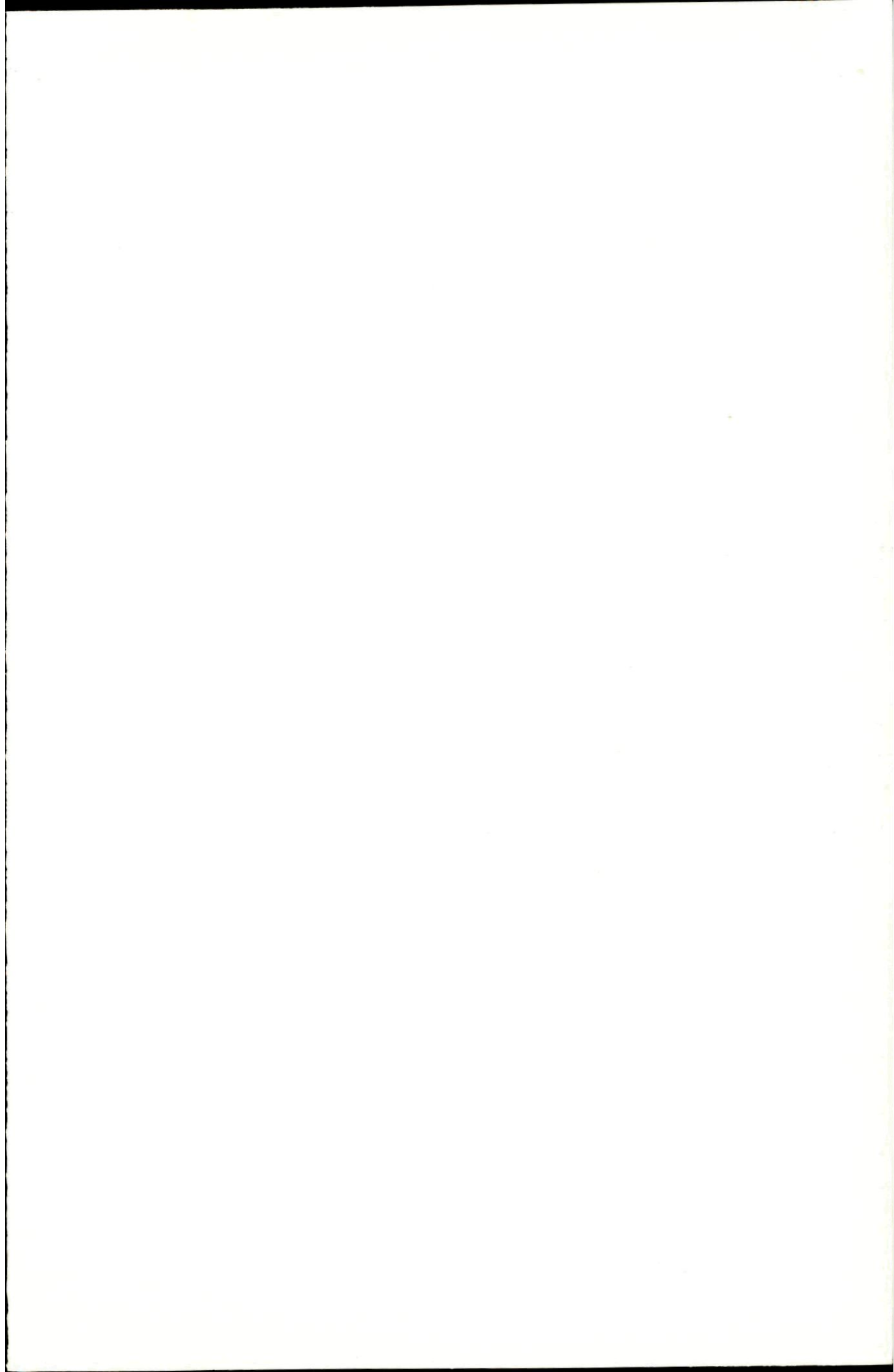
$$11. \angle FF_bC + \angle CF_aF = 2 \times 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow F_bFF_aC \text{ is een koordenvierhoek met een omgeschreven cirkel} \Rightarrow \angle CF_bF_a = \frac{1}{2} \text{ bg } CF_a = \angle CFF_a = 90^\circ - \angle F_aFB = \beta \text{ (in rechthoekige } \triangle FF_aB) \Rightarrow F_bF_a \text{ is antiparallel met } AB.$$

$$12. \left. \begin{aligned} D_bE_a &\text{ is antiparallel met } ED \\ ED &\text{ is antiparallel met } AB \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_bE_a \parallel AB$$

13. Zo'n punt is een hoekpunt en de rechte van Wallace de hoogtelijn uit dat hoekpunt van de driehoek. Zie de rechten 1, 8 en 13 van figuur 26.

14. Zo'n punt ligt diametraal tegenover een hoekpunt van de driehoek.







## *Zakelijke mededelingen*

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

### REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.

BRUNO ERNST, Scherpenzeel (Gld.).

C. VAN DER LINDEN, Barendrecht.

A. F. VAN TOOREN, Den Haag.

R. H. PLUGGE, Amstelveen.

G. A. VONK, Den Haag.

### REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Eelde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden.

### ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,60 per jaargang. Voor anderen f 4,16.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff NV, Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.