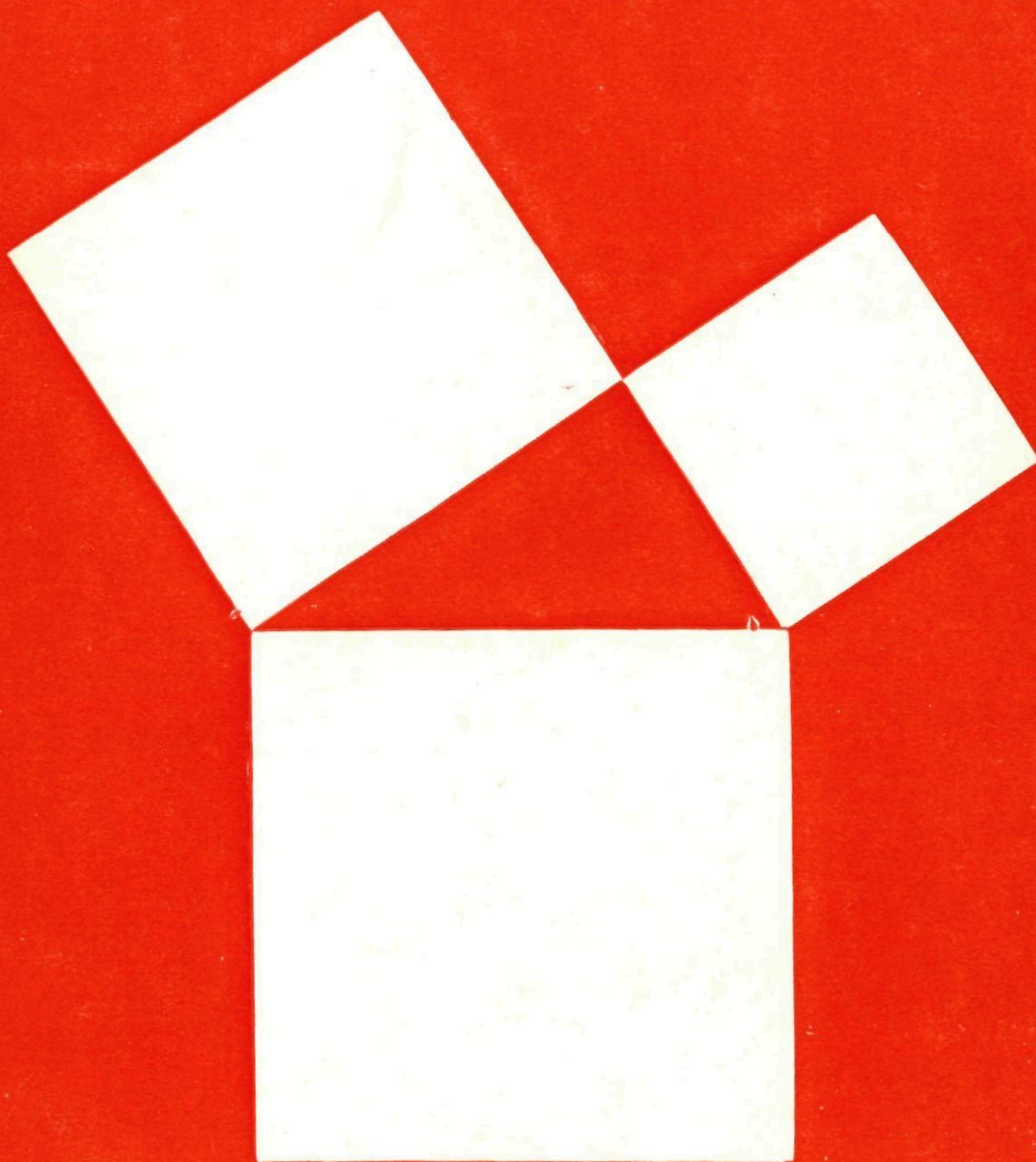


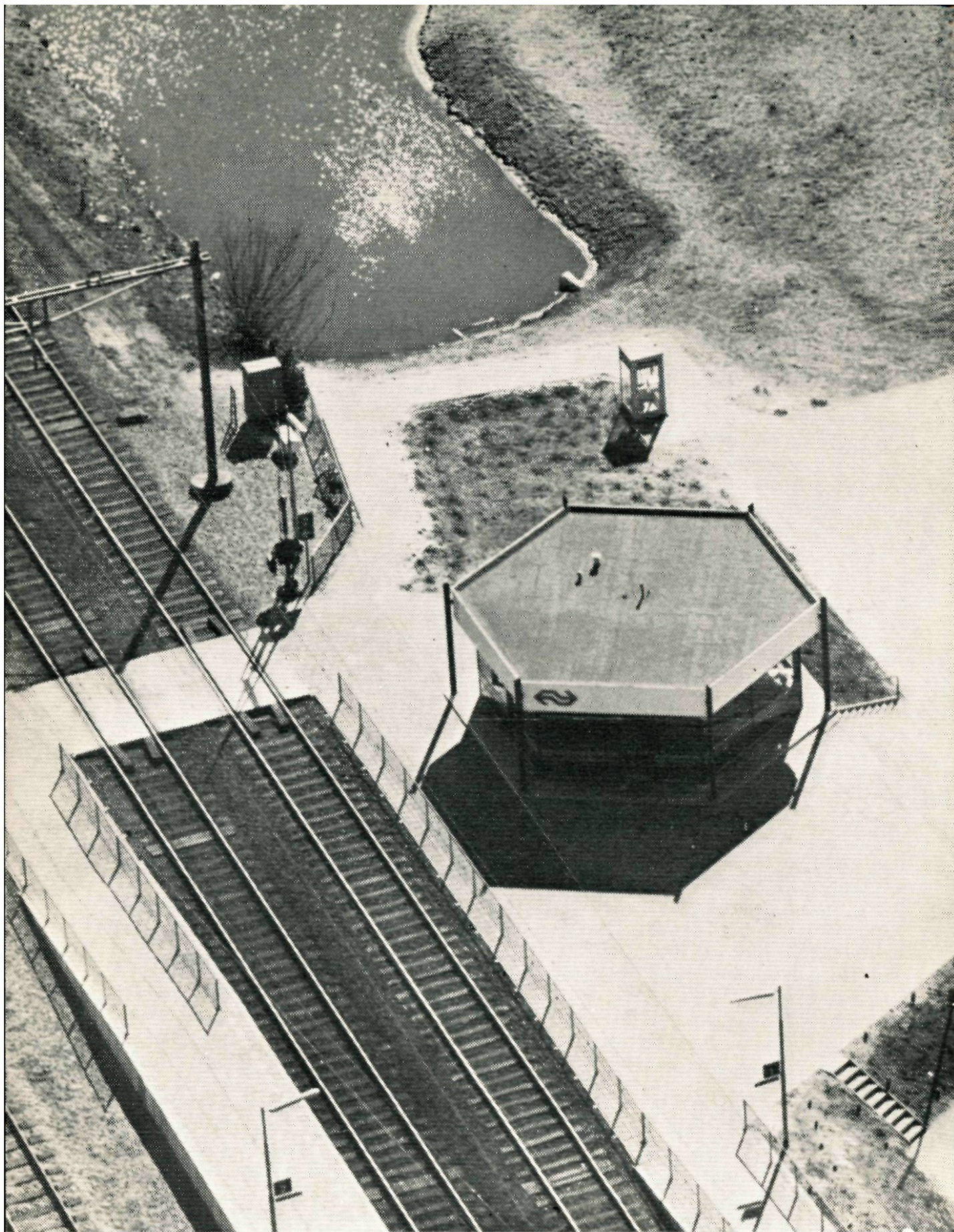
PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

6

*negende jaargang
1969/1970*



Het moderne forensenstationnetje te Haren heeft de vorm van een regelmatige zeshoek.

pythagoras

jaargang 9 no 6

In dit nummer . . .

vermelden we, om te beginnen, de winnaars van de lootprijzen voor de Denkertjes in het derde en vierde nummer van deze jaargang. Dit zijn respectievelijk

W. Hoyer te Weert en J. de Geus te Abbenbroek.

De eindstand van de ladderwedstrijd is geworden:

1. M. M. Tilanus, Hilversum, 385 punten
2. A. Hoekstra, Naarden, 380 punten
3. G. Renardel de Lavalette, Rotterdam, 357 punten
4. R. Oudhof, Amsterdam, 345 punten
5. C. Jacobs, Amsterdam, 338 punten
6. G. Sijbrand, Zaandam, 336 punten
7. H. Poorthuis, Hilversum, 307 punten
8. B. Arnold, Utrecht, 306 punten

Mathemadics

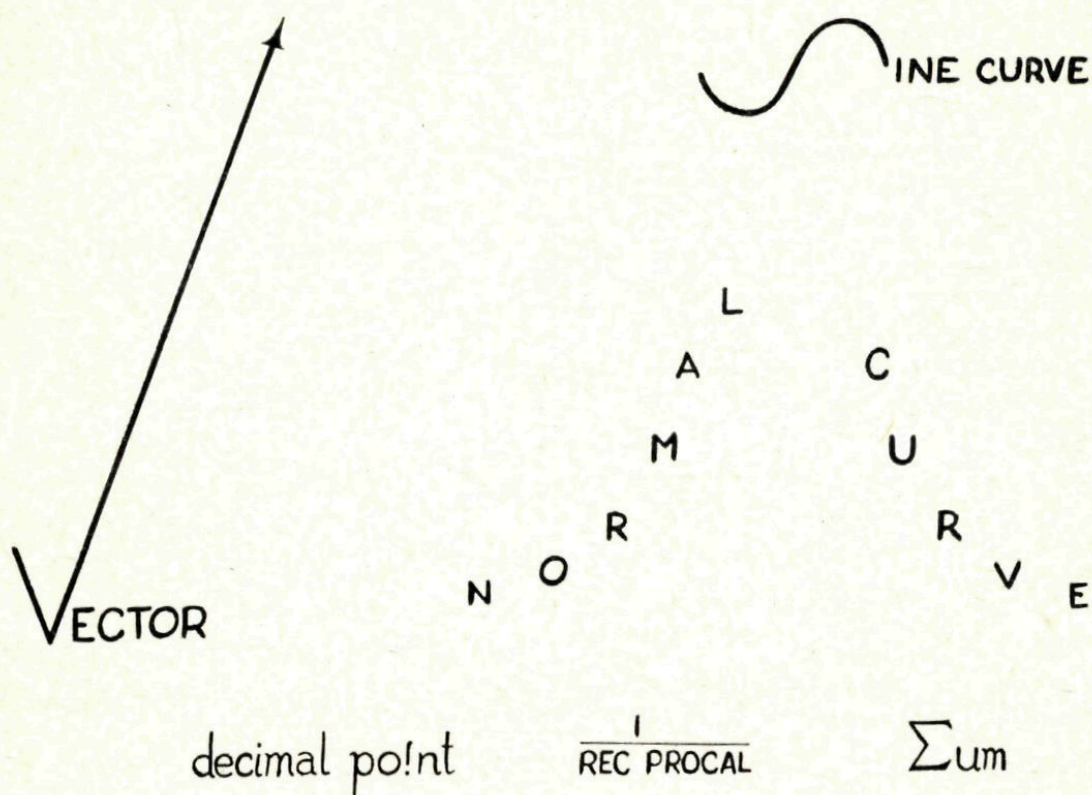
In de vorige jaargang hebben we de Mathemadics geïntroduceerd, waarbij we vermeldten dat deze door Martin Gardner in de Verenigde Staten waren gelanceerd. De heer H. Struik te Duiven (Gld.) was zo vriendelijk ons een fotokopie van een pagina uit het tijdschrift *The American Statistician* van december 1964 te sturen, waaruit blijkt dat de oorsprong van deze wiskundige grapjes ouder is dan we dachten. Als „uitvinder” wordt in bovenvermeld tijdschrift genoemd Robert Carola, die aan zijn „ontdekking” bekendheid gaf in het beroemde tijdschrift *Playboy*. De mathemadics vormen een aangepaste versie, geanonnceerd onder de naam

STATISTICAL WORD PLAY

LINTON C. FREEMAN and ROLAND WERNER

Syracusa University

This word game, developed by Robert Carola has appeared several times in Playboy. Here we are suggesting a new version called Statistical Word Play.



De heer A. van Setten te Rotterdam stuurde ons een aantal vondsten, waarvan we de volgende vermelden

dif'f'erentiëren.

Ook kregen we van hem een goniometrisch ezelsbruggetje, waarvan de voortzetting overigens dubieus genoemd moet worden:

$$\begin{aligned}
 \sin 0^\circ &= \frac{1}{2}\sqrt{0} \\
 \sin 30^\circ &= \frac{1}{2}\sqrt{1} \\
 \sin 45^\circ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \\
 \sin 60^\circ &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \\
 \sin 90^\circ &= \frac{1}{2}\sqrt{4}
 \end{aligned}$$

Misschien wat gezocht, maar toch wel aardig.

In het derde nummer hebben we gevraagd ons werkstukken in de „van saai tot fraai“-trant toe te sturen. We hebben een keuze gemaakt uit de inzendingen, te vinden op verschillende plaatsen in deze aflevering.

De verzending van de „Boom van Pythagoras” heeft helaas enige stagnatie ondervonden. Inmiddels zijn de vele bestellingen uitgevoerd. We nemen dan ook aan dat een ieder de plaat in zijn bezit heeft, voorzover deze was aangevraagd.

In dit nummer zijn wat minder Denkertjes opgenomen dan normaal. Ze kunnen je echter lang genoeg bezig houden! De oplossingen staan achterin, dus inzenden is niet de bedoeling.

Ook in dit nummer vragen we aandacht voor regelmatige veelhoeken, deze keer niet om vloeren mee te beleggen, maar om de construeerbaarheid te onderzoeken. Zie bladzijde 128. Regelmatige veelhoeken vinden van oudsher toepassing in architectuur en beeldende kunst. Zo is bijvoorbeeld op de binnenzijde van het omslag één van de moderne forensenstationnetjes van de N.S. afgebeeld, gebouwd in de vorm van een regelmatige zeshoek

We danken de lezers voor de aandacht die ze ook aan deze jaargang weer hebben willen geven en voor de vele reacties die we hebben ontvangen. We hopen dat het ons vergeven wordt, wanneer we niet alle inzenders persoonlijk hebben beantwoord. En voor de rest: Vol goede moed op naar de volgende jaargang, waarin het tweede lustrum wordt gevierd, dat zeker niet ongemerkt voorbij zal gaan.



° Twee problemen

Als overeenkomst tussen de volgende twee problemen zou men kunnen vermelden dat geen van beide eenvoudig genoemd kan worden, terwijl beide toch zonder veel voorkennis en ook zonder veel rekenwerk kunnen worden opgelost. Het eerste probleem is van meetkundige aard, het tweede is een prachtig voorbeeld hoe met een minimum aan gegevens een maximum aan resultaat kan worden bereikt.

°° 1. *De superspinneweg.*

„In een gesloten doos, waarvan de ribben 12, 12 en 30 cm lang zijn, bevindt zich een spin. Deze zit loerend tegen de voorwand, 1 cm onder het midden van EF (figuur 1).

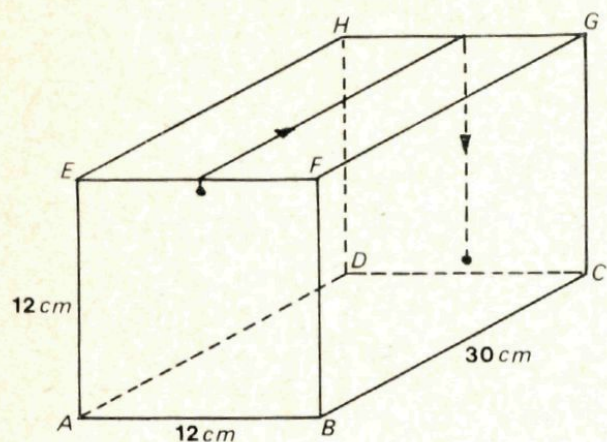


Fig. 1

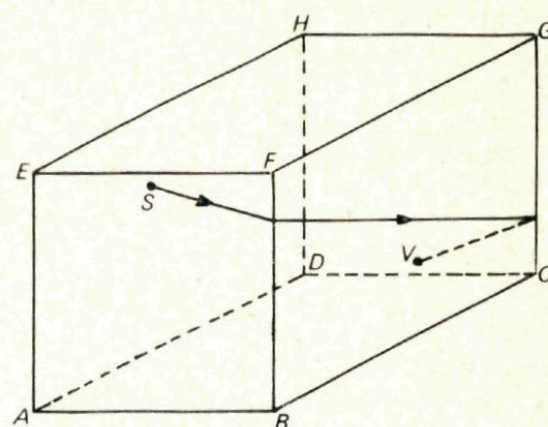


Fig. 2

Een verzorger stopt een vlieg in de doos. Het beestje strijkt neer op de achterwand, 1 cm boven het midden van CD . De spin, in het bezit van superspinnehersens, weet onmiddellijk de kortste weg langs de wanden van de doos en snelt op zijn door angst verlamde prooi toe”.

Velen denken dat de in figuur 1 getekende weg, langs voorwand, bovenwand en achterwand, de kortste is.

Hebben zij gelijk?

In figuur 2 is een weg getekend langs voorwand, zijwand en achterwand, in figuur 3 een weg langs voorwand, zijwand, bodem en achterwand, en tenslotte in figuur 4 een weg langs voorwand, bovenwand, zijwand, bodem en achterwand.

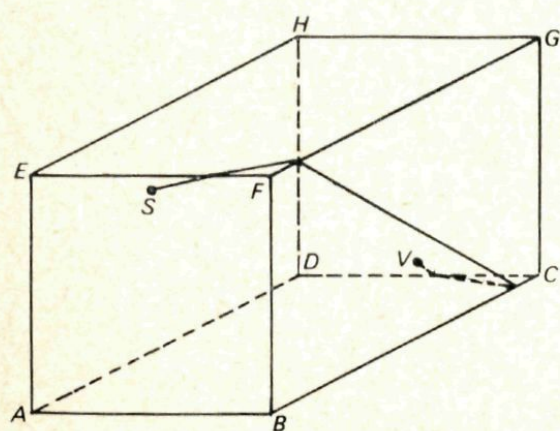


Fig. 3

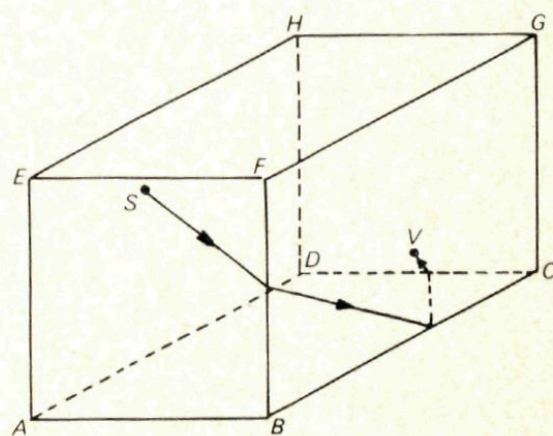


Fig. 4

De vraag is: Hoe kom je er toe de getekende wegen te kiezen, en zijn ze korter of langer dan die van figuur 1?

°° 2. *Getallenpaar.*

Iemand neemt twee verschillende natuurlijke getallen in gedachten, beide groter dan 1 en samen maximaal 100.

Aan zijn vriend Piet deelt hij het produkt p van beide getallen mee, zijn vriend Simon wordt op de hoogte gesteld van de som s . Hij vraagt beide vrienden hun kennis voor elkaar verborgen te houden en door middel van een gesprek te proberen achter de twee getallen te komen.

Het volgende gesprek ontwikkelt zich:

Piet: „Ik weet het niet.”

Simon: „Dat wist ik al.”

Piet: „Nu weet ik het”.

Simon: „Nu weet ik het ook”.

Bepaal het getallenpaar!

Misschien heb je het gevoel dat aan dit probleem kop noch staart te vinden is. We zullen je daarom een eindje op weg helpen. Uit het gesprek blijkt dat het getallenpaar beslist niet willekeurig is gekozen, maar integendeel zeer zorgvuldig bepaald. Ook blijkt dat Piet en Simon de hun ter beschikking staande gegevens tot het uiterste uitbuiten. Piet kent het produkt van beide getallen. Wat kun je afleiden uit zijn eerste uitspraak? Deze kan niet anders betekenen dan dat de twee gekozen getallen geen priemgetallen zijn. Immers, als bijvoorbeeld $p = 77$ zou zijn, dan zou Piet direct geweten hebben dat het getallenpaar bestaat uit 7 en 11, de enige natuurlijke getallen (groter dan 1) waarvan het product 77 is. Wat kan Simon nu bedoelen met zijn uitspraak: Dat wist ik al? Een mooie vraag om je mee te laten zitten.

Een bespreking van beide problemen vind je op bladzijde 138 en volgende.



° Van saai tot fraai

De beide artikelen „Van saai tot fraai” in de nrs. 2 en 3 van deze jaargang hebben menigeen aan het tekenen gezet.

We vermelden en plaatsen een drietal inzendingen.

Kete Ramaker, Binnenbaan 139 te Rotterdam gebruikte drie regelmatige zeshoeken, handig geplaatst, waarin $O(k)$ werkelijk origineel is toegepast. Het lijnenspel wordt nog boeiender als de tekening op een afstand wordt bekeken. Zie de figuur op bladzijde 142.

Riny v.d.Brand, Kerkendijk te Schijndel komt met een ontwerp van een geheel ander karakter. Men kan bewondering hebben voor het oergetuld, dat ze had om dit resultaat te bereiken. Zie figuur bladzijde 127. Hans Meinders, Molenstraat 20 te Putten tapte uit weer een ander vaatje. Op een stuk spaanderplaat heeft hij in vier vierkanten $O(k)$ toegepast met spijkertjes. De potloodlijnen zijn vervangen door glimmend draad.

De laatste vierkanten laten zien, dat hij wat moeite had met de techniek maar lettend op zijn leeftijd – hij is 12 jaar en zit in de brugklas – verdient zijn produkt een eervolle vermelding. Zie de foto op bladzijde 134.



1. Misschien heb je nog nooit gehoord van het harmonisch gemiddelde van twee getallen a en b . Daaronder verstaan we het omgekeerde van het gemiddelde van hun omgekeerden, of wel $\frac{2ab}{a+b}$.

Dit harmonische gemiddelde speelt in de onderstaande opgave een grote rol.

- a Bewijs dat het harmonisch gemiddelde van twee verschillende, positieve getallen kleiner is dan het „gewone” gemiddelde van die twee getallen.
b Als n een willekeurig positief geheel getal is, dan is de som van de omgekeerden van de $2n + 1$ op n volgende natuurlijke getallen

$$n + 1, n + 2, \dots, 3n + 1$$

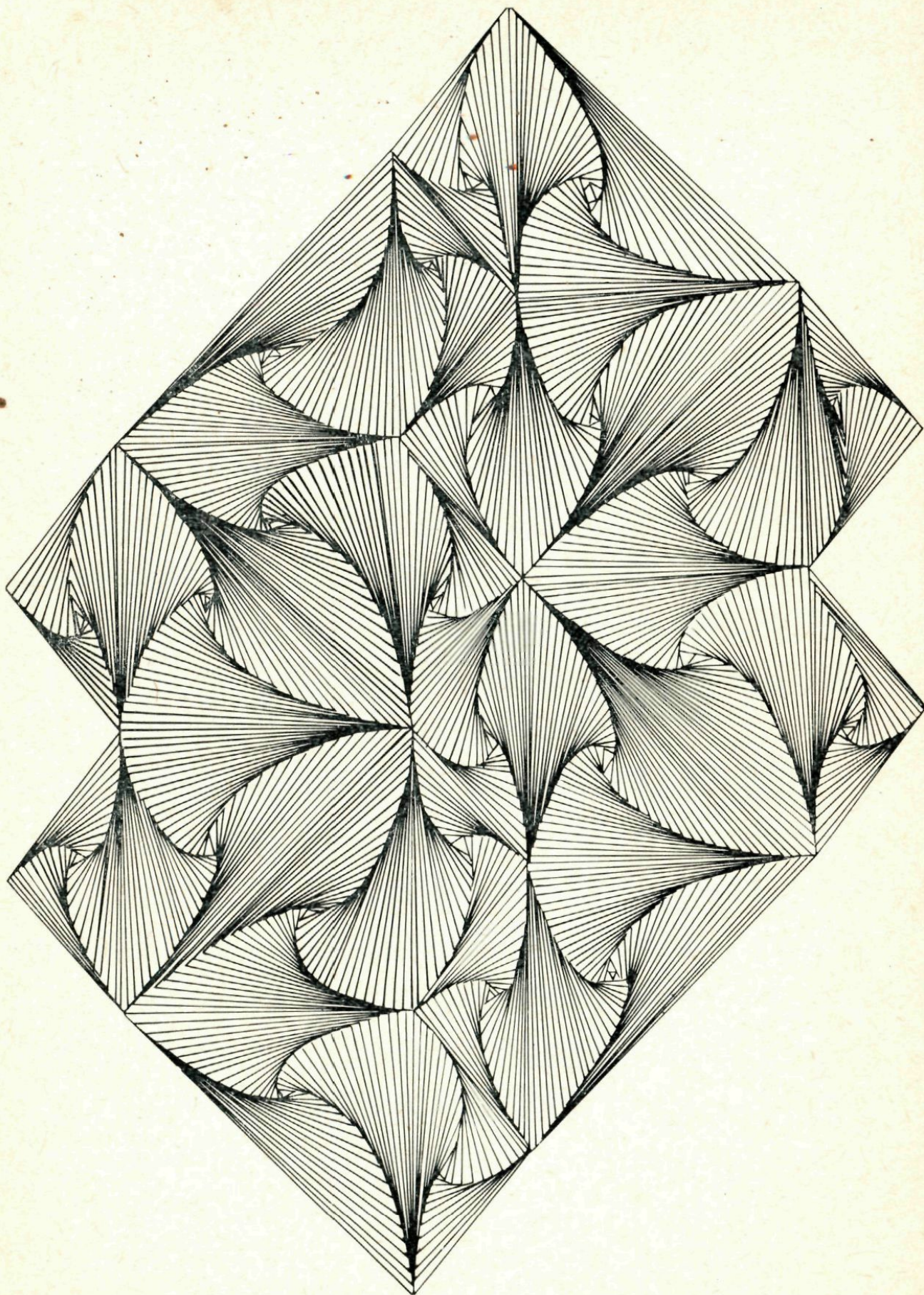
groter dan 1. Bewijs dat.

- c Laat zien dat $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{67} > 4\frac{1}{2}$ is.

- d Bij elk positief getal a bestaat er een positieve, gehele n zo dat

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > a$$

is; bewijs dat.



"Van saai tot fraai", figuur ingezonden door R. van de Brand, Schijndel.

°Regelmatige veelhoeken

Onder het hoofd Legproblemen hebben we ons in het vierde nummer van deze jaargang afgevraagd, hoe je met regelmatige veelhoeken een vlak kunt opvullen. Het bleek dat we hierbij vooral naar de hoeken van de veelhoek moesten kijken. Een andere, al zeer oude vraag, die men zich over regelmatige veelhoeken kan stellen is, *welke met behulp van passer en liniaal geconstrueerd kunnen worden.*

Passer en liniaal zijn de klassieke hulpmiddelen van de wiskundige, die constructies wil uitvoeren. Ook in het vierde nummer van deze jaargang heb je kunnen lezen dat alle constructies, die uitvoerbaar zijn met passer en liniaal, ook met *alleen* een liniaal en één in het vlak van tekening aanwezige cirkel kunnen worden uitgevoerd. Met deze *liniaalconstructies* is de naam Steiner verbonden. In vroegere jaargangen is wel eens geschreven over *passermeetkunde*, waaraan de naam Masscheroni is verbonden. Gebleken is namelijk, dat ook de liniaal gemist kan worden en dat je dus met alleen een passer alle constructies kunt uitvoeren. Je moet daarbij wel bedenken, dat van een lijn bij een constructie slechts enkele punten worden gebruikt.

Eén van de eigenschappen van regelmatige veelhoeken is, dat ze een omgeschreven cirkel bezitten. Ook een ingeschreven cirkel, maar dat is voor de constructie minder interessant. Het is juist de omgeschreven cirkel, die als uitgangspunt wordt genomen bij het tekenen. De plaats van de hoekpunten van de veelhoek is daarmee niet volledig, maar toch al voor een deel bepaald. Het gaat er in feite alleen nog om, op de omtrek van de cirkel een aantal gelijke koorden achter elkaar af te passen, zodanig dat het eindpunt van de laatste en het beginpunt van de eerste samenvallen. Het eenvoudigst is natuurlijk de regelmatige zeshoek, waarvan de zijde even lang is als de straal van de omgeschreven cirkel. Uit de construeerbaarheid van de regelmatige zeshoek volgt meteen die van de gelijkzijdige driehoek, alsmede die van regelmatige twaalfhoek, vierentwintighoek, enzovoort.

Ook de regelmatige vierhoek, achthoek, zestienhoek, enzovoort kun je gemakkelijk construeren met alleen een passer en een liniaal als hulpmiddelen.

Zijn er nog meer regelmatige veelhoeken construeerbaar?

Dit is inderdaad het geval. Bijvoorbeeld de vijfhoek, tienhoek, twintighoek, enzovoort, vormen een serie construeerbare regelmatige veelhoeken. Dit betekent eigenlijk, dat de zijde van deze figuren op een zodanige manier in de straal van de omgeschreven cirkel is uit te drukken, dat uitgaande van de straal, de lengte van de zijde kan worden geconstrueerd. Dit klinkt misschien wat ingewikkeld, kijk echter maar weer even

naar de zeshoek. Als je de straal van de omgeschreven cirkel r noemt, en de zijde van de zeshoek a , dan volgt uit de betrekking $r = a$, dat je uitgaande van de straal op een wel zeer eenvoudige manier de zijde kunt vinden. We noemen deze zijde a_6 . Voor de vierhoek geldt $a_4 = r\sqrt{2}$, ook gemakkelijk te construeren.

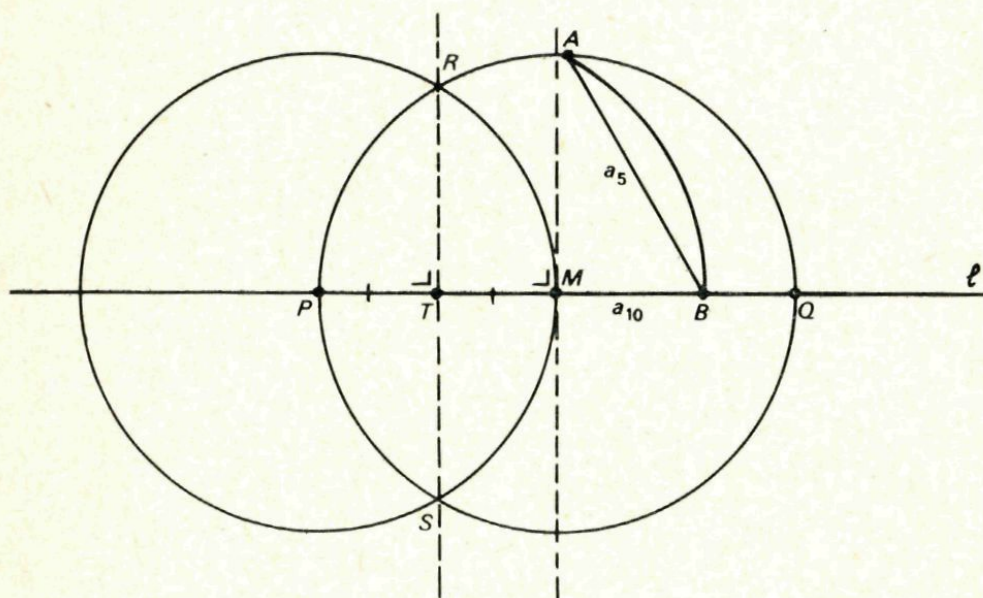


Fig. 5

De vijfhoek en de tienhoek zijn wat lastiger, je kunt echter in de meeste meetkundeboeken wel vinden dat geldt: $a_5 = \frac{1}{2}r\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$ en $a_{10} = \frac{1}{2}r(-1 + \sqrt{5})$.

Voor de constructie: zie figuur 5.

De volgorde is:

1. Een cirkel met middelpunt M en straal r .
2. Een lijn door M , snijpunten met de cirkel P en Q .
3. Een cirkel met middelpunt P en straal r .
4. De loodlijn in M op l , snijpunt met de tweede cirkel is A .
5. Cirkel met middelpunt T en straal TA .

Nu blijkt dat $MB = a_{10}$ en $AB = a_5$.

Bewijs: $AM = r$, $TM = \frac{1}{2}r$, met de stelling van Pythagoras volgt dat $TA = \frac{1}{2}r\sqrt{5} = TB$.

Uit $TB = \frac{1}{2}r\sqrt{5}$ en $TM = \frac{1}{2}r$ volgt dat $MB = \frac{1}{2}r\sqrt{5} - \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}r(-1 + \sqrt{5})$.

Uit $MB = \frac{1}{2}r(-1 + \sqrt{5})$ en $AM = r$ volgt $AB = \frac{1}{2}r\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$.

De vraag welke regelmatige veelhoeken met passer en liniaal geconstrueerd kunnen worden is in zijn algemeenheid definitief beantwoord door de Duitse wiskundige Carl Friedrich Gauss, in ongeveer 1800.

Noemen we het aantal hoekpunten van de veelhoek n , dan blijkt te moeten gelden dat

1. n te schrijven is als $n = 2^s \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_k$,
2. s een natuurlijk getal is (eventueel 0),
3. p_1, p_2 , enzovoort, onderling verschillende priemgetallen zijn, van de vorm $2^m + 1$, met m een natuurlijk getal.

We gaan niet in op de afleiding van deze formule, wel zullen we aan de hand ervan zien welke veelhoeken tot $n = 25$ construeerbaar zijn.

In de eerste plaats gaan we hiertoe na welke priemgetallen van de vorm $2^m + 1$ zijn:

$$2 = 2^0 + 1 \qquad 5 = 2^2 + 1$$

$$3 = 2^1 + 1 \qquad 17 = 2^4 + 1$$

Alleen van deze vier priemgetallen kunnen we dus gebruik maken:

n	formule van Gauss	construeerbaar
3	$3 = 2^0 \cdot 3$	ja
4	$4 = 2^2$	ja
5	$5 = 2^0 \cdot 5$	ja
6	$6 = 2^1 \cdot 3$	ja
7	$7 = 2^0 \cdot 7$	nee
8	$8 = 2^3$	ja
9	$9 = 2^0 \cdot 3 \cdot 3$	nee
10	$10 = 2^1 \cdot 5$	ja
11	$11 = 2^0 \cdot 11$	nee
12	$12 = 2^2 \cdot 3$	ja
13	$13 = 2^0 \cdot 13$	nee
14	$14 = 2^1 \cdot 7$	nee
15	$15 = 2^0 \cdot 3 \cdot 5$	ja
16	$16 = 2^4$	ja
17	$17 = 2^0 \cdot 17$	ja
18	$18 = 2^1 \cdot 3 \cdot 3$	nee
19	$19 = 2^0 \cdot 19$	nee
20	$20 = 2^2 \cdot 5$	ja
21	$21 = 2^0 \cdot 3 \cdot 7$	nee
22	$22 = 2^1 \cdot 11$	nee
23	$23 = 2^0 \cdot 23$	nee
24	$24 = 2^3 \cdot 3$	ja
25	$25 = 2^0 \cdot 5 \cdot 5$	nee

Overzien we de lijst, dan treffen we daarop de reeds genoemde veelhoeken aan, maar bovendien, en wellicht tot je verbazing: de zeventienhoek.

Voor het geval je niet wilt geloven dat deze inderdaad geconstrueerd kan worden, verwijzen we je naar figuur 6.

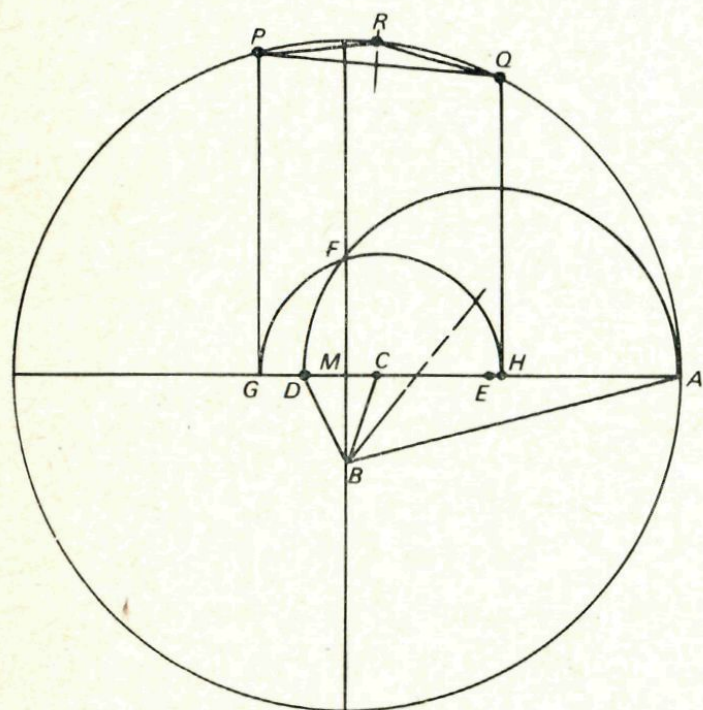


Fig. 6

De volgorde is:

1. Cirkel met middelpunt M en straal r
2. Het punt B , zodat $MB = \frac{1}{4}r$
3. BC , zodat $\angle MBC = \frac{1}{4}\angle MBA$
4. $\angle CBD = 45^\circ$
5. E , het midden van DA
6. Cirkel met middelpunt E en straal EA , geeft punt F
7. Cirkel met middelpunt C en straal CF geeft de punten G en H
8. Loodlijnen in G en H geven de punten P en Q
9. De middelloodlijn van PQ geeft het punt R

RQ is de zijde van de regelmatige zeventienhoek.

Het bewijs hiervan geven we hier niet.

In de praktijk is er een grens aan de nauwkeurigheid, waarmee je de constructies kunt uitvoeren.

Wie begint met een cirkel en daarna de voorgeschreven constructievolgorde doorloopt, komt meestal bedrogen uit. Immers passer en liniaal, mét onze vingers en in onze vingers, zijn grove instrumenten. Maak de constructie van figuur 5 en figuur 6 eens en ga de gevonden lijnstukken binnen de cirkel afpassen. 't Klopt vrijwel nooit. Potlooddikte en andere onnauwkeurigheden spelen ons parten.

Wie wel eens feestversieringen heeft willen maken, waarbij de regelmatige veelhoeken een rol speelden, (ze leveren prachtige sterren op) komt allicht met de vraag:

Hoe kom ik handig, snel en goed aan een regelmatige veelhoek van een bepaalde grootte?

Liefst ook nog een regelmatige 7-, 9-, 11-, en 13-hoek.

Is er een oplossing?

Die is er.

We gaan een tabel opstellen, die één keer gemaakt, ons voor altijd ten dienste staat. Zie figuur 7.

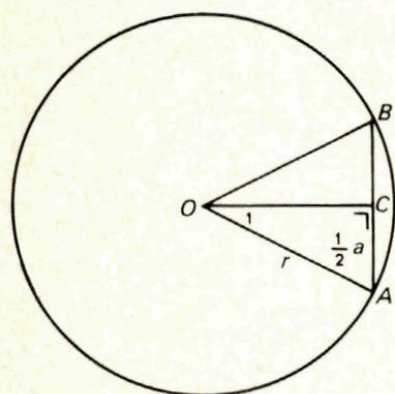


Fig.7

Stel $AB = a$, de zijde van de regelmatige n -hoek.

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\sin O_1 = \frac{AC}{OA} = \frac{\frac{1}{2}a}{r} = \frac{a}{2r}$$

$$\text{of } \frac{r}{a} = \frac{1}{2\sin O_1} = \frac{1}{2\sin \frac{180^\circ}{n}}$$

$$\text{neem } n = 3 \rightarrow \frac{r}{a} = \frac{1}{2\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1,7321} \approx 0,577$$

$$\text{neem } n = 4 \rightarrow \frac{r}{a} = \frac{1}{2\sin 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1,4142} \approx 0,707$$

Zo voortgaande ontstaat de tabel:

n	$r : a$	n	$r : a$	n	$r : a$
3	0,577	9	1,462	15	2,405
4	0,707	10	1,618	16	2,563
5	0,851	11	1,775	17	2,721
6	1,000	12	1,932	18	2,879
7	1,152	13	2,089	19	3,038
8	1,307	14	2,247	20	3,196

Hoe moet je nu deze tabel gebruiken?

Stel je wenst een regelmatige 5-hoek met een zijde groot 10 cm. Dus $a = 10$. Zie in de tabel bij $n = 5$:

$$r : 10 = 0,851 \rightarrow r = 10 \times 0,851 \approx 8,5$$

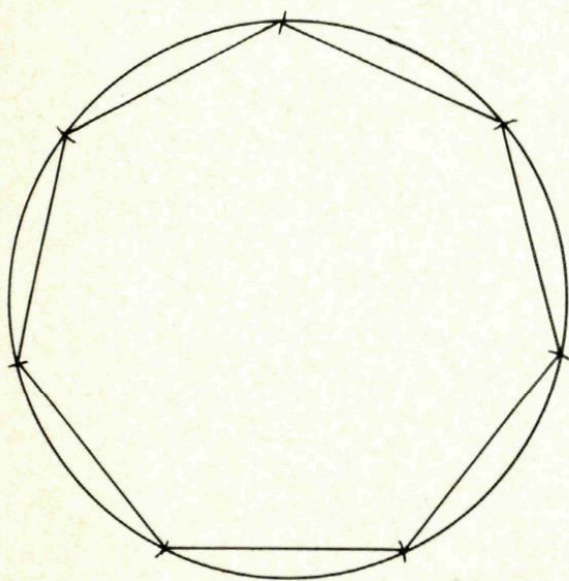


Fig. 8

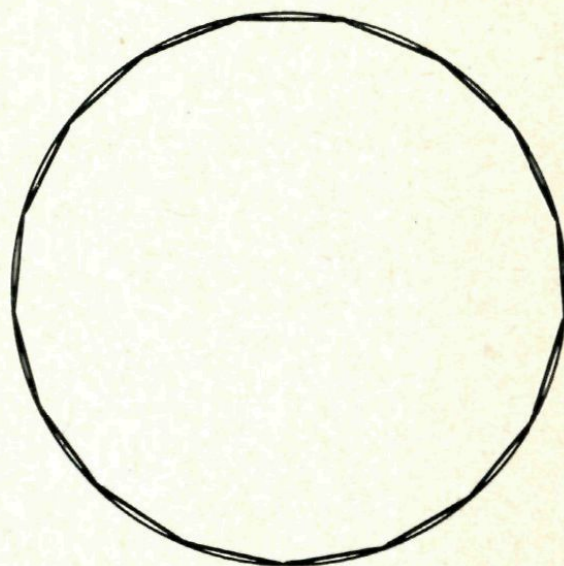


Fig. 9

Trek nu een cirkel met straal 8,5 en pas vijf keer de koorde 10 af.

Natuurlijk moet deze methode een benaderingsconstructie genoemd worden. Maar in de praktijk is deze werkwijze vlotter en nauwkeuriger dan de constructie van figuur 5.

De regelmatige zevenhoek met zijde 5, die wiskundig eigenlijk niet kan met passer en liniaal, wordt al even snel tevoorschijn getoverd: zie in de tabel bij $n = 7$.

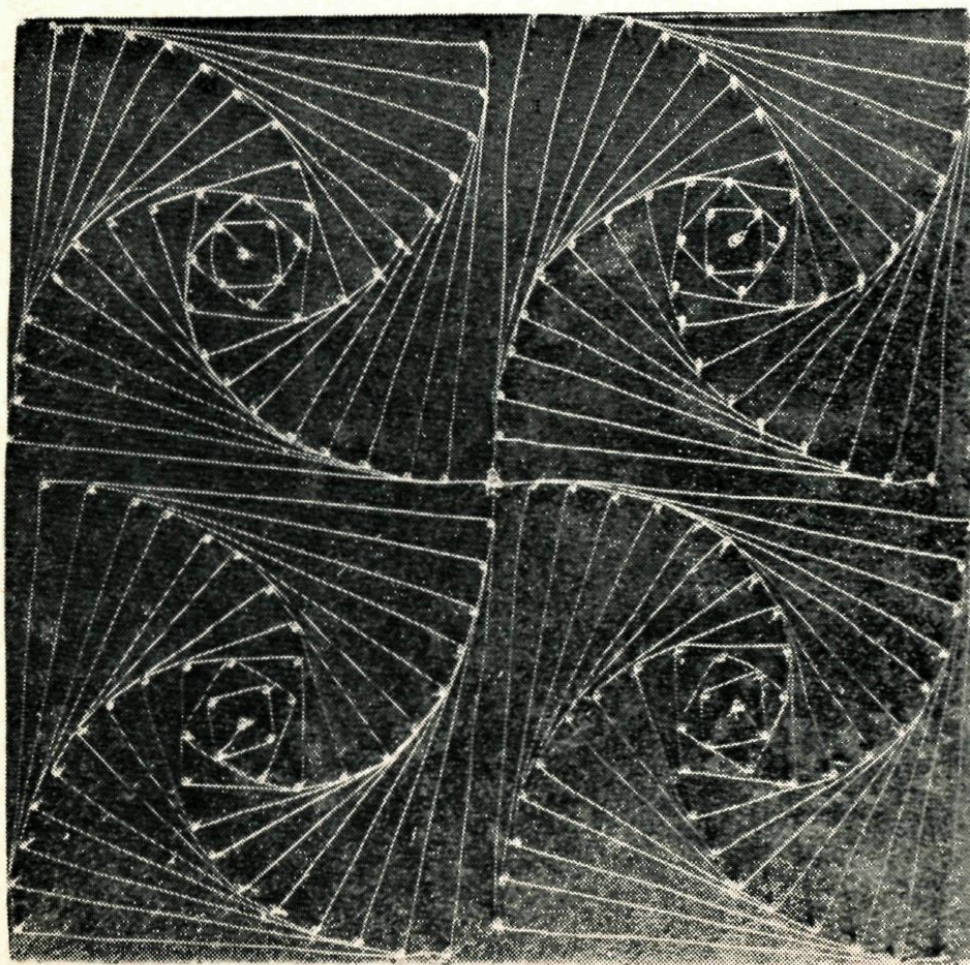
$$r : 5 = 1,152 \rightarrow r = 5 \times 1,152 = 5,760 \approx 5,8$$

Een cirkel met straal 6,8 en daarna koorde 5 zeven keer afpassen en hij is er.

Je zult nu zelf met andere regelmatige veelhoeken en gewenste maten geen moeite hebben. Neem de proef eens: Construeer a_{17} volgens de constructie van figuur 2 en volgens de methode met de tabel.

Ontdek dus zelf welke methode praktisch het snelst en het meest nauwkeurig is.

In figuur 8 zie je nog een regelmatige zevenhoek en in figuur 9 een regelmatige zeventienhoek.



„Van saai tot fraai”, draadconstructie van H.Meinders.

* Priemgetallen en functies

Op een paar onverwachte plaatsen komen in dit nummer de priemgetallen weer eens om de hoek kijken en wel bij het probleem van de construeerbaarheid van regelmatige veelhoeken, op bladzijde 128 en bij het probleem over het getallenpaar, op bladzijde 125. We zullen in het volgende zien, dat een functie van de natuurlijke getallen, waarvan alle functiewaarden priemgetallen zijn, niet mogelijk is.

Nog even voor de goede orde: Een priemgetal is een natuurlijk getal, groter dan 1, dat alleen zichzelf en 1 als delers heeft.

Hoe weet je of een getal een priemgetal is? Door te proberen of je het soms ergens door kunt delen. Natuurlijk is dit wiskundig weinig bevredigend, maar er is geen betere methode! Ook wat het opzoeken van priemgetallen betreft weet men niets beters te doen dan de zogenaamde *zeef van Erathostenes* te gebruiken, dat wil zeggen, men schrijft alle natuurlijke getallen tot zover men wil, op en begint dan te schrappen. Eerst de veelvouden van 2, dan die van 3 (2 en 3 zelf blijven staan) enzovoort. In de vorige jaargang op bladzijde 86 is dit gedaan voor de getallen tot 100, waarbij bleek dat er 25 priemgetallen onder de honderd zijn.

Er zijn een paar gehele rationale functies, die je de hoop zouden kunnen geven dat ze uitsluitend priemgetallen zouden *voortbrengen*. De eerste van deze functies (laten we zeggen: van de natuurlijke getallen) is $x \rightarrow x^2 - x + 41$.

Ga maar na:

$1 \rightarrow 41$	$5 \rightarrow 61$
$2 \rightarrow 43$	$6 \rightarrow 71$
$3 \rightarrow 47$	$7 \rightarrow 83$
$4 \rightarrow 53$	$8 \rightarrow 97$ enzovoort.

Al deze functiewaarden zijn priemgetallen.

Je kunt zo doorgaan tot 40:

$40 \rightarrow 1600 - 40 + 41 = 1601$ en dit is een priemgetal.

Maar dan: $41 \rightarrow 1681 - 41 + 41 = 41^2$ en dit is heel duidelijk geen priemgetal.

Nog langer gaat het goed met de functie

$$x \rightarrow x^2 - 79x + 1601$$

Deze begint bij: $1 \rightarrow 1 - 79 + 1601 = 1523$

$$2 \rightarrow 4 - 158 + 1601 = 1447$$

.....

tenslotte $79 \rightarrow 79^2 - 79 \cdot 79 + 1601 = 1601$, priemgetal

$$80 \rightarrow 80^2 - 79 \cdot 80 + 1601 = 1681 = 41^2$$

en weer loopt de zaak mis, merkwaardigerwijs op hetzelfde kwadraat als in het eerste geval.

Is het verwonderlijk dat de zaak mis loopt? Nee, dat is zelfs niet zo moeilijk te bewijzen.

Laten we nog eens nemen $x^2 - 79x + 1601$.

Stel dat deze functie voor het argument k als functiewaarde $k^2 - 79k + 1601 = p$ oplevert, waarbij p priemgetal is. Wat wordt nu de functiewaarde voor het argument $k + p$?

Wel, dit wordt $(k + p)^2 - 79(k + p) + 1601 =$

$$k^2 + 2kp + p^2 - 79k - 79p + 1601 =$$

$$k^2 - 79k + 1601 + 2kp + p^2 - 79p =$$

$$\underbrace{k^2 - 79k + 1601}_p + 2kp + p^2 - 79p =$$

$$p(2k + p - 78).$$

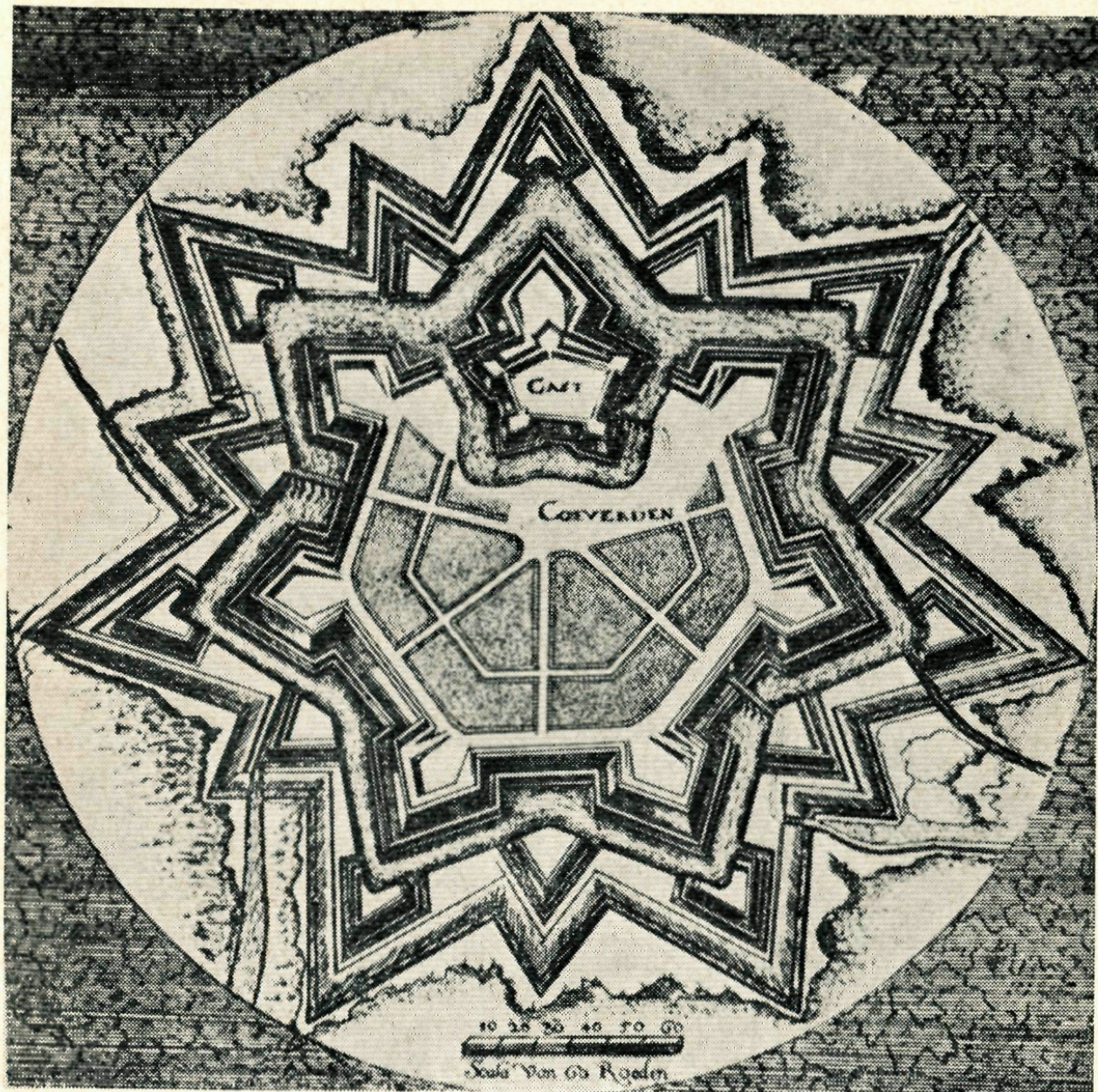
En dit is geen priemgetal, het bevat immers als deler p . Op dezelfde manier kun je dit bewijs geven voor iedere andere gehele rationale functie van de natuurlijke getallen, waarvan je mocht denken, dat er louter priemgetallen uit rollen. Jammer, maar het bewijs op zichzelf is aardig en dat vergoedt weer wat.



2. In de rij 10, 12, 15, 20, 30, 60 is elk van de vier „binnenste” getallen 12, 15, 20, 30 het harmonisch gemiddelde van zijn twee burens. Is het mogelijk een oneindig voortlopende rij verschillende natuurlijke getallen te bepalen, waarin elk getal (behalve het eerste) het harmonisch gemiddelde van zijn twee burens is? (vraagstuk van een Hongaarse wedstrijd uit 1968).

3. In een plat vlak zijn vier punten gegeven, die niet op een rechte lijn liggen en ook niet op een cirkel liggen. Hoeveel cirkels zijn er in dat vlak, waar die vier punten even grote afstanden toe hebben?

4. Bestaan er twee driehoeken zo, dat de zijden van elke driehoek in de een of andere volgorde gelijk zijn aan de hoogtelijnen van de andere?



De vesting Coevorden werd omstreeks 1600 herbouwd volgens de nieuwste opvattingen op dit gebied. De hierboven afgedrukte plattegrond toont overduidelijk, dat de regelmatige zevenhoek als grondpatroon voor de vesting diende. De zeven bolwerken van de vesting werden genoemd naar de zeven provinciën: Groningen, Gelderland, Holland, Utrecht, Zeeland, Friesland en Overijssel. Na de bouw werd de vesting beschouwd als één van de sterkste van West-Europa.

Nogmaals de twee problemen

°° De superspinneweg

Het is niet moeilijk te zien dat de in figuur 1 getekende weg 42 cm lang is, 1 cm naar boven, 30 cm langs de bovenwand en dan nog 11 cm naar beneden.

Deze weg wordt een rechte lijn, wanneer de doos langs een aantal ribben wordt opengesneden en de voor- en achterwand langs EF en GH naar boven worden gevouwen.

Dit opensnijden van de doos (het maken van een uitslag) is ook de sleutel die de verklaring geeft voor de andere wegen. In het geval van figuur 2 worden voor- en achterwand langs BF en CG naar rechts gevouwen. Als daarna de hele zijkant wordt neergeslagen, ontstaat de situatie van figuur 10. De weg wordt nu gevormd door het lijnstuk SV .

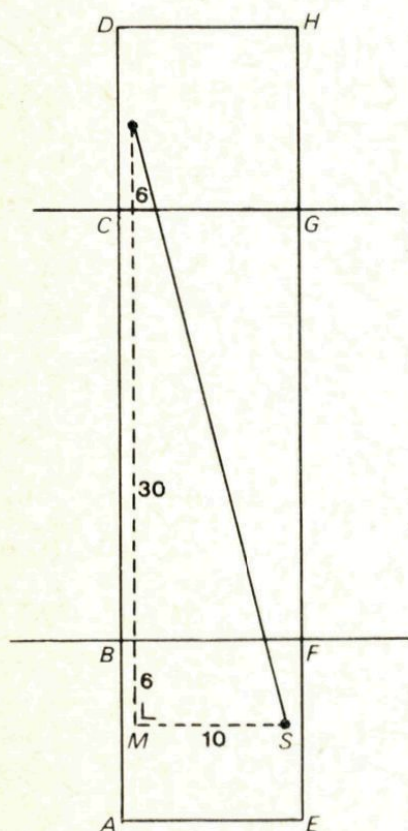


Fig. 10

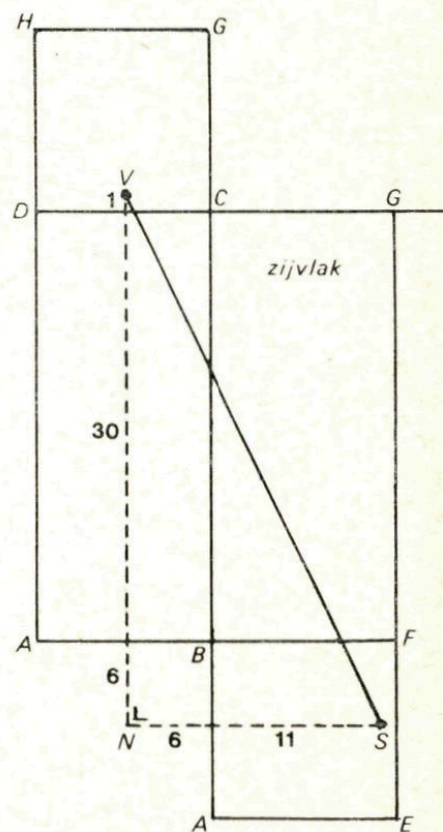


Fig. 11

Daar $VM = 6 + 30 + 6 = 42$ cm, blijkt direct dat $SV > 42$ cm is. Deze weg is dus langer dan die van figuur 1.

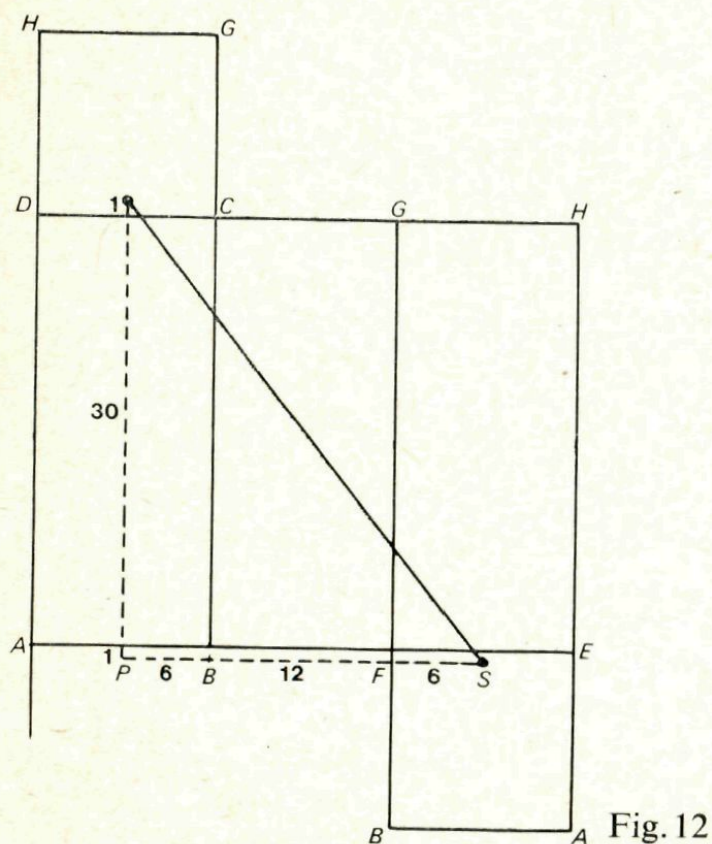
De uitslag van figuur 11 hoort bij de weg van figuur 3.

Met de stelling van Pythagoras blijkt:

$$\begin{aligned} SV^2 &= SN^2 + NV^2 \\ &= 37^2 + 17^2 = 1369 + 289 = 1658 \\ SV &= \sqrt{1658} \approx 40,7 \text{ cm} \end{aligned}$$

Tenslotte in figuur 12 de uitslag die hoort bij de weg van figuur 4. Hier blijkt:

$$\begin{aligned} SV^2 &= SP^2 + PV^2 = 32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 \\ SV &= 40 \text{ cm} \end{aligned}$$



Waarmee gebleken is dat de weg langs het grootste aantal wanden de kortste is van de vier getekende en dit is de weg die door de spin werd gekozen.

°° Het getallenpaar

We hebben gezien dat uit de eerste uitspraak van Piet blijkt dat het getallenpaar niet bestaat uit twee priemgetallen. Uit de reactie van Simon blijkt nu dat de som *niet* een getal kan zijn, dat gesplitst *kan* worden in twee priemgetallen.

Stel even $s = 18$, dan *zou* het getallenpaar kunnen bestaan uit 7 en 11, maar we hebben al gezien dat dit niet het geval is. Daar Simon dit kennelijk bij *voorbaat* wist, moeten we concluderen dat elk getal, dat geschreven kan worden als som van twee priemgetallen, *niet* s kan zijn. Dit is een belangrijke conclusie, want hierdoor blijven alleen de volgende getallen over, die aan Simon meegedeeld kunnen zijn:

11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51, 53, 57, 59, 63, 65, 67, 71, 77, 79, 83, 87, 89, 93, 95, 97.

We gaan verder! In $p = 212 = 2 \cdot 2 \cdot 53$ schuilt slechts één mogelijkheid namelijk 4 en 53, immers de andere tweedeling 2 en 106 levert een getallenpaar waarvan de som groter is dan 100 en dit is uitgesloten. Uit de eerste reactie van S. volgt dus, dat uit de lijst van mogelijke s waarden het getal 57 geschrapt kan worden. Uit dit voorbeeld volgt, dat zelfs alle getallen geschrapt moeten worden die een p waarde *kunnen* opleveren waarvan alle tweedelingen op één na in strijd komen met $s \leq 100$. Dit zijn alle getallen na 53, immers:

$s = 57$ herbergt $p = 4 \cdot 53$	$s = 79$ „ $p = 6 \cdot 73$
$s = 59$ „ $p = 6 \cdot 53$	$s = 83$ „ $p = 10 \cdot 73$
$s = 63$ „ $p = 10 \cdot 53$	$s = 87$ „ $p = 4 \cdot 83$
$s = 65$ „ $p = 6 \cdot 59$	$s = 89$ „ $p = 10 \cdot 79$
$s = 67$ „ $p = 6 \cdot 61$	$s = 93$ „ $p = 10 \cdot 83$
$s = 71$ „ $p = 10 \cdot 61$	$s = 95$ „ $p = 6 \cdot 89$
$s = 77$ „ $p = 6 \cdot 71$	$s = 97$ „ $p = 8 \cdot 89$

Mogelijkheden voor s zijn dus na deze eliminatie:

(A) 11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51, 53.

De tweede ronde:

Het getal waarover S. beschikt mag slechts op één manier een p waarde opleveren waaruit P. ondubbelzinnig het getallenpaar kan afleiden. Hierdoor vervalt bijvoorbeeld $s = 11$, want deze s waarde herbergt behalve $p = 4 \cdot 7$ ook $p = 8 \cdot 3$. Beide p waarden stellen P. in staat het probleem op te lossen, maar S. blijft in de mist zitten!

Vervallen moeten ook:

$s = 23$ wegens bijv. $p = 4 \cdot 19$ en $p = 16 \cdot 7$
$s = 27$ „ „ $p = 4 \cdot 23$ en $p = 16 \cdot 11$
$s = 29$ „ „ $p = 16 \cdot 13$ en $p = 6 \cdot 23$

$s = 35$	„	„	$p = 4 \cdot 31$ en $p = 6 \cdot 29$
$s = 37$	„	„	$p = 8 \cdot 29$ en $p = 6 \cdot 31$
$s = 41$	„	„	$p = 4 \cdot 37$ en $p = 32 \cdot 9$
$s = 47$	„	„	$p = 4 \cdot 43$ en $p = 6 \cdot 41$
$s = 51$	„	„	$p = 4 \cdot 47$ en $p = 32 \cdot 19$
$s = 53$	„	„	$p = 16 \cdot 37$ en $p = 6 \cdot 47$

Resteert dus alleen het getal $s = 17$ d.w.z. de getallenparen:

2, 15 4, 13 6, 11 8, 9 10, 7 12, 5 14, 3

die overeenkomen met de p waarden

30, 52, 66, 72, 70, 60 resp. 42

Na de eerste reactie van S. beschikt P. behalve over p óók over de getallen (A). Omdat zijn tweede opmerking luidt: „Nu weet ik het” moet $p = 30$ worden uitgesloten, immers binnen deze getallen kan deze p waarde betekenen

2, 15 of 5, 6

Eveneens vervallen

$p = 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$	wegens 2, 33 of 6, 11
$p = 72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$	wegens 8, 9 of 3, 24
$p = 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$	wegens 2, 35 of 7, 10
$p = 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$	wegens 5, 12 of 3, 20
$p = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$	wegens 2, 21 of 3, 14

De enige mogelijkheid $s = 17$ leidt dus naar de enige mogelijkheid $p = 52$ d.w.z. naar de getallen

4 en 13

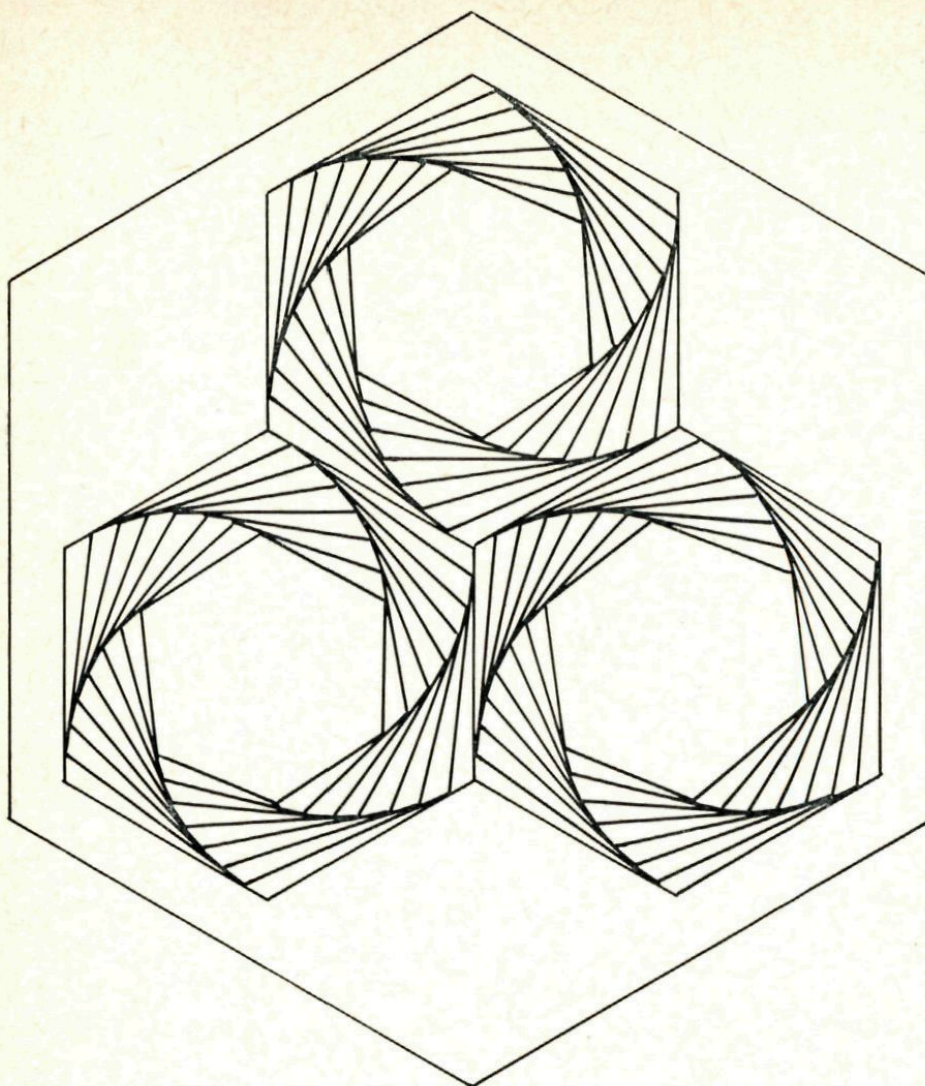
Een korte controleproef toont aan dat het getallenpaar 4, 13 aan alle eisen van het vraagstuk voldoet.

In de oplossing van dit vraagstuk schuilt een probleem, dat de wiskundigen al eeuwen lang bezig houdt en bekend staat als *het vermoeden van Goldbach*:

Is elk even natuurlijk getal te schrijven als de som van twee priemgetallen?

Door eenvoudig alle tweedelingen van de even natuurlijke getallen t.m. 100 op te schrijven lijkt dit vermoeden bijna vanzelfsprekend juist te zijn, sterker nog er is nog nooit een even natuurlijk getal gevonden dat niet te schrijven is als de som van twee priemgetallen; een definitief antwoord zal nog wel even op zich laten wachten.

Het probleem over het getallenpaar is van prof. dr. H. Freudenthal afkomstig en gepubliceerd in het *Nieuw Archief voor Wiskunde*.



"Van saai tot fraai", figuur ingezonden door K.Ramaker, Rotterdam.

° Een meetkundig beest

Teken in een coördinatenstelsel de lijnen die horen bij de onderstaande vergelijkingen. Teken ze heel dun en maak dan de gedeelten tussen de ernaast aangegeven grenzen dikker. Het resultaat is een meetkundig beest.

$$y = \frac{x}{2} + 11 \qquad 4 \leq x \leq 8$$

$$y = 2x - 1 \qquad 8 \leq x \leq 9$$

$$y = -7x + 80 \qquad 9 \leq x \leq 10$$

$$y = 10 \qquad 10 \leq x \leq 16$$

$$y = x - 6 \qquad 16 \leq x \leq 18$$

$$y = -2x + 21 \qquad 4 \leq x \leq 5$$

$$y = \frac{x}{3} + \frac{28}{3} \qquad 5 \leq x \leq 8$$

$y = -6x + 60$	$8 \leq x \leq 10$
$y = 6$	$11 \leq x \leq 15$
$y = 6x - 96$	$16 \leq x \leq 18$
$y = \frac{2}{5}x + \frac{51}{5}$	$\frac{9}{2} \leq x \leq 7$
$y = -6x + 72$	$11 \leq x \leq 12$
$y = 6x - 84$	$14 \leq x \leq 15$
$y = 14$	$x = 8$



Oplossingen Denkertjes in dit nummer

1. a. $\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$ is duidelijk positief.

b. Het gemiddelde van de uiterste getallen $\frac{1}{n+1}$ en $\frac{1}{3n+1}$ is groter dan hun harmonisch gemiddelde $\frac{1}{2n+1}$. Dit geldt ook voor het gemiddelde van de twee daar onmiddellijk naast staande getallen $\frac{1}{n^2}$ en $\frac{1}{3n}$, voor dat van $\frac{1}{n+3}$ en $\frac{1}{3n-1}$, enzovoorts.

c. Volgens b geldt:

$$\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{7} > 1; \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{22} > 1, \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{67} > L.$$

Optellen hiervan levert $\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{67} > 3$ en dus $\frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{67} > 4\frac{1}{2}$.

d. Kies een geheel getal p , dat groter is dan a en schakel dan, evenals in c, een p -tal rijen achter elkaar, die elk een som hebben die groter dan 1 is.

2. Het harmonisch gemiddelde van twee positieve getallen ligt *tussen* die getallen. Als zo'n rij bestaat zal het dus of een dalende of een stijgende rij moeten zijn. Oneindig voortlopende dalende rijen natuurlijke getallen bestaan niet, zodat we alleen nog maar met stijgende rijen rekening hebben te houden. Maar ook daarmee lopen we vast, omdat de omgekeerden van die getallen een dalende rekenkundige rij moeten vormen met louter positieve termen, en dat is ook al onmogelijk.

3. De vier punten, laten we ze A, B, C, D noemen, kunnen niet allemaal binnen of allemaal buiten zo'n cirkel liggen omdat ze zelf niet op een cirkel liggen. We verdelen het viertal dus in tweegroepen en dat kan op 7 manieren: $A + BCD, B + ACD, C + ABD, D + ABC, AB + CD, AC + BD, AD + BC$.

Bij elke $(1 + 3)$ -verdeling is er één zo'n cirkel te maken, concentrisch met de omgeschreven cirkel van het drietal. Dit is gemakkelijk in te zien.

Bij een $(2 + 2)$ -verdeling construeren we de door de twee paren bepaalde middelloodlijnen. Snijden die elkaar, dan kunnen we met dat snijpunt als middelpunt zo'n cirkel maken; samenvallen kunnen de middelloodlijnen niet omdat de vier punten niet op een cirkel of rechte lijn liggen. En als ze evenwijdig zijn, dan moeten we het zonder cirkel stellen; dit ongeluk kan ons bij een of twee van de $(2 + 2)$ -verdelingen gebeuren, maar niet bij alle drie.

Conclusie: het aantal cirkels kan 5, 6 of 7 bedragen.

4. Laten we eens aannemen, dat er twee zulke driehoeken bestaan. De zijden van de eerste driehoek zullen we a, b, c noemen en de hoogtelijnen x, y, z ; daarbij is x de lengte van de hoogtelijn, die loodrecht staat op de zijde met lengte a , enzovoorts.

De zijden van de tweede driehoek zijn dan dus x, y, z . En diens hoogtelijnen noemen we p, q, r ; daarbij is p de lengte van de hoogtelijn die loodrecht op de zijde met lengte x staat, enzovoorts. De getallen p, q, r zijn dus in de een of andere volgorde gelijk aan a, b, c .

Door de oppervlakten van de twee driehoeken te bekijken vinden we $ax = by = cz$ en $px = qy = rz$. Daaruit leiden we af $p = a, q = b, r = c$.

Nu is $\frac{y}{a}$ de sinus van een van de hoeken van de eerste driehoek en $\frac{a}{y}$ is de sinus van een hoek van de tweede driehoek. Deze twee sinussen zijn elkaars omgekeerde. Dat kan echter alleen als die twee hoeken allebei recht zijn, want anders zou een van die sinussen groter dan 1 moeten zijn. Ook voor de andere hoeken van die twee driehoeken zou moeten gelden dat ze recht zijn, op dezelfde manier te beredeneren. Dit nu is pertinent onmogelijk.
Conclusie: zulke driehoeken bestaan *niet*.

Oplossingen Denkertjes uit het vierde nummer

31. Anders rangschikken, dat is de kunst:

$$\begin{aligned} & (200^2 - 100^2) + (199^2 - 99^2) + \dots + (101^2 - 1^2) = \\ & 100 \cdot 300 + 100 \cdot 298 + \dots + 100 \cdot 102 = \\ & 100(300 + 298 + \dots + 102) = 100 \cdot 50 \cdot 402 = 2010000 \end{aligned}$$

32. De lengte van de plank was $300 - 8\sqrt{3}$ centimeters en dat is ongeveer 286,14 cm. Figuur 13 toont (niet op schaal) hoe de bak in elkaar gezet moet worden.

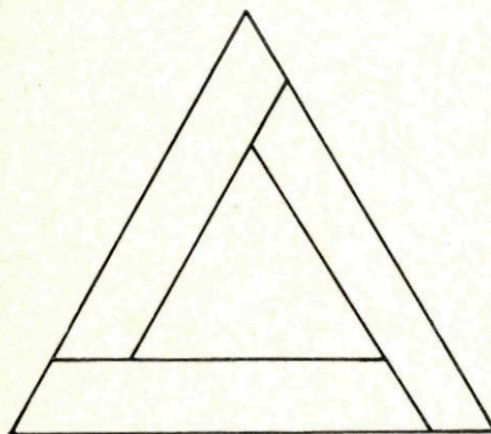
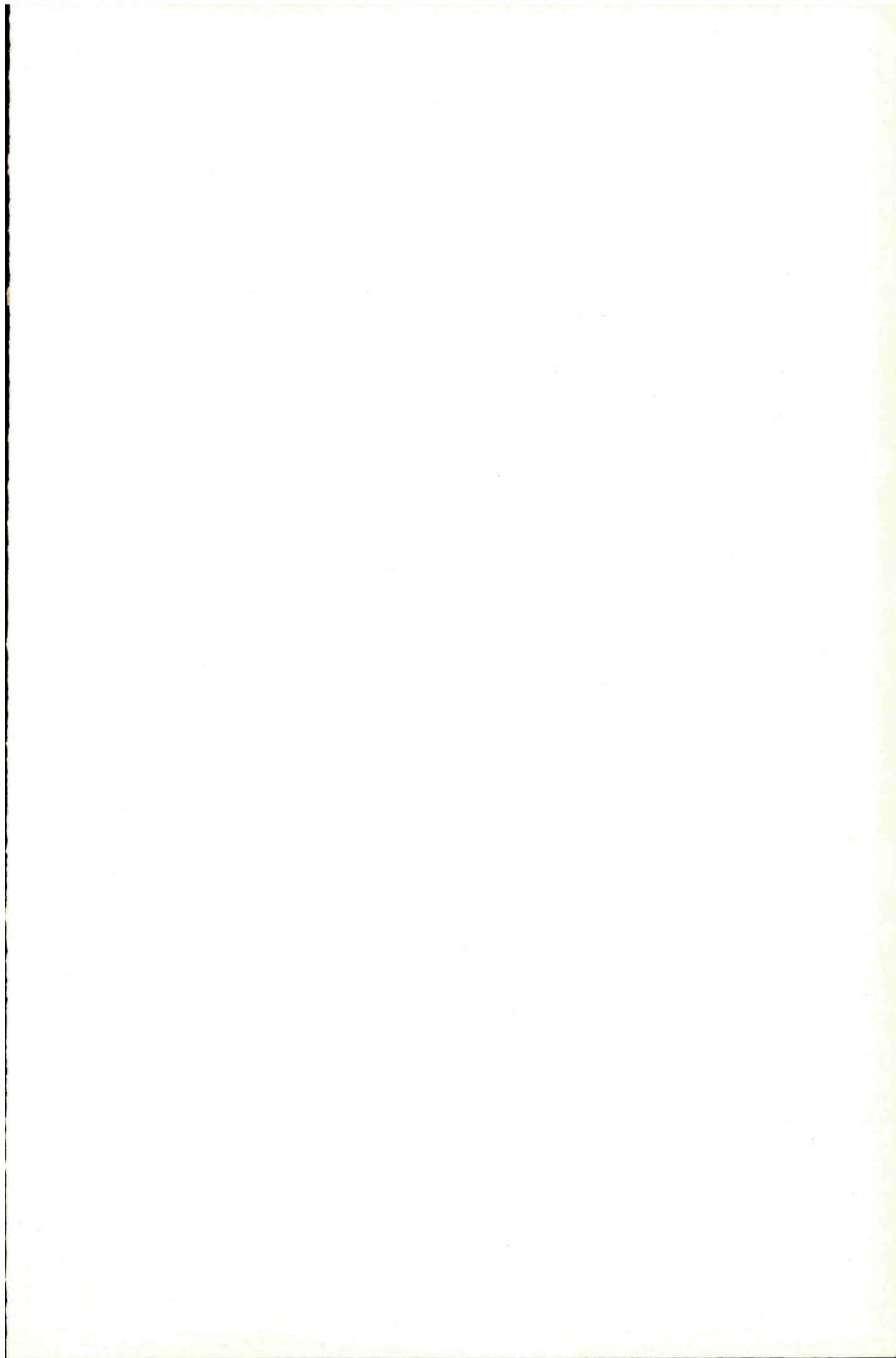


Fig. 13

33. In de opgave stond een drukfout. Er had moeten staan: of een 1, of een 2, of een 3. Het antwoord is 1776.
34. Het omsloten gebied is te verdelen in drie rechthoeken met een hoogte van 10 meter, beschreven op de zijden van de driehoek, en drie cirkelsectoren met een straal van 10 meter. De middelpuntshoeken van die sectoren zijn samen 360° . Noemen we de lengte van de omheining L en de omtrek van de driehoekige vijver p , dan weten we dus:
$$L = p + 20\pi \text{ en } 1314 = 10p + 100\pi$$

Hieruit volgt $L = 131,4 + 10\pi$ meter en dat is ongeveer 162,8 meter.
35. Door stelselmatig te proberen en een paar slimmigheden te gebruiken vonden wij in een paar minuten het volgende stelsel oplossingen: 31,6,2; 30,10,1; 29,12,4; 27,16,4; 26,18,1; 26,17,6; 26,15,10; 24,20,5; 24,19,8; 24,16,13. De slimmigheden zijn de volgende: een viervoud plus twee en een viervoud plus drie kunnen niet als som van twee kwadraten geschreven worden, een viervoud kan niet als som van twee oneven kwadraten geschreven worden.
36. De gelijkzijdige driehoeken en de gelijkbenige, waarvan de tophoek stomp of recht is. De in de opgave genoemde eigenschap is gelijkwaardig met: het is niet mogelijk de driehoek zo in twee driehoekige stukken te knippen dat een van die stukken gelijkbenig is.
37. $54 \cdot 297 = 16038$ is de enige oplossing.
38. Uit de tweede vergelijking volgt dat de absolute waarden van x, y, z niet groter dan 1 kunnen zijn. Hieruit concluderen we tot $x^3 \leq x^2$ en $y^3 \leq y^2$ en $z^3 \leq z^2$, waarin de gelijkttekens alleen kunnen optreden als beide leden gelijk zijn aan 0 of 1. Wegens $x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2$ moeten x, y, z dus elk 0 of 1 zijn. Zo vinden we verder gemakkelijk dat er geen andere oplossingen zijn dan (1,0,0) en (0,1,0) en (0,0,1).
39. Noem de zijde van het vierkant z , de straal van de sector r en de middelpuntshoek van de sector φ radialen. Dan luiden de gegevens $4z = 2r + 2\varphi$ en $a^2 = \frac{1}{2}\varphi r^2$. Hieruit lossen we op $a = r$ en $\varphi = 2$.
40. Noem de som van de eenheden van het eerste rijtje e en de som van de tientallen van het eerste rijtje t . Dan zijn de twee sommen $10t + e$ en $10e + t$ en we weten dus dat $10e + t = 2(10t + e)$, dus dat $8e = 19t$. Omdat t en e geheel en niet groter dan 36 zijn volgt hieruit $e = 19$ en $t = 8$. De sommen zijn dus 99 en 198.



Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.
BRUNO ERNST, Scherpenzeel (Gld.).
C. VAN DER LINDEN, Barendrecht.
A. F. VAN TOOREN, Den Haag.
R. H. PLUGGE, Amstelveen.
G. A. VONK, Den Haag.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Eelde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 2,60 per jaargang. Voor anderen f 4,16.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff NV, Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.